

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

LA SONRISA DE NEWTON

ESTADO DEL ARTE SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA
GEOMETRÍA FRACTAL EN LA ESCUELA
SECUNDARIA

INVESTIGACIÓN

EL PROBLEMA DE BASILEA: UN PARADIGMA
PARA ENSEÑAR A TRAVÉS DE LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ESTADÍSTICA MULTIVARIANTE APLICADA AL
ANÁLISIS Y PREDICCIÓN DE PARTIDOS DE
FÚTBOL EN LAS PRINCIPALES LIGAS
EUROPEAS

APLICACIÓN DEL LÁSER ESCÁNER TERRESTRE
(TLS) Y DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA LA
MODELIZACIÓN DE CONOS DE DERRUBIOS EN
LA ALTA MONTAÑA TEMPLADA

JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

SUDOKURBANO



EXPERIENCIAS DOCENTES

LECTURA E INTERPRETACIÓN DE UNA
REPRESENTACIÓN GRÁFICA
ENGAÑOSA

APRENDIENDO A MODELIZAR CON
GRAFOS

CUENTOS MATEMÁTICOS

EL VALOR DE LA X

CRÍTICAS Y RESEÑAS

EXPOSICIÓN 300 ANIVERSARIO DE
LA ACADEMIA DE MATEMÁTICAS DE
BARCELONA

ENTREVISTA A:

ALEJANDRO ZARZO Y
FERNANDO SAN JOSÉ:
"GRADO EN MATEMÁTICAS
POR LA UPM"

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen XI, Número 2, octubre 2021

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC

Diseño de portada/ GIE PM

Maquetación / Sagrario Lantarón, Mariló López, Santiago Higuera

Universidad Politécnica de Madrid

Se admite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato, incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

y

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid

Volumen XI, Número 2, ISSN 2174-0410



Coordinación Comité Editorial

Mariló López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Javier Rodrigo Hitos

José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Santiago Higuera de Frutos, Fernando Chamizo Lorente, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Trinidad Menárguez Palanca, María Isabel Garrido Carballo, Luigi Montoro, María Medina de la Torre, Susana Merchán Rubira

1 de octubre de 2021

Índice de Artículos

Editorial de Número 2 (Vol. XI)..... 1

Investigación

El problema de Basilea: un paradigma para enseñar a través de la resolución de problemas . 5

Carlos M. Falcón-Rodríguez, Jarlyn J. Díaz Peralta, Ribelly Estrella Salazar y Marileidy Bonilla Núñez

Estadística multivariante aplicada al análisis y predicción de partidos de fútbol en las principales ligas europeas..... 21

Pedro J. Chocano y Elena Castilla

Aplicación del Láser Escáner Terrestre (TLS) y de modelos matemáticos para la modelización de conos de derrubios en la alta montaña templada 31

José Juan de Sanjosé Blasco, Mariló López-González, Estrella Alonso-Pérez y Enrique Serrano

Experiencias Docentes

Lectura e interpretación de una representación gráfica engañosa 47

Carla Santos y Cristina Dias

Aprendiendo a modelizar con grafos 55

Cristina Jordán Lluch y Esther Sanabria Codesal

Historias de Matemáticas

La sonrisa de Newton 67

Danilo Magistrali

Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria..... 75

María Victoria Artigue, María de los Ángeles Fanaro y Eduardo Lacués

Juegos y Rarezas Matemáticas

SudokUrbano 93

Rafael Rivera Herráez y Macarena Trujillo Guillén

Cuentos

El valor de la x 105

Luis Balbuena Castellano

Críticas y Reseñas

Exposición 300 aniversario de la Academia de Matemáticas de Barcelona 111

Equipo Editorial

Entrevistas

Alejandro Zarzo y Fernando San José. Grado en Matemáticas por la UPM 113

Editorial del Número 2 (Volumen XI)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 001-004, ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2021

Resumen

Este es el segundo número del volumen XI de la Revista del año 2021. Parece que comenzamos a ver el final del túnel generado por la pandemia. Este esperado final se está encarrilando gracias a la ciencia que, con la vacuna, está permitiendo volver poco a poco a la vida a la que estamos acostumbrados.

Pensamiento Matemático sigue su tarea publicando trabajos interesantes distribuidos en sus diferentes secciones.

Abstract

This is the second number of volume XI of the Journal. It seems that we are beginning to see the end of the tunnel generated by the pandemic. This long-awaited end is getting on track thanks to science that, with the vaccine, is allowing us to return little by little to the life to which we are accustomed.

Pensamiento Matemático continues its task by publishing interesting works distributed in its different sections.

Introducción

En este segundo volumen del año 2021 se incluyen artículos muy variados e interesantes, con numerosas aplicaciones de las matemáticas a diferentes campos, juegos curiosos y experiencias originales que estamos seguros os interesarán.

Investigación

El problema de Basilea: un paradigma para enseñar a través de la resolución de problemas, recrea la historia y conexiones del problema de Basilea ofreciendo una visión diferente del problema en su relación con la teoría de números y las probabilidades.

Estadística multivariante aplicada al análisis y predicción de partidos de fútbol en las principales ligas europeas usa técnicas clásicas de estadística multivariante como es el análisis de las componentes principales y la regresión logística para determinar los factores que más influyen en la predicción de resultados en partidos de fútbol de las principales ligas europeas.

Un estudio interesante que se aplica sobre un tema de gran interés para un número elevado de personas.

Aplicación del Láser Escáner Terrestre (TLS) y de modelos matemáticos para la modelización de conos de derrubios en la alta montaña templada. En este artículo se analizan dos conos de derrubios situados en la zona de “La Vueltona” en Picos de Europa. Se utilizan, entre otras, técnicas estadísticas que permiten conocer la evolución en un corto plazo de tiempo del comportamiento de los dos conos.

Experiencias Docentes

En la sección dedicada a compartir experiencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se publican los siguientes trabajos:

Lectura e interpretación de una representación gráfica engañosa. Se plantea la evidencia de que la comprensión de los gráficos es una tarea compleja para algunos ciudadanos. El trabajo realizado en este artículo nos brinda la oportunidad de adaptar los métodos y estrategias de enseñanza para responder adecuadamente a la necesidad de formar ciudadanos capaces de producir, decodificar y utilizar conscientemente información estadística en su vida personal, social y profesional.

En el artículo *Aprendiendo a modelizar con grafos se* presenta una actividad incluida en la evaluación de prácticas, cuyos contenidos están relacionados con la teoría de grafos y sus múltiples aplicaciones a problemas reales.



Historias de Matemáticas

Esta sección incluye estudios sobre Matemáticas y sus aplicaciones, así como artículos de historia de la Matemática y de los matemáticos.

La sonrisa de Newton. Lo más relevante de este trabajo es que se esboza un perfil de Newton como hombre además de como científico.

Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria. En este trabajo se propone recuperar la esencia matemática de esta geometría, presentándose la posibilidad de vincularse con otros saberes en la escuela secundaria. Se realiza una revisión bibliográfica de investigaciones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de elementos de la Geometría Fractal para la educación secundaria (12 a 17 años de edad).

Juegos y rarezas matemáticas

En este número se incluye un curioso trabajo que propone un interesante juego urbano.

SudokUrbano presenta un juego que aúna, entre otros, matemáticas y urbanismo. Está pensado para estudiantes de arquitectura y pretende poner en valor la interdisciplinariedad y la transversalidad entre materias, potenciar el trabajo en grupo, permitir practicar conceptos teóricos de las diferentes materias, ser una propuesta versátil que permite abarcar muchos contenidos y, sobre todo, ser un juego que divierta y motive.



Cuentos

El valor de la x. Durante el confinamiento, muchos profesionales se pusieron en marcha para entretener, motivar y seguir enseñando a la población. Ese fue el caso del autor de este relato. Entre otras propuestas nos ofreció este cuento teatralizado donde se comparan dos métodos de resolución de problemas.

Reseñas

Exposición 300 aniversario de la Academia de Matemáticas de Barcelona. En el año 2020 se celebró el 300 aniversario de la creación de la Real y Militar Academia de Matemáticas de Barcelona. Esta Academia se considera precursora de ciertas Academias Militares actuales, especialmente de las Academias de Ingenieros y Artillería del Ejército, así como de las Escuelas Técnicas Superiores de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Esta exposición ha sido una de las acciones realizadas para este aniversario.

Entrevistas

En la sección de entrevistas contamos con los profesores de la Universidad Politécnica de Madrid, Alejandro Zarzo y Fernando San José, que nos relatarán la puesta en marcha del *Grado en Matemáticas UPM* que abrió sus puertas el pasado 6 de septiembre.

Investigación

El problema de Basilea: un paradigma para enseñar a través de la resolución de problemas

The Basel problem: a paradigm for teaching through problem-solving

Carlos M. Falcón-Rodríguez, Jarlyn J. Díaz Peralta, Ribelly Estrella Salazar y Marileidy Bonilla Núñez

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 005-020, ISSN 2174-0410
Recepción: 25 May'21; Aceptación: 9 Jun'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En el presente trabajo, además de recrear la historia y conexiones del problema de Basilea, esto es, del hallazgo de la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, se ofrece una visión diferente del problema, en su relación con la teoría de números y las probabilidades, que podría evitar frecuentes errores relacionados con la independencia en probabilidad. Además, damos una nueva demostración elemental de que la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales es $\pi^2/6$. Los resultados anteriores permiten un acercamiento a estudiantes, incluso, de nivel medio.

Palabras Clave: Basilea, Función Zeta, Probabilidad, Primos Relativos.

Abstract

In this work, we recreate the history and connections of the Basel problem, that is, the finding of the sum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. In addition, we offer a different view of the problem and its relation to number theory and probability, which could avoid frequent mistakes related to independence in probability. Furthermore, we give a new elementary proof that the sum of the reciprocal of the squares of the natural numbers is $\pi^2/6$. This new approach to the problem paves the road for reaching more students, even at middle school level.

Keywords: Basel, Zeta Function, Probability, Relatively Prime Numbers.

1. Introducción

Cuando se aborda el simple problema de hallar la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots, \quad (1)$$

aparecen conexiones con diferentes partes de la matemática, algunas plasmadas por diferentes métodos de hallar dicha suma y otras por las aplicaciones que tiene el conocimiento de su valor. Los métodos de hallar la suma, si son aproximados, usan tecnicismos algebraicos y diferentes aspectos del análisis numérico. Si se trata de hallar el valor exacto de dicha suma, conocemos diferentes demostraciones que usan cálculo en una variable, análisis armónico, integración múltiple, teoría de las probabilidades [1, 5]. Incluso hay una demostración usando la fuerza de Coulomb en electrostática [8]. También existe una demostración elemental, que usa trigonometría y números complejos entre otros temas de matemática elemental. En la sección 3 damos una nueva demostración elemental, que usa la fórmula de la tangente del ángulo múltiple. Las aplicaciones más comunes, que usan el valor de (1) aparecen en teoría de números, y aparecen vinculadas a la Función Zeta de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (2)$$

conectando diferentes aspectos de divisibilidad y los números primos a la teoría de las probabilidades y el análisis complejo.

La aparición de la Función Zeta de Riemann significó una revolución en teoría de números, de hecho, es la clave fundamental de la denominada “hipótesis de Riemann”, quizás uno de los problemas matemáticos abiertos más importantes de toda la historia de las matemáticas [7].

Los trabajos de Euler descubren el origen de la relación de la función escrita en (2), con los números primos, a través de la llamada fórmula de Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \quad (3)$$

Además de lo anteriormente mencionado, el valor de la suma infinita, $\zeta(2)$, es $\pi^2/6$. Así, el número más afamado de nuestra cultura, queda ligado a la suma en cuestión y nuevas relaciones aparecen.

Fue el matemático italiano Pietro Mengoli, quien en 1644 plantea el problema de Basilea en la obra compuesta por tres libros "Novae Quadraturae Arithmeticae". En la misma, Mengoli demostró la convergencia y calculó la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \quad (4)$$

Esta serie es conocida como la serie de Mengoli y es un ejemplo clásico de serie telescópica.

Tras haber sido planteado el problema de Basilea, fueron muchos los matemáticos que intentaron resolverlo. Entre ellos está el británico John Wallis (1616-1703), quien logró aproximar el valor de la serie a 1.645, cometiendo un error menor que una milésima, en su obra "Arithmetica Infinitorum".

Luego, Gottfried W. Leibniz (1646-1716), conoce este problema en 1673, no extrañando que por ser mentor de varios miembros de la familia Bernoulli, sea él mismo quien se los muestre. De modo que, en 1689, Jakob Bernoulli (1645-1705), obtuvo algunos resultados sobre dicha serie. Uno de ellos es que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \quad (5)$$

con $k \geq 2$ cumplen que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2. \quad (6)$$

De modo que, la serie (1) es convergente y su suma es menor o igual a 2.

Luego de varios intentos infructuosos de encontrar un valor exacto para la serie planteada, aparece en el contexto del problema Leonhard Euler (1707-1783) en 1731. De hecho, el nombre de este problema se debe a que tanto Euler como los Bernoulli vivían en la ciudad de Basilea. Pero no fue sino hasta 1734 cuando Euler anunciaba la demostración del resultado definitivo, presentándolo originariamente en la Academia de San Petersburgo y varios años después publicado. Euler demostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (7)$$

El problema de Basilea se relaciona con otras áreas de la matemática, siendo un ejemplo la teoría de probabilidades, no solo porque se puede llegar al valor de la serie, $\pi^2/6$, usando una demostración que usa el cociente de variables aleatorias independientes con distribuciones semi-Cauchy, sino porque el número $1/\zeta(2)$ describe, de alguna forma, la probabilidad de que 2 números enteros positivos, elegidos al azar, sean primos relativos. En la próxima sección profundizamos en este punto.

2. Probabilidad de que dos enteros positivos aleatorios sean primos relativos

Trataremos de hallar “la probabilidad de que dos enteros positivos escogidos al azar sean primos relativos”. Las comillas en la oración anterior quieren destacar que, aunque la expresión parece enmarcada dentro del sentido común, matemáticamente demanda la existencia de una probabilidad en los naturales, gozando de alguna de las siguientes propiedades: iguales oportunidades de ser seleccionados, homogeneidad y/o uniformidad en la distribución de los pesos de probabilidad. Una probabilidad P , definida en $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ no puede darles iguales oportunidades a los naturales. Lo anterior es una consecuencia inmediata de que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} P(i) = 1 \right) \Rightarrow \left(\lim_{i \rightarrow \infty} P(i) = 0 \right). \quad (8)$$

Si tratamos de definir la probabilidad P en alguna subfamilia \mathcal{A} , de subconjuntos de \mathbb{N} , con menos elementos que el conjunto potencia $2^{\mathbb{N}}$, esta debe ser una σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{N} . Lo anterior significa que \mathcal{A} contiene a Φ . Si $A \in \mathcal{A}$ entonces el complemento de A también pertenece a \mathcal{A} . Por último, si los conjuntos A_1, A_2, A_3, \dots , pertenecen a \mathcal{A} entonces la unión numerable de ellos pertenece a \mathcal{A} . La estructura de σ -álgebra es la idónea para la definición de probabilidad, aunque a veces esta se define en un álgebra. La definición de un álgebra de subconjuntos de \mathbb{N} , es similar a la de la σ -álgebra, cambiando la unión numerable por unión finita.

Una σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{N} , que contenga a los conjuntos $\{kn: k \in \mathbb{N}\}$ con n natural, tendría que ser el conjunto potencia de \mathbb{N} . Como vimos anteriormente, esta σ -álgebra no admite una probabilidad en la que todos los naturales tengan igual peso de probabilidad, a causa de (8). Tampoco admite una probabilidad en la que la probabilidad de $\{kn: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/n$. Al final de este epígrafe demostraremos algo más general: No existe una probabilidad en la σ -álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la probabilidad de $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/p$, siendo ellos sucesos independientes. Lo anterior desacredita el uso formal de la palabra probabilidad en el epígrafe de esta sección, si no renunciamos al mínimo de homogeneidad de la misma.

Lo que se ha venido haciendo hasta el momento, para evitar las verdades enunciadas anteriormente, en esta sección, es usar la densidad uniforme con paso al límite. En $\{1, 2, \dots, n\}$ con la σ -álgebra de todos los subconjuntos, se define la probabilidad uniforme P_n :

$$\text{Para todo } x \in \{1, 2, \dots, n\}, P_n(\{x\}) = \frac{1}{n}. \quad (9)$$

En el producto cartesiano del espacio anterior por el mismo,

$$(\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}, 2^{\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}}, P_n \times P_n) \quad (10)$$

se halla la probabilidad del evento $\{(x, y): x \text{ es primo relativo a } y\}$. El hecho de que x y y son seleccionados aleatoriamente (se supone que con reemplazo), habla de la independencia de esas variables y justifica el espacio producto anterior. Llamamos δ_n a la probabilidad del evento $\{(x, y): x \text{ es primo relativo a } y\}$, y hallamos el límite de δ_n cuando n tiende a infinito. Si

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n, \quad (11)$$

entonces decimos que la probabilidad de que dos naturales, escogidos al azar, sean primos relativos es δ [9].

Otra forma de razonar es a través de las distribuciones de probabilidad,

$$p_s(n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \quad (12)$$

tomando límites cuando s tiende a 1 por la derecha [4].

Las formas anteriores de hallar la probabilidad de un suceso, como un límite de probabilidades bien establecidas, necesita mostrar el espacio de probabilidad de referencia. Tanto por la vía de la igualdad (11), como la (12) se llega a un mismo resultado para el suceso descrito en el epígrafe de esta sección. Esto no certifica el uso de la palabra probabilidad.

Vayamos ahora por otra vía diferente. Construiremos una sucesión de espacios de probabilidad $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_n, P_n)$, con un número creciente de sucesos, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, de forma tal que la probabilidad de un suceso cualquiera A , sea la misma para cualquier n , siempre que $P_n(A)$ tenga sentido. En este caso, las σ -álgebras, \mathcal{A}_n , contendrán cada vez más sucesos, todos ellos "periódicos", para de esta forma tender a la "homogeneidad en la distribución de los pesos de probabilidad".

Decimos que un conjunto A , de enteros positivos, es periódico, si existe un entero positivo p , tal que para todo k en \mathbb{N} se cumple

$$\{\{1, 2, \dots, p\} \cap A\} + kp = \{kp + 1, kp + 2, \dots, (k + 1)p\} \cap A \quad (13)$$

Si los conjuntos A y B tienen periodos p y q respectivamente, el mínimo común múltiplo de p y q es un período de ambos conjuntos. Esto evidencia que la unión, intersección y diferencia de conjuntos periódicos son conjuntos periódicos. El complemento de un conjunto periódico A , es periódico, ya que es la diferencia $\mathbb{N} \setminus A$.

El número natural p , que es el menor de todos los períodos del conjunto periódico A , lo llamaremos período básico. Todos los múltiplos del período básico son períodos de A . En caso de que tengamos los conjuntos periódicos A y B con periodos básicos p y q respectivamente, el período básico del resultado de cualquiera de las operaciones arriba mencionadas, es menor o igual que el mínimo común múltiplo de p y q .

Consideremos una cantidad finita de conjuntos periódicos: A_1, A_2, \dots, A_n . Sea \mathcal{A} el álgebra de conjuntos generada por ellos, es decir, la intersección de todas las familias de subconjuntos de \mathbb{N} , que contienen a Φ y todos los A_i , que además son cerradas para uniones finitas y complementos. Es fácil probar que, si p_1, p_2, \dots, p_n son los períodos básicos de A_1, A_2, \dots, A_n entonces \mathcal{A} es un subconjunto del álgebra de los subconjuntos periódicos con período igual al mínimo común múltiplo de p_1, p_2, \dots, p_n . Como consecuencia de lo anterior tenemos que \mathcal{A} es finita y las uniones numerables de elementos de \mathcal{A} , son uniones finitas. Concluimos que \mathcal{A} es una σ -álgebra.

Usando lo expuesto en el párrafo anterior, llamemos \mathcal{A}_n la σ -álgebra generada por los conjuntos periódicos, con período básico menor o igual a n . Sabemos que ella es igual al álgebra de conjuntos generada por los conjuntos periódicos, con período básico menor o igual a n y que está incluida en el álgebra de los conjuntos periódicos con período básico igual al mínimo común múltiplo de $1, 2, 3, \dots, n$. Llamemos m_n al mínimo común múltiplo de $1, 2, 3, \dots, n$. Para $A \in \mathcal{A}_n$, definimos

$$P_n(A) = \frac{\#(A \cap \{1, 2, \dots, m_n\})}{m_n}, \tag{14}$$

donde $\#(B)$ significa el cardinal del conjunto B . Tenemos que $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_n, P_n)$ es un espacio de probabilidad para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil concluir que si $n < m$ entonces $\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_m$ y $(P_m / \mathcal{A}_n) = P_n$. La notación (P_m / \mathcal{A}_n) representa la restricción de P_m a \mathcal{A}_n .

Lema 1. Sean n_1, n_2, \dots, n_l naturales y sean $A_i = \{kn_i : k \in \mathbb{N}\}, i = 1, 2, \dots, l$. Llamemos n al $mcm(n_1, n_2, \dots, n_l)$. Para $m \geq n$ se cumple:

- i. $P_m(A_i) = \frac{\#(A_i \cap \{1, 2, \dots, m\})}{m} = \frac{1}{n_i}$
- ii. En el espacio $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_m, P_m)$, los eventos $A_i = \{kn_i : k \in \mathbb{N}\}$ son independientes si solo si n_1, n_2, \dots, n_l son primos relativos a pares.

Prueba.

La afirmación (i) es consecuencia de $n = h_i \times n_i$ y $\#(A_i \cap \{1, 2, \dots, n\}) = h_i$.

Para probar (ii) tomemos $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, l\}$. Se cumple que

$$\frac{\#((A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n} = \frac{n}{mcm(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_m})} \times \frac{1}{n}. \tag{15}$$

Tenemos entonces que la igualdad

$$\frac{\#((A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n} = \frac{1}{n_{i_1}} \times \frac{1}{n_{i_2}} \times \dots \times \frac{1}{n_{i_m}}, \tag{16}$$

es válida si y solo si para toda familia $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, l\}$,

$$mcm(n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_m}) = n_{i_1} \times n_{i_2} \times \dots \times n_{i_m}. \quad (17)$$

Es decir, los sucesos A_i son independientes si y solo si n_1, n_2, \dots, n_l son primos relativos a pares. ■

En lo que sigue p_i denotará el i -ésimo número primo.

Consideremos ahora los conjuntos periódicos $A_i = \{kp_i: k \in \mathbb{N}\}$, $1 \leq i \leq m$, y $p_m \leq n$, en el espacio $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_n, P_n)$. Por el lema 1, los sucesos A_i son independientes y así lo serán sus complementos. En el espacio de probabilidad producto,

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n, P_n \times P_n), \quad (18)$$

donde la variable genérica de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es (x, y) , los sucesos

$$\{x \in A_i\}, \{y \in A_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (19)$$

son independientes, y como una consecuencia de esto también serán independientes

$$\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (20)$$

y

$$(\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\})^c, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (21)$$

Como consecuencia de la independencia, tenemos que

$$(P_n \times P_n) \left(\prod_{i=1}^m (\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\})^c \right) = \prod_{i=1}^m (P_n \times P_n) ((\{x \in A_i\} \cap \{y \in A_i\})^c) = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i^2} \right). \quad (22)$$

La igualdad (22) puede expresarse: la probabilidad $(P_n \times P_n, n \geq p_m)$ de que los números naturales x y y , escogidos aleatoriamente (con reemplazo), no tengan a alguno de los números p_i , $i = 1, 2, \dots, m$, como factor común es $\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i^2} \right)$.

Ahora observemos que la afirmación anterior es correcta para todos los m y n , con $n \geq p_m$. Por otra parte, decir que «la probabilidad de que los números naturales x y y escogidos aleatoriamente no tengan a algún factor común primo es $\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^2} \right)$ », es matemáticamente incorrecta, con un razonamiento de paso al límite, pero al final incorrecta, si no se da alguna definición extra de la palabra “probabilidad”. También es incorrecta, la misma afirmación, en cualquiera de los casos asociados a las fórmulas (11) y (12).

La relación de $\prod_{i=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{p_i^2}$, con el problema de Basilea, usando (3), es muy conocida [1].

Con las herramientas aquí desarrolladas se pueden resolver problemas como:

- i. Hallar la probabilidad de que n naturales, escogidos aleatoriamente no tengan un factor primo común,
- ii. Hallar la probabilidad de que al escoger x y y aleatoriamente en los naturales, el número 5 sea un divisor de $4x + 3y$.

Algunos necesitarán pasar al límite informalmente y otros no.

Como prometimos al principio de este epígrafe, probaremos que no existe una probabilidad en la σ -álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la probabilidad de $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/p$, siendo ellos sucesos independientes. Supongamos entonces que existe tal espacio de probabilidad $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, P)$.

Primer paso. La σ -álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$, es la generada por la partición de \mathbb{N} ,

$$\{A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} : p_{i_1} < p_{i_2} < \dots < p_{i_k} \text{ son primos y } k \in \mathbb{N}\}, \tag{23}$$

y

$$A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} = \{p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k} : \alpha_i \text{ son elementos de } \mathbb{N}\}. \tag{24}$$

Un elemento debe ser agregado a la partición: $A_\Phi = \{1\}$, que es el complemento de la unión de todos los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$, donde p es primo. La igualdad de las dos σ -álgebras es consecuencia de las igualdades

$$\{1\} \cup A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{\substack{p \text{ primo,} \\ p \text{ distinto de } p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}}} \{kp: k \in \mathbb{N}\} \tag{25}$$

$$\{kp: k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{p \in \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\}} A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}. \tag{26}$$

Segundo paso. Enumeremos los primos distintos de $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$, como $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$, y llamemos $M(q_j) = \{kq_j: k \in \mathbb{N}\}$, de esta forma la igualdad (25) se escribe

$$\{1\} \cup A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M(q_i), \tag{27}$$

y consecuentemente,

$$P(\{1\}) + P(A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n M(q_i)\right). \quad (28)$$

Ahora usamos el principio de inclusión y exclusión para sucesos independientes y obtenemos

$$\begin{aligned} P(\{1\}) + P(A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} P(M(q_{j_1}) \cap M(q_{j_2}) \cap \dots \cap M(q_{j_m})) \right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \frac{1}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_m}} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Tercer paso. Calculemos la expresión

$$\sum_{m=1}^n \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \frac{1}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_m}} \right), \quad (30)$$

para poder hallar su límite, si existe. Sea $R = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{n+k}$, de forma que $p_{n+k} > p_{i_k}$. Consideremos ahora el cardinal del conjunto

$$B = \{1, 2, \dots, R\} \setminus \bigcup_{i=1}^n M(q_i) \cap \{1, 2, \dots, R\}. \quad (31)$$

Sabemos que,

$$\#(B) = R - \# \left(\bigcup_{i=1}^n M(q_i) \cap \{1, 2, \dots, R\} \right). \quad (32)$$

Usando el principio de inclusión y exclusión para hallar el cardinal del segundo miembro de (32), obtenemos

$$\#(B) = R - \sum_{m=1}^n \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \frac{R}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_m}} \right), \quad (33)$$

de lo que se deduce

$$\sum_{m=1}^n \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \frac{1}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_m}} \right) = 1 - \frac{\#(B)}{R}. \tag{34}$$

Por otra parte, utilizando el Lema 1 para los naturales p_1, p_2, \dots, p_{n+k} , tenemos que en el espacio de probabilidad $(\mathbb{N}, \mathcal{A}_R, P_R)$ los sucesos $M(q_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}$, son independientes, luego sus complementarios también son independientes. Escribiendo $P_R(B)$ en las dos formas que justifica el Lema 1, obtenemos,

$$\#(B) = R \times \frac{(q_1 - 1)}{q_1} \times \frac{(q_2 - 1)}{q_2} \times \dots \times \frac{(q_n - 1)}{q_n}. \tag{35}$$

Usando (35) y la fórmula de Euler (3), concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(B)}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(q_1 - 1)}{q_1} \times \frac{(q_2 - 1)}{q_2} \times \dots \times \frac{(q_n - 1)}{q_n} = 0. \tag{36}$$

De (34) y (36) deducimos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \frac{1}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_m}} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(B(P))}{P} = 1. \tag{37}$$

Las igualdades (29), junto a (37), nos llevan a,

$$P(\{1\}) + P(A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left((-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \frac{1}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_m}} \right) = 0. \tag{38}$$

De la igualdad (38), concluimos que cualesquiera sean los números primos $p_{i_1} < p_{i_2} < \dots < p_{i_k}$, se cumple que,

$$P(A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}) = 0, \tag{39}$$

y también que $P(\{1\}) = 0$. La σ -aditividad nos da que la probabilidad de \mathbb{N} es nula. Lo anterior nos dice que es imposible la existencia de $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, P)$ con las propiedades deseadas y se ha completado la demostración. ■

Nota: Hemos probado que no existe una medida de probabilidad en la σ -álgebra generada por los conjuntos $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la probabilidad de $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ sea $1/p$, siendo ellos sucesos independientes. Esto lo hemos logrado, probando que su existencia implica la de sucesos mutuamente

excluyentes de esta σ -álgebra (la partición (23)) que no satisfacen la σ -aditividad. También debe existir, una cantidad numerable, de sucesos mutuamente excluyentes, del álgebra generada por los $\{kp: k \in \mathbb{N}\}$ con p primo, tal que la unión de ellos sea igual a un elemento de dicha álgebra, pero no se satisfaga la σ -aditividad. En otro caso el teorema de extensión de Carathéodory [2], aseguraría la existencia de lo que hemos probado no existe.

3. Nueva demostración “elemental”

La palabra “elemental” se refiere a que no usa cálculo. Lo único que no es elemental, en lo que sigue, es asumir que una serie infinita puede tener una suma, pero eso se hace en enseñanza media, cuando se acepta la idea de números decimales de infinitas cifras y cuando se da la suma de la serie geométrica. El teorema del emparedado, puede o no ser usado en la demostración que sigue. En nuestro caso, que el elemento intermedio es una constante, se puede repensar, como desigualdades cada vez más finas, en unión a un resultado del tipo: Si para todo número $\varepsilon > 0$, el número no negativo a cumple $a < \varepsilon$, entonces $a = 0$.

Partimos de la identidad,

$$\tan(2n\theta) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1} \tan^{2k+1}(\theta)}{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} \tan^{2k}(\theta)}, \quad (40)$$

que es válida siempre que $\tan(\theta) \neq \infty$. La fórmula (40) puede ser demostrada por inducción, usando la fórmula de la tangente del ángulo suma o mediante la fórmula de Moivre [6]. De (40) podemos deducir que cualquiera sea el número natural a , mayor que 1, se cumple

$$\tan\left(2a \frac{m\pi}{2a}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \binom{2a}{2k+1} \tan^{2k+1}\left(\frac{m\pi}{2a}\right)}{\sum_{k=0}^a (-1)^k \binom{2a}{2k} \tan^{2k}\left(\frac{m\pi}{2a}\right)} = 0, \quad 0 < m < a. \quad (41)$$

De (41) obtenemos,

$$\sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \binom{2a}{2k+1} \tan^{2k+1}\left(\frac{m\pi}{2a}\right) = 0, \quad 0 < m < a. \quad (42)$$

Como $\tan\left(\frac{m\pi}{2a}\right) > 0$ siempre que $0 < m < a$, podemos dividir, por este valor, la igualdad (42), y así obtener

$$\sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \binom{2a}{2k+1} \left(\tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)\right)^k = 0, \quad 0 < m < a. \quad (43)$$

La igualdad (43) nos da las $a - 1$ raíces distintas de un polinomio de grado $a - 1$, por lo que obtenemos

$$\sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \binom{2a}{2k+1} x^k = (-1)^{a-1} \binom{2a}{2a-1} \left(x - \tan^2\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right) \left(x - \tan^2\left(\frac{2\pi}{2a}\right)\right) \dots \left(x - \tan^2\left(\frac{(a-1)\pi}{2a}\right)\right). \quad (44)$$

Igualando los coeficientes de la potencia $(a - 2)$ en (44), tenemos

$$(-1)^{a-2} \binom{2a}{2a-3} = (-1)^a \binom{2a}{2a-1} \sum_{m=1}^{a-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right), \quad (45)$$

y simplificando obtenemos

$$\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!} = \sum_{m=1}^{a-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right). \quad (46)$$

Es fácil mostrar, con argumentos geométricos, que cuando $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tenemos, (ver nota al final de esta sección),

$$x < \tan(x) \quad y \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}. \quad (47)$$

Usando (46) y (47) concluimos que,

$$\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!} = \sum_{m=1}^{a-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) = \sum_{m=1}^{a-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)} < \frac{4a^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{a-1} \frac{1}{m^2}. \quad (48)$$

Para la segunda igualdad de (48) se utiliza que $\tan\left(\frac{(a-m)\pi}{2a}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{m\pi}{2a}\right)}$.

De la desigualdad (48) obtenemos,

$$\sum_{m=1}^{a-1} \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2(2a-1)(2a-2)}{4a^2 3!}. \quad (49)$$

Como a puede ser arbitrariamente grande, (49) implica

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \geq \frac{\pi^2}{6}. \quad (50)$$

Probemos ahora que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$. Argumentos geométricos justifican que cuando $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (ver nota al final de esta sección),

$$\tan(x) < x\sqrt{\tan^2(x) + 1} \quad y \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}. \quad (51)$$

Siendo a y k números naturales que cumplan $a \geq k \geq 3$ y usando (46) obtenemos

$$\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!} = \sum_{m=1}^{a-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) = \sum_{m=1}^{a-[a/k]-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) + \sum_{m=a-[a/k]}^{a-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right), \quad (52)$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x . Las dos últimas sumatorias de (52) pueden ser acotadas inferiormente como sigue,

$$\sum_{m=1}^{a-[a/k]-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) > (a - [a/k] - 1)\tan^2\left(\frac{\pi}{2a}\right), \quad (53)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{m=a-[a/k]}^{a-1} \tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) &= \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)} > \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 \left(\tan^2\left(\frac{m\pi}{2a}\right) + 1\right)} \\ &> \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 \left(\tan^2\left(\frac{[a/k]\pi}{2a}\right) + 1\right)} = \frac{4a^2}{\pi^2 \left(\tan^2\left(\frac{[a/k]\pi}{2a}\right) + 1\right)} \sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{m^2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Usando (53) y (54) en (52), obtenemos,

$$\sum_{m=1}^{[a/k]} \frac{1}{m^2} < \left(\frac{(2a-1)(2a-2)}{3!} - (a - [a/k] - 1)\tan^2\left(\frac{\pi}{2a}\right) \right) \left(\tan^2\left(\frac{[a/k]\pi}{2a}\right) + 1 \right) \frac{\pi^2}{4a^2}. \quad (55)$$

Como a puede ser arbitrariamente grande, de (55) concluimos que

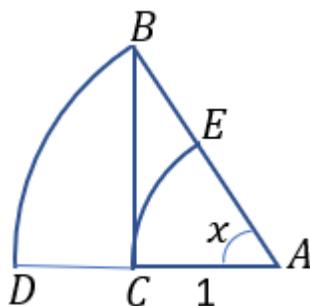
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2k}\right)\right) \pi^2}{6}. \quad (56)$$

Como también k puede ser arbitrariamente grande, de (56) se deduce que,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\pi^2}{6}. \quad (57)$$

Con (57) queda demostrada la igualdad (7). ■

Nota. La siguiente figura representa un triángulo rectángulo, $\triangle ABC$, con el cateto base, \overline{CA} , de longitud igual a 1 y el ángulo adyacente a ese cateto de x radianes. Los dos arcos de circunferencia dibujados están centrados en el punto A .



Las dos desigualdades en (47) y (51) son respectivamente equivalentes a:

- i. El área del sector circular CAE es menor que el área del triángulo ABC .
- ii. La longitud del cateto BC es menor que la del arco BD .

4. Conclusiones

El modelo que aquí damos, de una familia de espacios de probabilidad, con sigma álgebras creciendo y funciones de probabilidad que son extensiones, de las funciones de probabilidad de cualquier sigma álgebra menor, ofrece mucha facilidad para el cálculo en problemas que involucren divisibilidad y probabilidad. Pensamos que es más natural y fácil de trabajar que el análisis del límite, cuando n tiende a infinito, en los espacios de probabilidad uniforme en $\{1, 2, \dots, n\}$ [9]. También es más simple que otro tipo de límites, como el que se desarrolla en [4].

La idea fundamental, de la demostración elemental que damos en la sección 3, es muy similar a la ya conocida, que usa la fórmula de Moivre para potencias de números complejos [1, 5]. La diferencia cualitativa está en las herramientas que se usan. En particular la fórmula (40), es poco conocida y permite obtener, con las mismas técnicas aquí desarrolladas, una variedad muy grande de identidades y propiedades de la función tangente, ver por ejemplo [6, 3].

Por último, las posibilidades que ofrece el problema de Basilea para guiar estudiantes a obtener y relacionar conocimientos son insuperables. La riqueza de conexiones y las múltiples formas en que es posible acercarse a él, permite a estudiantes avanzados de nivel medio y de los primeros cursos universitarios tener un fructífero encuentro con el problema, que además crea un vínculo emocional con muchos de los fundadores de la matemática moderna.

5. Referencias

- [1] AIGNER, Martin and ZIEGLER, Günter M. *Proofs from THE BOOK*, pp. 55-64, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1998).
- [2] BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, pp. 96-104, John Wiley & Sons, Inc. New York, (1995).
- [3] FALCON RODRIGUEZ, C. M., CRUZ, M.A.G. and FALCON, C. *Full Euclidean Algorithm by Means of a Steady Walk*, pp. 269-279, Applied Mathematics, 12, (2021).
<https://doi.org/10.4236/am.2021.124018>
- [4] GOLOMA, Solomon W. *A Class of Probability Distributions on the Integers*, pp. 189-192, Journal of Number Theory 2, (1970).
- [5] GRANERO BELINCHÓN, Rafael. *El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones*, pp. 721-737, La Gaceta de la RSME, Vol. 12, Núm. 4, (2009).
- [6] MAOR, Eli. *Trigonometric Delights*, pp. 150-164, Princeton University Press, New Jersey, (1998).
- [7] SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel. *Euler y el Problema de Basilea*, pp. 27-56, Pensamiento Matemático, Volumen V, Núm. 1, (2015).
- [8] SILAGADZE, Z. K. *The Basel Problem: A Physicist's Solution*, pp. 14-18, Math Intelligencer 41, (2019).
<https://doi.org/10.1007/s00283-019-09902-x>.
- [9] YAGLOM, A.M. and YAGLOM, I.M. *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, pp. 29-30, Dover Publications, Inc. New York, (1984).

Sobre los autores:

Nombre: Carlos Manuel Falcón Rodríguez

Correo Electrónico: falc4847@gmail.com

Institución: Grupo de Investigación de Análisis Matemático (GIAM), Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.

Nombre: Jarlyn José Díaz Peralta

Correo Electrónico: jarlynperalta@gmail.com

Institución: Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.

Nombre: Ribelly Estrella Salazar

Correo Electrónico: estrellaribelly@gmail.com

Institución: Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.

Nombre: Marileidy Bonilla Núñez

Correo Electrónico: marisleidy003@gmail.com

Institución: Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU), República Dominicana.

Investigación

Estadística multivariante aplicada al análisis y predicción de partidos de fútbol en las principales ligas europeas

Multivariate statistical techniques applied to the analysis and prediction of football matches in the main European leagues

Pedro J. Chocano Feito y Elena Castilla González

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 021-030, ISSN 2174-0410
Recepción: 06 May'21; Aceptación: 16 Jun'21

1 de octubre de 2021

Resumen

El propósito de este estudio es analizar las estadísticas de juego en las principales ligas europeas y ver qué factores son más determinantes a la hora de predecir el resultado de un partido. Para ello usaremos técnicas de estadística multivariante incluyendo análisis de componentes principales y regresión logística. Las dos primeras componentes principales explican alrededor del 70 % de precisión obtenida cuando se predicen victorias fuera de casa tomando como variables predictivas las propias componentes. Este estudio también demuestra que en la liga inglesa los partidos son menos equilibrados.

Palabras Clave: componentes principales, desarrollo del juego, regresión logística.

Abstract

The purpose of this study is to analyse main game-related statistics differences between the main European leagues and which factors are more determinant when predicting a match score, by means of multivariate statistical techniques, including principal component analysis and logistic regression. The first two principal components explain around the 70 % of variance, and over a 70 % of accuracy is obtained when predicting away-team wins, with these two principal components as predictive variables. This study also shows that in English Premier League, games are less equilibrated.

Keywords: notational analysis, match performance, principal components, logistic regression.

1. Introducción

El interés global asociado al fútbol, junto con el comienzo de la era del big-data, ha incrementado el profesionalismo del fútbol moderno. En cada partido de las ligas más importantes se recoge una gran cantidad de datos asociados al juego. El principal objetivo es detectar qué indicadores de rendimiento son determinantes en el resultado final. De hecho, este interés ya se manifestó a mediados de los años 70 [14] pero ha explotado en los últimos años. Por ejemplo, véase [4, 1, 3, 5] y sus referencias. Si bien la capacidad económica es, sin duda, uno de los factores principales asociados a un equipo exitoso (véase [9] o [13] para la liga alemana y española respectivamente), invertir en el análisis del juego e identificar los factores más relevantes puede ser determinante a la hora de marcar la diferencia.

El Análisis de Componentes Principales (ACP) es una de las técnicas estadísticas multivariantes más importantes, ya que permite reducir la dimensionalidad y facilita la interpretación de los datos. Fue usado en [2] para proporcionar información táctica sobre un equipo, cuantificando la región de campo en la que varios jugadores actuaban. En [10] también se usó el ACP para analizar los partidos de la fase de grupos del mundial de 2006.

Como se comenta en [8] y [9], se necesita más análisis predictivo para entender mejor los factores que determinan el éxito en el fútbol. El modelo de regresión logística se ha usado en [16] para analizar las estadísticas de juego más determinantes para predecir los resultados de los partidos en la Liga Canadiense de Fútbol. También fue usado en [13] para predecir los resultados en la Primera División española. Una vez que se ajustó el modelo, se mantuvieron las variables significativas atendiendo a sus p-valores. La interpretación de los resultados se hizo, en ambos casos, en base a la significación y símbolo de los estimadores ajustados. Aquí, introducimos el concepto de *odds ratio* (razón de monomios), que cuantifica la influencia de una variable en la variable respuesta.

Un aspecto importante en los modelos de regresión es la determinación del número de variables explicativas. Un modelo con demasiadas variables explicativas podría incluir covariables con una alta intercorrelación. Así, podríamos no darnos cuenta de la importancia que tiene una variable en la respuesta, ya que podría estar “escondida” en el modelo por otras variables correladas. Por otro lado, cuando tratamos con conjuntos de datos de tamaño moderado, no es recomendable usar demasiadas covariables ya que pueden sobre-ajustar el modelo. En este sentido, la conocida *one in ten rule* ([6, 11]) establece que se debe usar un máximo de una covariable por cada 10 eventos. Uno de los métodos más usuales para reducir el número de covariables es el de ajustar el modelo completo y determinar mediante un test o prueba de significación, una por una, qué variables han de ser eliminadas del modelo. Este proceso depende del nivel de significación escogido y puede necesitar muchos pasos. Además, una vez que una variable es eliminada del modelo, toda su información (que no es necesariamente explicada por las otras variables) se pierde. En este artículo, combinamos el ACP con la regresión logística, reduciendo considerablemente el número de covariables en el modelo logístico. En este estudio, usamos ocho variables como predictores, pero este método podría extenderse a más variables. Nótese que, mientras que la mayoría de la literatura citada centra su estudio en una competición en particular, extendemos nuestro estudio a las cuatro ligas europeas más importantes, según los coeficientes UEFA ([15]).

2. Métodos

2.1. Descripción de los Datos y uso de Software

Los datos usados en este estudio han sido recogidos de todos los partidos desde la temporada 2016/2017 a la temporada 2018/2019 en las principales ligas europeas: LaLiga (España),

Premier League (Inglaterra), Serie A (Italia) y Bundesliga (Alemania). Esto es, 380 partidos por temporada en las tres primeras ligas y 307 partidos por temporada en la Bundesliga. Mientras que las temporadas 2016/2017 y 2017/2018 se usan para el análisis descriptivo y ajuste de los modelos de predicción, la temporada 2018/2019 se usa para testear estos modelos. Los datos se han obtenido de <http://www.football-data.co.uk/data.php>. Esta fuente de datos ha sido usada también en [13], entre otros.

Para analizar los factores que pueden afectar a la probabilidad de ganar un partido consideramos ocho variables numéricas: HS (Home-team shots) disparos del equipo local, AS (Away-team shots) disparos del equipo visitante, HC (Home-team corners) córneres ocasionados por el equipo local, AF (Away-team fouls) faltas cometidas por el equipo visitante, HY (Home-team yellow cards) tarjetas amarillas mostradas al equipo local, AY (Away-team yellow cards) tarjetas amarillas mostradas al equipo visitante, HR (Home-team red cards) tarjetas rojas mostradas al equipo local y AR (Away-team red cards) tarjetas rojas mostradas al equipo visitante. El número total de disparos a portería y faltas por partido son también usados para un análisis descriptivo. En el modelo binomial distinguiremos entre 0: victorias del equipo visitante y 1: victoria ó empate del equipo local. Esta dicotomía fue considerada también en [13], entre otros.

Para el tratamiento de los datos, hemos usado el Software estadístico R. En concreto, las funciones *glm()* y *prcomp()* para el análisis de regresión logística y el ACP. Para la representación de los datos, usamos los paquetes “ggfortify” y “ggplot2”.

2.2. Análisis Estadístico

2.2.1. Análisis de Componentes Principales

La principal motivación del ACP consiste en reducir el número de variables mientras se intenta preservar la máxima varianza. Geométricamente, se intentan buscar unos nuevos ejes, llamados direcciones principales, que expliquen la mayor varianza posible para representar los datos originales, las nuevas variables obtenidas tras este cambio de representación serán las llamadas componentes principales. Veamos ligeramente los rudimentos básicos por completitud. Supongamos que se dispone de los valores de k variables en n elementos de una población dispuestos en una matriz \mathbf{X} de dimensiones $n \times k$. Denotamos por \mathbf{S} a la matriz de varianzas-covarianzas de las variables,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_k) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_k, X_1) & \text{Cov}(X_k, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_k) \end{bmatrix},$$

la cuál es simétrica y definida positiva. Finalmente, denotamos por a_i al autovector asociado al autovalor λ_i de la matriz \mathbf{S} . Las componentes principales vienen dadas en la matriz \mathbf{Z} cuyas columnas son los valores de las k componentes en los n individuos y $\mathbf{Z} = \mathbf{XA}$ donde \mathbf{A} es la matriz formada por los autovectores de \mathbf{S} . De manera informal, podemos decir que calcular las componentes principales equivale encontrar unos nuevos ejes de coordenadas que coinciden con los “ejes naturales” de los datos. La proporción de variabilidad total explicada por una componente h viene dada por $\frac{\lambda_h}{\sum_i \lambda_i}$. Finalmente, basta con tomar las $r < k$ componentes que tengan mayor proporción de variabilidad. Para más detalles véase [12, Capítulo 5].

Utilizamos ACP para las temporadas 2016/2017 y 2017/2018 en cada principal liga europea. Los autovectores, que corresponden a los factores de carga de cada variable original para obtener el conjunto de datos modificado, de la primera y segunda componente (PC1 y PC2 respectivamente) se presentan en la Tabla 3. El tamaño y signo de estos factores indica la relación

entre las variables originales y las componentes principales. Los gráficos que incluyen tanto la posición de cada muestra en términos de PC1 y PC2 además de la proyección de las variables originales sobre ellos pueden verse en la Figura 3. Los círculos rojos representan aquellos partidos en los que el equipo visitante ha ganado mientras que los triángulos azules representan una victoria o empate del equipo local.

2.2.2. Regresión Logística

La regresión logística es un método de clasificación donde la variable dependiente y solo puede tomar valor 0 ó 1. Este método es usado para predecir la probabilidad de que ocurra un evento. Dicha probabilidad se obtiene como sigue:

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k)},$$

donde $\pi(\mathbf{x}) = P(y = 1 | x_1, \dots, x_k)$, β_0 es la ordenada en el origen y β_1, \dots, β_k son los coeficientes asociados a las k variables x_1, \dots, x_k . Estos coeficientes son estimados a partir de la muestra y pueden ser usados para la predicción de la respuesta de nuevas muestras. Así, sea una muestra de tamaño n , donde la observación i -ésima, y_i , tiene asociado el vector de variables explicativas $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})^T$, el estimador de máxima verosimilitud, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k)$, se obtiene como solución al sistema de ecuaciones

$$\tilde{\mathbf{X}}^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}_{k+1}, \quad (1)$$

siendo $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) = (\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))^T$ y $\tilde{\mathbf{X}}$ la matriz de dimensión $n \times (k + 1)$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & \cdot & \cdot & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Ya que excepto casos específicos no hay una solución explícita del sistema (1), se suele hacer uso de métodos iterativos, tales como el de Newton-Raphson, para aproximar la solución. Nótese que no todas las variables son necesarias en el modelo. Estas variables, que no aportan suficiente información, deben ser ignoradas.

Un concepto importante en la teoría de regresión logística es el de odds ratio. Para la variable x_j el odds ratio puede definirse como:

$$\exp(\beta_j), \quad j = 1, \dots, k,$$

y representa cuánto incrementa la probabilidad de un evento por cada unidad que incrementa x_j .

Usamos el modelo de regresión logística para cada una de las principales ligas europeas. Los parámetros estimados de las variables significativas y sus odd ratios son representados en la Tabla 4. Se plantean modelos logísticos mediante el uso de las dos componentes principales. Estos modelos son usados para predecir resultados en la temporada 2018/2019. El ratio de éxitos en las predicciones de las victorias del equipo visitante son recogidos en la Tabla 2.

3. Resultados

Comparamos los disparos y faltas por partido en cada liga (véase Figura 1). El test de Kolmogorov–Smirnov para la distribución normal muestra que la variable disparos por partido se distribuye como una normal solo para la liga italiana, mientras que la variable faltas por partido solamente se distribuye como una normal para la liga alemana. Esto puede explicarse debido al gran número de datos atípicos (outliers) presentados. Parece no haber una diferencia significativa de disparos por partido entre ligas, mientras que las faltas por partido en la liga inglesa parecen inferiores al resto de ligas.

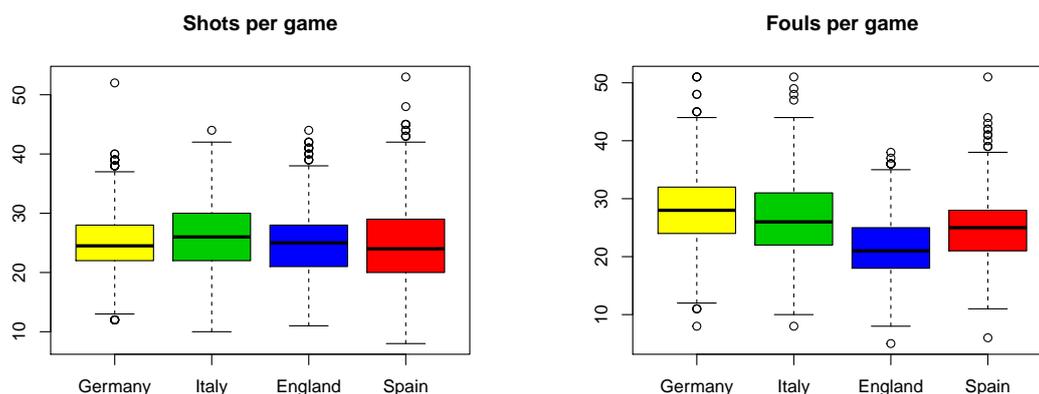


Figura 1. Disparos (*Shots per game*) y faltas (*Fouls per game*) por partido en las diferentes ligas europeas.

Las correlaciones entre HS (disparos equipo local) y AS (disparos equipo visitante) se pueden observar en la Tabla 1. Todas las ligas presentan una correlación negativa, esto es, cuando el número de disparos del equipo visitante incrementa el número de disparos del equipo local disminuye y al revés. Este comportamiento es más evidente para la liga inglesa, pero no lo es para la española. Esto puede observarse en la Figura 2, donde los partidos de liga inglesa y española han sido representados en un diagrama de dispersión. El conjunto de datos está codificado mostrando la variable de victorias del equipo visitante. Discernir entre victorias y derrotas es más evidente para la liga inglesa debido a su alta correlación.

Tabla 1. Correlaciones entre HS y AS.

Germany	Italy	England	Spain
-0.333	-0.449	-0.492	-0.252

El ACP muestra que las ocho variables pueden ser reducidas a dos componentes principales explicando una gran parte de la varianza. La primera componente explica el 41,52 %, 57,4 %, 50,68 % y 44,58 % de la varianza para las ligas española, inglesa, italiana y alemana respectivamente. Las primeras componentes enfrentan los disparos del equipo local y visitante respectivamente. Las segundas componentes explican el 26,22 %, 17,55 %, 23,92 % y 24,33 % de la varianza en las respectivas ligas. En esta segunda componente observamos más diferencias entre las ligas. En las ligas alemana, italiana y española, las faltas del equipo visitante presentan los factores (o *loadings*) de valor más alto. Las faltas del equipo visitante se enfrentan a los disparos de ambos equipos, los cuáles presentan de nuevo el factor más alto en la segunda componente de la liga inglesa.

Los modelos de regresión logística ajustados para las diferentes ligas muestran las variables más significativas a la hora de predecir las victorias del equipo visitante. Observamos que

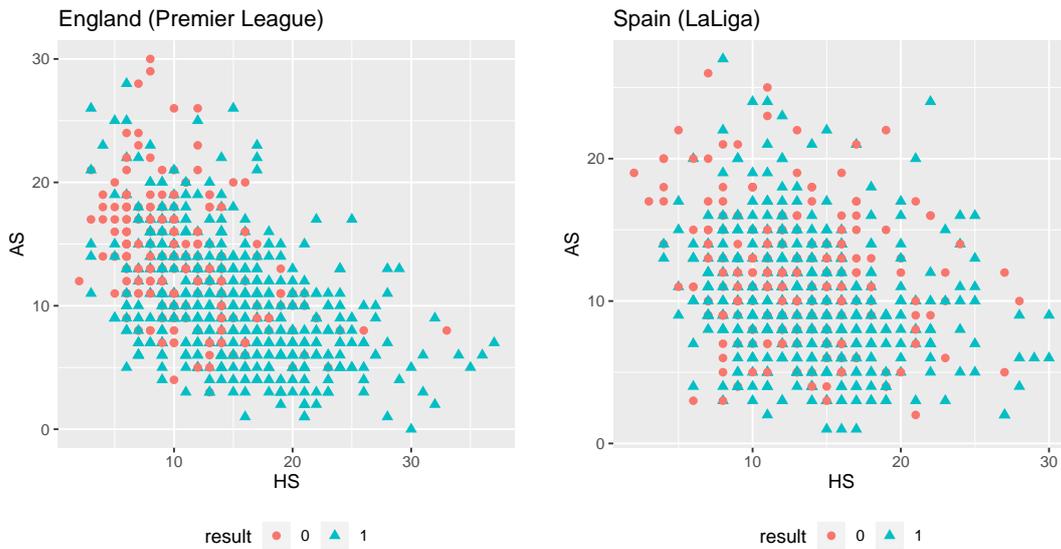


Figura 2. HS contra AS, liga inglesa y española. Aquí, 1 representa victoria o empate del equipo local y 0 victoria del equipo visitante.

los coeficientes estimados difieren entre ligas, aunque los signos se mantienen igual. Las faltas visitantes no son significativas en ninguna de las ligas, mientras que las tarjetas amarillas visitantes y las rojas locales son sólo significativas en las ligas española e italiana respectivamente. El odds ratio de las tarjetas rojas locales en la liga italiana muestra que una tarjeta roja multiplica la probabilidad de que el equipo local puntúe por 0,38, es decir, esta probabilidad decrece aproximadamente un 62 %. De la misma manera, una tarjeta roja del equipo visitante en la liga alemana incrementa la probabilidad de puntuar del equipo local un 280 %. Curiosamente, más córners locales está asociado con menos probabilidad de victoria local. Nótese que, en la liga inglesa, las únicas variables suficientemente significativas en el resultado son HS y AS, lo que concuerda con las Figuras 2 y 3.

Tabla 2. Proporción de ajustes correctos.

	Logit		PCA+Logit			
	par.	training	test	par.	training	test
Germany	6	0.7418	0.6797	2	0.7467	0.7059
Italy	6	0.7013	0.7158	2	0.7013	0.7289
England	2	0.7474	0.6974	2	0.7474	0.6789
Spain	7	0.7092	0.7289	2	0.7026	0.7263

En la Tabla 2 vemos cómo el índice de acierto de clasificación de los modelos está en torno a un 70 % tanto para los conjuntos de entrenamiento y de test. En particular, el uso de ACP para reducir el número de variables en la regresión logística incrementa el acierto en las ligas italiana y alemana, y sólo resulta innecesario en la liga inglesa, donde obtenemos resultados ligeramente mejores usando un modelo de regresión logística con sólo dos variables.

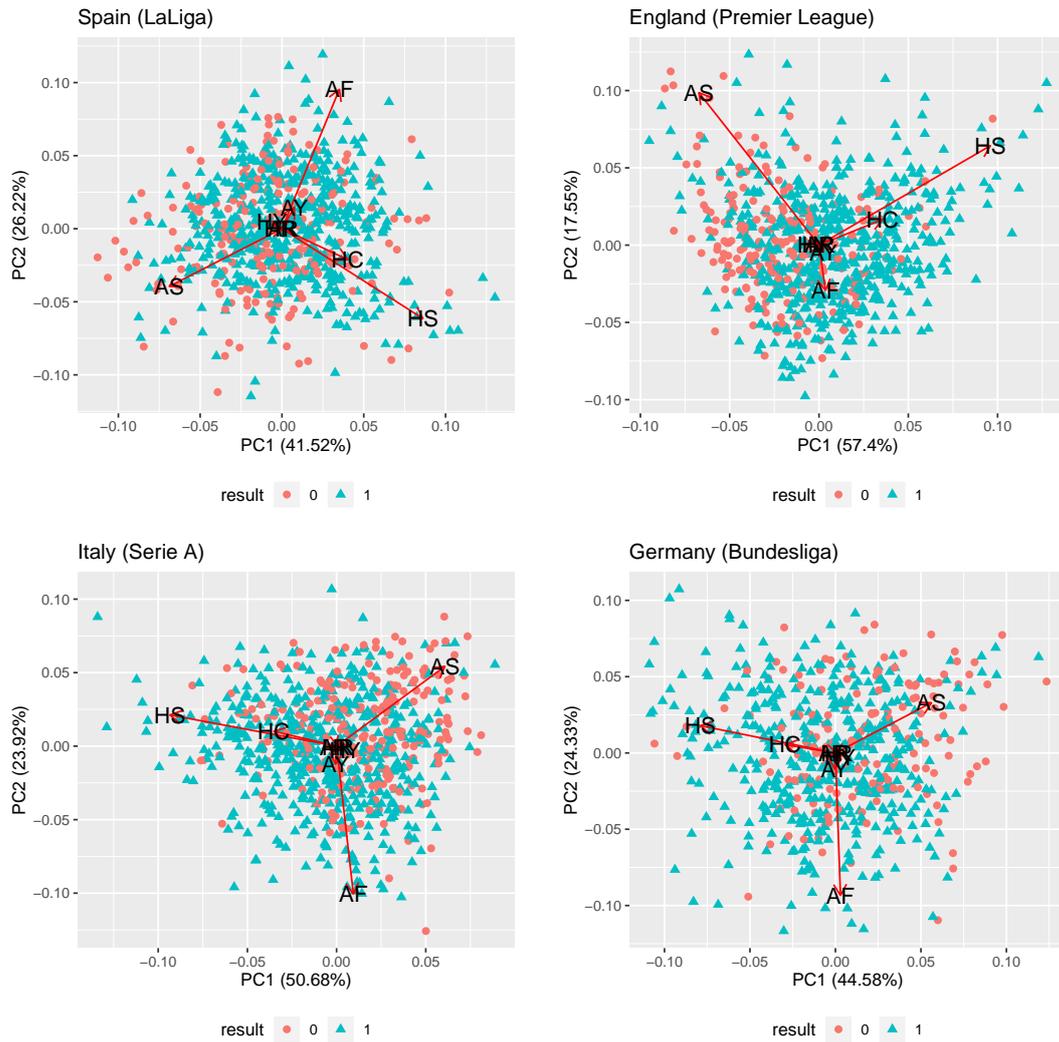


Figura 3. ACP en las principales ligas europeas. Aquí, 1 representa victoria o empate del equipo local y 0 victoria del equipo visitante.

4. Análisis de los resultados

El propósito principal de este estudio es el determinar los factores de éxito en las principales ligas europeas. La interpretación y reducción de las variables explicativas es crucial para identificar los aspectos técnicos más importantes para predecir un resultado. Hemos demostrado como el ACP y la regresión logística son técnicas útiles para clasificar y predecir resultados exitosos, así como para determinar qué variables específicas son más influyentes para este propósito. En particular, la combinación de ambos métodos, usando sólo dos componentes principales en el modelo de regresión logística, nos lleva a predicciones robustas.

Un análisis descriptivo previo nos muestra que el comportamiento general de las variables en las cuatro ligas es muy similar, pero algunas diferencias particulares se observan en las faltas y disparos por partido. Cuando enfrentamos los disparos del equipo local y visitante, se observa una correlación mayor en la liga inglesa, acompañada con una clasificación más clara de los resultados. Esto es, los partidos de la liga inglesa son muy poco igualados, y el equipo que tiene bajo control el partido (disparos favorables) es generalmente el que obtiene un mejor resultado.

Tabla 3. Coeficientes de cada variable para las primeras y segundas componentes principales.

	Germany		Italy		England		Spain	
	PC1	PC2	PC1	PC2	PC1	PC2	PC1	PC2
HS	-0.7792	0.1762	-0.7963	0.1807	0.7827	0.5243	0.7010	-0.5000
AS	0.5539	0.3246	0.5175	0.4621	-0.5487	0.8050	-0.5603	-0.3206
HC	-0.2904	0.0535	-0.2996	0.0861	0.2901	0.1355	0.3267	-0.1717
AF	0.0289	-0.9214	0.0804	-0.8572	0.0296	-0.2391	0.2856	0.7759
HY	0.0268	-0.0272	0.0417	-0.0252	-0.0275	0.0045	-0.0486	0.0405
AY	-0.0040	-0.1051	-0.0046	-0.1045	0.0206	-0.0376	0.0617	0.1184
HR	0.0094	-0.0023	0.0074	-0.0037	-0.0028	0.0048	-0.0073	-0.0018
AR	-0.0078	-0.0030	-0.0059	-0.0075	0.0044	0.0008	0.0076	0.0014

Tabla 4. Resultados de la estimación logística y odds ratios en los modelos restringidos.

	Germany		Italy		England		Spain	
	Est.	Odds ratio						
Int.	2.6248	-	1.6259	-	-	-	1.7970	-
HS	0.0620	1.0639	0.0732	1.0759	0.1132	1.1471	0.0539	1.0554
AS	-0.1409	0.8686	-0.1133	0.8929	-0.0949	0.9308	-0.0878	0.9160
HC	-0.1026	0.9025	-0.0859	0.9177	-	-	-0.1282	0.8797
AF	-	-	-	-	-	-	-	-
HY	-0.1913	0.8259	-	-	-	-	-0.1570	0.8547
AY	-	-	-	-	-	-	0.1199	1.1274
HR	-	-	-0.9589	0.3833	-	-	-	-
AR	1.0292	2.7989	0.4179	1.5188	-	-	0.9557	2.6004

Los partidos en la liga española son más igualados, siendo más difícil predecir el resultado final. Después de evaluar ocho variables relacionadas con el juego, las dos primeras componentes principales mantienen más del 67 % de la varianza total en la liga española y alemana, y sobre el 74 % en la liga inglesa e italiana. Esto es, con sólo dos variables podemos explicar la mayoría de la varianza (información). La primera componente principal se basa principalmente en los disparos locales y visitantes, lo que lleva a una clasificación más simple en la liga inglesa.

De hecho, los disparos locales y visitantes son tan importantes en la liga inglesa, que cuando ajustamos un modelo de regresión logística, estas son las únicas variables significativas a un nivel de $\alpha = 0,1$. Por otra parte, la liga española necesita un total de 7 parámetros (incluida la ordenada en el origen). Las faltas del equipo visitante es la única variable insignificante en los cuatro modelos.

El porcentaje de ajuste es parecido en las cuatro ligas, con buenos resultados tanto para el modelo de regresión logística clásico como para el combinado con el ACP. La reducción de dimensión en este segundo método es notable excepto en la liga inglesa por los motivos ya comentados. Las buenas predicciones, en torno a un 70 % de aciertos, son comparables a las obtenidas en [10] para la Copa Mundial de 2006 o a las obtenidas mediante métodos frecuentistas en la liga española [13]. Además, mejoran notablemente las obtenidas en [7] también para la liga española, si bien en este artículo se usa un análisis discriminante y se dividen los resultados en tres categorías.

5. Conclusiones

El propósito principal de este estudio era el de analizar las principales diferencias entre las grandes ligas europeas y determinar qué factores son más determinantes al predecir el resultado de un partido usando el análisis de componentes principales y la regresión logística. Estos últimos facilitan la correcta clasificación de la mayor parte de las victorias visitantes, incluso con sólo dos variables, las dos primeras componentes principales. A nivel práctico, este estudio ha mostrado cómo los disparos a favor y en contra son los dos factores más importantes de éxito, especialmente en la Premier League, donde los partidos son menos equilibrados. Esto es, el equipo con más disparos a favor es, con una alta probabilidad, el que obtiene un resultado favorable. Las tarjetas rojas del equipo visitante es un factor especialmente influyente en la Bundesliga alemana y la liga española, donde los partidos son más equilibrados. Curiosamente, los córners a favor del equipo local están asociados a una menor probabilidad de éxito.

Referencias

- [1] ARAYA, J., & LARKIN, P. *Key performance variables between the top 10 and bottom 10 teams in the English premier league 2012/13 season*. Hum Mov Health Coach Edu, 1,17–29, 2014.
- [2] BARROS, R., CUNHA, S., MAGALHAES, W., GUIMARAES, M., et al. *Representation and analysis of soccer players' actions using principal components*. Journal of Human Movement Studies, 2006.
- [3] BROICH, H., MESTER, J., SEIFRIZ, F., & YUE, Z. *Statistical analysis for the first Bundesliga in the current soccer season*. Progress in Applied Mathematics, 7(2), 1–8, 2014.
- [4] DOBSON, S., & GODDARD, J. *Modelling and forecasting match results in the English premier league and football league*. In Economics, management and optimization in sports (pp. 59–77). Springer, 2004.
- [5] ELYAKIM, E., MORGULEV, E., LIDOR, R., MECKEL, Y., ARNON, M., & BEN-SIRA, D. *Comparative analysis of game parameters between Italian league and Israeli league football matches*. International Journal of Performance Analysis in Sport, 20(2), 165–179, 2020.
- [6] HARRELL JR, F. E., LEE, K. L., CALIFF, R. M., PRYOR, D. B., & ROSATI, R. A. *Regression modeling strategies for improved prognostic prediction*. Statistics in medicine, 3(2), 143–152, 1984.
- [7] LAGO-PEÑAS, C., LAGO-BALLESTEROS, J., DELLAL, A., & GÓMEZ, M. *Game-related statistics that discriminated winning, drawing and losing teams from the Spanish soccer league*. Journal of sports science & medicine, 9(2), 288, 2010.
- [8] LEPSCHY, H., WÄSCHE, H., & WOLL, A. *How to be successful in football: a systematic review*. The Open Sports Sciences Journal, 11(1), 2018.
- [9] LEPSCHY, H., WÄSCHE, H., & WOLL, A. *Success factors in football: an analysis of the German Bundesliga*. International Journal of Performance Analysis in Sport, 1–15, 2020.
- [10] MOURA, F. A., MARTINS, L. E. B., & CUNHA, S. A. *Analysis of football game-related statistics using multivariate techniques*. Journal of sports sciences, 32(20), 1881–1887, 2014.
- [11] PEDUZZI, P., CONCATO, J., KEMPER, E., HOLFORD, T. R., & FEINSTEIN, A. R. *A simulation study of the number of events per variable in logistic regression analysis*. Journal of clinical epidemiology, 49(12), 1373–1379, 1996.
- [12] PEÑA, D. *Análisis de datos multivariante*. Mc Graw Hill, 2002.

- [13] PEREZ-SÁNCHEZ, J. M., GÓMEZ-DENIZ, E., & DAVILA-CÁRDENES, N. *A comparative study of logistic models using an asymmetric link: Modelling the away victories in football*. *Symmetry*, 10(6), 224, 2018.
- [14] REILLY, T. *A motion analysis of work-rate in different positional roles in professional football match-play*. *J. Human Movement Studies*, 2, 87–97, 1976.
- [15] UEFA. *Association club coefficients*, 2019.
- [16] WILLOUGHBY, K. A. *Winning games in canadian football: A logistic regression analysis*. *The College Mathematics Journal*, 33(3), 215–220, 2002.

Sobre los autores:

Nombre: Pedro J. Chocano Feito

Correo electrónico: pedrocho@ucm.es

Institución: Becario FPI en el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid.

Nombre: Elena Castilla González

Correo electrónico: elecasti@ucm.es

Institución: Profesora Ayudante en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa I, Universidad Complutense de Madrid.

Investigación

Aplicación del Láser Escáner Terrestre (TLS) y de modelos matemáticos para la modelización de conos de derrubios en la alta montaña templada.

Application of the Terrestrial Laser Scanning (TLS) and mathematical modeling models in debris cones in temperate high mountains.

José Juan de Sanjosé Blasco, Mariló López-González, Estrella Alonso-Pérez y Enrique Serrano

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 031-046, ISSN 2174-0410

Recepción: 9 Ene'21; Aceptación: 1 Mar'21

1 de octubre de 2021

Resumen

Los conos de derrubios son una forma de relieve muy común en la alta montaña templada, siendo uno de los procesos periglaciales y nivales más representativos. En este artículo se analizan dos conos de derrubios (Cono A y Cono B) situados en la zona de “La Vueltona” en Picos de Europa. Los conos de derrubios tienen un comportamiento dinámico y su evolución se ha medido de forma ininterrumpida en los meses de agosto durante un periodo de 10 años (2009-2018) aplicando la técnica del Láser Escáner Terrestre (TLS). Para comprender la evolución lineal de los dos conos de derrubios se han realizado perfiles siguiendo las líneas de máxima pendiente del Modelo Digital de Elevaciones (MDE) del año 2009, y se han extrapolado estas líneas de perfiles para el resto de años de medición. Para la misma posición planimétrica (X, Y) a lo largo de los perfiles, y su evolución altimétrica durante los años (2009-2017), se ha calculado por métodos estadísticos la posición (Z) de esos puntos para el año 2018. Este valor estadístico se ha comparado con la información de la toma de datos en campo del año 2018. Los resultados de ambas coordenadas (Z), esto es la real de campo y la estadística son coherentes, dentro del margen de error propio de la toma de datos. Como interpretación a este estudio se puede indicar que el comportamiento de los dos conos de derrubios de La Vueltona tiene una dinámica ondulatoria siguiendo la línea de máxima pendiente, lo cual permite calcular mediante estadística su evolución en un plazo corto de tiempo.

Palabras Clave: Picos de Europa, conos de derrubios, Láser Escáner Terrestre, dinámica, modelización matemática.

Abstract

Debris cones are a very common landform in temperate high mountains, being one of the most representative examples of the periglacial and nival processes. This article analyzes two debris cones (Cone A and Cone B) located in “La Vueltona” in Picos de Europa. Their evolution was measured uninterruptedly throughout each August for 10 years (2009–2018) using the Terrestrial Laser Scanning (TLS) technique. The observations and calculations of the two debris cones were treated independently, but both showed the same behavior. Material falls onto the cones from the walls, and transfer of sediments follows linear trajectories according to the maximum slope. In order to understand the linear evolution of the two debris cones, profiles were created along the maximum slope lines of the Digital Elevation Model (DEM) of 2009, and these profile lines were extrapolated to the remaining years of measurement. In addition, the statistical predictive value for position (Z) in year 2018 was calculated for the same planimetric position (X,Y) throughout the profiles of maximum slopes. To do so, the real field data from 2009-2017 were interpolated and used to form a sample of curves. These curves are interpreted as the realization of a functional random variable that can be predicted using statistical techniques. The predictive curve obtained was compared with the 2018 field data. The results of both coordinates (Z), the real field data and the statistical data are coherent, within the margin of error of the data collection. As an interpretation of this study, it can be indicated that the behavior of the two debris cones of La Vueltona has an undulating dynamic along the maximum slope line, which allows to calculate statistically its evolution in a short period of time.

Keywords: Picos de Europa, debris cones, Terrestrial Laser Scanning, surface dynamic, mathematical modeling.

1. Introducción

En las montañas templadas los derrubios de ladera son muy frecuentes y generan amplios taludes y conos (Figura 1). Es uno de los mecanismos más rápidos de transferencia de sedimentos de la montaña y aunque su génesis está relacionada con las aportaciones desde las paredes, su funcionamiento dista de ser bien conocido en la actualidad. Sus características morfológicas y sedimentológicas dependen del volumen de material, la litología, la topografía, los procesos geomorfológicos involucrados y de la historia geomorfológica local [1] [2].



Figura 1. Vista general de los conos de derrubios de La Vueltona en Peña Vieja (Picos de Europa).

Actualmente, la dinámica de taludes y conos de derrubios activos en la alta montaña se interpretan en el marco de los ambientes paraglaciaros, como ajustes de las laderas tras la

relajación por la liberación de las presiones del hielo sobre las mismas, lo que favorece los desplazamientos en masa, las caídas de rocas desde las paredes y las modificaciones de los taludes de derrubios [3]. Los ambientes paraglaciaros implican tasas de erosión y transporte de sedimentos muy superiores a las habituales en montañas templadas, siempre condicionados directamente por la deglaciación. Recientemente, el control dinámico y térmico de los derrubios ha sido objeto de estudio en ambientes con “permafrost” (ártico y de montaña), donde el hielo en el suelo es el proceso fundamental en su dinámica [4] [5] [6] [7]. Las nuevas técnicas de observación y registro permiten un conocimiento más detallado de la dinámica de los taludes y conos [8].

2. Área de estudio y toma de datos

El Macizo Central de los Picos de Europa alcanza los 2.648 m, y la altitud y proximidad al Mar Cantábrico favorecen los procesos periglaciares. El relieve de los Picos de Europa se caracteriza por sus componentes morfoestructurales, el modelado kárstico y el glaciar, que con diferentes ritmos y edades, han conformado una alta montaña rocosa. En el Macizo Central existe el Grupo de Peña Vieja (2.614 m), el cual es el tercer grupo montañoso de Picos de Europa.

El Grupo de Peña Vieja ha sido remodelado por el glaciario generando circos colgados, artesas y complejos morrénicos bien conservados (Áliva y Lloroza) [9] [10]. Las paredes y fondos de valle han sido afectadas por el periglaciario, principalmente mediante el desarrollo de taludes y conos de derrubios. Estos conos de derrubios ocupan una amplia extensión y son muy representativos de la dinámica geomorfológica del Macizo [11] [12] [13]. Existen elementos funcionales y semifuncionales, en función de su distribución altimétrica y se distribuyen entre los 1.200 y los 2.600 m, de modo que los situados por encima de los 2.000 m son dominantes y plenamente activos.

En la zona de La Vueltona, se han seleccionado dos conos de derrubios, los cuales se asocian a las condicionantes morfoestructurales, que favorecen la presencia de una pared con materiales inestables de más de 400 metros, y a las condiciones morfoclimáticas, que dirigen los procesos gravitacionales, criogénicos o nivales a distintas altitudes. Para el análisis dinámico y los cambios superficiales de los dos conos de derrubios se ha empleado la técnica geomática del Escáner Láser Terrestre (TLS), durante un periodo continuado de 10 años (2009-2018). El instrumental utilizado ha sido la estación total “Image Station” (Topcon), con posibilidad de escaneado superior a los 1.000 metros de distancia y un error posicional del punto medido de 2 cm. La base de escaneado está en la ladera de enfrente de los conos de derrubios, a 900 metros de distancia del punto más alejado. Desde la base de escaneado se ha generado una malla de medición de 3x3 metros para los dos conos de derrubios y se ha empleado un sistema de coordenadas propio, pero ambos conos tienen el mismo origen de coordenadas (Figura 2).

Con la malla de puntos, se ha generado el Modelo Digital de Elevaciones (MDE), basado en una Red Irregular de Triángulos (TIN), que permite calcular las variaciones espaciales anuales. Además, para conocer el comportamiento dinámico de los conos de derrubios se han establecido seis perfiles de máxima pendiente (año 2009) en cada uno de los dos conos de derrubios (Figura 2).

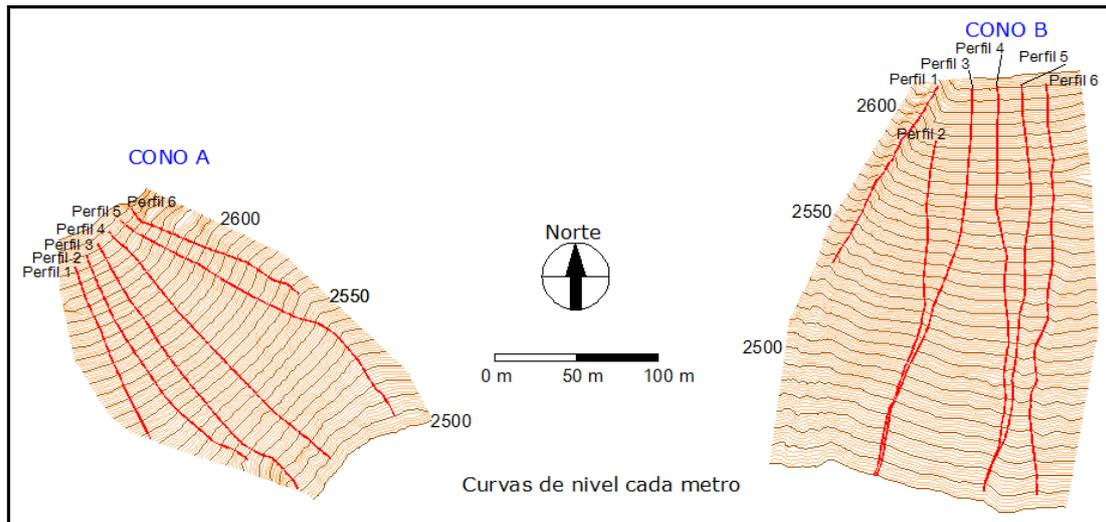


Figura 2. Situación espacial “real” entre los conos de derrubios (A and B) y representación de los perfiles de máxima pendiente sobre el MDE del año 2009.

Las rocas que componen los conos tienen un tamaño heterogéneo que no suelen superar los 30 centímetros, salvo en el Cono B que hay rocas de dimensión superior al metro. El MDE que se genera depende los puntos medidos, por ello se ha procedido a realizar el MDE de ambos conos dos veces durante la misma campaña de medición (año 2015) y se ha comprobado su diferencia. Las diferencias medias que tienen ambos modelos es de 10 cm, no superando en ningún caso valores de 20 cm, excepto en determinadas zonas (grandes rocas) del Cono B.

3. Resultados

Una vez se dispone de los diez MDE (uno por año) de los dos conos de derrubios para el periodo 2009-2018 se procede al cálculo dinámico mediante la interpretación de los perfiles de máxima pendiente.

Tabla 1. Valores de la altitud (en metros) para cada año (2009, 2010, 2011,...2018) para distancias de 1 metro. En esta tabla se indican los 10 primeros metros del perfil 3 (Cono B).

Distancia (m)	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
0	2620,994	2620,982	2620,968	2621,074	2620,982	2620,995	2621,138	2620,876	2621,102	2621,023
1	2620,300	2620,287	2620,279	2620,391	2620,297	2620,307	2620,446	2620,210	2620,414	2620,309
2	2619,599	2619,593	2619,596	2619,708	2619,613	2619,619	2619,753	2619,533	2619,726	2619,584
3	2618,899	2618,898	2618,912	2619,025	2618,927	2618,931	2619,060	2618,855	2619,037	2618,860
4	2618,410	2618,204	2618,229	2618,342	2618,241	2618,243	2618,367	2618,165	2618,348	2618,135
5	2617,703	2617,510	2617,545	2617,654	2617,556	2617,554	2617,673	2617,431	2617,659	2617,431
6	2616,996	2616,815	2616,862	2616,954	2616,870	2616,866	2616,979	2616,736	2616,969	2616,766
7	2616,289	2616,122	2616,178	2616,254	2616,181	2616,177	2616,286	2616,066	2616,274	2616,101
8	2615,582	2615,442	2615,495	2615,554	2615,492	2615,508	2615,592	2615,393	2615,580	2615,434
9	2614,875	2614,762	2614,807	2614,853	2614,803	2614,840	2614,898	2614,721	2614,886	2614,764
10	2614,168	2614,083	2614,118	2614,137	2614,114	2614,173	2614,205	2614,048	2614,192	2614,094

El origen de los cálculos de la evolución de los conos es la generación de perfiles (Tabla 1), con la representación de la altitud para distancias separadas un metro con respecto a un origen

fijo. Ello se hace para cada año medido en cada uno de los perfiles de máxima pendiente (Figura 2). En general, la longitud total de cada uno de los perfiles es superior a 150 metros, como se puede ver en la figura 2. En general, la diferencia de altitud entre una medición anual y el resto de años no suele superar el valor de los 30 cm. La representación gráfica de los valores altimétricos queda expresada en los perfiles de máxima pendiente para cada año (Figura 3).

Como se ha indicado anteriormente, para cada cono de derrubios se han determinado 6 perfiles de máxima pendiente, y ello se ha hecho para los 10 años de observación, por tanto se dispone de 120 perfiles, con información de 24.000 puntos altimétricos, como los expresados en la tabla 1.

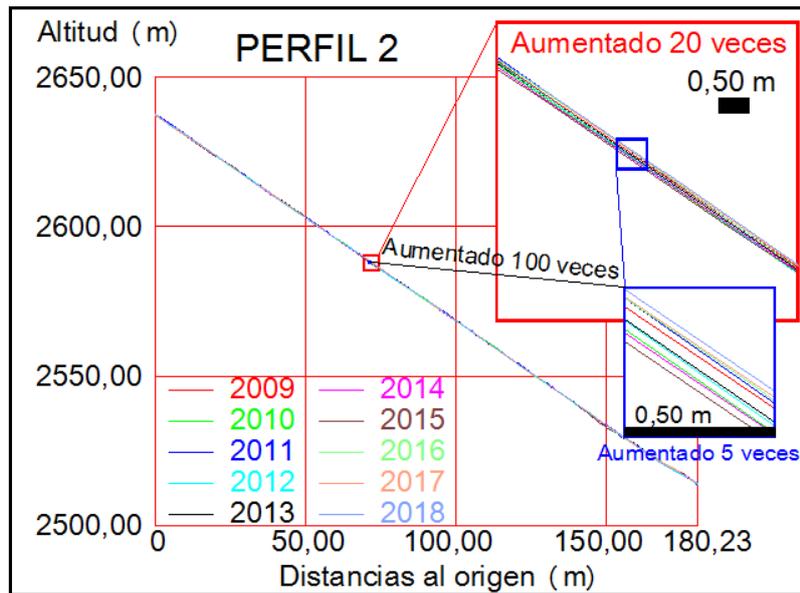


Figura 3. Representación de la evolución anual (2009-2018) del perfil 2 del Cono A. El cuadro azul está ampliado 100 veces con respecto al perfil.

Por tanto, partiendo de la información de cada perfil como la mostrada en la tabla 1, se emplea una metodología analógica (representación sobre una tabla “excel”) para ver la evolución e interpretar sus valores, y la técnica analítica (modelización matemática de la dinámica).

3.1. Metodología analógica

De la tabla 1 se han analizado las diferencias parciales o anuales de dos años consecutivos donde se ha restado el valor de la altitud de un punto del perfil para un determinado año, con el valor de la altitud del mismo punto del perfil del año anterior. Así, los periodos de los cálculos son: 2010-2009; 2011-2010; 2012-2011; 2013-2012; 2014-2013; 2015-2014; 2016-2015; 2017-2016 y 2018-2017. Si el valor resultante es positivo, se entiende que se ha depositado material rocoso y si el valor es negativo se ha erosionado. Como se indicó anteriormente, en general existen valores diferenciales de centímetros y son excepcionales los casos donde las diferencias son superiores a 30 cm (Figura 4). En la figura 4 se representa un perfil con intervalos de distancia de 10 metros y valores diferenciales de altitud respecto a una situación sin diferencias (0,00 m) de la medición del año anterior. Si en el perfil se ha ganado material de derrubios para un

intervalo de distancia de 10 m, entonces se indica con "A" (Arriba), pero si ha perdido material, entonces se pone "B" (Bajo). Esto se ha realizado para el mismo perfil, durante los periodos anuales, de manera que se obtiene la figura 5.

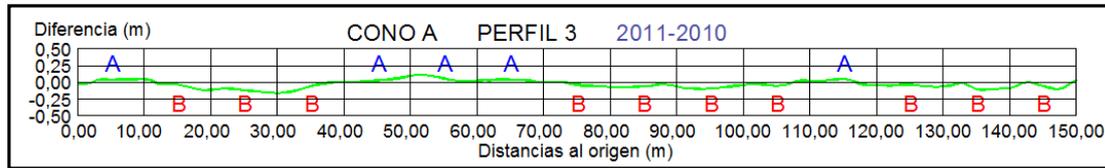


Figura 4. Ganancias (A) y pérdidas (B) entre la comparativa de dos años consecutivos (2011-2010) del perfil 3 del Cono A.

En la figura 5, se realizan líneas de evolución del perfil a lo largo de los años, así en color morado está la línea de evolución de acumulación a lo largo del perfil y en color amarillo la línea de las pérdidas. En todos los casos son evoluciones superiores a cinco años de forma consecutiva. Puede comprobarse que tanto la acumulación como la pérdida de material siguen la misma secuencia, esto es un retroceso o avance de 50 metros en 5 años o 60 metros en 6 años.

Intervalos (m)	2010-09	2011-10	2012-11	2013-12	2014-13	2015-14	2016-15	2017-16	2018-17
0-10	Red	Blue	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Red
10-20	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Red
20-30	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red
30-40	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue
40-50	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue
50-60	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue
60-70	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red
70-80	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue
80-90	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue
90-100	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red
100-110	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue
110-120	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue
120-130	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue
130-140	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red
140-150	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue	Red	Blue	Blue

Figura 5. Evolución anual del perfil 3 (Cono A) para intervalos de distancias de 10 metros. Los valores de la figura 4 coinciden con la columna del periodo anual 2011-10.

Tanto en el Cono A, como en el Cono B se han seleccionado los perfiles 2, 3, 4 y 5 (Figura 2). Se ha realizado la comparativa de 9 perfiles como el obtenido en la figura 4 para cada uno de los perfiles de máxima pendiente.

También, se ha analizado el comportamiento de un año con respecto al año anterior y posterior, de manera que se han cogido tripletas de años. Así por ejemplo, se compara el perfil del periodo 2013-2012 con el perfil 2014-2013 (Figura 6). De igual modo, se precede con el resto de tripletas para cada perfil, quedando indicado en la figura 5, la tripleta 2014-13 con 2015-14 y la tripleta 2015-14 con 2016-15.

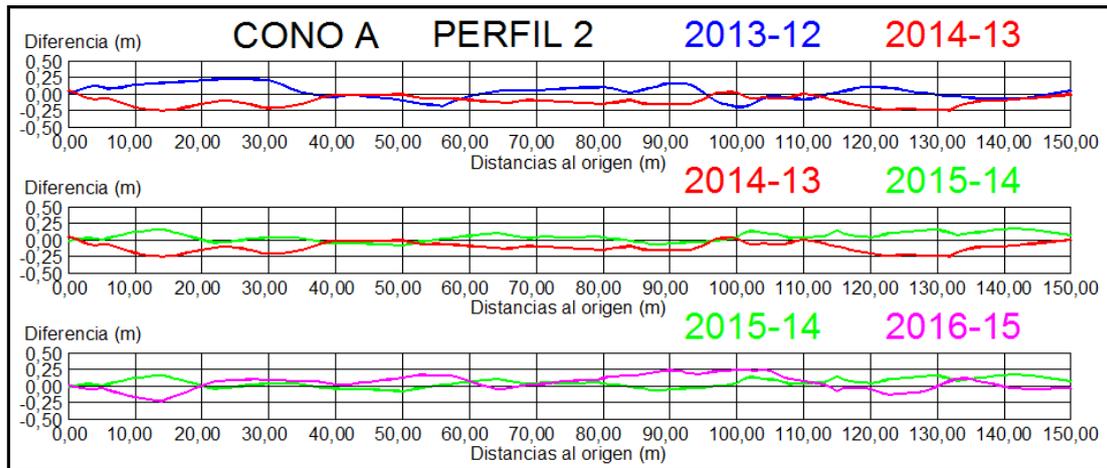


Figura 6. Representación perfil 2 del Cono A, por tripleta de años (2013-12 y 2014-13; 2014-13 y 2015-14; 2015-14 y 2016-15).

Este estudio nos permite analizar cómo se van compensando las pérdidas y ganancias de material a lo largo del tiempo. En general, los años que tiene pérdida queda compensado con el siguiente periodo anual. Pero no siempre ocurre esto, y ello es lo que provoca las tendencias lineales de la figura 5.

3.2. Modelización matemática

Para predecir los valores de los perfiles para el año 2018 se utilizan los datos de los conos de derrubios recogidos anualmente de los perfiles (Tabla 1) desde el año 2009 hasta el año 2017. Para estos cálculos se ha tenido en cuenta que, aunque los datos obtenidos en años anteriores forman un conjunto discreto de valores, realmente son valores pertenecientes a las curvas anuales que representan la evolución de un proceso continuo. Por la naturaleza del fenómeno, se considera que son adecuadas las técnicas introducidas en los últimos años para la predicción y análisis de datos funcionales [14] [15] [16].

Estas técnicas respetan la naturaleza continua del fenómeno en contraposición con las técnicas estadísticas aplicadas a datos multivariantes. Es decir, la muestra de datos que estaba formada por vectores, ahora está formada por curvas. Para el análisis predictivo se va a utilizar un modelo autorregresivo de primer orden, desarrollado por Bosq (2000) [14] y que está dado por la siguiente ecuación:

$$X_{n+1} = \Psi(X_n) + \varepsilon_{n+1}$$

Donde el error ε_{n+1} y las observaciones X_n son curvas. Ψ es un operador lineal que transforma una curva en otra curva.

Lo que se hará es obtener un estimador $\hat{\Psi}$ del operador Ψ (ajustado gracias al histórico de la muestra funcional $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$) y dar la predicción de X_{n+1} como $\hat{X}_{n+1} = \hat{\Psi}(X_n)$.

El operador funcional Ψ actuando sobre una curva X se considera un operador integral, es decir, de la forma:

$$\Psi(X)(t) = \int_0^1 \psi(t, s)X(s)ds$$

donde $\psi(t, s)$ es el llamado núcleo del operador.

Los diferentes métodos de predicción que existen en la literatura difieren entre sí en la elección del estimador del núcleo del operador $\hat{\psi}(t, s)$. Tras varias comparaciones iniciales, con diferentes estimadores del núcleo, se ha optado por la estimación denominada EK desarrollada en la sección 2 de Didericksen et al. (2011) [17] y con la que se obtiene muy buenos resultados.

Hay que realizar algunos cambios en la muestra original para poder aplicar el método mencionado. La muestra inicial de datos, en nuestro caso particular, está formada por valores discretos obtenidos anualmente en periodo de años 2009-2017. Los valores correspondientes a cada uno de esos años los distribuimos uniformemente en el intervalo $[0,1]$ y los interpolamos por splines formando 9 curvas que dan lugar a la muestra funcional $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9\}$.

Como ya se ha comentado en secciones anteriores, trabajaremos con las diferencias entre años consecutivos. Por otro lado, la muestra debe estar centrada, es decir, a cada curva se le resta la media muestral funcional. De esta forma partimos de una muestra funcional de 9 curvas $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ con $X_i = (C_{i+1} - C_i) - \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 (C_{j+1} - C_j)$, con $i = 1, \dots, 8$.

A partir de la muestra $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ obtenemos el estimador del núcleo del operador $\hat{\psi}(t, s)$, obtenemos la estimación del operador $\hat{\Psi}(X)$ y, por tanto, la predicción de X_{10} (año 2018) dada por $\hat{X}_9 = \hat{\Psi}(X_8)$.

Esta metodología puede ser aplicada a cualquiera de los perfiles de los que se han tomado datos. Por ejemplo, se ha aplicado al perfil 3 del Cono A (Figura 5) y al perfil 3 del Cono B y sobre los cuales se ha desarrollado el proceso analítico.

3.2.1. Análisis del perfil 3 del Cono A

La muestra $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ está formada por las 8 curvas pertenecientes al espacio de Hilbert $L^2_{[0,1]}$ y están representadas en la Figura 7, siendo la predicción (año 2018) obtenida \hat{X}_9 , la que aparece en color rojo.

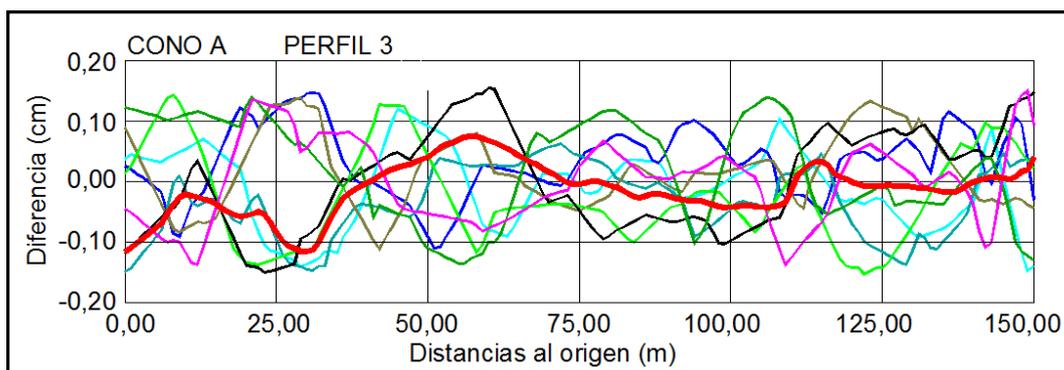


Figura 7. Representación predictiva (color rojo) del perfil 3 del Cono A.

Si a \hat{X}_9 le sumamos la media $\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 X_j$ se obtiene la predicción de la diferencia entre el año 2018 y 2017. Y por tanto sumándole los datos de 2017 podemos dar una predicción de los valores discretos de 2018.

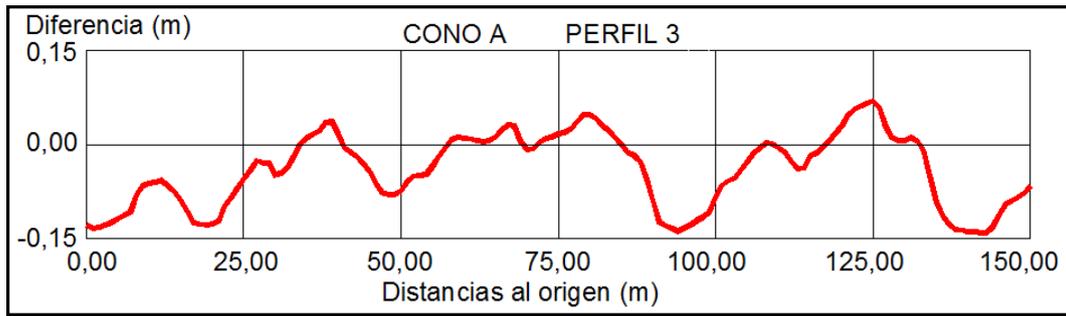


Figura 8. Representación de la diferencia de dos curvas: La curva obtenida como predicción del año 2018 y curva de los valores reales medidos del año 2018, del perfil 3 del Cono A.

Mientras tanto, por otra parte se disponen de los datos de campo para el año 2018. La figura 8 recoge la diferencia entre las gráficas de la predicción para el año 2018 ($f(t)$) y los datos reales medidos para el mismo periodo ($g(t)$) (Tabla 2). Como puede observarse en la figura 8, las diferencias para el perfil 3 del Cono A, y en general para los seis perfiles del Cono A no es superior a los 15 cm.

Tabla 2. Valores numéricos de la figura 8 sobre la diferencia entre los datos predictivos y los obtenidos en campo para el año 2018.

Distancia (m)	Diferencia (m)										
1	-0,138	26	-0,041	51	-0,058	76	0,019	101	-0,065	126	0,058
2	-0,133	27	-0,025	52	-0,049	77	0,026	102	-0,057	127	0,027
3	-0,128	28	-0,029	53	-0,048	78	0,036	103	-0,054	128	0,010
4	-0,124	29	-0,029	54	-0,047	79	0,047	104	-0,039	129	0,001
5	-0,118	30	-0,047	55	-0,034	80	0,046	105	-0,026	130	0,003
6	-0,112	31	-0,046	56	-0,019	81	0,046	106	-0,013	131	0,011
7	-0,106	32	-0,035	57	-0,004	82	0,029	107	0,001	132	0,004
8	-0,087	33	-0,017	58	0,008	83	0,021	108	0,001	133	-0,009
9	-0,065	34	0,001	59	0,011	84	0,012	109	-0,008	134	-0,047
10	-0,062	35	0,009	60	0,010	85	0,001	110	-0,004	135	-0,087
11	-0,059	36	0,016	61	0,008	86	-0,011	111	-0,012	136	-0,113
12	-0,057	37	0,020	62	0,006	87	-0,017	112	-0,027	137	-0,125
13	-0,066	38	0,035	63	0,004	88	-0,027	113	-0,038	138	-0,134
14	-0,076	39	0,046	64	0,006	89	-0,054	114	-0,037	139	-0,136
15	-0,087	40	0,016	65	0,012	90	-0,087	115	-0,016	140	-0,138
16	-0,106	41	-0,029	66	0,022	91	-0,123	116	-0,012	141	-0,143
17	-0,123	42	-0,012	67	0,032	92	-0,129	117	-0,003	142	-0,148
18	-0,138	43	-0,019	68	0,029	93	-0,133	118	0,004	143	-0,146
19	-0,155	44	-0,038	69	0,005	94	-0,138	119	0,018	144	-0,131
20	-0,128	45	-0,043	70	-0,018	95	-0,133	120	0,030	145	-0,113
21	-0,121	46	-0,061	71	-0,006	96	-0,128	121	0,046	146	-0,094
22	-0,098	47	-0,076	72	0,004	97	-0,121	122	0,055	147	-0,089
23	-0,083	48	-0,079	73	0,010	98	-0,112	123	0,060	148	-0,091
24	-0,069	49	-0,078	74	0,012	99	-0,106	124	0,065	149	-0,079
25	-0,055	50	-0,072	75	0,017	100	-0,079	125	0,068	150	-0,066

Existen diferentes medidas de error entre la predicción de la curva obtenida por predicción y la real. Las más frecuentes son el error cuadrático medio funcional y promedio integral de la diferencia:

- El error cuadrático funcional medio que obtenemos es:

$$\frac{1}{151} \sqrt{\int_1^{151} (f(t) - g(t))^2 dt} = 0.081 \text{ m}$$

- El promedio integral de la diferencia es:

$$\frac{1}{151} \int_1^{151} (f(t) - g(t))dt = 0.051 \text{ m}$$

3.2.2. Análisis del perfil 3 del Cono B

Repitiendo el proceso anterior, se parte nuevamente de la muestra $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ que está formada por las 8 curvas representadas en la figura 9, donde la predicción \hat{X}_9 , obtenida, es la que aparece en color rojo.

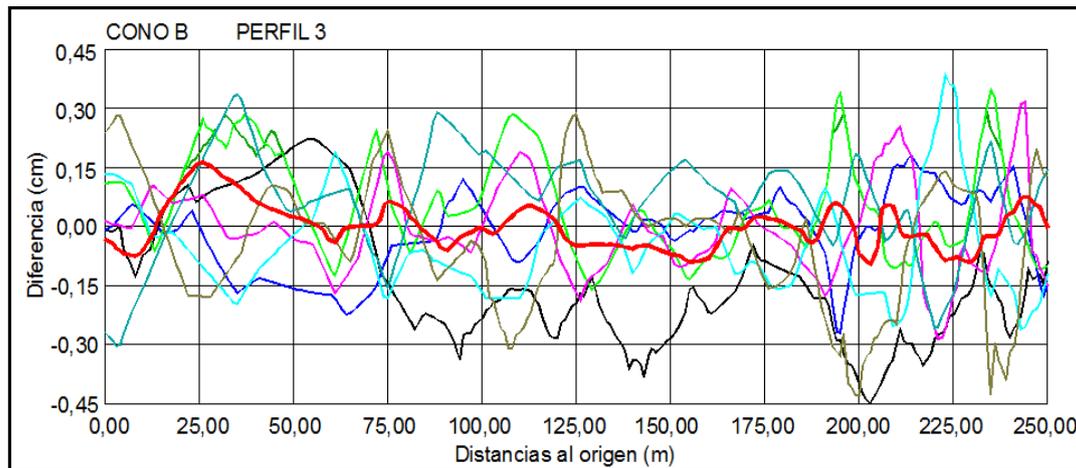


Figura 9. Representación predictiva (color rojo) del perfil 3 del Cono B.

Nuevamente, si a \hat{X}_9 le sumamos la media $\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 X_j$ se obtiene la predicción de la diferencia entre el año 2018 y 2017. Y por tanto, sumándole los datos de 2017 podemos dar una predicción de los valores discretos de 2018. La figura 10 recoge la diferencia entre las gráficas de la predicción para el año 2018 ($f(t)$) y los datos reales medidos para el mismo periodo ($g(t)$). Como puede observarse en la figura 10, las diferencias para el perfil 3 del Cono B, no es superior a los 30 cm.

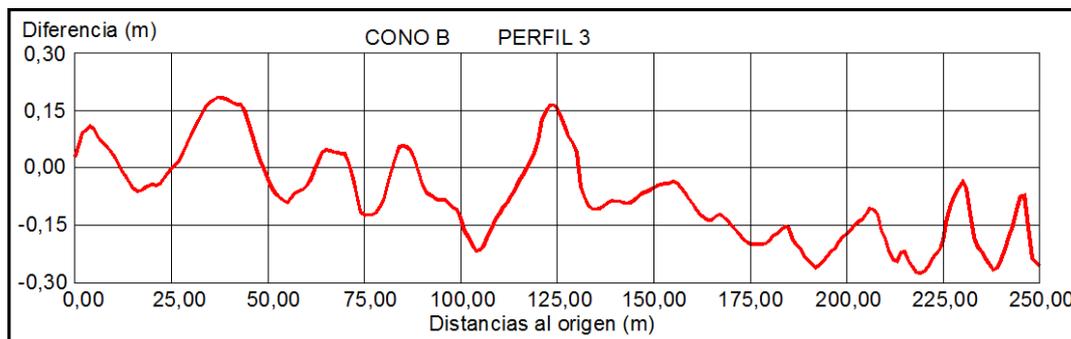


Figura 10. Representación de la diferencia de dos curvas: La curva obtenida como predicción del año 2018 y curva de los valores reales medidos del año 2018, del perfil 3 del Cono B.

Se vuelven a calcular las mismas medidas de error que en el apartado anterior, entre la predicción de la curva y la real, siendo:

- El error cuadrático funcional medio que obtenemos es:

$$\frac{1}{251} \sqrt{\int_1^{251} (f(t) - g(t))^2 dt} = 0.170 \text{ m}$$

- El promedio integral de la diferencia de:

$$\frac{1}{251} \int_1^{251} (f(t) - g(t)) dt = 0.110 \text{ m}$$

La muestra del perfil 3 del Cono B tiene una predicción menos precisa (los errores son mayores) que la obtenida en el perfil 3 del Cono A. En este caso, el método es sensible a algún acontecimiento excepcional (grandes bloques de piedras), principalmente en la zona final de los perfiles, como puede comprobarse en la figura 9. Por ello, la diferencia entre las curvas (predicción y medida) del perfil 3 del Cono B (Figura 10) es mayor que las variaciones del perfil 3 del Cono A (Figura 8). Las diferencias del perfil 3 del Cono B son de + 16 cm y - 27 cm y del perfil 3 del Cono A son de + 7 cm y -15 cm.

4. Discusión

Los clastos que componen un cono de derrubios pueden dar la sensación que no se mueven sino son provocadas por algún elemento externo (caída de material de las paredes que la rodean, animales principalmente rebecos, acumulación de nieve,...). Pero, cuando se miden con equipos topográficos de precisión y se hacen perfiles de máxima pendiente durante un periodo continuado de tiempo, entonces puede determinarse su dinamismo.

Los tamaños de los clastos que componen los conos de derrubios analizados en La Vueltona son heterogéneos, aunque el tamaño normalizado es de 30 cm existen rocas de grandes dimensiones (superiores al metro) en el Cono B. Este asunto condiciona la realización de los MDE, los cuales tienen una diferencia máxima de 15 cm para la generación del mismo modelo con una malla de medida de 3x3 metros. En la comparación anual de los MDE hay diferencias máximas de 30 cm.

Analizando los perfiles de máxima pendiente de ambos conos de derrubios se puede indicar:

- El comportamiento de los conos de derrubios es ondulatorio, esto es, un determinado punto situado en el perfil respecto a su altitud en el año anterior o posterior sufre variaciones (Figura 4). Si estos cambios se analizan en la línea de máxima pendiente, puede comprobarse que hay zonas que pierden material y otras que lo ganan, pero las mismas zonas no siempre pierden o ganan material sino que se van compensando esas variaciones (Figura 6). Por tanto, todo indica que si se suman para cada intervalo de distancia los periodos anuales de acumulaciones y de pérdidas, muestran valores que siempre son de 4 o 5 periodos (acumulación, pérdida), para el total de 9 periodos estudiados (2010-2009,... 2018-2017) (Figura 5).
- La interpretación analógica de los perfiles de máxima pendiente analizados y representados como ejemplo en la figura 5, es la siguiente:
 1. Las variaciones en los perfiles son heterogéneas, esto es no existe una acumulación o pérdida general de material con el paso del tiempo. En el perfil donde un año hay pérdida de material, en el año siguiente o sucesivos tiende a

rellenarse pero manteniendo la pendiente y cota. Así, si analizamos parejas anuales (Figura 6), se comprueba que se van compensando las acumulaciones de un periodo con las pérdidas de periodos anteriores y posteriores. Siendo estos perfiles simétricos con respecto al valor cero.

2. En ningún caso, para un mismo intervalo de distancia hay más de tres periodos (columnas) seguidos que sea de acumulación (A) o de pérdida (B). Esto corrobora lo explicado anteriormente, y es que no existe una continuidad en el tiempo de acumulación o pérdidas de material en determinadas zonas, sino que en periodos donde existe acumulación se compensan con periodos de pérdidas de material.
3. Se han cogido secuencias superiores a cinco periodos anuales donde existan valores continuos de acumulación "A" (líneas moradas) o pérdida "B" (líneas amarillas) (Figura 5). Las tendencias de estas secuencias siempre es la misma (retroceso en el tiempo), así por ejemplo, en la figura 5, la secuencia "B" (línea amarilla) que empieza en el periodo 2010-2009 y a una distancia entre 80 y 90 metros del origen del perfil, para el periodo siguiente (2011-10) se encuentra 10 metros más atrás (70-80 metros), y este proceso continúa hasta el periodo 2015-2014 para un intervalo de distancia de 30-40 m. En este caso es una secuencia de pérdida de material o erosión. Lo mismo ocurre con las secuencias de acumulación "A" (líneas moradas).
4. Siguiendo con el ejemplo de la figura 5: La erosión en retroceso se puede interpretar como que un pequeño deslizamiento que se produce a una determinada distancia es rellenada con material que se encuentra por detrás; y deja el hueco de material que se ha movido hacia delante para el siguiente año. Este proceso se va realizando de forma continua hasta que se estabiliza el perfil (Figura 11).

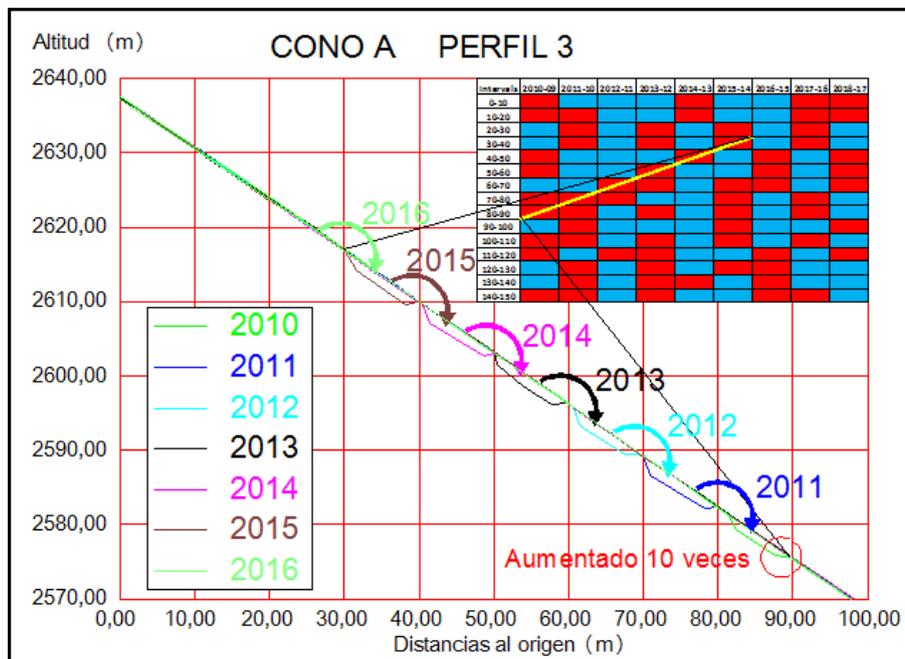


Figura 11. Perfil que señala la erosión en retroceso, a lo largo de un periodo de 6 años (2010-15). El efecto de retroceso está aumentado 10 veces.

5. La acumulación de material rocoso en retroceso se puede interpretar como que una pequeña acumulación de material que se produce a una distancia hace "TOPE", y produce una acumulación por detrás al año siguiente; y producirse este efecto en años sucesivos. El proceso se va realizando de forma continua hasta que se estabiliza, y en la figura 12, esto ocurre el año 2015.

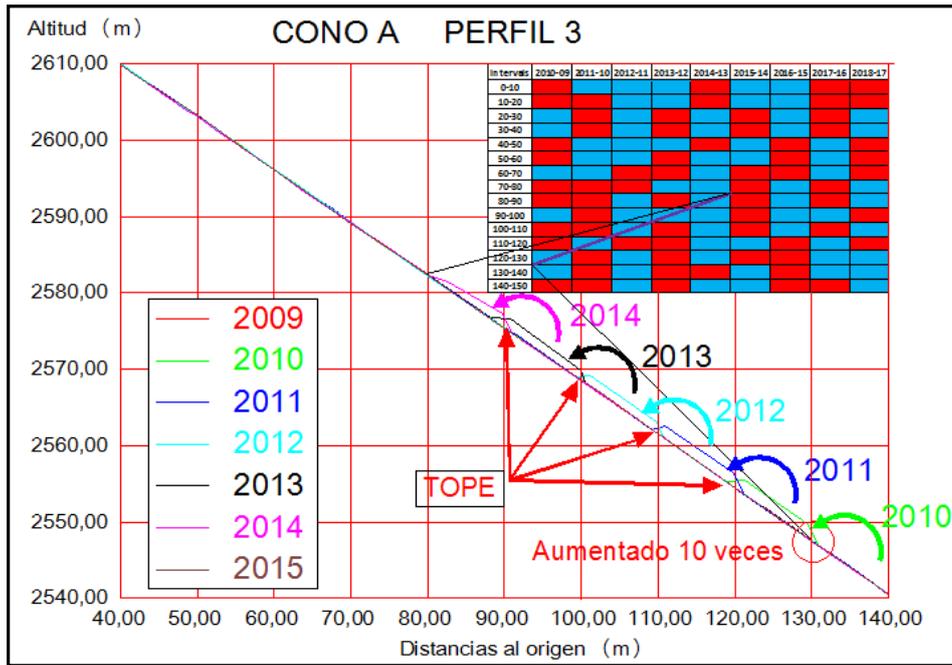


Figura 12. Perfil que señala la acumulación de material rocoso en retroceso, a lo largo de un periodo de 5 años (2010-14). El efecto de acumulación está aumentado 10 veces.

6. También se producen secuencias de erosión y acumulación en el sentido de avance de los conos, pero en este caso no hay periodos anuales continuados que sean superiores a cuatro años. Es posible que pudieran producirse, pero por ahora en los ocho perfiles analizados (cuatro perfiles en cada cono) no ha ocurrido.

Partiendo de los datos anuales del periodo 2009-2017, también se ha realizado la predicción del año 2018 utilizando procedimientos matemáticos. En el año 2018 se han medido en el campo los conos de derrubios. Por tanto, se puede obtener la diferencia entre la curva predictiva y la medida, resultando:

- Cono A: Es un cono muy uniforme en la composición de material rocoso y las diferencias no son superiores a los 15 cm entre ambas curvas (Figura 8). El ajuste integral del cono es de 5 cm.
- Cono B: es un cono que está compuesto por grandes bloques de piedras, principalmente en la zona inferior del cono, lo cual ha generado que las diferencias entre la curva predictiva de 2018 y la medición real muestre diferencias de 27 cm, principalmente en

esta zona inferior del cono (Figura 10). Aunque el promedio integral de todo el ajuste es de 11 cm.

Evidentemente, el promedio integral de la curva del Cono A es de una calidad mayor que la curva del Cono B. Siendo el ajuste del Cono A cercano a la precisión del instrumental (2 cm). Y las curvas de ambos conos están por debajo del error producido en la generación de un mismo MDE, que es de 15 cm. Es de esperar que, a medida que el número de mediciones de campo aumente (actualmente sólo se dispone de 10 mediciones), la curva de predicción se ajuste mejor a la curva de medida. Esto debe ocurrir siempre y cuando no se produzcan acontecimientos extraordinarios, como grandes deslizamientos o desprendimientos de rocas, que por ahora (2009-2018) no han sucedido.

5. Conclusiones

La técnica del escáner láser terrestre (TLS) se ha mostrado muy eficaz para el control de los cambios superficiales y volumétricos anuales, y las tendencias a corto y medio plazo con precisiones adecuadas al movimiento superficial. Esta técnica permite el conocimiento detallado de los procesos de transferencia de sedimentos en sistemas de ladera de alta montaña. Las precisiones que permiten las características técnicas del TLS es de ± 2 cm en la medición del punto. Cuando se observa un mismo cono de derrubios dos veces en la misma fecha se obtienen diferencias en la generación del MDE que son inferiores a los ± 15 cm, excepto situaciones puntuales donde no se sobrepasa de los 20 cm; y en la zona inferior del Cono B, donde existen piedras de grandes dimensiones (superiores a 1 metro). Las diferencias anuales entre los MDE tiene valores por debajo de los ± 30 cm, excepto en las áreas de los grandes bloques de piedras del Cono B.

Por tanto, estos valores han condicionado el resultado de cada cono:

- Cono A: Posiblemente tiene la configuración de la mayoría de los conos en zonas de alta montaña templada. Tiene una distribución uniforme del material rocoso, o sea las piedras tienen un tamaño muy similar en todo el cono (30 cm). Por ello, los resultados de los perfiles de máxima pendiente y los volúmenes son muy estables con el paso del tiempo. Cuando se realiza un estudio predictivo del año 2018, con los datos de 2009-2017, y se comparan con los datos de campo de 2018, muestra diferencias que no superan los 5 cm. En este cono existe un equilibrio entre la acumulación y la transferencia de sedimentos.
- Cono B: Es un cono que está compuesto por grandes bloques de piedras, principalmente en la zona inferior del cono, donde la comparación de los perfiles muestran diferencias de 45 cm. Todo ello, provoca que la diferencia entre la curva predictiva de 2018 y la medición real muestre un ajuste de ± 11 cm. Este cono tiene un flujo de derrubios que afecta a sus cálculos, ya que tiene grandes cambios, siendo de erosión en la zona superior y de sedimentación en la inferior.

En general, a medida que el número de datos aumente con la toma de datos de más campañas (actualmente sólo se dispone de 10 mediciones), es de esperar que la predicción mejore. Será así, siempre y cuando no se produzca algún acontecimiento brusco, no ocurrido hasta ahora (2009-2018), como la caída de material excepcional de las paredes de los conos o un deslizamiento extraordinario del material rocoso de los conos [18].

Agradecimientos

Este trabajo forma parte de los proyectos TIN2016-76843-C4-2-R (AEI/FEDER, UE) y CGL2015-68144-R (MINECO/FEDER). También agradecemos a la Junta de Extremadura y al Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) la ayuda de referencia GR18053 para la investigación del grupo de investigación NEXUS.

Referencias

- [1] GARDNER, J.S. ACCRETION RATES ON SOME DEBRIS SLOPES IN THE MT. RAE AREA, CANADIAN ROCKY MOUNTAINS. *Earth Surface Processes and Landforms*, 8: 347-355. 1983.
- [2] LUCKMAN, B.H. DEBRIS ACCUMULATION PATTERNS ON TALUS SLOPES IN SURPRISE VALLEY, ALBERTA. *Géographie physique et Quaternaire*, 42 (3): 247-278. 1988.
- [3] BALLANTYNE, C.K. PARAGLACIAL GEOMORPHOLOGY. *Quaternary Science Reviews*, 21 (18-19): 1935-2017. 2002.
- [4] FRANCOU, B. *L'ÉBOULISATION EN HAUTE MONTAGNE*. Editec. Grenoble. 1988.
- [5] DELALOYÉ, R., REYNARD, E., LAMBIEL, C., MARESCOT, L. & MONNET, R. THERMAL ANOMALY IN A COLD SCREE SLOPE, CREUX DU VAN, SWITZERLAND. In *Proceeding 8th Int. Conf. Perm., IPA, Zurich*. Pp. 175-180. 2003.
- [6] HERZ, T., KING, L. & GUBLER, H. MICROLIMATE WITHIN COARSE DEBRIS OF TALUS SLOPES IN THE ALPINE PERIGLACIAL BELT AND ITS EFFECT ON PERMAFROST. In *Proceeding 8th Int. Conf. on Permafrost, IPA, Zurich*. Pp. 383-388. 2003.
- [7] SCAPOZZA, C., LAMBIEL, C., BARON, L., MARESCOT, L. & REYNARD, L. INTERNAL STRUCTURE AND PERMAFROST DISTRIBUTION IN TWO ALPINE PERIGLACIAL TALUS SLOPES, VALAIS, SWISS ALPS. *Geomorphology*, 132: 208-221. 2011.
- [8] SERRANO, E., SANJOSÉ, J.J., GÓMEZ-GUTIÉRREZ, A. & GÓMEZ-LENDE, M. SURFACE MOVEMENT AND CASCADE PROCESSES ON DEBRIS CONES IN TEMPERATE HIGH MOUNTAIN (PICOS DE EUROPA, NORTHERN SPAIN). *Science of the Total Environment*, 649: 1323-1337. 2019.
- [9] GONZÁLEZ-TRUEBA, J.J. *GEOMORFOLOGÍA DEL MACIZO CENTRAL DEL PARQUE NACIONAL DE PICOS DE EUROPA*. OAPN-Ministerio de Medio Ambiente, Madrid. 231 pp. 2007b.
- [10] SERRANO, E., GONZÁLEZ-TRUEBA, J.J. & GONZÁLEZ GARCÍA, M. MOUNTAIN GLACIATION AND PALEOCLIMATE RECONSTRUCTION IN THE PICOS DE EUROPA (IBERIAN PENINSULA, SW EUROPE). *Quaternary Research*, 78: 303-314. 2012.
- [11] GONZÁLEZ-TRUEBA, J.J. *EL PAISAJE NATURAL DEL MACIZO CENTRAL DE LOS PICOS DE EUROPA*. CIMA, Consejería de Medio Ambiente, Santander. 330 pp. 2007a.
- [12] SERRANO, E. & GONZÁLEZ-TRUEBA, J.J. LA DINÁMICA GEOMORFOLÓGICA ACTUAL DE ALTA MONTAÑA Y MONTAÑA MEDIA. EN *GEOMORFOLOGÍA DEL MACIZO OCCIDENTAL DEL PARQUE NACIONAL DE PICOS DE EUROPA*. OAPN-Ministerio de Medio Ambiente, Madrid. pp. 79-108. 2010.
- [13] GONZÁLEZ-TRUEBA, J.J.; SERRANO, E.; GARCÍA GONZÁLEZ, M.; GOMÉZ LENDE, M. & RUIZ, J. *GEOMORFOLOGÍA DEL MACIZO OCCIDENTAL DEL PARQUE NACIONAL DE PICOS DE EUROPA*.

OAPN-Ministerio de Medio Ambiente, Madrid. 2012.

- [14] BOSQ, D. *LINEAR PROCESSES IN FUNCTION SPACES: THEORY AND APPLICATIONS*. Vol. 149. Springer Verlag. 2000.
- [15] RAMSAY, J.O. & SILVERMAN, B.W. *FUNCTIONAL DATA ANALYSIS*. Springer Verlag. 2005.
- [16] MAS, A. & PUMO, B. *LINEAR PROCESSES FOR FUNCTIONAL DATA*. arXiv:0901.2503. 2009.
- [17] DIDERICKSEN, D., KOKOSZKA, P. & ZHANG, X. Empirical properties of forecast with the functional autoregressive model. *Comput Stat*. DOI 10.1007/s00180-011-0256-2. 2011.
- [18] DE SANJOSÉ-BLASCO, J.J., LÓPEZ-GONZÁLEZ, M., ALONSO-PÉREZ, E. & SERRANO, E. MODELLING AND TERRESTRIAL LASER SCANNING METHODOLOGY (2008-2019) ON DEBRIS CONES IN TEMPERATE HIGH MOUNTAINS. *Remote Sensing*, 12: 632-654. 2020.

Sobre los autores:

Nombre: José Juan de Sanjosé Blasco

Correo Electrónico: jjblasco@unex.es

Institución: Universidad de Extremadura

Nombre: Mariló López González

Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Estrella Alonso Pérez

Correo Electrónico: ealonso@icai.comillas.edu

Institución: Universidad Pontificia de Comillas

Nombre: Enrique Serrano Cañadas

Correo Electrónico: serranoefyl.uva.es

Institución: Universidad de Valladolid

Experiencias Docentes

Lectura e interpretación de una representación gráfica engañosa

Reading and interpreting a misleading graphical representation

Carla Santos

Cristina Dias

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 047-054, ISSN 2174-0410

Recepción: 24 Ago'20; Aceptación: 9 Sep'20

1 de octubre de 2021

Resumen

En la sociedad basada en datos del siglo XXI, el uso de representaciones gráficas está muy extendido en los medios de comunicación, anuncios comerciales, informes técnicos y comerciales e investigación científica. Aunque la información en los gráficos estadísticos a menudo se considera clara para los destinatarios, la literatura proporciona una amplia evidencia de que la comprensión de los gráficos es una tarea compleja.

En una tarea que consiste en leer e interpretar un gráfico de barras con el eje de ordenadas truncado, la mayoría de los estudiantes tuvo dificultades para interpretar el contenido de lo gráfico, alcanzando solo el primero de los tres niveles de la taxonomía de comprensión gráfica de Curcio.

Palabras Clave: Alfabetización estadística, educación superior, desinformación, ejes truncados, gráfico de barras.

Abstract

In the 21st century data-driven society, the use of graphical representation is widespread in the media, commercial advertisements, technical and business reports, and scientific research. Although statistical graphs are often considered clear to the recipients of the information, the literature provides extensive evidence that graph comprehension is a complex task.

In a task involving the reading and interpretation of a bar graph with truncated y-axis, most students showed difficulties in interpreting the content of the graph, reaching only the first of the three levels of Curcio's taxonomy of graphical comprehension.

Keywords: Axis truncation, bar graph, higher education, misinformation, statistical literacy.

1. Introduction

In modern society, a wide range of communicative, analytical, and technological skills is required. Looking at some of the definitions of literacy (e.g. Kirsch et al., 1993, Benavente et al., 1996, Murnane et al., 2012), they all focus on possessing the skills to access, process and communicate information. Since much of this information appears in the form of numbers or graphs, the ability to understand and use numerical information, coined by the term numeracy, has become indispensable in personal and professional life (Steen, 1999).

In the 21st century, numeracy is critical for the understanding of the world, taking part in many domains belonging to a broad modern concept of literacy, such as health literacy, media literacy, political literacy and financial literacy. Today's data-driven society requires every citizen to have statistical culture, regardless of his profession or qualifications, so one of the main aspects of numeracy is statistical literacy.

From the 90s of the last century there was an increasingly strong call for statistics education to leave the traditional approach, based on procedures and computations, and to focus on statistical literacy, reasoning, and thinking. Despite all recommendations and changes in school curricula, the reality of the study of statistics at basic and secondary level has not changed considerably to strengthen students' statistical literacy (Zieffler et al., 2008, Sabbag & Zieffler, 2015), as evidenced by the difficulties that many higher education students reveal when developing studies that require the use of statistical tools and the interpretation of data.

Statistical graphs are very powerful communication tools, ubiquitous in the media, commercial advertisements, technical and business reports, and scientific research. The rapidly increasing availability of statistical graphs produced by computer programs and applications, afforded their widespread use in all areas of society, emphasizing the need for statistical literacy for all individuals, as citizens and professionals, which led to reviews of school mathematics curricula at all levels of the education system.

As emphasized by the saying "A picture is worth a thousand words", statistical graphs allow to display large amounts of data, clearly communicating the insights of that data in a way that words could hardly achieve.

Despite the frequent contact of most individuals with statistical graphs, there is evidence in the literature that many people cannot read and interpret graphs properly, even the simplest ones (e.g. Dreyfus and Eisenberg, 1990, Glazer, 2011). One of the factors suggested for that is the specificity of statistical reasoning, which "being an artefact of civilization, not part of our natural neural equipment" (Moore, 1998, p.1257), requires to be learned and exercised.

For higher education students it is imperative to be statistically literate, since their ability to use the appropriate statistical tools, in the development of studies in their future professional field, will enable them to make informed decisions.

As noted in the literature (e.g. Friel, Curcio & Bright, 2001), and in our practice as higher education teachers in courses requiring basic statistical literacy skills, many students do not master reading and interpreting of graphs, not even a basic bar graph.

In this work, we describe and analyse an activity that encompassed a task of reading and interpreting a bar graph, which was deliberately oriented towards a preconceived target. The aim of the task was to promote students' critical thinking when confronted by information in

graphic representations leading to biased conclusions, like those they encounter frequently in day-by-day life.

2. Representation of statistical data in bar graphs

2.1. Graph interpretation

Organising data in graphs is relevant not just for representing data, but also for finding relationships between variables, determining patterns, and identifying data properties. Thus, statistical graphics became an indispensable tool for decision making, in all areas of society, and their use is now widespread.

Since the late twentieth century, there has been a growing concern with the identification of factors involving the understanding of information contained in representations of statistical data (e.g. Galesic & Garcia-Retamero, 2011; Arteaga et al., 2011; Ratwani, Traflet & Boehm-Davis, 2008; Mautone & Mayer, 2007; Friel, Curcio & Bright, 2001; Kosslyn, 1985) and “interpretation of graphs” has been defined differently by different authors. Friel, Curcio & Bright (2001) consider “interpretation of a graph” as the ability to extract meaning from that graph, recognizing the constituent elements of the graph and their conformity, critically analyzing the influence of each of these elements on the transmission of information, translating the relationships established between the graph design and the data it represents and evaluating the adequacy of the graph. For Wu (2004) the interpretation of a graph refers to the ability to formulate opinions about the information expressed in the graph and the design of that graph. According to Monteiro & Ainley (2004), the interpretation of graphics is much more than a simple technical procedure, involving a wide range of knowledge, experiences, and feelings.

Each type of graph has its own specifications and its own language (Friel, Curcio and Bright, 2001), however, in order to be able to draw as much information as possible from any graph it is necessary to have certain skills. To assess the ability of critically read the data present in statistical tables and statistical graphs, Curcio (1989) distinguished the following three levels in the comprehension of data.

- (I) reading the data;
- (II) reading between the data;
- (III) reading beyond the data.

(I) represents an elementary comprehension level that only requires a literal reading of the graph, this is, the description of the facts explicitly expressed in the graph or table, with no interpretation.

(II) represents an intermediate comprehension level that requires the understanding of the data, the ability to make comparisons and combinations and to find trends, and the use of mathematical concepts and skills.

(III) represents an advanced comprehension level that requires the use of information that is neither explicitly nor implicitly stated in the graph to make predictions or inference, this is, requires extrapolation from the data.

The number of variables presented in a graph is one of the ways to categorise graph complexity. A simple graph representing one or two variables, like line graphs, scatter plots, bar graphs and pie graphs, requires little domain knowledge to interpret it (Glazer, 2011). Still, interpreting this type of graph is not simple for everyone, and doing so can become even more difficult if the graph design includes aspects that distort the perception of the data it represents.

2.2. Graph manipulation

Graphic representations of data, in general, and bar graphs, in particular, allow people to readily communicate and analyse data, however, many common graphical designs lead to engaging imagery but false interpretations and conclusion.

Fulfilling its primary purpose, graphs allow almost immediate assimilation of the information encoded in their design. When looking at a graph, it is common to focus attention on the most prominent aspects and neglecting the others. If the observer does not have the proper skills to read this graph critically, this observation may lead to a misinterpretation of the content.

Graph characteristics, such as format, colour or type can affect graph comprehension, but the perception of the information, contained in a statistical graph, can be intentionally biased by factors such as the obscure intentions with which some graphs are drawn and the aspects that may be neglected, intentionally omitted or adulterated in these graphs (e.g. Huff, 1954)

The scales of a bar graph are often manipulated to minimize differences between categories or to make them seem much larger. Another possible way to exaggerate differences in categories frequencies, and bias the information transmitted by a bar graph is y-axis truncation. This technique visually distorts the frequencies of the categories by beginning the y-axis of a bar graph at a value other than the typical zero.

3. Method

This study is part of a research of a group of higher education teachers, responsible for courses, requiring basic statistical literacy skills, in Portuguese polytechnic institutes.

The task we here describe and analyse consist in reading and interpreting a bar graph, which was deliberately designed to exaggerate differences, through y-axis truncation. The activity, of which this task is part, was structured taking into consideration the aspects that, in the literature, are identified as influencing the understanding of bar graphs. The graph in this task is often used by us to trigger a discussion about the importance of reading and interpreting graph skills and alert to distortion techniques used in graphing.

The participants in this study were forty-three students attending courses requiring statistical tools, belonging to management, social sciences, and health degrees of polytechnic higher education. The students performed the activity during a class of 60 minutes.

The graph we used in this task represents the number of beneficiaries of social inclusion income, in Portugal, in 2017 and 2018.

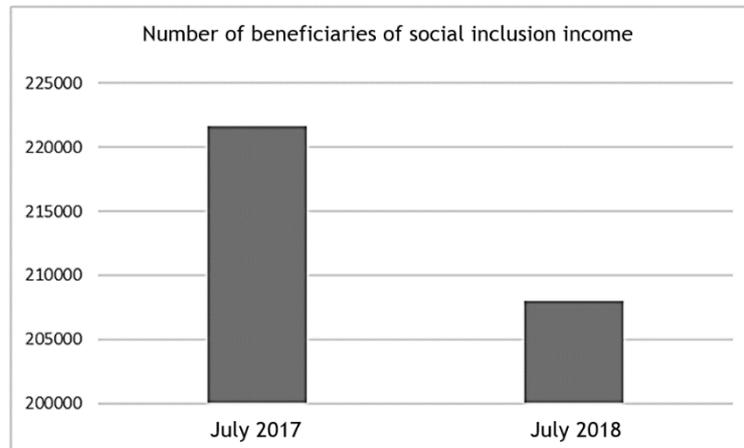


Figure 1: Bar graph used in the task

Source: Authors of the paper, using data from <http://www.seg-social.pt/estatisticas>.

Based on the observation of the graph, students were asked to comment on the statement "In 2018, there were less than half of RSI beneficiaries than in 2017".

Data was gathered from the students' answer sheets and analysed through content analysis, regarding the influence of y-axis truncation in the interpretation of the graph, the identification of the errors made by the students and the levels of graph comprehension achieved.

4. Results and discussion

Among the students' answers, 19 were correct, 10 partially correct and 14 incorrect.

Responses that provide valid arguments regarding the disagreement with the sentence under consideration, accompanied by the correct calculation of the percentage supporting that disagreement, were classified as correct.

The answers that disagreed with the sentence under consideration but were not substantiated by the computation of the percentage, reflecting the relationship between the quantities, were considered partially correct.

Only one of the students thoroughly justified the difference between the frequencies, presenting the percentage computation accompanied by a description of how y-axis truncation makes it difficult to immediately analyse the graph content.

Among the 14 wrong answers, 12 were caused by negligence of the y-axis truncation or because they could not identify the variable or understand the scale. The other 2, were non-sense answers.

Regarding the levels of Curcio's taxonomy of graphical comprehension, thinking over the statement associated with the graph only involves the most elementary level, requiring the literal reading of data, the comprehension of the scale and units of measurement and the identification of the variable. Whereas, to support the comment, the calculation of a percentage

would be necessary, so the task also involves the intermediate level of comprehension of graphics, with the use of prior mathematical knowledge.

The intermediate level in comprehension of graphics was achieved by 44% of the students, those whose answers were classified as correct. 37% of the students (10 with partially correct answers and 6 with wrong answers) were at the elementary level of graph comprehension. The remaining 8 students (19%) were unable to extract any relevant information from the graph.

Overall, students faced difficulties in interpreting the graph content, achieving mostly the first of the three data comprehension levels. Less than half of the students, participating in the study, were able to reach level II in data comprehension. It is noteworthy that y-axis truncation was a relevant factor in the cases of unsuccessful interpretation of the graph.

The results of our study led us to conclusions in line with those found in the literature on this subject, proving that the study of Statistics is not a guarantee of the acquisition of the basic skills of statistical literacy (e.g. Pereira-Mendoza & Mellor, 1990, Wu, 2004, Watson, 1997 and Arteaga *et al.*, 2011).

The literature is very limited in studies on the skills of higher education students in the interpretation of bar graphs, with most studies related to future students of primary education. In our study, students demonstrated a lack of skills to extract information from a bar graph. These findings were in line with other studies (e.g. Monteiro, Selva & Ferreira, 2000, Yang, Restrepo & Stanley, 2019).

5. Conclusion

The power to summarize large volumes of data and understand the most relevant characteristics of these data has made Statistics an indispensable working tool for researchers, as well as for the dissemination of numerical information in all fields of society.

Taking advantage of the technological development and the emergence of computer programs and applications that facilitate the elaboration of statistical graphs, the use of these graphs has become widespread in today's society, becoming essential elements, in scientific articles, technical reports, politics, sports or advertising. As a result, statistical literacy became component of adults' numeracy.

The proposed task consisted of reading and interpreting a simple bar chart, like those that often appear in the media. In order to enhance biased interpretations, in situations of negligence in observation or limited skills in the comprehension of data representations, authors designed a graph with truncation of the y-axis, exaggerating differences between categories.

Through the analysis of the students' answers, it was possible to identify their errors and difficulties as well as to evaluate the level of comprehension of data, expressed in a bar graph.

Reflection on the results of this study provides us with an opportunity to adapt the teaching methods and strategies implemented in the U.C. that we teach in order to respond appropriately to the need to educate citizens capable of consciously producing, decoding and using statistical information in their personal, social and professional lives.

6. References

- [1] ARTEAGA, P., BATANERO, C., CAÑADAS, G. y CONTRERAS, J. M. (2011) Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números* 76, 55-67.
- [2] CURCIO, F. R. (1989) *Developing graph comprehension*. Reston, N.C.T.M.
- [3] FRIEL, S., CURCIO, F. y BRIGHT, G. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158
- [4] GALESIC, M. y GARCIA-RETAMERO, R. (2011) Graph literacy: A crosscultural comparison. *Medical Decision Making*, 31(3), 444–457.
- [5] GLAZER, N. (2011) Challenges with graph interpretation: a review of the literature, *Studies in Science Education*, 47(2), 183-210
- [6] HUFF, D. (1954) *How to Lie with Statistics*. Norton, New York. W. W. Norton and Company
- [7] KOSSLYN, S.M. (1985). Graphics and Human Information Processing: A review of five books. *Journal of the American Statistical Association*, 80(391), 499-512.
- [8] MAUTONE, P. y MAYER, R. (2007). Cognitive aids for guiding graph comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 99, 640–652.
- [9] MONTEIRO, C., SELVA, A., y FERREIRA, J. (2000). Tratamento de informações: investigando o processo de interpretação de gráficos [Data handling: investigating the process of interpretation of graphs] *Proceedings of the 52a. Reunião Anual da Sociedade para o Progresso da Ciência. Brasília, Brazil*.
- [10] MONTEIRO, C. y AINLEY, J. (2006) Student teachers interpreting media graphs. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education*.
- [11] MOORE, D. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association*, 93(444), 1253-1259
- [12] PEREIRA-MENDOZA, L. y MELLOR, J. (1990). Student's concepts of bar graph: Some preliminary findings. *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics Ed D. Vere-Jones. Voorburg: International Statistical Institute*.
- [13] RATWANI, R., TRAFTON, J. y BOEHM-DAVIS, D. (2008). Thinking graphically: Connecting vision and cognition during graph comprehension. *Journal of Experimental Psychology: Applied*. 14, 36–49.
- [14] SABBAG, A. G., y ZIEFFLER, A. (2015) Assessing Learning Outcomes: An Analysis of the GOALS-2 Instrument. *Statistics Education Research Journal*, 14, 93–116.
- [15] WATSON, J. (1997) *Assessing Statistical Thinking Using the Media*. In: I. Gal & J. B. Garfield (eds.). *The Assessment Challenge in Statistics Education*, pp.107-121. Amsterdam: IOS Press and The International Statistical Institute.
- [16] YANG, B. W., RESTREPO, C. V., y STANLEY, M. (2019). The Misleading Effect of

Truncating Bar Graphs. <https://doi.org/10.31234/osf.io/7aq4h>

- [17] ZIEFFLER, A., GARFIELD, J., ALT, S., DUPUIS, D., HOLLEQUE, K., y CHANG, B. (2008) What Does Research Suggest About the Teaching and Learning of Introductory Statistics at the College Level? A Review of the Literature. *Journal of Statistics Education*, 16.

Sobre las autoras:

Nombre: Carla Santos

Correo Electrónico: carla.santos@ipbeja.pt

Institución: Instituto Politécnico de Beja, Portugal

Nombre: Cristina Dias

Correo Electrónico: cpsd@ipportalegre.com

Institución: Instituto Politécnico de Portalegre, Portugal

Experiencias Docentes

Aprendiendo a modelizar con grafos

Cristina Jordán Lluch y Esther Sanabria Codesal

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 055–066, ISSN 2174-0410
Recepción: 12 Ene'21; Aceptación: 5 Abr'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En este trabajo presentamos una actividad incluida en la evaluación de unas prácticas, cuyos contenidos están relacionados con la teoría de grafos y sus múltiples aplicaciones a problemas reales. Incluimos algunos enunciados de los problemas entregados, que demuestran el aprendizaje y las habilidades alcanzadas por los alumnos en este campo.

Palabras Clave: Teoría de grafos, modelización, evaluación, competencias

Abstract

In this work we present an activity included in the evaluation of some practices, whose contents are related to the graph theory and its multiple applications to real problems. We include some statements of the problems delivered, which demonstrate the learning and skills achieved by students in this field.

Keywords: Graph theory, modelling, evaluation, skills

1. Introducción

Las aplicaciones de la teoría de grafos han experimentado un gran crecimiento en los últimos tiempos, ya que los grafos constituyen una herramienta muy útil para modelizar problemas muy variados tanto del ámbito científico como de la vida real.

Académicamente, esta materia siempre ha formado parte de los programas de contenidos en las titulaciones de informática, en concreto de los diferentes planes de estudios implementados en la actual Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática (ETSINF) de la Universitat Politècnica de València (UPV).

A partir de un temario teórico, en el que se enseñaba los diferentes algoritmos y se analizaban con todo detalle las trazas de estos, fuimos poco a poco, al tiempo que aparecían los

ordenadores en las aulas y la facilidad para interactuar con ellos, haciendo un mayor hincapié en el aspecto de la modelización de los problemas propuestos [12].

En este trabajo presentamos la metodología que hemos implementado en nuestras aulas y los resultados que hemos obtenido, con el objetivo de ilustrar la interacción que una teoría matemática abstracta tiene con el mundo real, y mostrar una forma de motivar a nuestros alumnos y mejorar su aprendizaje a la hora de modelizar un problema. Presentamos, además, algunos de los problemas que ellos mismos han propuesto para mostrar su acercamiento a este campo, lo que consideramos una prueba del éxito de la metodología llevada en clase y la actividad propuesta.

2. ¿Cómo acercamos la modelización a nuestros alumnos?

La transformación del enfoque dado a esta materia, desde un punto de vista algorítmico-teórico hacia la modelización, ha sido paulatina. La aparición, en los laboratorios de las clases de prácticas, de ordenadores y conexión a internet, nos ha permitido plantear problemas más realistas (en los que la modelización es de vital importancia), y resolverlos no solo sobre el papel, sino con la ayuda de programas de cálculo simbólico, como por ejemplo Mathematica© ([12]).

Por otra parte, el cambio de paradigma impulsado por la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), dio un vuelco importante a las metodologías universitarias, focalizando la atención en el alumno y su aprendizaje, convirtiendo al profesor en un guía y orientador que le facilite alcanzar los conocimientos requeridos ([5], [7],[14]).

Este nuevo escenario en la enseñanza nos acercó más a nuestros estudiantes, y así nuestra docencia empezó a apoyarse no solo en material docente impreso sino también en vídeos y otros materiales interactivos, ya fueran de producción propia u obtenidos en internet (de plataformas docentes como Riunet, Canales de Youtube, etc.), y decidimos así, rediseñar los contenidos de cada unidad temática.

La conjunción de esta metodología con el nuevo material, gran parte de él en formato vídeo, dio lugar a una OCW ([6], [7]) de contenido más teórico, y dos MOOC [3, 4], totalmente enfocados a la modelización. Simultáneamente, dirigimos un par de proyectos finales de carrera que dieron como fruto un software, SWGraphs, muy sencillo de manejar y totalmente orientado a nuestros objetivos, que ha sido muy bien recibido y utilizado por nuestros alumnos desde el curso 2012-2013.

En vez de empezar con definiciones y propiedades y finalizar con ejercicios, como es habitual, nos decidimos a comenzar cada unidad temática introduciendo un problema tipo (sencillo de entender) que nos interesase resolver, el cual motive la introducción y desarrollo teórico de los nuevos conceptos que vamos a estudiar, relacionándolos además con otros contenidos ya conocidos, o trabajados en temas anteriores. De esta manera, terminamos resolviendo el problema inicialmente planteado y proponiendo otros de mayor complejidad ([1], [8], [9], [10], [11], [13]).

Estos cambios se fueron realizando, a lo largo de los años, en las diferentes asignaturas en las que la teoría de grafos formaba parte importante de la materia (Complementos de Matemáticas, asignatura obligatoria de cuarto, Estructuras Matemáticas para la Informática II, obligatoria de tercero), o constituía el total de la materia (Teoría de grafos, asignatura optativa

de tercero, Grafos, modelos y aplicaciones, optativa de cuarto), o bien formaba parte de las prácticas de laboratorio (Matemática Discreta, asignatura obligatoria de primero) ([12]). La evaluación debía reflejar esta nueva metodología. Así, los actos de evaluación pasaron de ser solo exámenes, a combinar este tipo de pruebas (más tradicionales) con problemas para entregar, realización de pósteres a final de curso, preguntas en clase, etc. ([7]).

Centramos este trabajo en comentar las prácticas de laboratorio de una asignatura de formación básica del Grado en Ciencia de Datos de la ETSINF de la UPV. Matemática Discreta (MAD) se imparte durante el primer semestre del primer curso, y consta de 6 créditos, de los cuales 4.5 corresponden a teoría y seminario y 1.5 a prácticas de laboratorio.

En las 10 sesiones, de hora y media, de las prácticas de laboratorio de la asignatura, es donde impartimos la teoría de grafos. Los puntos que recoge el temario son:

- Conceptos básicos de la teoría de grafos
- Accesibilidad. Algoritmo BFS
- Problema de los caminos más cortos. Algoritmo de Dijkstra
- Conexión. Algoritmo de obtención componentes conexas y fuertemente conexas
- Árboles. Algoritmo de Kruskal
- Introducción a las redes sociales

Contamos con un temario amplio, teniendo en cuenta nuestra intención de introducir al alumno en el mundo de la modelización. Por ello, disponer de vídeos grabados que recogen los cinco primeros temas (vídeos del primero de los MOOC ([3], [4])) nos ayuda en nuestro objetivo.

Para evaluar las prácticas de laboratorio utilizábamos un examen de los primeros temas (un 15% de la nota final) y un trabajo relativo a las redes sociales (10 % de la nota final). El examen de prácticas constaba de dos partes. En la primera se realizaban preguntas de corte teórico, relativas a los diferentes conceptos expuestos, la realización de alguna traza sencilla y la resolución de algún problema a partir de las propiedades introducidas. La segunda, con un peso de 0.5 puntos de los 1.5 totales, consistía en una pregunta “realista” con 3 cuestiones, resolubles con alguno de los algoritmos vistos en clase, tras una adecuada modelización previa. A continuación, transcribimos un ejemplo de este tipo de problemas:

Se han inaugurado dos grandes supermercados, PrecioJusto, en las cercanías de 8 poblaciones que reciben una gran cantidad de turistas cada verano. Podemos ver un mapa de la zona en la figura1, donde los números representan los km entre poblaciones, o poblaciones y PrecioJusto, respectivamente.

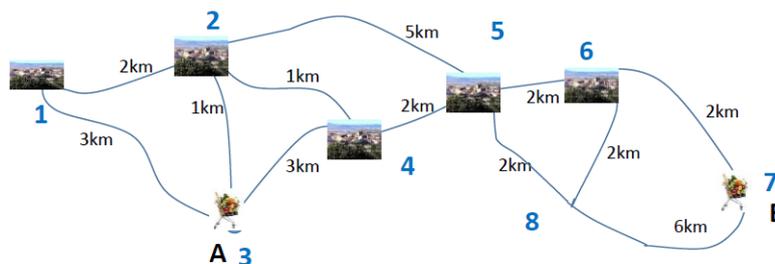


Figura 1. Mapa de la zona donde se han inaugurado los PrecioJusto

a) *¿Cuál es el número mínimo de km que deberán recorrer los habitantes de la población 5 para ir a PrecioJusto?*

b) *Debido a unas obras de alcantarillado las carreteras que unen 2 con 5, y 4 con 5 están en obras, lo que produce atascos monumentales.*

b.1) *¿A qué centro (PrecioJusto A y PrecioJusto B) tendrán acceso los habitantes de los distintos pueblos si no quieren pasar por el tramo en obras?*

b.2) *Por otra parte, los ayuntamientos se plantean dónde ubicar, mientras duran las obras, el camioncito que normalmente aparca, una vez a la semana, en las afueras del pueblo 5 para que los habitantes de los pueblos depositen allí los pequeños enseres, pequeños electrodomésticos, etc., que ya no les sean de utilidad. Piensan que quizás haya que ponerlo en varios sitios diferentes cada semana dado que, debido a los atascos, los vecinos no se desplazarán hasta el camión si deben pasar por las obras. ¿Cuántas veces y dónde les sugerirías emplazarlo a la semana? ¿Con qué concepto de la teoría de grafos está relacionada esta pregunta?*

c) *Terminadas las obras de alcantarillado y, dado el estado en que han quedado parte de las carreteras, y la alta afluencia de veraneantes, los gerentes de los PrecioJusto A y B hablan con los ayuntamientos para que mejoren los accesos a estos centros. El ayuntamiento se queja de que le va a costar mucho dinero, a lo que los supermercados replican que no hace falta que lo renueven todo, pero sí lo suficiente para que desde cualquier población se pueda llegar sin problemas de carretera a cualquiera de ellos y que, en ese caso, colaborarán económicamente. Hacen hincapié en que la población 4 debe estar unida al PrecioJusto A, dado el gran número de habitantes, con una buena carretera y además lo más corta posible. ¿Qué les recomendarías hacer? ¿Cuál sería el coste total del proyecto si el coste es proporcional a los km entre poblaciones?"*

A la hora de corregir los exámenes, observábamos que los alumnos no realizaban correctamente la modelización de los problemas propuestos, sino que indicaban directamente el algoritmo que pensaban aplicar, el cual introducían en SWGraphs para calcular la solución. En algunos casos, aplicaban el algoritmo adecuado, pero en muchos otros no, porque en vez de seguir las pautas que habíamos trabajado en el aula, se dejaban guiar por el "aspecto" del enunciado, donde, deliberadamente, utilizábamos palabras que podían inducir a confusión si no se paraban a pensarlo, o no se fijaban en los detalles. Como resultado, la solución que a nosotros nos ocupaba página y media o dos, a ellos les ocupaba 4 o 5 líneas y, al no indicarnos la modelización utilizada, la considerábamos incompleta.

Dado que solo habíamos trabajado 4 o 5 algoritmos, enunciar problemas diferentes a los problemas tipo trabajados en clase y, por tanto, de trivial solución, resultaba bastante costoso. Por ello, en el curso que ahora termina, 2019-2020, decidimos hacer un experimento. En lugar de pedir que resolvieran un problema, les propusimos que inventasen uno y lo resolvieran. Para ello, publicamos una rúbrica indicando la valoración de los diferentes aspectos del enunciado y resolución a valorar: creatividad, desarrollo, justificación, presentación, etc., que además les sirviera de guía para elaborarlo.

La experiencia ha sido altamente satisfactoria. Nos hemos encontrados con algunos trabajos muy pobres y/o con falta de imaginación, pero en general, la mayoría de ellos eran originales y muy trabajados. Y lo más importante, consideramos que el aprendizaje ha sido más significativo, ya que elaborar un problema requiere un manejo de los conocimientos aprendidos más allá de la mera aplicación, es decir, habilidades que se encuentran en categorías superiores en la taxonomía de Bloom ([2]).

3. Resultados de la actividad desarrollada en MAD

Los alumnos de prácticas que participaron en la experiencia correspondían a dos grupos, uno de mañana (38 alumnos) y otro de tarde (35 alumnos). En este último, la tasa de asistencia a clase fue muy baja (50%), debido a que esta no se controlaba y el horario era poco atractivo para los alumnos, ya que se impartía los viernes a las 18.30. Creemos que esta falta de asistencia ha sido determinante en la implicación de los alumnos con esta nueva metodología, puesto que la calidad de los trabajos presentados ha sido, de media, peor que en el grupo de la mañana, en determinados puntos han tenido más fallos que estos últimos y 4 de ellos no lo presentaron.

En la realización de los problemas, se les pedía creatividad y que utilizaran al menos un par de los algoritmos estudiados, debiendo resolver completamente el problema tras realizar una modelización adecuada, bien explicada, y dar una solución en el mismo contexto que se había planteado la pregunta. Recordamos que los algoritmos trabajados en clase, a lo largo del curso, son: Obtención de componentes conexas y fuertemente conexas, BFS, Dijkstra y Kruskal.

Resumimos, a continuación, algunas características de los problemas entregados.

3.1. Temáticas escogidas

Los temas con los que han trabajado los alumnos han sido variados, ya que les dimos mucha libertad al respecto, y realmente nos ha sorprendido la diversidad de propuestas diferentes, que agrupamos en el siguiente esquema:

- a) Problemas en contextos similares a los ejemplos trabajados en el aula (problemas tipo)
 - a.1) Relativos a viajes y desplazamientos en diferentes ámbitos: Camino de Santiago, Interrail, rutas marítimas por el mar Mediterráneo, vuelos suspendidos, recorridos en metro y/o atajos en recorridos variados.
 - a.2) Relacionados a la organización de eventos y la distribución: Carteros y/o mensajeros optimizando el reparto de mercancías (por carretera o en una urbanización), conciertos en una gira musical, planes de huida, carreras populares, eventualidades diversas que acontecen en una población.
- b) Problemas en contextos diferentes y/o realmente originales, en diferentes ámbitos
 - b.1) Profesional: Disposición de domos de vigilancia, relaciones de comorbilidad entre trastornos mentales para la elaboración de diagnóstico.
 - b.2) Científico: Análisis de redes neuronales, mapeado del sistema nervioso, análisis de las secuelas tras un accidente para desarrollar una rehabilitación específica, estrategia de investigación rentable en el campo del envejecimiento celular.

b.3) Socioeconómico: Ubicación de paneles solares y eólicos, reducción de cables submarinos entre América, Europa y norte de África, situar emisoras de radio atendiendo a frecuencias, diseñar una autovía paneuropea, mejorar traslados al hospital, tras accidentes de tráfico, reparto de agua en aldeas de Nigeria y Congo, optimización de problemas relacionados con el cultivo de la vid.

b.4) Medioambiental: Rutas migratorias de golondrinas o ardillas por la Península Ibérica.

b.5) Histórico: Comercio entre las potencias europeas del siglo XVII, leyenda sobre un laberinto griego, transmisión de información en la antigua Grecia.

b.6) Ocio: Mejorar la estrategia de juego de un equipo de fútbol analizando los mejores pases, iluminación de las barracas en las fiestas patronales, movimientos en el ajedrez, relacionados con videojuegos, Star Wars, universos paralelos o galaxias postapocalípticas.

Como vemos, todos los problemas se encuentran enmarcados en ámbitos realistas, pero queremos resaltar los dos trabajos de aplicaciones profesionales reales, citados en el punto b.1), dado que sus autores ya contaban con una titulación previa: Ingeniero de telecomunicaciones y psicólogo, respectivamente, y han encontrado una aplicación a lo estudiado en teoría de grafos a sus ámbitos de trabajo, lo que nos satisface enormemente.

3.2. Algoritmos

En la mayoría de los problemas, los alumnos han aplicado 3 de los algoritmos estudiados, sin embargo, observamos que en 21 de las propuestas presentadas (8 de la mañana y 13 de la tarde) los autores utilizaron mal el algoritmo de Kruskal. Y eso, a pesar de que hacemos mucho hincapié en el tipo de situaciones que se modelizan con este algoritmo, porque ya sabemos, por la experiencia de cursos anteriores, que es un punto negro del temario, puesto que, en general, les resulta difícil determinar cuándo deben aplicarlo. La diferencia en el número de estudiantes que no lo aplicaron de forma correcta entre los dos grupos (mañana y tarde), puede ser debida a la menor asistencia a las sesiones de prácticas en el grupo de tarde, como ya hemos comentado.

3.3. Presentación

En la rúbrica especificábamos que los trabajos debían estar bien redactados, sin faltas de ortografía y correctamente presentados. Obviamente, hemos encontrado trabajos que carecían de estas características (5 de 69), existiendo una graduación en el resto de aceptable a muy bueno.

Aproximadamente 15 problemas entran en la categoría de excelentes, no solo por idear un problema de interés resoluble con la materia estudiada, sino por incorporar los antecedentes y la motivación del problema, darle un formato adecuado, incluir bibliografía, etc. Pero incluso en los trabajos donde el problema tratado no era demasiado original, se han preocupado en redactar e ilustrar el enunciado, de manera que este facilitara la lectura y el entendimiento del mismo. Además, es importante resaltar que, en la mayoría de los casos, se han citado las fuentes de información.

4. Algunos de los problemas entregados en la actividad

Presentamos a continuación los enunciados de tres problemas entregados en esta actividad. Cabe señalar que la selección ha sido difícil, debido al alto nivel de las propuestas. Los autores de los ejercicios seleccionados son: Pablo Riera Cardá, Arnau García Cucó y Lexin Zhou.

El trabajo de Pablo (Problema 1), a pesar de ser un problema con un contexto bastante habitual en la teoría de grafos, destaca por su presentación y por ser un trabajo académico en el que quedan reflejados prácticamente todos los conceptos estudiados en la asignatura. Los Problemas 2 y 3, de Arnau y Lexin, respectivamente, muestran cómo aplicar la teoría de grafos a campos científicos muy actuales.

4.1. Problema 1

El pueblo de San Ireneo es un pequeño pueblo perdido en las montañas. Tú, como alcalde del pueblo, estás al mando de todas las decisiones que se toman en él para lograr que todos los habitantes vivan en paz.

Esta mañana te ha llegado el nuevo plano que vas a colgar en el ayuntamiento y que encargaste hace un tiempo a Estudios Gráficos Priecar.

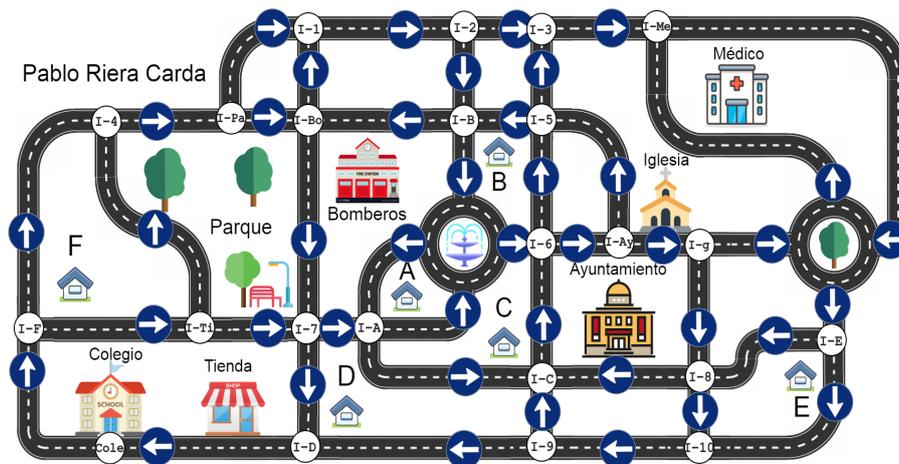


Figura 2. Plano nuevo encargado a Estudios Gráficos Priecar.

Este plano permite identificar todos los puntos importantes de San Ireneo y cómo llegar a ellos. Al ser un pueblo pequeño, todas las calles son de sentido único, y como marca la ley, está prohibido circular en sentido contrario. Además, en un segundo plano (figura 3) se indica la longitud del tramo de vía, para que los turistas puedan decidir la ruta que seguir.

En ambos planos se indican edificios importantes mediante fotos reales, acompañados del nombre (Ayuntamiento, Bomberos...). Además, aparecen las casas de algunas familias destacadas, indicadas por la inicial del apellido. Los lugares de interés se indican mediante puntos blancos (○) que representan diversos lugares según el texto que tienen en su interior: las intersecciones son los cruces de vías, que permiten el cambio de dirección y sentido, respetando siempre la señalización de la calle a la que te incorporas, y están

numerados (I-1, I-2, etc.). Las intersecciones que coinciden con la entrada de un edificio presentan las mismas características que las anteriores, además de permitir la entrada al edificio que señalan. Estas últimas, en vez de estar numeradas, contienen las dos primeras letras de los edificios a los que permiten la entrada (I-Ay, de Ayuntamiento; I-Bo, de Bomberos, etc.). Finalmente, el colegio tiene su propio punto de interés que no coincide con una intersección. Además, hay dos rotondas, la de la fuente y la del árbol.

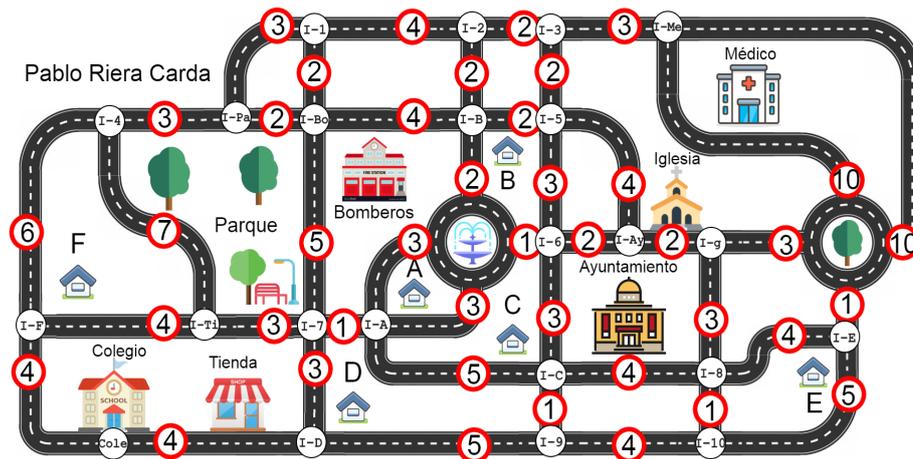


Figura 3. Plano nuevo con las longitudes de cada vía.

En el primer plano se representa también el sentido en el que se debe circular, marcado por flechas (↑). Aunque a primera vista parece que hay demasiadas indicaciones, conforme vas circulando las puedes ir mirando en las señales verticales de circulación. El segundo plano representa mediante un círculo con el borde rojo (○) la longitud de cada vía.

a) Ahora que ya está el plano real colocado, hace falta utilizarlo para ayudar a los vecinos a solucionar los problemas. Es una suerte que el informático haya instalado el SWGraphs en el ordenador, para ahorrarte el trabajo de tener que resolverlo todo a mano. Ahora, y antes de que nadie llame pidiendo ayuda, tienes que modelizar el plano y representarlo en el programa.

b) Justo cuando acabas de terminar de representar el plano en el ordenador, llama la familia Escobar (Casa E) pidiendo una ruta para llevar a sus hijos al colegio. Además, se ha comprometido a pasar a recoger a los hijos de las familias Colonques (Casa C) y Fuster (Casa F) y llevarlos a todos juntos. Para ahorrar el mayor tiempo y combustible posible, te pide que le marques una ruta a seguir. ¿Cuál es esa ruta?

c) Te asomas por la ventana del ayuntamiento y ves que, en el árbol de la entrada, hay un pobre gato atrapado en sus ramas. Rápidamente, te decides a llamar a los bomberos para que socorran al pobre animalito, pero antes de realizar la llamada, se te ocurre buscar la ruta más corta para salvarlo cuanto antes. Es una suerte que los bomberos en servicio de urgencia puedan ir en la dirección opuesta a la indicada por las señales, ¿cuál es la ruta más corta teniendo esto en cuenta? ¿Cuánto tiempo se ahorran gracias a esto?

d) Tras ver como salvan al pobre gato, te vuelves a tu despacho para tomar un merecido descanso, pero de repente llama un número privado. El emisor de la llamada, al que no reconoces, te replica en tono cabreado que tu planificación de calles no está bien diseñada. Te reprocha que salió del "Parque" hace media hora y que no ha podido llegar a su destino, sin especificar cual, argumentando que no había forma de llegar. Te preguntas, ¿hay algún punto en todo el pueblo que sea inaccesible desde el parque?

e) Finalmente, hoy tienes una reunión con el concejal de urbanismo. Tenéis que cambiar todo el sistema de tuberías público antes de que llegue el invierno y sea demasiado tarde. Este sistema de tuberías debería de conectar todos los puntos de interés del pueblo y llevar el agua a que se filtre en la rotonda de la fuente, para más tarde redistribuirla entre todos los puntos de interés del pueblo. Además, debéis de reducir al máximo el coste del sistema de tuberías, para poder invertir el dinero en otros proyectos. El sistema de tuberías que tenéis que construir debéis situarlo por debajo de las carreteras (aunque el sentido de éstas no afecta en nada a la realización del proyecto), por lo que las distancias serán equivalentes. ¿Cuál es el recorrido para garantizar un coste mínimo de dicho sistema?

f) Pasa un tiempo y se termina el sistema de tuberías, justo cuando van a caer las primeras nevadas. Tras un temporal, quedan todas las calles cortadas a causa de la nieve, excepto el casco histórico del pueblo, que queda libre para la circulación. Los únicos puntos de interés a los que se puede acceder son $V = \{I-A, \text{"Fuente"}, I-6, I-Ay, I-Ig, I-8, I-C\}$ y las únicas calles por las que está permitido circular en coche son $E = \{(I-A, \text{"Fuente"}), (\text{"Fuente"}, I-A), (\text{"Fuente"}, I-6), (I-6, I-Ay), (I-Ay, I-Ig), (I-Ig, I-8), (I-8, I-C), (I-A, I-C), (I-C, I-6)\}$. ¿Cuántas zonas hay donde puedes llegar desde ese punto a cualquiera de la misma zona y viceversa?

4.2. Problema 2

Una de las mayores aplicaciones hoy por hoy de la teoría de grafos se encuentra en el campo de las redes neuronales artificiales. Pero ¿por qué no implementar también dicha teoría al campo de la biología? ¿Por qué no usar esta rama de la matemática discreta para estudiar el funcionamiento del sistema nervioso humano?

Una persona llega a un hospital después de sufrir un accidente de tráfico. Sufrir una fractura en las vértebras 23, 24 y 25. Los nervios en esta zona han quedado severamente dañados y probablemente no pueda recuperarlos. El sistema médico del hospital quiere descubrir qué secuelas podría tener este accidente para esta persona a fin de desarrollarle una rehabilitación más específica. Sabiendo que el lóbulo frontal es la parte del cerebro que efectúa las respuestas motoras a los estímulos, desarrolle una lista de órganos que no se verían afectados a largo plazo por la lesión medular y, por tanto, sobre los que habría que realizar la rehabilitación.

La empresa IRobot ha construido un robot de forma humanoide diseñado para el rescate de personas en incendios llamado FireFighter4002. Este robot debería ser capaz de elaborar las funciones que un bombero podría hacer normalmente, minimizando así los riesgos de este cuerpo. Para el desarrollo del robot, han decidido implantar el diseño del cuerpo humano en este individuo, puesto que parece el más óptimo para esta función. El cableado que se ha

usado es de tres tipos. El primero, más caro y que recorre los nervios centrales tiene una velocidad de 10 Gb/s. El segundo, más barato, pero con un punto de fusión relativamente bajo, se ha empleado para los músculos principales (brazos, muslos, tórax, abdomen y pelvis) y tiene una velocidad de 1 Gb/s. El tercero, con un punto de fusión muy alto y bastante barato, se ha empleado para los antebrazos y piernas. Su velocidad es de 100 Mb/s.

Sin embargo, el nivel de reacción que está dando el FireFighter4002 frente a una pared que le caía encima no es el óptimo, resultando que el robot se estropeaba en las pruebas de acción al no poder dar un salto atrás para esquivarla. Para mejorar el diseño, se ha decidido detectar el recorrido que efectúa el estímulo hasta llegar a los muslos, para implementar un nuevo chip que procese más rápidamente la información y añada velocidad de respuesta.

Viendo el éxito que tuvo el robot FireFighter4003, IRobot ha decidido mejorar el diseño del robot en el nuevo modelo FireFighter5000. El principal problema que le han visto al modelo 4003 es su tamaño. El robot tenía dificultades al introducirse dentro de edificios derruidos o en elementos. Al ver este problema, los ingenieros han decidido ahorrar todo el cableado posible y se han replanteado todo el robot, tomando ahora como premisa que un estímulo puede recorrer el cableado en una dirección y en la contraria. ¿Cuál sería el cableado óptimo que debería tener el robot FireFighter5000?

4.3. Problema 3

Al final de 2017, después de que AlphaGo aplastara al mejor jugador de Go, un famoso juego de mesa, el futuro de la inteligencia artificial en el mercado se ha aclarado aún más.

Una nueva empresa en Valencia, España, llamada "ASI", desea crear una red neuronal artificial propia para mejorar la eficiencia de sus robots con capacidad de aprendizaje automático. Tras haber considerado varios factores, se ha logrado una base de red neuronal, dividida en tres partes:

1. Capa de entrada, donde se recibe la información,
2. Capa oculta, lugar desde el que se transmite y dónde se clasifica la información obtenida. Es semejante a un conjunto de redes con diferentes distancias, las cuales representan el coste temporal del desplazamiento de un nodo a otro en milisegundos,
3. Capa de salida, en la que se dictamina el resultado.

Nos planteamos las siguientes preguntas:

a) Es posible desplazarse desde cualquier nodo oculto (elemento de capa oculta) de la Red a otro? Justifica tu respuesta.

b) Si quitamos las rutas entre (5,23), (6,9) y (10,11) debido a reducciones de coste. ¿Siguen conectados los nodos? Justifica la respuesta.

c) Se desea minimizar el tiempo de reacción en sus robots después de haber recibido ya la información. Es decir, la mejor ruta desde las entradas de los nodos ocultos (V2, V3, V4)

para poder llegar a cada uno de los cuatros salidas (A, B, C o D). ¿Podrías ayudarlo a decidir las tres mejores rutas en las que se minimiza el tiempo de reacción de sus robots?

d) Debido a un error en el sistema computacional de la empresa, la red encargada de los nodos del modelo AX (V14, V15 y V16) se deshabilita durante tres días. ¿Es posible fabricar sus robots usando esta red neuronal durante ese periodo?

e) Posteriormente, contabilidad determina que con las reservas de la empresa no son capaces de producir la cantidad de robots que necesitan. Por ello, es preciso eliminar los enlaces innecesarios, a causa de su alto coste, y priorizar las rutas más eficientes (que reaccionan en menos tiempo) para formar una red neuronal que incluya todos los nodos ocultos anteriores, con el objetivo de ajustarse al presupuesto, ¿cómo recomendarías proceder?

f) Sin embargo, en el inventario de la empresa aún quedan muchas existencias de nodos del modelo FX (V2, V5, V17 y V23). Así pues, se desea que la nueva red neuronal incluya una ruta BRP (Best Red's Path) que enlace los nodos de dicho modelo, manteniendo además la conexión de todos los nodos ocultos principales entre sí, con el objetivo de minimizar el coste. ¿Cómo aydarías a decidir dicha red neuronal?

5. Conclusiones

En la actualidad, la modelización en teoría de grafos está siendo de utilidad en numerosos y variados campos. Por ello, hemos optado por hacer hincapié en este aspecto en nuestras clases de prácticas de laboratorio de la asignatura MAD, relativas a este tema.

El transformar la evaluación de esta parte de la asignatura en un problema a plantear y resolver, en lugar de una pregunta de examen centrada en la resolución, previa modelización, de un problema real, ha sido muy positivo. Creemos que hemos conseguido trasladar a nuestros alumnos la utilidad de la modelización y han comprendido realmente en que consiste, así como las dificultades que conlleva.

Consideramos además que, de esta manera, los alumnos no solo trabajan las competencias científicas específicas de la materia, sino que también trabajan competencias transversales como "Comprensión e integración" y "Análisis y resolución de problemas", en diferentes grados, y dependiendo de la temática escogida, en algunos casos también han trabajado las competencias de "Responsabilidad ética, medioambiental y profesional" y/o "Conocimiento de problemas contemporáneos".

Referencias

- [1] CARREÑO, A., SANABRIA-CODESAL, E., *Análisis de redes sociales mediante cadenas de Markov*, MSEL, 12 (1), 2019.
- [2] CHURCHES, A., *Welcome to the 21st Century (Taxonomía de Bloom para la era digital)*, <http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital>
- [3] CONEJERO, J. A., JORDAN, C., *MOOC: Aplicaciones de la teoría de grafos a la vida real (I)* <https://www.edx.org/course/aplicaciones-de-la-teoria-de-grafos-la-upvalenci-201x-1>

- [4] CONEJERO, J. A, JORDAN, C. MOOC: *Aplicaciones de la teoría de grafos a la vida real (II)* <https://www.edx.org/course/aplicaciones-de-la-teoria-de-grafos-la-upvalenci-x-tgv201x-2-0>
- [5] CORDERO, A., JORDAN, C., TORREGROSA, J.R., *How do current students face maths problems solving?* Proceedings of INTED2015 Conference, 2015
- [6] JORDAN, C., OCW: *Estructuras matemáticas para la informática 2*, <http://www.upv.es/ocwasi/2010/6024>
- [7] JORDAN, C., SANABRIA-CODESAL, E. *La asignatura OCW Estructuras matemáticas para la informática 2 y los créditos ECTS*, XIX CUIEET, Barcelona, 2011
- [8] JORDAN, C., SANABRIA-CODESAL Y PEREZ PEÑALVER, M. J., *Estrategias matemáticas en la ONU*, Pensamiento Matemático, II (2), 2012.
- [9] JORDAN, C Y SANABRIA-CODESAL, *Grafos hamiltonianos en el diseño de viajes*, MSEL, 6 (2), 2013.
- [10] JORDAN, C. Y SANABRIA-CODESAL, *Piedra, papel y tijera y sus generalizaciones*, MSEL, 6 (2), 2013.
- [11] CALVO, M. ET AL., *Modelos de la teoría de grafos aplicados a problemas de competiciones de programación*, INRED, 2016.
- [12] JORDÁN, C., SANABRIA-CODESAL, E., TORREGROSA, J. R., CORDERO, A. Y CONEJERO, J. A. *Evolución de la docencia en Teoría de Grafos en las últimas décadas*, INRED, 2017.
- [13] PÉREZ-BENITO C., MORILLAS, S., JORDAN, C., CONEJERO, J.A., *Determinación de componentes conexas en el análisis de zonas homogéneas y de detalle en imágenes a color*, MSEL, 11 (1), 2018.
- [14] VALERO-GARCÍA, M., ESPONA, M., *Adaptación de asignaturas al EEES*, Curso de formación permanente del ICE de la UPV, (Curso 2009-2010).

Sobre las autoras:

Nombre: Cristina Jordán Lluch

Correo Electrónico: cjordan@mat.upv.es

Institución: Departamento de Matemática Aplicada (Universitat Politècnica de València)

Nombre: Esther Sanabria Codesal

Correo Electrónico: esanabri@mat.upv.es

Institución: Departamento de Matemática Aplicada (Universitat Politècnica de València)

Historias de Matemáticas

La sonrisa de Newton

Danilo Magistrali

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 067-073, ISSN 2174-0410
Recepción: 03 Maz'21; Aceptación: 08 May'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En este artículo se esboza un perfil de Newton como hombre y como científico. En particular se describen algunas de sus principales contribuciones al ámbito de las matemáticas.

Palabras Clave: Historia de las Matemáticas, Isaac Newton, cálculo infinitesimal, series infinitas, cúbicas.

Abstract

This article outlines a profile of Newton as a man and as a scientist. In particular, some of his main contributions to the field of mathematics are described.

Keywords: History of Mathematics, Isaac Newton, infinitesimal calculus, infinite series, cubic curves.

1. Introducción

Isaac Newton fue uno de los científicos más importantes de la historia. Sólo se puede comparar a otros dos: Arquímedes en la época clásica y Einstein en la época moderna.

Newton era un individuo misterioso y polifacético. No sólo cambió la historia de la física y de las matemáticas gracias a sus contribuciones científicas como la ley de gravitación universal, la óptica, el cálculo infinitesimal, las leyes del movimiento, las órbitas de los planetas, la teoría de las mareas sino que fue un experto de alquimia, un teólogo hereje, un profundo filósofo, un hombre solitario que sonrió una sola vez cuando un ingenuo estudiante le preguntó si era útil conocer los *Elementos* de Euclides.

2. Aspectos biográficos

Newton nació el día de Navidad del 1642, sin embargo en muchas partes de Europa era el 4 de enero de 1643. El año del calendario juliano promedio dura 365 días y 6 horas (el promedio de tres años de 365 días y uno de 366). Esta duración no se corresponde exactamente con

la del año solar medio, que se obtiene a partir de observaciones astronómicas: esta última de hecho es más corta en 11 minutos y 14 segundos. En consecuencia, el calendario juliano acumula aproximadamente un día de retraso cada 128 años con respecto al paso de las estaciones. Entre el 325, año en que el Concilio de Nicea estableció la regla para calcular la Pascua, y 1582 se había acumulado una diferencia de unos 10 días. Para compensar los diez días perdidos, se estableció que el día posterior al 4 de octubre de 1582 era el 15 de octubre; además, para evitar interrupciones en la semana, se acordó que el 15 de octubre fuera viernes, ya que el día anterior, el 4, había sido jueves. Esta reforma fue adoptada antes en los países católicos que en los países protestantes.

Newton nunca conoció a su padre, que murió tres meses antes de que él naciera. Su madre se volvió a casar en 1646 y el nuevo marido no quería niños estorbando en casa. El pequeño Isaac fue criado por su abuela en el campo hasta que regresó a casa con la madre en 1653 que había tenido otros tres hijos, tras la muerte de su segundo marido. Por aquel entonces ya se había formado el carácter sombrío del joven Isaac, en un diario escribió que amenazó con quemar vivos a su padre y a su madre, y toda la casa con ellos.

En 1655 fue enviado a la escuela secundaria, donde esencialmente desperdició el tiempo estudiando latín y la Biblia, y sus compañeros lo odiaron de inmediato debido a su dificultad temperamental y facilidad intelectual. Muchos años después, cuando ya era famoso, todos recordaban su extravagancia y su habilidad para construir modelos de madera. Él mismo contó haber realizado su primer experimento el 3 de septiembre de 1658 midiendo la fuerza de un huracán con saltos a favor y contra el viento y comparando sus longitudes con las de los saltos realizados en un día tranquilo.

Se despertó su interés por la química observando la actividad del señor Clark, el farmacéutico donde se hospedaba y para la astronomía, colocando relojes de sol por todas partes y estudiando los movimientos del Sol. Ya de viejo, cuando le preguntaban la hora, respondía mirando las sombras en las paredes, en lugar de consultar su reloj. Merece la pena recordar que la esposa del señor Clark tenía un hermano, Humphrey Babington, que era miembro de la dirección del Trinity College. Fue por su mérito y sus influencias que Newton consiguió acceder al Trinity el 8 de julio de 1661.

Cuando volvió a vivir con su madre en 1659 el joven resultó ser un desastre en la conducción de la granja familiar. Se salvó de la vida de granjero entrando al Trinity College. En un principio entró como un simple *subbecario*, en otras palabras, se convirtió literalmente en un sirviente de sirvientes, aunque su madre bien podría haberle pagado la matrícula. Sin embargo, el hecho de ser el estudiante de Humphrey Babington que pasaba muy poco tiempo en Cambridge, y que además era un amigo, hizo que no tuviera que comportarse como criado. Siguiendo el anticuado plan de estudios que le ofrecía el Colegio, comenzó a estudiar lógica, física y ética aristotélicas, pero no terminó ninguno de los textos oficiales que comenzó, estudiaba en particular las obras de Descartes y de Galileo.

En 1664 consigue la beca de doctorado que le permite estudiar durante cuatro años. En sus apuntes de aquellos años se interesa por el tiempo, la materia, el movimiento, la luz, los colores, la visión, los sueños, el alma, la creación y Dios. Como ejemplo de la intensidad que dedicaría a su estudio, una vez miró alternativamente durante horas el sol y la oscuridad con un ojo, para observar las imágenes retinianas así producidas. El resultado fue que, para recuperar el uso de sus ojos, tuvo que encerrarse en una habitación oscura durante tres días. No fue la única ocasión, sin embargo, ya que otra vez colocó una varilla entre el ojo y el hueso para ver los círculos de colores producidos por la curvatura de la retina. A partir de 1665 tuvo una explosión creativa que lo llevó a conseguir resultados sorprendentes en el campo de la mecánica, de la óptica, de la química y de las matemáticas. No divulgó sus descubrimientos en ese momento y en 1668 consiguió el título de doctor en humanidades sin laude. Para poder ser profesor en el Trinity College había que dedicarse al estudio de la Biblia y tomar órdenes menores. El problema es que

Newton era arriano¹ y no era el tipo de persona que juraría algo en contra de sus convicciones. Newton había sucedido a Isaac Barrow como catedrático lucasiano en 1669. Henry Lucas había aportado una dotación para crear una cátedra de matemáticas en Cambridge en 1663. Según la estipulación, se prohibía a todos los profesores lucasianos aceptar cargos eclesiásticos. Además, el rey Carlos II concedió que esta dispensa fuera perpetua. Newton podía ser un hereje arriano y al mismo tiempo miembro del Trinity. Entre los profesores lucasianos recordamos a Charles Babbage, Paul Dirac y Steven Hawking.

Newton nunca tuvo capacidad de empatía. Como recuerda su asistente Humphrey Newton fueron tan pocos los que fueron a escucharlo, y aún menos los que lo entendieron, que muy a menudo, por falta de oyentes, daba conferencias a las paredes. Durante algún tiempo aprovechó la obligación de depositar las notas de las lecciones para escribir partes de lo que luego se convertirían en sus obras maestras: los *Principia* de 1687 y la *Óptica* de 1704. Pero tras la publicación del primero, nunca volvió a aparecer en el aula durante catorce años, y en Cambridge durante cinco, hasta que renunció al Trinity College en 1701.

En enero de 1689 Newton fue nombrado representante de la Universidad en el Parlamento, donde brilló con su asiduo silencio. Parece que en un año de sesiones habló solo una vez, para decirle a un acomodador que cerrara una ventana por la que entraba una corriente de aire. Newton no tenía casi amigos. Se recuerdan dos excepciones: el filósofo John Locke, con quien entabló una relación intelectual entre iguales, y el matemático suizo Nicolas Fatio de Duillier, a quien le unía una impetuosa amistad y quizás incluso algo más.

El peor año de la vida de Newton fue el año 1693. La ruptura con Fatio, el incendio en su estudio que quemó años de trabajos sobre alquimia y teología, y el envenenamiento de mercurio fueron algunas de las causas de su crisis nerviosa.

En 1696 fue nombrado custodio de la Real Casa de la Moneda y en 1699 director, cargo que ocupó hasta su muerte y lo trajo de regreso al Parlamento durante algunos años. Desde 1703 fue también presidente de la Royal Society, de la que ya se había hecho miembro en 1672, a la edad de treinta años, tras la sensacional invención de un telescopio reflector, mucho más pequeño que los de refracción habituales en la época, y basado en la convergencia de la luz en el foco de un espejo parabólico. En veinte años perdió solo tres de las sesiones semanales que se tenían en la Royal Society, hasta que la edad lo obligó a reducir la asistencia. Desde que se mudó a Londres en 1696, Newton convivía con su atractiva sobrina Catherine Barton, hija de una hermanastra, que se casó en 1717 con John Conduitt quien en los últimos años de la vida del científico recogió muchos de sus recuerdos. William Stukeley, miembro de la Royal Society, hizo lo mismo y en sus relatos se basan las anécdotas más o menos creativas y hagiográficas que tenemos de él.

3. El lado oscuro de Newton

Después de la explosión de productividad científica de su juventud, Newton empezó a cultivar otros tipos de intereses intelectuales. Durante mucho tiempo fueron un misterio las investigaciones del Newton oculto. En el siglo XX gran parte de los escritos teológicos acabó en la Biblioteca de Jerusalén y los escritos de alquimia fueron comprados por John Keynes y ahora están en el King's College de Cambridge. En una conferencia del 1946 Keynes explicó que Newton no fue el primer científico de la Era de la Razón. Más bien, fue el último de los magos, el último de los babilonios y sumerios, la última de las grandes mentes que miraron el mundo visible e intelectual con los mismos ojos que aquellos que comenzaron a acumular nuestra herencia cultural hace años. Newton, un hijo póstumo nacido sin padre el día de Navidad, fue el último niño prodigio al que los Magos pudieron rendir un homenaje sincero y apropiado.

¹Según el arrianismo, la naturaleza divina del Hijo era sustancialmente inferior a la de Dios y que, por tanto, hubo un tiempo en que la Palabra de Dios no existía y sólo fue creada más tarde.

Ya a finales de 1669 Newton había comprado dos hornos en Londres y varias sustancias químicas para hacer experimentos. Su cabello se volvió gris a los treinta, y cuando su compañero de habitación y asistente John Wickins lo atribuyó su excesiva concentración mental, bromeó diciendo que era el color que había tomado prestado del mercurio durante muchos años. Es verdad que su pelo contenía una concentración de mercurio casi 20 veces superior a la media. En su actividad de alquimista se interesó en la extracción de mercurio de varios metales, la producción de trozos de antimonio, la síntesis de la red que iba a combinar la semilla masculina de Marte con el ánimo femenino de Venus, la precipitación de sal de amoníaco y otras curiosidades similares. Imaginó la materia como una red orgánica unida por un tejido de fuerzas que prefiguran las electromagnéticas y nucleares que conocemos hoy.

Newton también se dedicó al estudio de la escrituras. En particular, estudió los atributos de Dios, del Padre, del Hijo, del Espíritu Santo, de la encarnación, de la redención, etc. Y no tardó en presenciar en persona lo que la Iglesia siempre ha sabido y temido: que es tremendamente peligroso leer las Escrituras porque se corre el riesgo de descubrir algún fallo en la doctrina oficial. Por ejemplo, en la Primera Carta a Timoteo, Pablo afirma que hay un solo Dios y un solo mediador entre Dios y los hombres: Jesucristo, hombre él también. La clara distinción entre Dios y su mediador humano generó en Newton una duda acerca del dogma de la Trinidad, que en cambio identifica a las tres personas. Por lo tanto, se sumergió en el estudio de la cuestión, volviendo a las fuentes originales y volviéndose particularmente apasionado por la disputa entre Arrio y Atanasio y los acontecimientos del Concilio de Nicea. La mayor parte de sus energías exegéticas la dedicó a interpretar las profecías, que creía que se referían a este mundo más que al más allá, y contenían información sobre hechos terrenales en lugar de celestiales.

La fecha del Juicio Final es entre 2060 y 2374, dependiendo de cómo se interpreten las profecías y se determinen las fechas de eventos que se consideren relevantes, como la destrucción de Jerusalén o el inicio de la supremacía de los Papas. Más allá del Juicio Final sólo queda la vida eterna, y en este sentido Newton argumentó que el cielo no es un lugar, sino una condición. Una declaración sorprendentemente moderna.

4. Algunas proezas matemáticas

Las contribuciones de Newton a la ciencia son incontables. Nos limitamos a considerar algunos aspectos del pensamiento de Newton sobre la matemática. El joven Newton descubre lo que él llama un nuevo análisis, un método capaz de resolver la mayoría de los problemas matemáticos contemplados por sus contemporáneos, a partir del estudio de dos textos: la *Geometría* de Descartes y la *Arithmetica infinitorum* de John Wallis. Descartes había conseguido asociar una ecuación algebraica a una curva o a una superficie y Wallis se había interesado en las series infinitas. Muchas cantidades geométricas, normalmente muchas áreas de superficies encerradas por curvas (por ejemplo, el área del círculo), no se pueden expresar en términos finitos. Los matemáticos del siglo XVII, para extender el análisis algebraico a casos que no pueden tratarse en términos finitos, aprendieron a recurrir a diversas técnicas. Lo más importante es utilizar series infinitas.

Hoy toda la cuestión está definida por la teoría de los límites y la convergencia elaborada a partir del impulso de las investigaciones de los matemáticos de principios del siglo XIX, entre los que destaca el francés Augustin Louis Cauchy. En la época de Newton, las series infinitas se usaban de una manera más intuitiva: se hablaba de serie y convergencia en términos muy cualitativos. Newton aprendió mucho sobre las series infinitas en el trabajo de Wallis. Es generalizando los resultados contenidos en *Arithmetica infinitorum* que Newton llegó a formular la serie binomial. Cabe recordar que Niklaus Mercator, un matemático danés recién trasladado a Inglaterra, trabajaba en esta dirección, tanto que en su *Logarithmotechnia* (1668) había obtenido, al cuadrar el área subyacente a la hipérbola, una expresión del logaritmo neperiano en términos

de una serie infinita, resultado que el joven Newton ya había logrado de forma independiente. Newton fue capaz de calcular logaritmos usando series infinitas con una aproximación más allá del quincuagésimo decimal.

La serie binomial permite escribir $(1 + x)^\alpha$ como una serie de potencias de x

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots$$

Newton llegó a la serie binomial mediante un proceso de prueba y error. Sin dudar de la exactitud de esta fórmula, Newton nunca logró obtener algo que considerara una prueba real. Sabía que la serie convergía lo suficientemente rápido para valores de x no muy lejos de cero. Para obtener los coeficientes de la serie binomial, Newton utilizó procedimientos de interpolación que el propio Wallis había bautizado como inductivos. Esta extensión no tuvo un fundamento riguroso: fue un procedimiento arriesgado que no tenía precedentes en la historia de las matemáticas. Newton conocía la fórmula binomial para exponentes enteros positivos y la extendió a exponentes fraccionarios negativos y positivos. Posteriormente, lo aplicó a los casos para los que conocía la respuesta mediante métodos alternativos, comprobando la coincidencia de los resultados obtenidos.

Los coeficientes de las potencias enteras del binomio $(1 + x)$ tienen una regularidad evidente, que puede extenderse fácilmente por analogía a las potencias negativas. Más precisamente, los binomios se desarrollan así:

$$\begin{aligned} (1 + x)^0 &= 1 \\ (1 + x)^1 &= 1 + x \\ (1 + x)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\ (1 + x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Los coeficientes se puede escribir en la siguiente tabla

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1	0	0
1	3	3	1	0

La primera columna siempre tiene 1 mientras que en cada fila los otros números son la suma del número que está encima más el que está a la izquierda. Esta regularidad se conoce como el triángulo de Tartaglia. Se puede usar la misma regularidad para continuar la tabla hacia arriba, en lugar de hacia abajo

1	-1	1	-1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1	0	0
1	3	3	1	0

Los números de la primera fila corresponden a los coeficientes del desarrollo de $(1 + x)^{-1}$.

La aplicación más típica del método de las series infinitas fue la reducción del cálculo del área determinada por una función analítica al cálculo de la suma de las contribuciones de cada término de la correspondiente serie de potencias. Cavalieri mostró que el área definida por x^n era simplemente $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. En el caso de la hipérbola $\frac{1}{1+x}$ se obtiene la serie para calcular el área: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$. Ya se sabía que el área de la hipérbola se mide con el logaritmo. La serie anterior tuvo por tanto una aplicación práctica inmediata, y permitió calcular los logaritmos de una forma mucho más eficiente que hasta entonces.

Los matemáticos contemporáneos de Newton estaban preocupados por una serie de problemas cuya solución parecía particularmente difícil y que eran importantes no solo para el

desarrollo de las matemáticas puras, sino también para las aplicaciones de las matemáticas a la astronomía, la física y la óptica. En particular, se consideraron importantes los nuevos métodos para el cálculo de áreas de superficies curvilíneas, las tangentes, los radios de curvatura, el centro de gravedad y la rectificación de curvas. Poco después de descubrir la serie binomial, Newton se dio cuenta de un hecho extraordinario: la mayoría de los problemas a los que se enfrentaban sus contemporáneos podían reducirse a dos problemas fundamentales, uno de los cuales es inverso al otro. El primer problema es: dada una curva, determine su tangente. El segundo problema es: dada una curva, determine el área de superficie debajo de ella.

Newton llegó a intuir el teorema fundamental gracias a una concepción cinemática de las cantidades geométricas. Concibió las cantidades geométricas como generadas por un movimiento continuo. Por ejemplo, una curva se concibe como generada por el movimiento continuo de un punto. Las cantidades geométricas así generadas se denominan fluyentes. Sus tasas instantáneas de crecimiento se denominan *fluxiones*. Newton indica con las letras x, y, z las cantidades fluyentes y con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ las fluxiones. Además, indica con o un intervalo de tiempo infinitamente pequeño. Por tanto, $\dot{x}o$ es el incremento infinitamente pequeño de la fluyente x adquirido en el intervalo de tiempo infinitamente pequeño o .

Consideremos una curva plana. Como sabemos, se genera por el movimiento continuo de un punto. Denotamos con x e y las coordenadas cartesianas del punto P que traza la curva. De esta forma hemos descompuesto el movimiento del punto en dos componentes, uno paralelo al eje de abscisas y otro al eje de ordenadas. En un intervalo de tiempo infinitamente pequeño o el punto se mueve de P a P' . Podemos asumir que en este intervalo de tiempo el movimiento del punto es rectilíneo uniforme. Un movimiento acelerado del punto, si se analiza en sus componentes infinitamente pequeñas, consiste en un número infinito de movimientos rectilíneos uniformes. De P a P' ya no tenemos una curva sino una trayectoria recta (infinitamente pequeña). Consideramos el triángulo rectángulo con catetos $x, x + \dot{x}o$ y $y, y + \dot{y}o$ e hipotenusa $\overline{PP'}$. La inclinación de la tangente en P a la curva se mide a través del cociente de los catetos $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Para calcular la tangente a una curva tenemos que calcular el cociente de las fluxiones \dot{y} y \dot{x} .

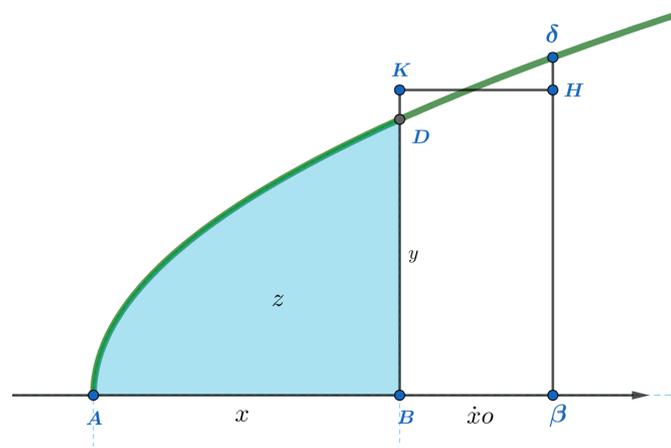


Figura 1. Integral.

Consideremos ahora el cálculo del área, véase la figura 1. Dada una curva $AD\delta$, concebimos el área $z = ADB$ como generada por el movimiento continuo uniforme de la ordenada BD . Supongamos que la ordenada BD se mueve de izquierda a derecha de tal manera que $x = AB$ fluye con rapidez constante. ¿Cuál es la fluxión (tasa de crecimiento) del área? La fluxión \dot{z} del área z se obtendrá mediante el siguiente procedimiento. Dividimos el tiempo en un número infinitamente grande de intervalos o infinitamente pequeños. El cociente entre el incremento $BD\delta\beta$ del área en un intervalo de tiempo muy pequeño y $\dot{x}o$ es una medida de la fluxión del

área. De hecho, el eje de abscisas se divide en un número infinitamente grande de intervalos iguales $\dot{x}o = B\beta$. El cociente entre el área $BD\delta\beta$ y $B\beta$ nos da una medida de la velocidad de crecimiento del área ADB . Newton afirma que tiene que existir un BK mayor que BD y menor que $B\delta$ tal que el área $BD\delta\beta$ es igual al área $BKH\beta$. El cociente entre el área $BD\delta\beta$ y $B\beta$ es igual a BK que se confunde con BD dado que $B\beta$ es muy pequeño. Podemos concluir que la fluxión del área $z = ADB$ es igual a $y = BD$. Dicho en otros términos, si tenemos una curva $y = BD$ y calculamos el área por debajo de la curva en función de $x = AB$ y luego calculamos la fluxión del área (es decir, la derivada) volvemos a obtener $y = BD$ en función de x .

El joven Newton desarrolló todas estas ideas en unos meses. Había descubierto un método que le permitió resolver problemas más allá de las capacidades de sus contemporáneos. Los elementos esenciales de este método, al que llamó método de las series y fluxiones son: series infinitas y el teorema del binomio, el uso de cantidades infinitamente pequeñas (momentos), la concepción cinemática de cantidades (fluyentes y fluxiones), la reducción de problemas geométricos y cinemáticos al problema de buscar tangentes y áreas, el teorema fundamental. Era 1666.

Nótese que Newton habla de curvas y no de funciones. El concepto abstracto de función surgirá más tarde: las matemáticas del siglo XVII están firmemente relacionadas a la interpretación geométrica. Newton usa cantidades infinitamente pequeñas y una regla de cancelación infinitesimal ($x + \dot{x}o = x$) donde usaríamos un procedimiento de paso al límite. En lugar de recurrir a conceptos rigurosos de límite, convergencia, continuidad, diferenciabilidad, Newton confía en la intuición de la generación por movimiento continuo de cantidades. En los años de madurez Newton volvió a pensar los procedimientos de cálculo del método de series y fluxiones concibiendo una teoría de límites, la teoría de los primeros y últimos cocientes, que le parecía más cercana a la certeza y elegancia de los métodos de los antiguos geómetras.

Uno de los resultados geométricos más importantes de Newton tiene que ver con la enumeración de curvas cúbicas: es decir, la clasificación de todos sus 78 tipos posibles, de los cuales solo se conocían media docena antes que él. También descubrió que, así como todas las secciones cónicas son proyecciones de un círculo, todas las cúbicas son proyecciones de cinco tipos de curvas elípticas, que se denominarán así más adelante, debido a su papel en el cálculo de la longitud de los arcos de elipse (para evitar dudas, la elipse no es una curva elíptica).

Newton nunca explicó cómo obtuvo sus resultados. Quizás, primero haciendo experimentos prácticos con modelos, como sugiere la referencia a la fuente de luz. Además, anticipó en parte los métodos teóricos de la geometría proyectiva moderna y llegó a vislumbrar resultados como el teorema de Steiner, que este último no publicaría hasta 1867.

Referencias

- [1] ODIFREDDI, P., *Sulle spalle di un gigante. Isaac Newton*, Longanesi, Milano, 2014.
- [2] GUICCIARDINI, N., *Newton*, Carocci, Roma, 2011.
- [3] WHITE, M., *Isaac Newton. The last sorcerer*, Fourth Estate, London, 1998.

Sobre el autor:

Nombre: Danilo Magistrali

Correo electrónico: danilo.magistrali@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid

Historias de Matemáticas

Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria

State of the art on teaching and learning Fractal Geometry in high school

María Victoria Artigue, María de los Ángeles Fanaro, Eduardo Lacués

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 075-092, ISSN 2174-0410

Recepción: 8 Ene'21; Aceptación: 5 Feb'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de una revisión bibliográfica de investigaciones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de elementos de la Geometría Fractal (GF) para la educación secundaria (12 a 17 años de edad). Se llegó a la conclusión de que es necesario trabajar sobre su adecuación para que sea enseñable, enfocándose en las propiedades intrínsecas de los fractales como la recursión infinita y la autosemejanza. Se propone recuperar la esencia matemática de esta geometría, explorando la posibilidad de vincularse con otros saberes y de utilizar formas de validación propias de la geometría en la escuela secundaria.

Palabras Clave: fractales, enseñanza, escuela secundaria, autosemejanza.

Abstract

This paper presents the results obtained from a bibliographic review of research related to the teaching and learning of elements of Fractal Geometry (FG) for secondary education (12 to 17 years old). It was concluded that it is necessary to work on its didactic transposition, focusing on the intrinsic properties of fractals such as infinite recursion and self-similarity. It is proposed to recover the mathematical essence of this geometry, exploring the possibility of linking with other knowledge and using forms of validation typical of geometry in secondary school.

Keywords: fractals, teaching, secondary school, self-similarity.

1. Introducción y planteamiento del problema

Este trabajo es parte de una investigación más amplia cuyo objeto de estudio es la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal (GF) en la enseñanza media, es decir, identificar los procesos de transposición didáctica para que los estudiantes puedan aprender algunas de sus características de una manera significativa.

La GF es un ámbito de la Matemática relativamente nuevo; las primeras ideas se desarrollaron hace poco menos de medio siglo. Diversos autores reconocen su importancia para describir y explicar fenómenos naturales que la Geometría Euclídea (GE) no puede abordar (Shriki y Nutiv, 2016; Faccio, 2013; Redondo, 2005; Chen, 2018 y Picoli, 2018).

La enseñanza de la GF constituye una problemática ya que se trata de una geometría claramente distinta de la GE, cuyo abordaje didáctico parece tener poca tradición en el ámbito de la educación Matemática. Si bien hay interés en la comunidad de investigadores por la enseñanza de la GF, aún no ha sido ampliamente abordada en la Educación Matemática y en sus currículos (Chen, Herron, Ding, Mohn, 2018; Karakus, 2011, 2013; Karakus y Baki, 2011).

Entre las posibles causas del poco reconocimiento se encuentra que la GF no está explícita como contenido en los programas de las asignaturas; en algunos países como China y Estados Unidos figura como tema opcional. Otra razón es que tampoco integra los contenidos de los planes de formación docente, por lo que el profesorado puede no tener conocimiento de esta temática, su epistemología, sus fundamentos matemáticos (Chen et. al., 2018). Esto es, desconocen las transformaciones necesarias al saber matemático (propio de los matemáticos) para que sea enseñable, que tenga sentido para el alumno. Este proceso es señalado con la expresión transposición didáctica (Chevallard, 1999).

Por su parte, Karakus (2016) advierte que la mayoría de los estudiantes de profesorado solamente conocen el concepto de dimensión propio de la GE, relacionándolo con un sistema de coordenadas, definiéndolo como el número de parámetros utilizados para determinar la ubicación de un objeto. Es decir, los futuros profesores de Matemática, conceptualizan a la dimensión como una característica del objeto, como la longitud, el ancho y la altura, pero desconocen otras como la dimensión fractal.

En otros países, como Uruguay y Argentina, es notoria la tendencia a incorporar elementos de la GF en las últimas elaboraciones de los programas escolares. En el caso de Argentina, el diseño curricular para la escuela secundaria prescribe la enseñanza de los fractales en sexto año:

La noción de fractal posee modelos matemáticos donde los alumnos verán contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero aplicado con ciertas particularidades –como geometría, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales y noción de límite de sucesiones–. Los fractales también modelizan objetos que exhiben una estructura a varios niveles de escala y se utilizan en la gráfica computarizada, que en ciertos casos describen formas de la naturaleza: Helge Koch mostró una curva con perímetro infinito, que encierra una región del plano de área finita, representada por una figura con forma de copo de nieve (Documentos curriculares de la Provincia de Buenos Aires, 2015, pág. 13).

En Uruguay, también es en sexto año de secundaria (tercer año de bachillerato) que está indicado explícitamente en Programas 2006 Reformulación 2010 como contenido curricular, la

noción de fractal, aunque solamente es para la opción de la modalidad orientada de “Matemática y diseño”:

Se construirán fractales conocidos. Por ejemplo: Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert, Curva de Koch, Triángulo y alfombra de Sierpinski. Se vincularán a cálculos de longitudes, áreas y coordenadas de puntos. Se crearán nuevos fractales a partir de los conocidos. Se podrán construir fractales a partir de materiales concretos, por ejemplo, políminós. Se podrán construir fractales en la Sala de Informática” (Programa del curso de Matemática I para 3er año de bachillerato, opción Matemática y diseño, plan reformulación 2006, pág. 9).

En estas dos propuestas en concordancia con lo que señalan Fusi y Sgreccia (2020), subyace la idea de aprovechar los últimos años de la escuela secundaria para la enseñanza de fractales y generar una oportunidad para estudiar, recuperar y ampliar en algunos contenidos matemáticos anteriores, tales como: límite, sucesiones, series, transformaciones de semejanza, ecuaciones exponenciales y logarítmicas, recursividad.

En este trabajo, nuestra pregunta de investigación busca conocer qué características tiene la GF presentada en la escuela secundaria, tal como es reportada en los artículos de investigación encontrados, y en qué forma estas características presentan los fundamentos matemáticos y epistemológicos propios de este campo de saber.

Los fractales que más frecuentemente se exponen en los artículos de enseñanza y aprendizaje de la GF son: conjunto de Cantor (CC), curva de Koch (CK), triángulo de Sierpinski (TS), árbol Pitagórico (AP) y en menor medida la curva de Hilbert (CH), razón por lo cual serán utilizados para ejemplificar las nociones desarrolladas en este artículo. La forma coloquial (prescindiendo del formalismo matemático) que permite construirlos, se puede encontrar en los libros de texto y materiales de enseñanza, y hasta de manera interactiva en cursos como por ejemplo en Mathigon¹. En cambio, una construcción matemática formal se encuentra en Peitgen, Jürgens y Saupe (2004), o en Rubiano (2009).

En este artículo se comienza presentando fundamentos epistemológicos y matemáticos relativos a la GF, focalizando en la relación entre el concepto de fractal y la matemática que permite justificar sus características; en particular, nos centraremos en la autosemejanza. A continuación, estos fundamentos serán utilizados como marco teórico-conceptual para analizar los artículos de investigación referidos acerca de la GF en la escuela secundaria.

A continuación, se describe la metodología desarrollada para analizar los artículos de investigación acerca de la enseñanza de la GF en la enseñanza secundaria, y se la aplica a los obtenidos mediante una búsqueda sistemática utilizando el software Harzing² en una ventana temporal de 20 años (2000 - 2020). Las conclusiones obtenidas de este análisis se presentan en la sección siguiente a la metodología y finalmente, se presentan reflexiones finales en las que se plantean cuestiones pendientes y posibles continuaciones de este trabajo.

¹ <https://mathigon.org/course/fractals/introduction>

² Harzing, A.W. (2007) Publish or Perish, disponible en <https://harzing.com/resources/publish-or-perish>

2. Fundamentos epistemológicos-matemáticos de la GF

El término fractal, proveniente del latín “fractus” (adjetivo que significa interrumpido o irregular) fue introducido por el matemático Benoit B. Mandelbrot en el año 1975, quien observó que la naturaleza es tan compleja que la GE no alcanza para estudiarla, como es el caso de las formas naturales como una nube, una montaña o costas de países. Según Spinadel (2002) son diversas las definiciones de fractal que se han ido proponiendo, y aconseja no brindar una única definición, a riesgo de excluir algunos casos interesantes; y en su lugar realizar una lista de sus propiedades más características. Por ejemplo, Falconer (1990), establece que cuando se hace referencia al conjunto F como fractal, se tiene en cuenta lo siguiente:

1. F tiene estructura fina con detalles sobre escalas arbitrariamente pequeñas.
2. F es demasiado irregular para ser descrito en el lenguaje geométrico tradicional, localmente y globalmente.
3. F tiene alguna forma de autosemejanza.
4. F tiene asignada una "dimensión fractal" que puede calcularse de cierta forma.
5. F está definido de una manera simple, a veces, mediante una recursión.

El estudio de los fractales trae inmediatamente aparejado la necesidad de abordar dos propiedades: la dimensión fractal y la autosemejanza. Se han formulado al menos diez definiciones matemáticas para el concepto de dimensión, entre ellas: dimensión topológica, dimensión de Hausdorff, dimensión fractal, dimensión de conteo de cajas, dimensión de capacidad, dimensión de información, y dimensión euclidiana. Todas están relacionadas, aunque algunas tienen sentido en ciertas situaciones pero no en otras, a veces todas tienen sentido y coinciden, algunas tienen mayor aplicación en las ciencias como la dimensión de conteo de cajas (o box-counting) (Peitgen, Jürgens y Saupe, 2004). Dado que el concepto de dimensión no abarca el objetivo de este trabajo, en lo que sigue el foco es el concepto de fractal y su relación con la autosemejanza.

Si bien la autosemejanza parece ser una noción evidente y no necesitar más explicación que la presentación de ejemplos sencillos donde la Matemática está ausente, su importancia es esencial para dar significado a los fractales, ya que es una propiedad subyacente en todos ellos. Una forma de ejemplificarla es con la cabeza de una coliflor: contiene partes que cuando se quitan y se comparan con el conjunto son muy parecidos, solo que más pequeñas (Peitgen, et. al., 2004). Otro ejemplo bastante intuitivo de la autosemejanza es una varilla graduada de un metro, que tiene marcados los decímetros, los centímetros y los milímetros: un decímetro, junto con sus marcas, parecen un metro con sus respectivas marcas, pero reducido en un factor de 10. En este caso, el segmento de recta, resulta ser autosemejante aunque no es un fractal, y por lo tanto, la autosemejanza no es el único indicador para considerar que se trate de un fractal, aunque usualmente los fractales sí cumplen con esta propiedad.

Sin embargo, esta idea intuitiva y básica de autosemejanza merece ser cuestionada, ya que no se presenta de la misma manera en todos los fractales. Al intentar encontrar partes que sean pequeñas réplicas del todo, con cualquier grado de aumento de escala, se encuentran resultados distintos, como se muestra en la Figura 1:

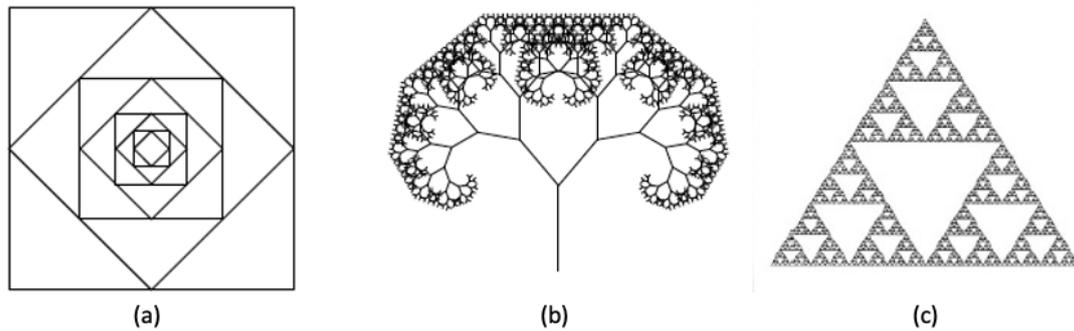


Figura 1. Se presentan tres figuras, para ilustrar distintos tipos de autosemejanza. Fuente: (a) y (b) de Sabogal y Arenas (2011), (c) de Peitgen (2004).

Así, siguiendo con esta aproximación intuitiva del concepto de autosemejanza, se pueden reconocer diferentes tipos, según la cantidad de puntos en que se pueda apreciar la presencia de copias idénticas de sí misma. La que sigue es una posible clasificación de autosemejanza que se adapta al tipo de fractales que se analizan en este trabajo. Se dice que la autosemejanza es puntual si dentro de la figura completa es posible encontrar infinitas copias reducidas de sí misma, sólo en un punto, el cual se denomina punto límite y es donde el tamaño de las copias tiende a cero, como el caso (a) de la Figura 1 (Peitgen, et. al., 2004).

Otra manera de pensar en esta situación es la imagen de la portada de un libro en la que aparece una mano sosteniendo ese mismo libro, o la de un pintor que se pinta a sí mismo pintando. En estos tres casos, podemos pensar en un proceso que se repite de tal forma que si nos detenemos en cualquier parte y nos imaginamos lo que resta de él, no podemos distinguir en qué paso del proceso nos habíamos detenido (excepto, posiblemente, por la medida de las figuras implicadas).

La autosemejanza es estricta cuando es posible encontrar al todo en cualquier parte del fractal, como lo es en el caso de CC, TS y CK (Caballero, 2017; Higuera, 2011; Peitgen, et. al., 2004). Finalmente, cuando se pueden encontrar copias reducidas del todo en ciertos puntos de la figura (Sabogal y Arenas, 2011), o cuando las copias que se encuentran están distorsionadas se habla de cuasi-autosemejanza (Castelblanco, 2015; Oltra 2009). La Tabla 1 sintetiza estos tres tipos de autosemejanza y los ejemplifica con otros fractales que tienen la respectiva propiedad.

Tabla 1. Clasificación de la autosemejanza para algunos fractales seleccionados.

Fractal	Tipo de autosemejanza	Descripción
-Caso (a) de la figura 1. -La imagen de un libro en cuya portada hay una mano sosteniendo ese mismo libro.	Puntual.	La autosemejanza se cumple en un punto solo: punto límite en el cual el tamaño de las copias tiende a cero.

CC TS CK	Estricta.	Se puede encontrar copias del todo cerca de cualquier punto del fractal.
AP CH	Cuasi - autosemejanza (no corresponde a ninguna de las dos anteriores).	Las copias del todo se acumulan cerca de las hojas del árbol fractal. Contiene copias distorsionadas de la figura obtenida en la primera iteración.

Como se puede notar, la propiedad de autosemejanza no se cumple de igual manera en cualquier fractal. Pero, si se busca pasar de esa idea intuitiva a una formulación matemática de la autosemejanza, es necesario hacer referencia al concepto de semejanza de la geometría euclidiana.

Una transformación de semejanza en el plano, es definida como una función del plano en el plano que se obtiene mediante la composición de una homotecia con una isometría (rotación, traslación o simetría).

Para el estudio de los fractales, dichas transformaciones deben ser contractivas, es decir con razón de homotecia entre cero y uno, por lo que al aplicarla reduce la distancia entre dos puntos cualesquiera de la figura imagen.

Ahora bien, la clasificación anterior es relevante porque para aquellos fractales que poseen autosemejanza estricta, estas transformaciones deben aplicarse iteradamente, constituyendo en algunos casos, un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Con los SFI los matemáticos lograron una unidad en tanta diversidad, definiendo transformaciones geométricas del plano en el plano a través de transformaciones afines de forma matricial (Rubiano, 2009) utilizando recursos de Álgebra Lineal.

Un SFI debe dar cuenta de las transformaciones que se aplican a la figura original llamada semilla. Debe proveer la información necesaria respecto del número de transformaciones que lo componen y sus características, como ser: la razón de homotecia o razón de contractividad, las posiciones relativas respecto al iniciador, y su traslación o rotación, el orden en el cual se aplican.

Con independencia de la figura original, el comportamiento límite del SFI garantiza que, cada algoritmo fractal da lugar a una figura límite, y sólo una (Pérez Medina, 2007). Por lo tanto, cada conjunto formado por transformaciones de semejanza define una imagen fractal denominada atractor del SFI, que siempre existe y es único. (Moreno-Marin, 2002). Este aspecto dota a los fractales de la propiedad de autosemejanza estricta (Pérez Medina, 2007).

En el caso particular del TS con semilla un triángulo rectángulo con vértices $(0,0)$; $(1,0)$ y $(0,1)$, pueden considerarse tres transformaciones afines f_1 , f_2 y f_3 , donde f_1 es una homotecia

de razón $\frac{1}{2}$ y centro $(0,0)$, f_2 es f_1 seguida de una traslación de vector $(0, \frac{1}{2})$, y f_3 es f_1 , seguida de una traslación de vector $(\frac{1}{2}, 0)$. Por lo tanto f_1, f_2 y f_3 forman un SFI para el TS. El resultado de la primera iteración por medio del SFI queda definido por la unión de las imágenes de la semilla, en cada una de las funciones aplicadas (Rubiano, 2009; Sabogal y Arenas, 2011) como se muestra en la Figura 2 (adaptado de Rubiano, 2009).

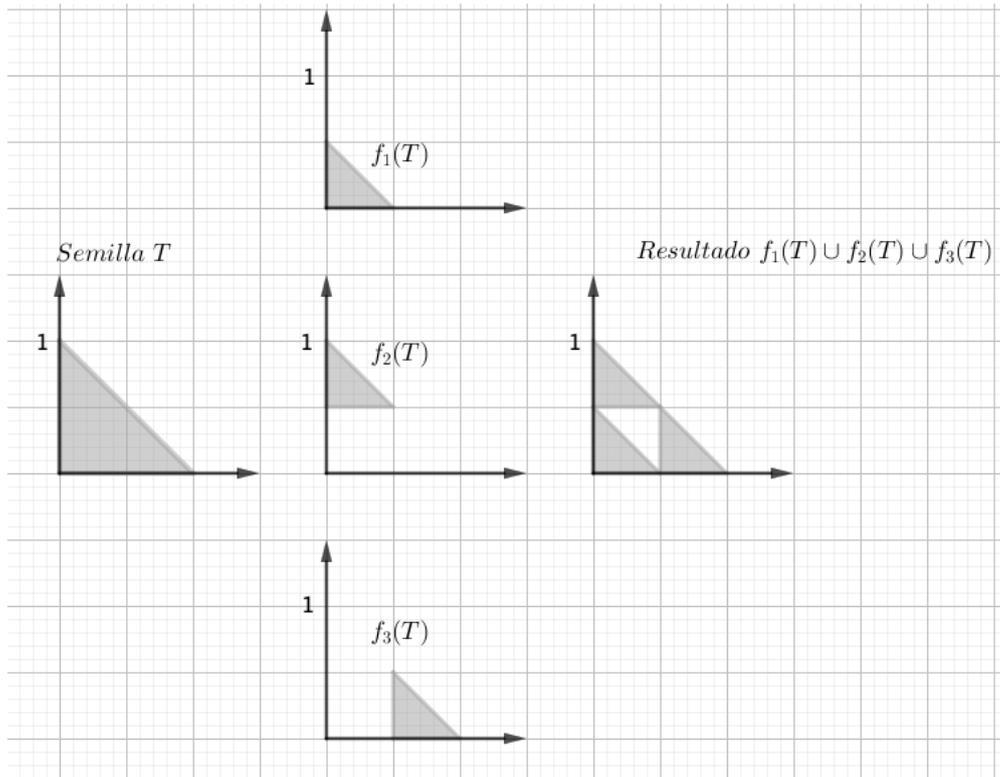
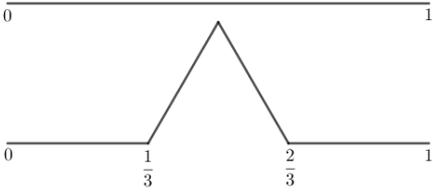


Figura 2. Las imágenes representan las tres transformaciones que se aplican a la figura inicial (semilla). La unión de las imágenes mediante las tres transformaciones f_1, f_2 y f_3 da como resultado la primera iteración para el TS.

En la tabla 2 se presentan las transformaciones geométricas necesarias para obtener la primera iteración para los fractales CC y CK.

Tabla 2. Transformaciones de semejanza para construir el resultado de la primera iteración de CC y CK.

Fractal	Transformaciones geométricas	Resultado de la primera iteración
CC en el intervalo $[0,1]$.	Homotecia de factor $\frac{1}{3}$ y centro $(0,0)$. Homotecia de factor $\frac{1}{3}$ y centro $(0,0)$, seguida de una traslación de vector de módulo $\frac{2}{3}$ y sentido paralelo al eje Ox positivo.	$\begin{array}{c} \overline{0 \qquad \qquad \qquad 1} \\ \\ \overline{0 \qquad \qquad \frac{1}{3} \qquad \qquad \frac{2}{3} \qquad \qquad 1} \end{array}$

<p>CK en el intervalo $[0,1]$.</p>	<p>Homotecia de factor $\frac{1}{3}$ y centro $(0,0)$. Rotación de centro $(0,0)$ y ángulo 60 grados antihorario. Traslación de vector $(\frac{1}{3}, 0)$. Rotación de centro $(0,0)$ y ángulo 60 grados horario. Traslación de vector $(\frac{1}{3}, 0)$. Homotecia de factor $\frac{1}{3}$, seguida de una traslación de vector $(\frac{2}{3}, 0)$.</p>	
---	--	--

Sin embargo, entre la formalidad matemática al trabajar con los SFI y su atractor, y la idea intuitiva de autosemejanza estricta, se hace necesario formular una definición que permita responder a la pregunta de si una figura tiene autosemejanza estricta. En este trabajo se propone adoptar la siguiente formulación, posible de ser trabajada en la escuela secundaria:

Una figura es autosemejante estrictamente si es obtenida por un proceso iterativo donde el resultado de cada paso puede descomponerse en partes, cada una de las cuales es semejante al resultado de la primera iteración.

Esta definición requiere indicar las diferentes transformaciones de semejanza que permiten transformar las partes de una figura semejante al resultado de la primera iteración e indicar la cantidad de partes. En la tabla 3 se presenta una posible manera operativa de aplicar esta definición para CC cuya semilla es el intervalo $[0,1]$, TS cuya semilla es un triángulo equilátero de vértices $(0,0)$; $(1,0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ y CK con semilla el intervalo $[0,1]$. Solamente se muestra para la iteración número 2.

Tabla 3: Transformaciones de semejanza y cantidad de partes para determinar si CC, TS y CK son autosemejantes para la segunda iteración.

Fractal	Transformaciones geométricas	Cantidad de partes
<p>CC en el intervalo $[0,1]$.</p>	<p>Homotecia de razón 3 y centro $(0,0)$ a $[0, \frac{1}{9}]$. Homotecia de razón 3 y centro $(0,0)$ a $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$, seguida de una traslación de vector $(\frac{2}{3}, 0)$.</p>	<p>2</p>
<p>TS con vértices en $(0,0)$; $(1,0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.</p>	<p>Homotecia de razón 2 y centro $(0,0)$. Homotecia de razón 2 y centro $(\frac{1}{2}, 1)$. Homotecia de razón 2 y centro $(1,0)$.</p>	<p>3</p>

CK en el intervalo [0; 1].	Homotecia de razón 3 y centro (0; 0) Rotación de 60 grados horario y centro $(\frac{1}{3}, 0)$. Rotación de 60 grados antihorario y centro $(\frac{2}{3}, 0)$. Homotecia de razón 3 y centro (1; 0).	4
----------------------------	---	---

Aquí es esencial remarcar que la autosemejanza es un resultado de un proceso límite y no de una etapa en particular. En este sentido, la definición propuesta evita referirse a la propiedad de autosemejanza aludiendo a frases como “se puede encontrar el todo en sus partes”, “se puede descomponer en partes que son similares al todo” o “que es invariante a cualquier cambio de escala”, que son difícilmente justificables desde el punto de vista matemático, y si no se trabajan, quedan en el conjunto de frases vacías para referirse a los fractales.

A partir de la consideración anterior acerca de los procesos infinitos que permiten definir a los fractales en el límite de éstos, las investigaciones científicas que aplican fractales, frecuentemente usan el término pre-fractal (Gianvittorio, Romeu, Blanch, Rahmat, 2003; Fernández Pantoja, Ruiz, Bretones, Gómez, 2003). Esta distinción es válida para reconocer que cuando los fractales se representan gráficamente, se está considerando una etapa precisa, un número finito de iteraciones. Como ejemplo de objetos fabricados cuyo diseño se basa en GF se encuentran las antenas que, gracias a la propiedad de autosemejanza, tienen la ventaja de poder ser multibanda, es decir, trabajar en varias frecuencias.

La discusión previa nos lleva a preguntarnos ¿de qué forma es propuesta la enseñanza de la GF y qué características de los fractales se resaltan en las mismas?

3. Metodología

La búsqueda de artículos de investigación se realizó utilizando el programa POP (Harzing, 2008) que permite tanto la búsqueda como la exportación de los indicadores bibliométricos a planilla de cálculo o a otros formatos de manejo de gestores bibliográficos. En este caso, las fuentes de datos utilizadas fueron Google Scholar y Scopus, pues son aquellas de acceso directo y libre. La búsqueda se realizó dando como entrada a los términos: fractales; enseñanza (y sus correspondientes en inglés fractals; teaching) en el campo del título. Luego fueron seleccionados para este estudio aquellos que estuvieran en revistas de acceso libre y activas en cuanto a su frecuencia de publicación.

Con estas investigaciones se elaboró una matriz bibliográfica identificando los principales componentes del instrumento V de Gowin (Novak y Gowin, 2004): foco o interés del trabajo, dominio conceptual, dominio metodológico y resultados principales.

El análisis de los datos se basó en los trabajos previos de Pereira y Borges (2017) y de Garbin (2007). El primero trata de una revisión bibliográfica exhaustiva acerca de la enseñanza de Geometrías no Euclidianas (GNE) en los últimos diez años en Brasil. El segundo trabajo analiza los fundamentos matemáticos, didácticos y cognitivos del concepto de fractal; si bien no fueron

aplicados por la autora para realizar una revisión bibliográfica sino para analizar las percepciones de un conjunto de estudiantes universitarios acerca de la noción de fractal, el punto de vista cognitivo utilizado presenta un interés didáctico a la hora de analizar las investigaciones relevadas.

Así, Pereira y Borges (2017) construyeron las siguientes categorías acerca de las investigaciones referidas a la enseñanza de las GNE:

- Propone la enseñanza de GNE por medio de softwares educativos.
- Se analiza las GNE en la formación del profesorado.
- Se analiza la potencialidad de los fractales para explorar simultáneamente diferentes conceptos matemáticos.
- Se propone la enseñanza de GNE por medio de materiales manipulables.
- Se analizan las concepciones de los docentes y estudiantes acerca de las GNE.

Estas categorías se adaptaron y se formuló una más para este análisis, específicamente referida a los fractales: la razón que se sustenta para la enseñanza de fractales.

Por otro lado, Garbin (2007) propuso como significados del concepto de fractal:

- Objeto límite u objeto producto de un proceso infinito.
- Objeto geométrico con dimensión fraccionaria.
- Objeto irregular que representa fenómenos naturales
- Conjunto matemático que cumple ciertas propiedades, como las mencionadas antes, propuestas por Falconer (1990).

De las categorías elaboradas por Garbin (2007), se consideró que al ser la dimensión fraccionaria una propiedad, se incluiría en la categoría Definición de fractal a través de sus propiedades. Además, como en la revisión bibliográfica ningún autor define de manera única a un fractal como objeto irregular que representa fenómenos naturales, no se consideró como categoría. Asimismo, se formuló una más, que es No se define fractal.

A partir de estos dos trabajos, y de las investigaciones relevadas, se desarrollaron las categorías y subcategorías de análisis que se presentan en la tabla 4, y que permiten responder las dos preguntas planteadas en este trabajo: ¿de qué forma es propuesta la enseñanza de la GF y qué características de los fractales se resaltan en las mismas?

Tabla 4. Categorías y subcategorías de análisis.

Categoría	Subcategoría
C_1 : Interés principal del trabajo.	C_{1E} : Enseñanza de GF (énfasis en el uso de softwares educativos u objetos manipulables, o análisis de la GF para enseñar otros conceptos, con o sin presentación de actividades).

	C_{1P} : Análisis de las percepciones de profesores o alumnos acerca de la GF.
C_2 : Razón para enseñar fractales.	C_{2BU} : Belleza de la GF por su presencia en la naturaleza o utilidad en diversas disciplinas (motivación).
	C_{2ME} : Potencialidad de modelización y explicativa.
C_3 : Caracterización del objeto geométrico fractal.	C_{3N} : No se presenta una caracterización explícita para los fractales.
	C_{3P} : Conjunto matemático autosemejante y con dimensión fractal (sin hacer referencia a un proceso límite).
	C_{3L} : Objeto límite u objeto producto de un proceso infinito.

4. Análisis de los resultados

Un análisis temporal indica un interés creciente sobre el tema, encontrándose 8 artículos publicados en los últimos tres años, mientras que, en los 17 años anteriores, en promedio encontramos una publicación, por año. En cuanto a la frecuencia de publicación de esta temática por revista, es notorio que la revista con mayor número de publicaciones sobre GF es Suma (<http://revistasuma.es/revista>) con un total de 8 artículos de un total de 28 que se han cosdiderado. En orden de frecuencia, sigue la revista Unión (<https://union.fespm.es/index.php/UNION>), donde se encuentran 2 artículos.

Entre los resultados de las investigaciones, se encuentra que hay diversos tipos de dificultades a la hora de enseñar y de aprender GF en la escuela secundaria. Por un lado, están aquellas que refieren a la comprensión del objeto matemático fractal y de sus propiedades de autosemejanza y de dimensión fraccionaria (Karakus y Karatas, 2014; Karakus, 2015; Karakus, 2016; Pinto y Desconsi, 2018). Por otro lado, están las de tipo operatorio, incluyendo manejo de operaciones con números racionales y análisis de series numéricas (Karakus, 2013).

La tabla que sigue resume cuantitativamente los resultados de la búsqueda y de la categorización realizada.

Tabla 5. Resultados de las categorías y subcategorías de análisis.

Categoría	Subcategoría	Resultados
C_1	C_{1E}	18/28 (64%)
	C_{1P}	10/28 (36%)
C_2	C_{2BU}	12/28 (43%)
	C_{2ME}	16/28 (57%)
C_3	C_{3N}	10/28 (36%)
	C_{3P}	11/28 (39%)
	C_{3L}	7/28 (25%)

Respecto al interés del trabajo (C_1), se encontró que más de la mitad de las investigaciones (64%) se enfocan en propuestas de enseñanza acerca de la GF, ya sea a través de actividades con objetos manipulables, con softwares o con una secuencia de ejercicios para que los estudiantes descubran alguna característica de la GF. Solamente una pequeña parte de las que se encuentran en C_{1E} (el 18%), implementan las propuestas, ya sea en el aula curricular o en talleres extracurriculares; el resto de los trabajos solo presentan las propuestas. En el 36% de los artículos restantes, se encuentran las 10 investigaciones que se dedican al estudio y análisis de las percepciones del profesorado y estudiantes acerca de la GF (categoría C_{1P}). Así, en 7 trabajos se analizan producciones de estudiantes cuando se les enseñan conceptos relativos a GF, estudiando de qué manera los estudiantes distinguen, definen o dibujan un fractal (Karakus, 2013, Karakus y Karatas, 2014, Karakus, 2015; Faccio, 2013); en otros casos se analizaron estrategias de cálculo de perímetros y áreas, o de construcción con regla y compás o con cartón de diferentes iteraciones de fractales (Picoli y Pinto, 2018; Pinto y Desconsi, 2018; Rezende, Moran, Mártires, Carvalho, 2018). Los estudios que refieren a las percepciones del profesorado son 3 y apuntan a: el interés que ellos tienen acerca del desarrollo profesional sobre GF (Chen y otros, 2018), a analizar qué comprenden por dimensión fractal (Karakus, 2016), y a estudiar de qué manera se puede hacer un uso efectivo de la tecnología para abordar aspectos de la GF (Yildiz y Baltaci, 2017).

En relación con la pregunta del motivo para enseñar GF (C_2), casi la mitad de los trabajos (43%) hace referencia a la belleza de la GF por su presencia en la naturaleza o utilidad en diversas disciplinas, hecho que produciría una motivación intrínseca (C_{2BU}). En 7 de ellos se ejemplifica la aplicación de los fractales haciendo alusión al crecimiento de las plantas, al desarrollo de un cáncer, a la anatomía interna del cuerpo humano, a las superficies irregulares, a la forma de los relámpagos, a la música, a la pintura, a la mecánica de fluidos, entre otras. Estas referencias no avanzan más del plano de la mención, es decir no se proponen actividades donde los estudiantes puedan modelizar las situaciones utilizando la GF. El resto de las investigaciones (57% restante) que pertenecen a la categoría C_{2ME} hace referencia a la potencialidad que tiene la GF para abordar otros conceptos matemáticos, o para mostrar su capacidad de modelizar diferentes figuras. Por ejemplo, se manifiesta el vínculo con conceptos geométricos como perímetro, área, congruencia de triángulos, transformaciones de semejanza

(Figueiras, 2000; Moreno, 2002; Rezende, 2018; Pinto y Desconsi, 2018); con el cálculo a través de límites de sucesiones y series aritméticas y geométricas (Shriki y Nutiv, 2016, Karakus, 2011), función exponencial y logarítmica (Karakus, 2011); y con la probabilidad a través de la probabilidad geométrica y condicional (Lopes, 2013).

Al analizar cómo las investigaciones se refieren a los fractales, se encontró que, aproximadamente en un 35% presenta a los fractales de una forma un tanto alusiva, es decir sin mayor explicitación de considerar una figura "bonita", especial porque se reproduce haciendo copias de sí misma (C_{3N}); es el caso de actividades pensadas para un espacio de taller, extracurricular, como proyecto escolar o como actividad lúdica. El restante 64% presenta explícitamente una caracterización del objeto fractal, ya sea aludiendo a un proceso infinito (39%, C_{3L}) o enfocándose en sus propiedades de autosemejanza y dimensión fractal (61%, C_{3P}).

Resulta interesante profundizar en estas dos últimas subcategorías. Así, en los 7 artículos de la subcategoría C_{3L} se plantea la idea de límite para hallar longitudes, perímetros y áreas de los fractales CC, TS, CK y AP. Solamente en 4 de ellos se diseñan actividades que apuntan a ese objetivo. En el caso del CC, las preguntas direccionan al estudiante a cómo calcular su longitud, para lo cual previamente les solicitaban indicar la cantidad de segmentos en cada iteración, la cantidad de segmentos que se quitan y la longitud de cada uno de ellos. Finalmente, la longitud del fractal es pedida a través de las preguntas *¿qué va a pasar haciendo el proceso hacia el infinito?* (Sardella, Zapico y Berio, 2006), *¿qué ocurrirá con el número de segmentos y la longitud de todos ellos cuando el número de iteraciones sea infinito?* (Redondo, Buitrago y Haro, 2004). Para el estudio del perímetro y del área de los demás fractales, el procedimiento a realizar es similar. Las preguntas en estos casos son *¿Qué observas qué sucede con el perímetro y el área total a medida que aumentan las iteraciones?* *¿A qué tiende ese valor?* (Faccio, 2013), *¿Existe alguna relación entre la cantidad de ramas?* *¿Cómo podrías generalizar?* (Pinto y Desconsi, 2018). Es llamativo la poca importancia que se le otorga a los procesos límites, dado que el fractal es el resultado de un proceso de este tipo.

En relación con la caracterización del fractal mediante el concepto de autosemejanza, si bien esta es una propiedad que tienen usualmente los fractales, en el 45% de los artículos no se presenta alguna definición, posiblemente porque colocan el foco conceptual en la construcción de diferentes iteraciones, o bien en los procesos iterativos, o bien en el concepto de dimensión fractal. En aquellos artículos en que sí se opta por definir autosemejanza, se encuentran las siguientes: una figura es autosemejante si contiene partes que se asemejan al todo (9 artículos) y una figura es autosemejante si es invariante a cualquier cambio de escala (5 artículos), aunque dos artículos exponen ambas propiedades. De los trabajos de la categoría C_{1P} , referidos al análisis de las producciones de estudiantes, se consideró que un dibujo que demostrara comprensión de lo que es un fractal debía contener: la semilla, la regla de iteración y la propiedad de autosemejanza definida de manera similar a las definiciones recién dadas (Karakus y Karatas, 2014; Karakus, 2016). En 12 artículos no fue posible encontrar un trabajo con el concepto de autosemejanza. Al igual que con el concepto de límite es preocupante que las propuestas de enseñanza no propongan una forma operativa de decidir, mediante un conjunto de operaciones matemáticas, si dada una figura geométrica, es autosemejante. Como se expuso en secciones anteriores de este trabajo, la complejidad matemática que esto supone puede adaptarse a la enseñanza para los estudiantes de la escuela secundaria.

En sólo 3 artículos se hace mención a diferentes tipos de autosemejanza, en total acuerdo con el planteo realizado en la sección de Fundamentos epistemológicos-matemáticos de la GF de este trabajo. De forma similar, Karakus y Baki (2011) la clasifican en tres tipos: autosemejanza

alrededor de un solo punto, autosemejanza en ciertas partes (aproximada) y autosemejanza en cada parte (cada una de ellas es similar a la figura total), ilustrando esto en una imagen que se presenta en la figura 3.



Figura 3 Fuente: Karakus (2011)

Karakus (2016) y Picoli y Pinto (2018), por su parte definen figura autosemejante estricta a aquella que tiene en cualquier parte, una réplica del todo, o que en cualquier parte del fractal se reproduce exactamente la forma de una porción más grande. Es destacable que, en los tres casos, esta clasificación luego no es aplicada en las actividades propuestas, desaprovechando así las potenciales ventajas que esto podría tener para conceptualizar los fractales.

5. Reflexiones finales

El propósito del trabajo fue realizar una revisión bibliográfica acerca de la enseñanza y del aprendizaje de la GF en la escuela secundaria. Producto de la búsqueda y de análisis de los artículos, se estableció la necesidad de trabajar en la transposición didáctica para enseñar la geometría fractal.

El estudio de los fractales nació en la Matemática y dentro de este campo se generó vasto conocimiento, lo cual constituye un claro argumento para proponer que parte de la transposición didáctica de estos conceptos se ocupe de transformar la Matemática presente a la hora de estudiar fractales, y dé un rol motivacional a enfoques más informales que prevalecen en los materiales educativos revisados, aprovechando, entre otros, los aspectos estéticos de los fractales. Este es un proceso que no es inmediato si no que requiere de investigación por parte de didáctas de la Matemática.

Desde el seno mismo de la Matemática la definición formal de fractal se resiste a ser establecida; por lo tanto, parece que en la escuela secundaria tampoco es razonable perseguir ese mismo fin. Como se mostró, no es posible colocar todo lo que se “parezca” a un fractal bajo una misma etiqueta. Sin embargo, una forma posible de aproximarse al concepto siendo fiel a su raíz matemática, es mediante sus propiedades constitutivas: la dimensión fractal y la autosemejanza.

En particular, en este trabajo el foco estuvo en la autosemejanza. Encontrar que en escasas investigaciones se ocupan de proponer un trabajo matemático cuyo resultado permita a los estudiantes conocer si una figura tiene o no autosemejanza, superando las ideas intuitivas de

copias idénticas, motiva a trabajar sobre este aspecto desarrollando intervenciones didácticas con este objetivo.

Por otro lado, si bien la mayoría de los artículos destacan la aplicabilidad de los fractales en varias disciplinas, en ninguno de ellos se percibe el diseño de actividades interdisciplinarias. Posiblemente esto también sea una consecuencia de la poca presencia de procesos genuinamente matemáticos que se realiza con estas figuras, casi sin sobrepasar los aspectos figurativos y estéticos de los fractales.

De acuerdo con los resultados de esta revisión, parece importante trabajar en el diseño de actividades de enseñanza que vinculen la GF con procesos de límite y con la aproximación a la noción de infinito, por un lado, y con la noción de autosemejanza como forma de desarrollar competencias para el reconocimiento de patrones y los procesos de generalización, por otro.

Esta necesidad es la que motivó a los autores para abordar el proceso de la transposición didáctica que ya generó el diseño de una secuencia de actividades sobre GF basada en el diseño de antenas pre-fractales multibanda. En estos momentos se lleva a cabo su revisión por parte de pares, lo que permitirá mejorar su implementación en el aula y diseñar un dispositivo para la evaluación de los aprendizajes asociados con esta intervención.

Referencias

- [1] BOLTE, L. *A snowflake project: calculating, analyzing, and optimizing with the Koch Snowflake.*, Mathematics Teacher. 95(6), 414-418, 2002.
- [2] CANIBAÑO, M.; SASTRE, P. y GANDINI, M. *Ideas para enseñar dimensión fractal en la enseñanza secundaria.* Unión. (28), 191-196, 2011.
- [3] CHEN, S.; HERRON, S.; DING, J. y MOHN, R. *Assessing United States and Chinese secondary mathematics teachers` interest in fractal geometry.* Journal of mathematics education. 11(2), 17-34, 2018.
- [4] CHEVALLARD, Y. *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado.* Editorial AIQUE, 1999.
- [5] COMAS, J. y HERRERA, M. *Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria.* Suma. 65, 23-32, 2010.
- [6] CONSEJO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA. *Programa del curso de Matemática I para 3er año de bachillerato, opción Matemática y diseño, plan reformulación 2006,* <https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/6to%20matematica%20diseño/mat1matdise6.pdf>
- [7] DIRECCIÓN GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES. *Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior,* 2010. http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/sexta/materias%20comunes/matematica_6.pdf

- [8] DORADO, C. y MALDONADO, J. *Enseñanza de las ciencias físicas a estudiantes de primaria y secundaria por medio de sencillos talleres científicos*. LAPJE. 4(2), 415-421, 2010.
- [9] DRAKOPOULOS, V. y PANAGIOTIS-VLASIOS, S. *Teaching Recursion to Junior-High School Students by Using Fractals: A Complete Lesson Plan in Python*. American Journal of Education and Information Technology, 4(2), 50-55, 2020.
- [10] FACCIO, T. *Aprendizajens Matemáticas a partir da construccion de fractais*. Relato de Experiencia. 5-48, 2013.
- [11] FALCONER, K. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, Segunda Edición, UK, 2003.
- [12] FIGUEIRAS, M.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. *Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales*. Suma. (35), 45-55, 2000.
- [13] FUSI, F. y SGRECCIA, N. *¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría*. Épsilon, 105, 31-50, 2020.
- [14] GARBIN, S. *La problemática fractal: un punto de vista cognitivo con interés didáctico*. Paradigma. 28(2), 79-108, 2007.
- [15] KARAKUS, F. *Assesing Grade 8 Elementary School Mathematics Curriculum and Textbooks within de Scope of Fractal Geometry*. Elementary Education Online. 10(3),1081-1092, 2011.
- [16] KARAKUS, F. *A Cross-Age Study of Student's Understanding of fractals*. Bolema. 27(47), 829-846, 2013.
- [17] KARAKUS, F. y KARATAS, I. *Secondary School Students' Misconceptions about Fractals*. Journal of Education and Human Development. 3(3), 241-250, 2014.
- [18] KARAKUS, F. *Investigation into how 8th Grade Students Define Fractals*. Educational Sciences: Theory & Practice. 15(3), 825-836, 2015.
- [19] KARAKUS, F. y BAKI, A. *Pre-Service Teacher's Concept Images on Fractal Dimension*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17(2), 1-12, 2016.
- [20] LOPEZ, J., SALVADOR, J. y FERNANDES, I. *O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolucao de problemas*. Revista Eletronica de Educacao, 7(3), 47-62, 2013.
- [21] MORENO, P. *Un sierpinski en la fachada*. Épsilon. (96), 45-60, 2017.
- [22] MORENO, J. *Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales*. Suma. (40), 91-104, 2002.
- [23] MORENO, J. *El juego del caos en la calculadora gráfica*. Suma. (41), 69-79, 2002.
- [24] MORENO, J. *Triángulos y tetraedros fractales*. Suma. (44), 13-24, 2003.
- [25] NOVAK, J. y GOWIN, B. *Aprendiendo a aprender*, Barcelona, Martínez Roca, 2004.

- [26] PEITGEN, H., JÜRGENS, H. y SAUPE, D. *Chaos and Fractals. New Frontiers or Science*. Second Edition. Springer, New York, EEUU, 2004.
- [27] PEREIRA, T., y BORGES, F. *A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisao bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos*. Acta Scientiae (Vol.19), n. 4, 2017.
- [28] PICOLI, A. y PINTO, J. *Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica*. Thema. 15(4), 1594-1561, 2018.
- [29] PINTO, J. y DESCONSI, A. *Teorema de Pitágoras e o fractal árvore pitagórica: um experimento no ensino fundamental*. Brazilian Journal of Education, Technology and Society. 11(3), 444-457, 2018.
- [30] PUERTO, J. *El uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software Cabri. "Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-Variacional*. Revista Científica. Edición especial. 737-741, 2013.
- [31] REDONDO, A y HARO, M. *Actividades de geometría fractal en el aula I*. Suma. (47), 19-28, 2004.
- [32] REDONDO, A. y HARO, M. *Actividades de geometría fractal en el aula II*. Suma. (48), 15-21, 2005.
- [33] REZENDE, V.; MORAN, M.; MÁRTIRES, T. y CARVALHO, F. *O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio*. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. 11(2), 160-171, 2018.
- [34] RUBIANO, G. *Iteración y fractales (con Mathematica)*. Vicerrectoría Académica, Colombia, primera edición, 2009.
- [35] SABOGAL, S. y ARENAS, G. *Una introducción a la geometría fractal*. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.
- [36] SARDELLA, O.; ZAPICO, I. y BERIO, A. *Fractales: una nueva mirada en la enseñanza de la geometría*. Números. (65), 14-20, 2006.
- [37] SHRIKI, A. *Fractals in the Mathematics Classroom: The Case of Infinite Geometric Series*. Learning and teaching mathematics. (20), 38-42, 2016.
- [38] SOUZA, P., ALVES, R. y BALTHAZAR, W. *A simple and didactic method to calculate the fractal dimension – an interdisciplinary tool*. ArXiv (sometido a Physics), 2018.
- [39] SPINADEL, V. *Geometría Fractal y Geometría Euclideana*. Educación y Pedagogía, 15(35), 85-91, 2002.
- [40] VITABAR, F. *Imágenes fractales con GeoGebra*. Unión. (24), 161-175, 2010.
- [41] YILDIZ, A.; y BALTACI, S. *Reflections from the Lesson Study for the Development of Techno – Pedagogical Competencies in Teaching Fractal Geometry*. European Journal of educational research. 6(1), 41-50, 2017.

Sobre los autores:

Nombre: María Victoria Artigue Carro

Correo Electrónico: maria.artigue@ucu.edu.uy

Institución: Universidad Católica del Uruguay, Consejo de Educación Secundaria, Uruguay

Nombre: María de los Ángeles Fanaro

Correo Electrónico: mariangelesfanaro@gmail.com

Institución: Núcleo de Estudios Educativos y Sociales. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina

Nombre: Eduardo Lacués

Correo Electrónico: elacues@gmail.com

Institución: Universidad Católica del Uruguay desde 1987 a 2020

Juegos y Rarezas Matemáticas

SudokUrbano

SudokUrbano

Rafael Rivera Herráez, Macarena Trujillo Guillén

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 093–104, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Feb'21; Aceptación: 3 Maz'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En esta comunicación presentamos el SudokUrbano, un juego que aúna principalmente matemáticas y urbanismo, pero en el que también se cuelean otras disciplinas. El sudokUrbano está pensado para estudiantes de arquitectura que hayan cursado, o cursen, asignaturas de matemáticas y urbanismo. Las principales ventajas del sudokUrbano son: poner en valor la interdisciplinariedad y la transversalidad entre materias, potenciar el trabajo en grupo, permitir practicar conceptos teóricos de las diferentes materias, ser una propuesta versátil que permite abarcar muchos contenidos y, sobre todo, ser un juego con todo lo que ello implica (creatividad, diversión, participación, motivación, etc.).

Palabras Clave: SudokUrbano, juego, matemáticas y urbanismo, interdisciplinariedad.

Abstract

In this communication we present the SudokUrbano, a game that links maths and urbanism, but in which also take part other disciplines. The sudokUrbano is designed for architecture students who have studied (or study) maths and urbanism subjects. The main advantages of the sudokUrbano are: to highlight interdisciplinarity and cross-knowledge between subjects, to promote work in groups, to allow practice theoretical concepts of the different subjects involved, to be a versatile proposal and, mainly, to be a game with all that this implies (creativity, fun, participation, motivation, etc.).

Keywords: SudokUrbano, game, Maths and Urbanism, Interdisciplinarity.

1. Introducción

El juego como herramienta docente

El juego es una actividad fundamental en nuestras vidas en general, es una simulación que nos permite imaginar, tramar, crear, compartir. También entre adultos, es un elemento de primer orden en la sociabilidad, junto con la conversación y el contacto.

El juego lleva implícita la diversión, es decir, el placer de actuar alrededor de varios elementos: otras personas (colaboración o competencia), unas reglas comprensibles y comunes, unos actos reflejos implícitos (la risa, la sorpresa, la intriga, etc.).

Por ello, incorporar el juego a la experiencia docente es prescindir del binomio aprendizaje-carga. Es aligerar el aprendizaje de ese “castigo” que supone la seriedad, el aburrimiento, o la pesadez. Cuando decimos que “lo que no es divertido no es sostenible” queremos decir que esa tensión dura y difícil que exigimos al alumnado, para ser eficaz solo puede ser puntual, nunca sostenida a lo largo de mucho tiempo. Es imprescindible un cambio de tono, un contrapunto, una alteración de la norma para que se reinicie la capacidad de comprensión. Es ahí donde el juego, sin perder rigor en ningún terreno de la materia, ofrece una posibilidad extraordinaria para asentar el aprendizaje.

El juego es un instrumento docente de primer orden porque une diversión y aprendizaje [1]. Mediante un proceso de reflexión e investigación, con frecuencia compartido, se produce el descubrimiento de una solución. Es preciso que haya dificultad (lo obvio aburre) pero, al mismo tiempo, ha de estar acotada la posibilidad de superarla con los medios conocidos. Es llamativo que este método que se utiliza en la enseñanza primaria, se excluya totalmente de la educación secundaria o superior sin que existan razones justificadas para ello.

Obviamente, el juego sin el soporte docente adecuado, pierde su valor de aprendizaje y se queda simplemente en un divertimento que, aunque también es necesario en cualquier edad, tiene una función más relativa en los espacios docentes y queda fuera de este trabajo.

El juego como instrumento docente en las matemáticas

Sin darnos cuenta, matemáticas y juego nos han acompañado desde niños. Es muy probable que ya supiéramos contar hasta diez para jugar a rayuela, pero nos costase saltar con seguridad a la pata coja. También es posible que pudiéramos distinguir entre un cilindro circular y un prisma hexagonal para encajarlos en una estructura de madera sin ser capaces de manejar una cuchara con habilidad. O jugar con un ábaco sin saber pronunciar la palabra suma. Incluso que nos negásemos a hacer una carrera en la bici con alguien más mayor porque sabíamos que la probabilidad de ganar era muy baja, aunque el concepto probabilidad estuviera fuera de nuestro alcance.



Hoy, matemáticas y juego, combinados, complementándose, potenciándose y dándose ideas mutuamente, siguen con nosotros. Existen multitud de pasatiempos con los que ocupamos

nuestro tiempo libre utilizando razonamientos matemáticos casi sin darnos cuenta. Están también los enigmas, las sucesiones, las series o los cuadrados mágicos que se plantean como retos. El cubo de rubik [2], el cubo soma o el tetris nos ayudan a desarrollar nuestra visión espacial y a familiarizarnos con algoritmos. Y hasta en el tradicional dominó o en un juego de naipes, un buen manejo de las probabilidades nos puede dar ventaja para ganar la partida.

Así, simplemente dando una mirada a nuestra vida cotidiana, descubrimos que las matemáticas y el juego, han sido compañeros de viaje desde siempre. Y es que, con todo su fundamento teórico detrás, las matemáticas siguen desprendiendo un halo de magia y misterio muy propicio para la sorpresa, para el divertimento, para el desarrollo de habilidades. Por eso, el juego se ha utilizado como una herramienta fantástica para la explicación de las matemáticas. Precisamente ahí, en ese punto, es donde se encuentra el sudokUrbano.

La interdisciplinarietà

Este es un concepto repetidamente citado en los manuales docentes, planteado como fundamental en los objetivos, e incluido en la llamada transversalidad. Sin embargo, la estructura docente universitaria actual, no propicia las relaciones entre diferentes Grados, aislando unas profesiones de otras.

Dentro de cada uno de los Grados, la interdisciplinarietà vuelve a ser un elemento clave para entender las relaciones que existen entre las diferentes disciplinas que componen un programa. Pero otra vez, por su condición de transversal y por no existir de manera específica en esos programas, con frecuencia se diluye a lo largo de los cursos y acaba desapareciendo. Así, dejamos al alumnado desorientado y, si tiene alguna inquietud al respecto, ha de buscar sus propios caminos para encontrar esos hilos conductores que dan coherencia al conjunto de lo aprendido.

Precisamente ahí, el juego adquiere un protagonismo interesante porque es capaz de incorporar disciplinas diferentes sin que a nadie le sorprenda y, siendo fácil entender el papel de cada una de ellas, identificarlas. Es más, basándonos en la interdisciplinarietà, podemos plantear ejercicios cuyo objetivo sea precisamente crear un juego que relacione diferentes disciplinas.

El objetivo de esta comunicación es presentar el sudokUrbano como una metodología que aúna todo lo anterior y por lo tanto, también sus ventajas. Es un juego pensado para alumnado de las Escuelas de Arquitectura y que cursen o hayan cursado asignaturas de matemáticas y urbanismo.

2. Descripción del juego

El sudokUrbano es un juego basado en el sudoku tradicional, pero en el que los números que se sitúan en las celdas se han sustituido por equipamientos urbanos. De este modo, el tablero de juego es una ciudad compuesta por 81 parcelas agrupadas en una matriz 9×9 que a su vez

se agrupan en 9 barrios o submatrices 3x3 (ver Figura 1 izqda.). Las cuadrículas interiores de los barrios las llamaremos “calles”, a las exteriores “avenidas”, y a las celdas, parcelas.

No construimos una ciudad nueva, la ciudad ya existe, aunque incompleta; las ciudades siempre están incompletas. En la situación inicial de la ciudad, ésta ya cuenta con algunos usos específicos. Por ello, hay algunas parcelas a las que ya se les ha asignado el uso que tiene actualmente (Figura 1 dcha.). El objetivo del juego, como en el sudoku, consiste en rellenar correctamente las 81 parcelas con los usos y equipamientos necesarios para conseguir una ciudad equilibrada. Para ello existe una restricción inicial y es que en ninguna fila, columna o submatriz 3x3 se puede repetir un equipamiento, es decir, cada calle (a lo largo de los barrios que atraviesa) y cada barrio no pueden tener dos usos iguales, como parece lógico. Pero esta no es la única restricción porque el sudokUrbano implica mucho más.

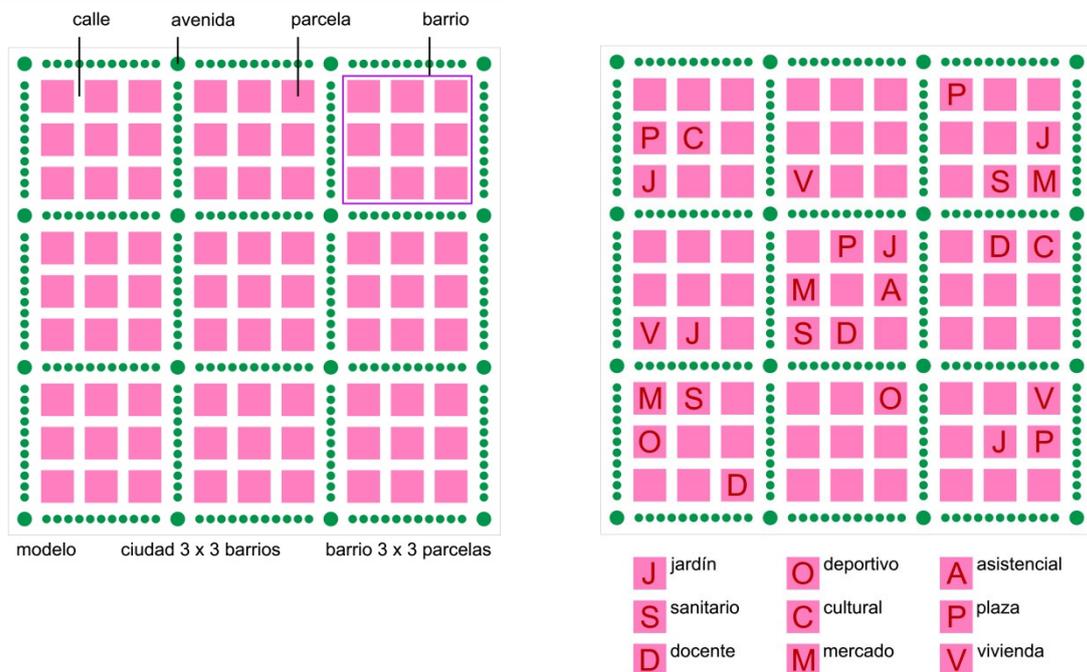


Figura 1. Izqda. Esquema de planteamiento del SudokUrbano. Dcha. Situación inicial de partida.

En primer lugar, cada equipamiento tiene que ser representado con un logo (no con una cifra) que el alumnado tiene que diseñar previamente, incorporando así el diseño como elemento importante dentro de la configuración urbana.

A continuación el equipo ha de analizar si dado el número de parcelas inicialmente ocupadas y la condición de no duplicidad en filas, columnas y barrios, existe una única solución del sudoku, o más de una. Y en cualquier caso, obtener una solución que será el retrato final de la ciudad. Podríamos decir que el sudokUrbano resuelto es el plan urbanístico, sabemos cada equipamiento dónde va. Las diferentes fases, en cambio, son la gestión, es decir, cuándo se construyen esos equipamientos previamente ubicados.

En tercer lugar, a pesar de encontrar la solución del sudoku, las casillas se han de completar en tres períodos, dado que el proyecto para el equipamiento de la ciudad se desarrolla a lo largo de 15 años y el presupuesto está dividido en tres fases, cada una con un presupuesto asignado. De este modo hay que analizar la situación de partida de la ciudad, resolver la distribución de los equipamientos, y en función del presupuesto decidir y priorizar, en cada fase, qué tipo de equipamiento conviene elegir y a qué barrio destinarlo. Cada equipamiento tiene un precio diferente y en cada fase la ciudad debe tener un nivel de homogeneidad razonable considerando la situación de los equipamientos, su proximidad y su ubicación.

Y en cuarto lugar aparece el equipamiento de rango de ciudad, uno en cada una de las categorías. Es decir, si el equipamiento es de tipo sanitario, en la ciudad del SudokUrbano habrá 8 centros de salud y 1 hospital, y ese hospital estará en uno de los barrios, lógicamente. La casilla del equipamiento de ciudad se tiene que diferenciar del de barrio aunque utilizando el mismo logo. Además, los equipamientos de ciudad suponen un coste de un 20% más que los equipamientos de barrio.

El juego está pensado para equipos de 2-4 personas porque es interesante la discusión que se genera alrededor de la resolución. Se construye una maqueta y cada grupo debe entregar en cada una de las fases la foto de la maqueta actualizada, en la que se vea la propuesta que presenta con el presupuesto asignado. Al finalizar el trabajo los grupos deben entregar una memoria que recoja la información del proceso seguido y la foto de la maqueta con la solución final. Puesto que, en este caso concreto de situación de partida mostrado en la Figura 1 se parte de un sudoku en el que hay 17 equipamientos ya asignados, la solución es única y la maqueta debería presentar la misma distribución de equipamientos para todos los equipos. La única diferencia sería donde están colocados los equipamientos de ciudad y las fases por las que se ha pasado al elegir las prioridades.

Además de las restricciones, durante el trabajo/juego van apareciendo muchas más cuestiones que los alumnos deben resolver. Una de ellas sería por ejemplo si es posible que los equipamientos con categoría de ciudad se sitúen en filas, columnas y barrios diferentes de manera que no coincidieran o si situarlos todos en el barrio central supondría mayor cercanía para un mayor número de gente. Estas cuestiones deben combinar una reflexión tanto matemática como urbanística.

3. Las disciplinas en el sudokUrbano

3.1 Matemáticas

Con la descripción del juego que hemos hecho en el apartado anterior son varias las cuestiones matemáticas que se pretende que aparezcan. Estas cuestiones se pueden tratar previamente antes de que el alumnado se enfrente a ellas, solamente dando argumentos sin entrar en la materia, o dejarles que ellos traten de resolverlas sin ayuda y a posteriori, cuando ya se hayan enfrentado al problema, darles las herramientas si no han sabido encontrarlas.

La primera de las cuestiones que el equipo debe resolver es determinar si el sudoku tiene una solución o más. Averiguar el número de casillas que inicialmente tienen que estar completas para que la solución sea única escapa de los conocimientos de los estudiantes de arquitectura. Sin embargo, la tarea está planteada para recordar los conceptos de tipos de sistemas (compatible, determinado o indeterminado, e incompatible) y que hagan una búsqueda de información a este respecto. Aunque existen más documentos, las referencias [3] y [4] son dos ejemplos de textos que se encuentran internet y que pueden manejar al respecto. Más técnicos o más divulgativos, en estos textos es común encontrar términos como restricciones, probabilidad, número de soluciones, que el alumnado debe manejar para determinar si el sudoku planteado tiene solución, y si es así, si la solución es única o no.

A la hora de establecer qué equipamiento introducir en cada fase las ecuaciones diofánticas pueden ser una buena herramienta. En cada fase se puede establecer una ecuación o sistema de ecuaciones diofánticas en el que, dado el precio de cada uno de los equipamientos y el presupuesto total, se puedan obtener qué posibles soluciones (número de equipamientos de un uso determinado) podríamos construir. Estos cálculos tienen que ir íntimamente ligados a la discusión urbanística. Por un lado, dadas las limitaciones de presupuesto y la situación de partida, el razonamiento urbanístico nos puede decir qué usos son los más necesarios, por lo que el número de variables a considerar se podría reducir. Por ejemplo, es posible que en la primera fase se plantee solo implementar usos relacionados con necesidades básicas, como mercados, sanitarios o viviendas. De este modo son solo tres variables a tener en cuenta. Por otro lado, las soluciones resultantes de la resolución de las ecuaciones diofánticas también necesitan de un análisis urbanístico para decidir entre las posibles soluciones cuál es la más conveniente. Para facilitar estos cálculos, el presupuesto de cada fase y los precios de los equipamientos se fijan tratando de favorecer que las posibles ecuaciones planteadas tengan solución.

Por otro lado, el diseño de los logos implica generalmente el uso de geometrías sencillas. Curvas y regiones planas protagonizan los diseños. Existen diversos softwares que permiten representar estas geometrías a partir de las expresiones matemáticas que las identifican. En nuestro caso hemos elegido el software Mathematica por su versatilidad y porque tenemos licencia de uso para estudiantes y profesores. Mediante los comandos ContourPlot, RegionPlot o ParametricPlot pueden dibujarse multitud de formas diferentes. De nuevo, tiene que haber un continuo diálogo entre matemáticas (en este caso geometría) y otras disciplinas que intervienen en el diseño de los logos. En ocasiones es posible que no todos los equipamientos tengan un diseño que respondan a una geometría con expresión conocida, entonces se puede utilizar otro software o hacer parte del logo con Mathematica y completar la forma con otro programa. Para ello Mathematica permite exportar a muchos tipos de archivos diferentes.

Estos son los aspectos esenciales de las matemáticas que se pueden trabajar con el enunciado del sudokuUrbano tal y como lo hemos descrito en la sección 2, pero la descripción realizada es solo una variante del juego. Una de las características esenciales del sudokuUrbano es

precisamente su versatilidad para incorporar otras consideraciones en las que se pueden trabajar colateralmente otros aspectos de las matemáticas y otras disciplinas. Por ejemplo, recordemos que la solución del sudoku es a priori conocida y en cada etapa se deciden qué equipamientos colocar en función de esas necesidades, pero también es importante considerar dónde hacerlo, en qué barrio es más adecuado colocar el equipamiento. Entonces, podemos esquematizar la situación de partida como un problema de teoría de grafos para decidir la localización en función de rutas posibles, menor número de cruces, etc. O asignar a las calles y avenidas (aristas) unas determinadas longitudes (pesos) y calcular por ejemplo rutas más cortas. Para las decisiones de dónde colocar un equipamiento también es posible asignar pesos a los equipamientos en relación al número de personas que los utilizan, y así calcular centros de masas (personas). En este caso se calcularían los centros de masas mediante sumatorios, pero nos puede dar pie a explicar cómo se calcularían esos centros de masa con funciones continuas mediante integración.

En definitiva, nosotros hemos expuesto alguno de los contenidos matemáticos que se pueden trabajar con el sudokUrbano, pero no son los únicos, podrían existir muchos otros. Al igual que ocurre con las demás disciplinas que intervienen y que comentamos a continuación.

3.2 Urbanismo

Con el sudokUrbano entramos de lleno en el urbanismo pero no tanto como una técnica, que también, sino como una ciencia social que apunta hacia el bienestar de la ciudadanía.

Como hemos dicho, no se parte de un territorio virgen, sino de un lugar con una serie de condicionantes previos de todo tipo. Paisajísticos, de infraestructuras, climáticos, sociales, etc. En este caso partimos de una realidad concreta, una realidad urbana, aunque es obvio que podemos incorporar conceptos añadidos (arquitectura protegida, vegetación existente, áreas de exclusión social, etc.) que pueden suponer un conjunto de juegos dentro del juego.

Ese punto de partida es una ciudad cualquiera con un determinado nivel de consolidación y de carencias. Una ciudad compuesta por nueve barrios heterogéneos y una red viaria como modelo de referencia. Es un caso casi real del que podemos encontrar ejemplos parecidos. En realidad trabajamos alrededor de un modelo. Nuestro objetivo final es una propuesta de ordenación racional, eficaz y programada. Urbanismo puro.

Incluso se puede plantear un punto de partida que dé diferentes soluciones (si reducimos los condicionantes previos) lo que supone obtener distintos modelos urbanos con mayor nivel de libertad del equipo que proyecta.

Es obvio que subyace el concepto de equilibrio social, otra vez urbanismo, tanto en el resultado final como en cada una de las fases en las que se priorizan unos usos u otros en función de los que ya existen. Ese concepto de equilibrio y equidistancia determina la posición del proyectista ante la situación actual. La participación es un elemento de referencia imprescindible en el urbanismo que, en este juego, se mimetiza haciendo que el trabajo sea colectivo y no individual, incorporando así el debate.

También aparece el contenido de programación. Aunque el resultado final pueda ser el mismo (o parecido, en función de los datos de partida) son fundamentales las fases por las que se desarrolla. La ciudad nunca es una foto fija, siempre está en transformación, y es necesario que cada una de las fases obtenga el mayor nivel de homogeneidad y equilibrio posible. El resultado final debe ser una suma de equilibrios parciales por eso es tan interesante el objetivo como el recorrido para obtenerlo.

Por último existe la opción de incrementar la complejidad utilizando el modelo de sudokus compuestos (dobles, diagonal o samurái, por ejemplo) en los que se puedan incorporar criterios de crecimiento respetando del medio, o con condicionantes de otro tipo que justifiquen esa complejidad (ver Figura 2). En este supuesto se abre un mundo nuevo que puede incorporar dificultades añadidas con interés.

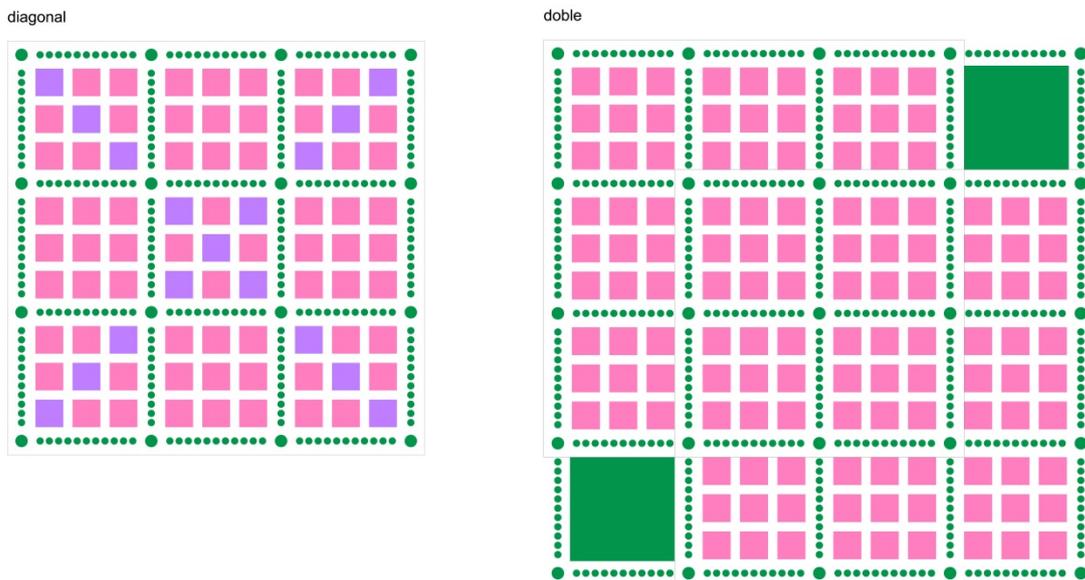


Figura 2. Otras configuraciones del SudokuUrbano más complejas. Izqda. Esquema de planteamiento diagonal de SudokuUrbano, en el que además de la no repetición de equipamientos en filas, columnas, y barrios, tampoco ha de producirse en las diagonales, b) Esquema de sudokuUrbano doble.

Por todo ello, el SudokuUrbano es una propuesta de propuestas, un contenedor de diferentes escalas de trabajo. Incluso podemos llegar a que el punto de partida sea el tablero sin datos previos, que podamos situar los equipamientos con criterios de equidad desde el principio.

3.3 Otras disciplinas

Estamos hablando del bienestar de la colectividad, por eso se tratan las diferentes necesidades y derechos de la ciudadanía. Desde esa perspectiva se globaliza la propuesta y pasan a primer plano los usos planteados incluyendo la posibilidad de cambiar alguno de ellos en función de un supuesto de partida diferente.

La elaboración de la maqueta, el uso de las tres dimensiones, la exigencia de diseñar logotipos para cada uso, hacen que el diseño adquiera un valor complementario relevante. La composición final de la propuesta ha de tener una lectura sencilla y atractiva.

También interviene la economía, la necesidad de introducir conceptos básicos de garanticen una distribución coherente de los medios económicos que se plantean como punto de partida. La hoja de ingresos y gastos (que puede hacerse más compleja en función del enunciado) a modo de contabilidad, ha de ser un complemento imprescindible para hacer viable la propuesta. Cabe concluir el concepto de programación, es decir, el establecimiento de determinantes temporales que justifiquen la propuesta y que pueden representarse mediante diagramas.

Por último aparece el soporte legal, es decir, el conocimiento del abanico de leyes que tienen relación con el recorrido del trabajo. Nos referimos a leyes de todo tipo que intervienen en el proceso descrito.

En cualquier caso, y como disciplinas transversales, aparece la capacidad de explicar el contenido del trabajo, la metodología, la hoja de ruta de los debates, la bibliografía, y toda una serie de conocimientos que han de estar al servicio de la propuesta.

4. El sudokUrbano como experiencia docente

El sudokUrbano se enmarca dentro de un proyecto de mayor alcance que hemos llamado “El Urbanismo de las Matemáticas” que incide en la importancia de aprender al menos dos disciplinas al mismo tiempo, en este caso Urbanismo y Matemáticas, siendo conscientes de que cada una de estas disciplinas, a su vez contiene otras, abriendo un abanico que complementa, desarrolla, expande, y mejora el concepto de aprendizaje.

Uno de los hitos de El Urbanismo de las Matemáticas fue conseguir que existiera (al menos durante un curso) una asignatura que implicara a dos departamentos, y fuera impartida por profesorado de diferente titulación. Esta asignatura, con el mismo nombre que el proyecto, era una optativa del Grado en Fundamentos de la Arquitectura que se imparte en la Universitat Politècnica de València. El sudokUrbano fue una experiencia práctica dentro de esta asignatura. En la Figura 3 se pueden ver las fotografías de la maqueta realizada por el alumnado.



Figura 3. Fotografías de las maquetas del sudokUrbano realizadas por el alumnado.

Con respecto a la valoración de la experiencia, como evidencias tenemos únicamente los comentarios realizados por el alumnado que se resumen en: 1) el complemento lúdico como referencia permanente permite motivar y generar un interés añadido, 2) los estudiantes se divierten, juegan, discuten, y aprenden, 3) se crea un clima adecuado en el aula como soporte imprescindible para que fragüe el aprendizaje, y 4) lo atractivo del contenido en sí, y la percepción de que esos conocimientos se expanden a otras disciplinas, incluso a la vida cotidiana, favorecen la comprensión y el interés.

El sudokUrbano se presenta como un instrumento muy útil para valorar las competencias de los estudiantes, algo que hoy en día se demanda en los Grados.

5. Discusión y conclusiones

Somos conscientes que el tamaño de la muestra y la falta de evidencias complementarias limitan la valoración de la experiencia docente. Sin embargo, el objetivo de esta comunicación no es describir la experiencia docente en concreto, sino presentar la herramienta del sudokUrbano. En ese sentido nos permitimos valorarla muy positivamente fundamentalmente por el abanico de posibilidades que ofrece dentro de cada disciplina. El sudokUrbano es una propuesta paraguas que permite ampliar su complejidad con diferentes niveles en función del enunciado. Pensemos que incluso se puede plantear al alumnado que definan ellos mismos los usos que consideren más oportunos partiendo de una supuesta situación de la sociedad. Podemos estar hablando de un campo de refugiados o de una gran capital occidental, de una aldea o una metrópoli. El enunciado marcará esa complejidad. Si ese enunciado forma parte de un debate inicial para llegar a acuerdos en el desarrollo del trabajo podemos estar cerrando un círculo docente, desde nuestro punto de vista muy interesante.

Existen diferentes modalidades con las que se puede trabajar el sudokUrbano que implican más o menos autonomía de aprendizaje del alumnado. Desde un aprendizaje totalmente dirigido en el que primero se trabajen los contenidos teóricos de las diferentes disciplinas que intervienen y después se vayan guiando cada una de las fases que completan el juego; hasta

un aprendizaje totalmente autónomo en el que el profesor solo guía en las entregas de las distintas fases. Y por supuesto siempre están las opciones intermedias.

El SudokuUrbano recoge la necesidad de intercambio de conocimientos, la mezcla imprescindible de disciplinas. Esa convicción de que ninguna de ellas, aislada, puede encontrar la solución óptima. Ninguna por sí sola puede hacer el análisis necesario para acercarse a “lo mejor”, apareciendo así el debate desde diferentes puntos de vista. El trabajo en equipo, con soluciones acordadas, y la interdisciplinariedad son elementos clave en la propuesta.

En relación con las matemáticas este juego permite trabajar contenidos que se han trabajado en las asignaturas de matemáticas del Grado, e incluso repasar conceptos de cursos previos a la Universidad, evidenciando su utilidad, y además permite trabajar contenidos que actualmente no están incluidos en la asignatura, pero que entendemos que son interesantes en la formación del estudiante de arquitectura.

Por último una referencia al profesorado. Al valor añadido que supone tener dos especialistas, de diferentes disciplinas, dispuestos a mezclar los conocimientos, a entender las relaciones entre los contenidos, y a ofrecer un resultado final coherente, mestizo, complementado, sin imponer criterios ni especialidades. Es cuando se hace realidad aquello de que enseñar enseña porque el conocimiento, más que especialidades, cada vez necesita más relaciones. Por eso, dentro de ese clima del que hacíamos mención, y del aspecto lúdico, el profesorado ha de tener un papel relevante no solo de conocimiento sino de convicción y confianza en el método.

Referencias

- [1] BERNABEU, Natalia, GOLDSTEIN, Andy. *Creatividad y aprendizaje: El juego como herramienta pedagógica*, Narcea Ediciones, 2012.
- [2] ESTEBAN ROMERO, Ramón. *Las matemáticas del cubo de Rubik*. Pensamiento matemático, Volumen III, Número 2 pp. 97-110. 2013.
- [3] MCGUIRE, Gary, TUGEMANN, Bastian, CIVARIO, Gilles. *There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem*. arXiv:1201.0749. 2013.
- [4] *Demostrado: un Sudoku debe comenzar con 17 números dados para que pueda tener solución única*. Blog Gaussianos. 2012. <https://www.gaussianos.com/demostrado-un-sudoku-debe-comenzar-con-17-numeros-dados-para-pueda-tener-solucion-unica/>

Sobre los autores:

Nombre: Rafael Rivera Herráez

Correo Electrónico: rivera7@sol7.jazztel.es

Nombre: Macarena Trujillo Guillén

Correo Electrónico: matrugui@mat.upv.es

Institución: Universitat Politècnica de València

Cuentos Matemáticos

El valor de la x

The value of x

Luis Balbuena Castellano

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 105–110, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Abr'21; Aceptación: 10 Jun'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En este cuento teatralizado (se puede ver como el libreto de una obra teatral), se comparan dos métodos de resolución de problemas: el método aritmético, más intuitivo, y el algebraico, más sistemático y que permite la generalización automática. Se propone la síntesis de los dos métodos como el medio ideal para afrontar los problemas matemáticos.

Palabras Clave: Aritmética, Álgebra, problemas matemáticos.

Abstract

This tale can be intended as the text for a theatre representation. It compares two methods of resolution of mathematical problems: the arithmetic method and the algebraic one. The arithmetic method is more intuitive but the algebraic one is more systematic and permits a rapid generalization. It proposes the synthesis of the two methods as the ideal tool to face the mathematical problems.

Keywords: Arithmetic, Algebra, mathematical problems.

1. El valor de la x

Aparecen en el escenario ARITMÉTICA (AR) y ÁLGBRA (AL) por lados opuestos. AR va vestida con una túnica blanca y lleva un cartel identificándola como ARITMÉTICA y AL con un ropaje de estilo renacentista y con su cartel identificativo. Se acercan despacio. Se miran y dan una vuelta una alrededor de la otra. Hay un árbol con unas cuantas naranjas colgando.

AR.- ¡Merezco un respeto porque soy mayor que tú!

AG.- Pero es que el ser mayor no te da derecho a desautorizarme ni a creerte mejor que yo.

AR.- Es que pretendes desplazarme y eso no te lo puedo consentir.

AG.- ¿Por qué? Una prueba de que no he pretendido desplazarte es que has seguido viviendo después de nacer yo.

AR.- Pues por eso me considero mejor, más fuerte. Además, los estudiantes me aprecian. En cambio a ti tratan de evitarte porque no te entienden. Los lías demasiado.

AG.- Considero que eso es un error porque yo solo pretendo ayudarles, ampliar sus mentes, abrirles unas perspectivas que tú eres incapaz de darles.

AR.- ¡¡Esa sí que es buena!! De manera que tú naces gracias a lo que tengo yo, o sea, que te basas en mí para nacer y te atreves a decir que yo les limito.

AG.- Sí y te lo voy a demostrar.

AR.- Pues mira, has logrado intrigarme. ¿Cómo vas a demostrar que vales más que yo?

AG.- Lo lógico es que sea resolviendo un problema pues es un campo común a las dos.

AR.- Estupendo, en eso de resolver problemas tengo yo mucha experiencia y no creo que vayas a ganarme... Propón uno.

AG.- Hay uno de Jaimito que supongo que conocerás. Te lo voy a recordar ahora. Tú tratarás de resolverlo por tus métodos y yo lo haré después con los míos. ¿De acuerdo?

AR.- De acuerdo, pero ¿quién lo va a juzgar?

AG.- Podemos hacer después una encuesta entre los estudiantes para que compruebes que me rechaza quien no me conoce bien.

AR.- Adelante, ¿cuál es el problema?

AG.- Se trata de este: Jaimito entra en una finca de naranjeros. No lo puede resistir.

(Aparece Jaimito por un lado del escenario. Lleva un saco vacío a la espalda. Se acerca al naranjero. Van apareciendo los personajes que dice AL y diciendo lo señalado en cursiva).

Abre el saco que lleva a la espalda y empieza a llenarlo de naranjas para llevárselas.

Después emprendió la huida pero le apareció un guardián que lo paró y le dijo:

¡Oye, muchacho!, ¿Qué llevas ahí?

Entonces Jaimito le abrió la bolsa, la miró el guardián y le ordenó:

Déjame la mitad de las naranjas que llevas más media naranja y sigue tu camino.

Pero Jaimito no contaba con la aparición de un segundo guardián que lo paró y le dijo:

Déjame la mitad de las naranjas que llevas más media naranja y sigue tu camino.

Y eso hizo. Cuando ya se las prometía felices, apareció un tercer guardián que lo paró y le dijo:

¡Oye, muchacho!, ¿Qué llevas ahí?

Entonces Jaimito le abrió la bolsa, la miró el guardián y le ordenó:

Déjame la mitad de las naranjas que llevas más media naranja y sigue tu camino.

Y eso hizo. Entonces Jaimito metió la mano en el saco y comprobó que solo le quedaba una naranja.

(Jaimito la muestra, sacude el saco boca abajo y se marcha).

La gran pregunta es: ¿Cuántas naranjas tenía Jaimito en el saco al principio? Por cierto, que la historia comenta que Jaimito no tuvo que partir ninguna naranja. ¿Conoces esta historia?

AR.- ¡Por supuesto!

AG.- Pues bien, dime cómo la resolverías tú.

AR.- Eso es elemental, querida Álgebra. Si le queda una al final, es porque al llegar al último guardián le quedaban 3

De esta forma, la mitad (1,5) más media naranja (0,5) hacen dos, y por tanto, al darlas, le queda solo una. Al llegar al anterior guardián le quedaban 7 para que al darle la mitad (3,5) más media naranja (0,5), le dé cuatro y le queden 3.

De esta forma, finalmente, cuando le mostró la bolsa al primer guardián, le enseñó

15 naranjas ya que la mitad (7,5) más media (0,5) hacen 8 con lo que le quedan 7.

Total, que al primer guardián le mostró 15 y esta es la solución.

AG.- ¡Excelente!

AR.- ¿Y dices tú que no razonan conmigo?

AG.- ¡Yo no he dicho eso! Lo que dije y te lo repito, es que conmigo hacen cosas que no hacen contigo.

AR.- ¿Ah sí? ¿Cuáles?

AG.- Ten un poco de paciencia. Allá voy. Yo les diría, a ver Jaimito, ¿cuántas naranjas tienes si no sabes cuántas son? Y él dirá: x

AR.- Pero eso solo lo dirá si ya te conoce...

AG.- Es que, sin esa hipótesis, ¡apaga la luz y vámonos!...

AR.- Bueeeno, continúa...

AG.- ¿Cuánto le dio al primer guardián? Responde tú, Aritmética para que compruebes por ti misma que no soy tan complicada...

AR.- Pues... x partido por dos más un medio...

AG.- ¡Correcto! ¿Ves qué fácil? Y, ¿cuánto le quedó si eso fue lo que le dio?

AR.- Espera que lo hago

x menos lo anterior, es decir, x partido por dos más un medio. Esto es igual a x menos x partido por dos menos un medio que es igual a x partido por dos menos un medio igual, finalmente, a x menos uno partido todo por dos. ¡Uf, qué mareo...!

AG.- Seguramente, pero fíjate qué resultado más interesante has obtenido...

AR.- No lo dudo, pero no olvides que Jaimito pasó por tres guardianes...

AG.- ¡Ya lo sé! Y eso es lo que vamos a hacer: repetir el proceso dos veces más y procura estar atenta para que veas lo que vas a obtener. Como sé que eres inteligente, estoy segura de que, al final, te vas a sentir atraída por mis métodos de trabajo, ya lo verás...

AR.- ¡Venga! Déjate de hacerme la pelota y continúa.

AG.- Así que te quedan x menos uno partido por dos. ¿Cuánto le da al segundo guardián? ¿No es la mitad más media naranja? (Aritmética asiente con la cabeza de manera ostentosa) Pues muy bien, escríbelo.

AR.- A ver si puedo: la mitad es x menos uno partido por dos y vuelta a partir por dos y añadido un medio.

AG.- ¡Bien! ¡Me gusta lo bien que lo haces! Te resuelvo el cálculo y obtienes x más uno partido todo por cuatro.

AR.- ¡Oye, Álgebra! ¿me dejas que te diga algo?

AG.- Sí, claro, ¿qué me quieres decir?

AR.- Que observo que estás usando mis métodos: divides, sumas, usas fracciones, etc. para llegar a esos resultados que llamas tuyos...

AG.- Bueno, eso quiere decir que no estamos tan alejadas una de la otra. Pero dejemos eso ahora y vamos a terminar. Mantente atenta porque te vas a sorprender más aún. Si esa cantidad es la que le da, ¿cuánto le queda? Sencillo: lo que tenía menos lo que le ha dado, es decir: x

menos uno dividido por dos menos x más uno dividido por cuatro. Con esto se llega a la expresión x menos tres dividido por cuatro

AR.- ¡Párate! ¡párate! que me estoy mareando un poco con tanta x ...

AG.- ¡No seas hipócrita! Eres inteligente como para entender todo esto que, además, son cosas más tuyas que mías... Vamos a seguir porque ya solo nos queda el tercer guardián. ¿Cuánto le da?

AR.- A ver si no me pierdo... según repetiste una y otra vez, es la mitad de los que tiene, más media naranja, es decir: La mitad de lo que tiene x menos tres, partido por cuatro, y partido todo por dos (la mitad) más un medio otra vez.

AG.- ¿Ves como sí sabes? Si estuviésemos en una clase, te pediría que hicieras las operaciones, pero aquí te doy el resultado para que no te marees más pues me interesa que te concentres por última vez... el resultado es x más uno dividido por 8.

Ahora, para terminar, dime ¿cuántas le quedan a Jaimito?

AR.- ¿Así? ¿sin anestesia? Veamos... x menos tres, partido por 4 menos x más uno partido por 8

AG.- ¡¡En efecto!! Te hago las operaciones y eso da como resultado x menos 7 dividido por 8

AR.- O sea, ¿todo este lío para llegar a esa expresión? ¿No te das cuenta que has tardado mucho más que yo, lo que ya demuestra que soy mejor? Perdona, pero no veo qué ventajas tiene todo ese lío sobre mi forma tan sencilla de resolverlo...

AG.- ¡Ten paciencia y verás! Además, es conveniente que te pongas el cinturón de seguridad para no estrellarte con el asombro que te va a venir... ¿Cuántas naranjas dice el problema que le quedaron a Jaimito al final?

AR.- Una

AG.- Pues fíjate, si escribo x menos 7 partido por 8 igual a uno, se sigue que x menos 7 es igual a 8 y por tanto x es 15, el mismo resultado que obtuviste tú...

¿he tardado mucho?

AR.- Claro que sí y perdona mi torpeza, pero sigo sin ver la ventaja...

AG.- Ahora verás. Si te digo que a Jaimito le quedaron dos en lugar de una y te pregunto cuántas tenía al principio, hazlo tú con tu método que yo lo hago con el mío

AR.- A ver, si al final ...

AG.- ¡No sigas que yo ya lo tengo! tiene 23: de x menos 7 partido por 8 igual a dos deduzco rápidamente que x menos 7 es igual a 16 y por tanto Jaimito tenía 23 naranjas...

¿Y si a Jaimito no le queda ninguna naranja?

AR.- Me estás liando...

AG.- Pues en lo que tú has dicho esa frase ya yo lo tengo resuelto, porque de x menos 7 partido por 8 igual a cero deduzco que Jaimito tenía 7 naranjas...

¿Qué te parece?

AR.- ¡¡Chacha, yo me estás dejando boobaa!

AG.- Por tanto, reconoces que mereció la pena todo aquel calculeo y reconoces que yo he puesto en funcionamiento unas capacidades que tú no puedes desarrollar...

AR.- Sí, reconozco que me has convencido. Creo que lo mejor es que nos pongamos a trabajar juntas, ¿qué te parece?

AG.- Es lo mejor pero antes de darnos un abrazo de reconciliación, te quiero mostrar un resultado más general aún que he obtenido si son n guardianes los que paran a Jaimito y al final le quedan k naranjas al muchacho.

El número x de naranjas que tiene al principio lo puedes obtener con la fórmula: x menos dos elevado a n menos uno, dividido por dos elevado a n igual a k .

Con esto resuelves todos los casos que se le puedan presentar a Jaimito. ¿Verdad que es impresionante?

AR.- Lo dicho, ¡¡ yo me quedo boba ¡!.

(Se dan un abrazo)

FIN

Sobre el autor:

Nombre: Luis Balbuena Castellano

Correo Electrónico: balbuenaluisx@gmail.com

Institución: Catedrático de Matemáticas de Educación Secundaria en los Institutos Diego de Guzmán de Huelva, Antonio González de Tejina y Viera y Clavijo en La Laguna (Tenerife), España.

Críticas y reseñas

Exposición 300 aniversario de la Academia de Matemáticas de Barcelona

Exposition 300th anniversary of the Barcelona Academy of Mathematics

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp.111-112, ISSN 2174-0410

Recepción: 20 May'21; Aceptación: 30 May'21

1 de octubre de 2021

Resumen

En el año 2020 se celebró el 300 aniversario de la creación de la Real y Militar Academia de Matemáticas de Barcelona. Mateo Calabro fue el primer director y el general Jorge Próspero de Verboom su impulsor. Esta Academia se considera precursora de ciertas Academias Militares actuales, especialmente de las Academias de Ingenieros y Artillería del Ejército, así como de las Escuelas Técnicas Superiores de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Esta exposición ha sido una de las acciones realizadas para este aniversario.

Palabras Clave: Academias de Matemáticas. Historia de las ingenierías. Academias Militares

Abstract

2020 marked the 300th anniversary of the creation of the Royal and Military Academy of Mathematics of Barcelona. Mateo Calabro was the first director and General Jorge Prospero de Verboom its promoter. This Academy is considered the forerunner of certain current Military Academies, especially the Army Engineers and Artillery Academies, as well as the Higher Technical Schools of Civil Engineers. This exhibition has been one of the actions carried out for this anniversary.

Keywords: Academies of Mathematics. History of engineering. Military Academies.

1. La exposición

Con motivo del 300 aniversario de la creación de la Real y Militar Academia de Matemáticas de Barcelona, una exposición conmemorativa recorre diversas academias militares de España. Fue inicialmente diseñada para su exhibición en Barcelona con ocasión de la efeméride. Nosotros la visitamos en la Academia de Ingenieros de Hoyo de Manzanares.

La exposición tiene como objeto divulgar el legado de un centro de enseñanza, de estudio y de innovación tecnológica, cuya transcendencia, nada conocida, es grande y se sale del ámbito castrense.

Está formada por dieciséis paneles de gran formato, donde es posible descubrir la intensa y valiosa obra civil y militar de unos hombres que, estando al servicio de la Corona, dedicaron sus conocimientos y su vida a la defensa y al desarrollo de los territorios españoles de la época que eran enormes.

En ellos queda patente como los ingenieros ayudaron no sólo a la ejecución de las operaciones militares, sino también al desarrollo de la infraestructura civil necesaria para la modernización de la España de los siglos XVIII Y XIX.

A los paneles les acompaña una colección de documentos originales, réplicas y de infografías.

La exposición deja patente cómo la Academia de Matemáticas de Barcelona, representó la institución precursora de la enseñanza militar en España del siglo XVIII. En ella se encuentran los orígenes de los Colegios Militares y Academias de Aplicación que posteriormente han derivado en las actuales Academia General Militar, Academia de Artillería, Academia de Ingenieros y en la Escuela Politécnica Superior del Ejército.

Como queda patente en la presentación de la exposición, las matemáticas han sido pilar fundamental en la enseñanza militar en España:

Los orígenes de una enseñanza militar planificada y reglada en España se remontan a la Real y Militar Academia del Ejército de los Países Bajos, dirigida por el ingeniero militar D. Sebastián Fernández de Medrano, entre 1675 y 1705.

En 1720, el Ingeniero General D. Jorge Próspero de Verboom, ordena la creación en Barcelona de una Academia de Matemáticas en la que, siguiendo el modelo de la de Bruselas, se unificará la formación de los ingenieros militares.

Centrada en el estudio de las matemáticas, la poliorcética (arte de atacar y defender plazas fuertes), la cartografía y el tiro; la Academia representó la instrucción científica en una época en el que la ingeniería en España estaba ligada al ingeniero militar.

“Nunc Minerva Postea Palas”, lema de la Academia de Matemáticas significa “primero el conocimiento, después la guerra”

Referencias

<https://www.graorivas.es/visita-a-la-exposicion-300-aniversario-de-la-real-y-militar-academia-de-matematicas-de-barcelona/>

Sobre los autores:

Nombre: Equipo Editorial

Correo electrónico: revista@giepm.com

Institución: Revista Pensamiento Matemático.

Entrevista

Alejandro Zarzo y Fernando San José. Grado en
Matemáticas por la UPM

Alejandro Zarzo y Fernando San José. Degree in
Mathematics from the UPM

Equipo editorial

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 2, pp. 113-116, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Sep'21XX; Aceptación: 18 Sep'21

1 de octubre de 2021

Resumen

El pasado 6 de septiembre abrió las puertas a sus alumnos una nueva titulación en la Universidad Politécnica de Madrid. Se trata del grado en Matemáticas por la UPM. Hablamos con Alejandro Zarzo y Fernando San José, ambos directores de dos de los cinco Departamentos de Matemática Aplicada de la UPM y presidente de la conferencia de directores de matemáticas de la UPM y responsable de la coordinación del nuevo grado, respectivamente.

Palabras Clave: Grado en Matemáticas, Universidad Politécnica de Madrid

Abstract

On September 6, a new degree at the Polytechnic University of Madrid opened the doors to its students. It is the degree in Mathematics from the UPM. We spoke with Alejandro Zarzo and Fernando San José, both heads of two of the five Departments of Applied Mathematics of the UPM and president of the conference of directors of mathematics of the UPM and responsible for the coordination of the new degree, respectively.

Keywords: Degree in Mathematics, Polytechnic University of Madrid

- *¿Por qué un grado en matemáticas en la Universidad Politécnica de Madrid, tradicionalmente centrada en estudios tecnológicos de Ingeniería?*

- Hay razones poderosas para esta iniciativa que, además, ya permitían prever el éxito que ha tenido. Entre estas razones se encuentra por ejemplo la situación que tiene este tipo de titulaciones de ciencias en importantes universidades tecnológicas como el MIT o la ETH de Zurich. Por otra no debemos olvidar la vocación de servicio público de una universidad como la UPM que debe dar respuesta a situaciones como la que, por una parte, se está produciendo

en la enseñanza de las matemáticas de los estudios preuniversitarios, en donde estamos viendo como faltan profesores de matemáticas; por otra y en los últimos años, se está produciendo un gran aumento de la demanda de profesionales de las matemáticas por parte de las empresas. Estas cuestiones se conjugan perfectamente con el potencial que ofrece la UPM con más de 200 profesores dedicados a la docencia y la investigación en Matemáticas. Por último, y no por ello menos importantes, hay que destacar las posibilidades de desarrollo de la formación matemática de los alumnos de nuestra universidad a través de diferentes formas de colaboración intertitulaciones que ya estamos empezando a explorar. Todo esto unido a las posibilidades de mejora de una investigación básica, que ofrece un proyecto como éste, hacen de este Grado algo muy interesante dentro de la oferta formativa de la Politécnica. No olvidemos que una investigación básica de calidad es un elemento necesario para producir una robusta investigación aplicada que produzca una efectiva transferencia del conocimiento a la sociedad, a la que una universidad pública como la UPM se debe.

- ¿Qué diferencia a este grado en matemáticas de otros que se ofrecen en universidades públicas madrileñas?

- El Grado en Matemáticas por la UPM es un grado generalista que pretende ofrecer al alumno los conocimientos que la matemática actual ofrece. Este Grado tiene un marcado interés en la resolución de problemas y un especial cuidado en la presentación de una ciencia que aporta nuevos enfoques a los retos que debe hacer frente nuestra sociedad. El recorrido académico y profesional de las y los profesores de la Politécnica va a conferir el toque especial que pueden aportar quienes han estado vinculados a un entorno en el que las matemáticas tienen un manifiesto enfoque práctico y son especialmente apreciadas por las soluciones que aportan a la Ingeniería y la Arquitectura. Este saber hacer del profesorado de matemáticas de la UPM proporcionará, sin lugar a dudas, uno de los elementos diferenciadores de este Grado en Matemáticas por la UPM. A esto hay que añadir como nota distintiva de las personas que enseñamos matemáticas en la UPM, la larga experiencia acumulada en la formación de profesionales cuya trayectoria laboral acaba desarrollándose en empresas y administraciones públicas que, actualmente y como se ha mencionado, constituyen una de las fuentes de empleo más importantes para las y los matemáticos.

- ¿Cómo surgió la idea de implantar un grado en matemáticas en la UPM?

- La idea surge después de un largo proceso cuyo punto inicial podríamos situarlo en las conversaciones que se produjeron entre los profesores de matemáticas de la UPM cuando se inicia el proceso de reestructuración de departamentos hacia el año 2012. Esa reestructuración produjo que la práctica totalidad de los profesores de matemáticas se encuadraran en 5 departamentos de matemática aplicada, la mayor parte de ellos, intercentros. Este proceso trajo también la necesidad de seguir trabajando por la mejora de la docencia y la investigación en Matemáticas dentro de nuestra universidad lo que dio lugar a la formación de lo que ha dado en denominarse Conferencia de Directoras/es de Departamentos de Matemática Aplicada, como foro de discusión e intercambio de ideas en relación a los temas antes señalados. En este foro surge la idea que se puso en marcha hace ya algo más de dos años y medio.

- ¿Cuál ha sido el proceso que ha permitido tener la primera hornada de estudiantes en las aulas?

- En este proceso ha sido muy importante contar con el apoyo del profesorado de matemáticas de la UPM y con un colectivo de casi 100 profesoras y profesores interesados en participar activamente en el diseño de las enseñanzas de este Grado. El trabajo de la Conferencia ha sido buscar y fomentar esos apoyos, proponer estructuras participativas que canalizaran y permitieran la coordinación del trabajo de todo el profesorado interesado en participar activamente en el proyecto y por último conectar este trabajo con las cuestiones organizativas de engarce de este proyecto en la estructura de la UPM. En este recorrido la Conferencia ha contado, por un lado, con el entusiasmo y el concienzudo trabajo de un dedicado y numeroso grupo de profesoras y profesores y por otro con el apoyo y el saber hacer del Vicerrector de Estrategia Académica e Internacionalización D. José Miguel Atienza Riera que ocupó este cargo hasta las recientes elecciones a Rector. Su apoyo y ayuda, así como la de su equipo han sido clave en la estructuración del proyecto y en el diseño del proceso que nos ha llevado a tener 50 alumnos y alumnas matriculadas en un Grado en Matemáticas por la UPM para el curso 2021-22. Este Grado se adscribe a la Escuela Politécnica de Enseñanza Superior. El día de 6 de septiembre de 2021, ocuparon las aulas de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica Alimentaria y de Biosistemas que facilita la gestión administrativa del alumnado de este Grado.

- ¿Cuáles fueron las mayores dificultades encontradas?

Un proyecto de las caracterizas señaladas implica y necesita del apoyo, el entusiasmo y el trabajo de muchas personas. Y esto entraña numerosas dificultades. Esto unido al hecho de que estamos hablando de un grado en ciencias, da cuenta de la novedad del reto planteado. Las dificultades han sido numerosas y de diferente tipología, pero el entusiasmo y el trabajo del profesorado involucrado en el proyecto unido al apoyo recibido desde el Rectorado a través del Vicerrector Atienza han permitido encontrar soluciones a todas las dificultades y problemas que ha habido que afrontar.

- La nota de entrada a la titulación, en su primer año de existencia, ha sido de 12,622 puntos, muy alta, aunque inferior a otros grados en matemáticas de la comunidad de Madrid ¿cómo valoráis este dato?

- En realidad, esta nota era esperable debido a la “presión” en la demanda que hay sobre titulaciones como matemáticas o físicas, lo que produce que las notas de entrada en titulaciones de este tipo sean muy elevadas en prácticamente toda España. El proceso de selección establecida en este país para acceder a la educación universitaria tiene sus problemas, como cualquier otro que podamos imaginar, o como los que existen en otros países. Notas de entrada altas producen efectos beneficios para cualquier titulación, pero hemos de ser conscientes que, también, dejan fuera a muchos jóvenes que también podrían tener perfiles muy apropiados para este tipo de titulaciones, aunque no tengan la nota exigida.

- Los futuros alumnos interesados en esta titulación, ¿dónde pueden encontrar información?

- Pueden acudir al portal del Grado y a los teléfonos de contacto que allí encontrarán:
<https://blogs.upm.es/gem/>

- En las últimas oposiciones a profesor de secundaria en la asignatura de matemáticas se ha quedado un buen número de plazas vacantes, lo que evidencia que los matemáticos están siendo muy demandados en la empresa privada ¿cómo valoráis este hecho? ¿A qué se debe el auge de las matemáticas?

- Se trata sin duda de un fenómeno complejo y, seguramente, producido por un número diverso e importante de causas. En todo caso queremos recordar que uno de los aspectos importantes, aunque no el único, de las matemáticas, es el de proporcionar un lenguaje que ha mostrado su potencial como elemento imprescindible en el desarrollo de las ciencias y el conocimiento en general; sin olvidar el papel central que juegan en la Ingeniería y la Arquitectura. Quizá este enorme potencial y el correspondiente crecimiento de la demanda de matemáticas y matemáticos por parte de las empresas y las administraciones públicas, sea una de las causas que podrían explicar el descenso en las vocaciones docentes por parte de egresadas y egresados de los estudios universitarios de matemáticas. A la vista de esta situación, parece razonable acometer cara al futuro la tarea de ampliar la oferta de plazas en las titulaciones en matemáticas en la UPM y, en general, en todo nuestro país.

Sobre los autores:

Nombre: Alejandro Zarzo

Correo Electrónico: alejandro.zarzo@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Fernando San José

Correo Electrónico: fernando.sanjose@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid