

## Investigación

# Modelo matemático para estudiar el efecto de la temperatura en las poblaciones de *Aonidiella aurantii* y de *Aphytis Mellinus*

## Mathematical model to study the effect of temperature on the populations of *Aonidiella aurantii* and *Aphytis Mellinus*

Alfonso Garmendia y Adela Salvador

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 011–022, ISSN 2174-0410  
Recepción: 10 Ene'20; Aceptación: 13 Mar'20

1 de abril de 2020

### Resumen

En este artículo se analiza la importancia del tipo de modelo para estudiar el efecto de la temperatura sobre el crecimiento de *Aonidiella aurantii* y su enemigo natural *Aphytis Mellinus*. Se han probado diferentes modelos con los datos existentes en la bibliografía y se propone que se utilice un modelo parabólico en vez de lineal. Los estudios de otros autores utilizan modelos lineales, más fáciles de calcular, pero se ajustan peor a los datos existentes. Tampoco desde un punto de vista conceptual, ya que no tiene sentido utilizar una función creciente (lineal o potencial  $y = a T^b$ ), cuando los datos son primero decrecientes y luego crecientes (temperatura vs. número de días). En este artículo se analizan otros ajustes, comprobando que el mejor ajuste es mediante una función polinómica de segundo grado.

**Palabras Clave:** *Aphytis*, *Aonidiella*, modelo matemático, control biológico de plagas, cítricos, parasitismo, parábola.

### Abstract

This article discusses the importance of building a model that studies the effect of temperature on *Aonidiella aurantii* and its natural enemy *Aphytis Mellinus* that is parabolic rather than linear. The studies of other authors use linear models that do not fit the facts and are not adequate, since it makes no sense to adjust with a straight line, or with a power function  $y = a T^b$ , which are increasing, when the temperature behaviour at which the number of days begins to grow is first decreasing and then increasing. This article analyses other adjustments, verifying that the best adjustment is through a polynomial function of the second degree.

**Keywords:** *Aphytis*, *Aonidiella*, Mathematic Model, Biological Control, Citrus, Parasitism, Parable

## 1. Introducción

La cochinilla roja o piojo rojo (*Aonidiella aurantii*) es una de las más importantes plagas de los cítricos en todo el mundo, que produce desde su desvalorización comercial hasta la muerte del árbol. Tiene enemigos naturales los cuales, bajo ciertas condiciones, pueden llegar a regular sus poblaciones de tal forma que no hagan falta medidas adicionales de control.

Su ciclo biológico presenta diferentes fases de desarrollo. Tiene de 2 a 7 generaciones anuales dependiendo del contraste térmico. (ASPLANATO [1]).

Para controlar la plaga se puede utilizar control biológico mediante parasitoides como el *Aphytis melinus*, entre otros, en lugar de utilizar insecticidas.

El efecto de la temperatura en el desarrollo de *Aonidiella aurantii* y *Aphytis melinus* ha sido ampliamente estudiado por distintos autores, ya que las condiciones climáticas extremas son el factor de mortandad más importante.

Por ejemplo, en ABDELRAHMANN [2] se analiza cómo afectan a las distintas fases de *Aonidiella aurantii*, *Aphytis melinus* y *Aphytis chrysomphali* el frío y el calor, para lo que se cultivan en laboratorio tanto *Aonidiella aurantii* como sus enemigos. En la naturaleza la temperatura fluctúa a lo largo de las 24 horas del día, por lo que los datos de laboratorio obtenidos a temperatura constante pueden diferir de los naturales. Ajusta cada una de las fases de *Aonidiella aurantii* y de sus enemigos naturales mediante rectas de regresión, cuando sería más adecuado ajustar con parábolas.

Otro ejemplo: KFIR, R. AND LUCK, R. F. [3], estudia el efecto de 5 temperaturas constantes de 21 a 32 grados centígrados y el efecto de 3 humedades relativas (10, 40 y 70 %) en la duración del desarrollo en España del adulto de *Aphytis chrysomphali* y *Aphytis melinus* con *Aonidiella aurantii* como huésped. Calcula los días-grados para *Aphytis melinus*, *Aonidiella aurantii* y *Aphytis chrysomphali*. MURDOCH ETAL [4], estudia un modelo día a día para *Aonidiella aurantii* y *Aphytis melinus* en el que las tasas demográficas se basan en grados-día, es decir, el número de grados por encima de un umbral inferior que se produce cada día. Cada fase de desarrollo se divide en una serie de "días-clases" que contiene los individuos que han estado en una fase un número determinado de días.

ABDELRAHMANN [5], calcula el porcentaje de mortalidad de pupas en relación con la temperatura, y las ajusta utilizando rectas de regresión al estudiar la relación entre duración del desarrollo en días y la temperatura. Concluye que la mortalidad es mayor a más baja temperatura. De nuevo observamos el ajuste a rectas de regresión lineal.

YU [6] al analizar los datos de temperatura y días de cada fase también ajusta mediante rectas. Observa que en general al aumentar la temperatura disminuye el número de días, pero no siempre. Es decir, no es un comportamiento aislado, un valor anómalo, sino una tendencia generalizada. Analizando los datos se observa que las bajas temperaturas son desfavorables al desarrollo de *Aonidiella aurantii* y que según aumenta la temperatura necesita menos días para terminar en cada fase su ciclo biológico. Sin embargo, al crecer la temperatura a partir de una cierta temperatura óptima esa tendencia se invierte y dicho aumento de temperatura comienza

a ser desfavorable, el número de días aumenta en vez de disminuir. Esto es coherente con la Ley de la Tolerancia.

Hay pues una explicación biológica para la existencia de una temperatura óptima en la que se alcanza un valor mínimo en el número de días para cada fase, y por tanto, que al aumentar dicha temperatura el número de días crece, luego no tiene sentido el ajuste a dichos datos por medio de rectas, (o de una función logarítmica, exponencial o potencial) que siempre mantienen la misma tendencia, o siempre crecientes o siempre decrecientes. Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

También para *Aphytis melinus* se tienen los datos de YU & LUCK [8] donde se observa un comportamiento similar, al aumentar la temperatura disminuye el número de días hasta un cierto valor, una temperatura óptima, a partir de la cual el número de días comienza a aumentar. Y en el único caso en que esto no ocurre, pupa de ojos rojos, es posible pensar que si hubiera más datos para temperaturas más elevadas empezaría a suceder. La existencia de dicha temperatura óptima constatada por los datos a partir de la cual el número de días para cada fase, que antes disminuía, comienza a crecer, hace de nuevo que no tenga sentido el ajuste a dichos datos por medio de funciones que, como las rectas, exponenciales, logarítmicas o potenciales son siempre crecientes o siempre decrecientes. Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

## 2. Material y métodos

Los datos de YU AND LUCK [7] para *Aonidiella aurantii* y para *Aphytis melinus* indican, para unas temperaturas dadas, el número de días que vive en cada una de las fases.

### 2.1. Análisis de los datos para *Aonidiella aurantii*

Se observa que al aumentar la temperatura disminuye el número de días, pero no siempre. Para la última temperatura, 33 grados centígrados, para la 2ª Larva el número de días pasa de 2.1 a 30 °C a 6.39 para una temperatura de 33 °C; idéntico comportamiento se tiene para 2ª Muda, en que pasa de 4.39 a 5.19, para Hembras 3ª Larva de 6.4 a 7.4; para Hembra Madura, de 11.16 a 12.46; Prepupa, de 1.15 a 1.48, y Macho pupa de 2.44 a 2.87. Es decir, no es un comportamiento aislado, un valor anómalo, sino una tendencia generalizada. En los casos en que esto no ocurre es posible pensar que si hubiera más datos para temperaturas más elevadas se repetiría dicho comportamiento.

Analizando los datos se observa que las bajas temperaturas son desfavorables a la evolución de la *Aonidiella aurantii* y que según aumenta la temperatura necesita menos días para terminar su ciclo biológico en cada fase. Sin embargo, al aumentar demasiado la temperatura, para una temperatura crítica, esa tendencia se invierte y un exceso de temperatura comienza a ser desfavorable. Existe, por tanto, una temperatura crítica en la que se modifica la tendencia pasando de ser una curva decreciente a ser una curva creciente.

Si existe un sentido biológico que explica la existencia de dicha temperatura crítica a partir de la cual tiene sentido que aumente el número de días para cada fase, no tiene sentido el ajuste a dichos datos por medio de rectas, que siempre son decrecientes (o únicamente crecientes). Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

## 2.2. Análisis de los datos para *Aphytis melinus*

En el artículo de YU & LUCK [8] para *Aphytis melinus* muestra, para unas temperaturas dadas, el número de días que vive en cada una de las fases. Se observa que también para *Aphytis melinus* al aumentar la temperatura disminuye el número de días, pero no siempre. En *Aphytis melinus*, para huevo el número de días pasa de 1.94 para una temperatura de 30 grados centígrados a 2 para una temperatura de 33 °C; idéntico comportamiento para Larva en que pasa de 4.06 a 4.2; para Prepupa de 1.08 a 0.33; para pupa incolora de 2.09 a 2.13; para pupa de ojos verdes, de 0.69 a 0.92. Es decir, no es un comportamiento aislado, un valor anómalo, sino una tendencia generalizada. En el único caso en que esto no ocurre, pupa de ojos rojos, es posible pensar que si hubiera más datos para temperaturas más elevadas empezaría a suceder.

Analizando los datos se observa que, igual que *Aonidiella aurantii*, las bajas temperaturas son desfavorables a la evolución de *Aphytis melinus* pues necesita más días para completar la evolución de cada fase y que según aumenta la temperatura necesita menos días para terminar el ciclo biológico. Sin embargo, un exceso de temperatura comienza a ser también desfavorable, y esa tendencia se invierte.

Si existe un sentido biológico que explica la existencia de una temperatura crítica a partir de la cual tiene sentido que aumente el número de días para cada fase, no tiene sentido el ajuste a dichos datos por medio de rectas, que siempre es decreciente. Esto nos lleva a considerar otro tipo de ajuste.

## 2.3. Ajuste de esos datos a funciones lineal, potencial, exponencial, logarítmica y cuadrática

Estas funciones mantienen siempre la misma tendencia, son o siempre crecientes o siempre decrecientes

## 2.4. Función cuadrática: Parábolas

La parábola  $y = ax^2 + bx + c$ , si el coeficiente  $a$  es positivo, primero decrece hasta su vértice y luego crece, o viceversa si  $a$  tiene signo negativo. Tiene el vértice en  $(-b/2a, c - b^2/4a)$ . El coeficiente  $a$  nos indica la forma de la parábola, si es más achatada o más estrecha. Los coeficientes  $b$  y  $c$  nos indican dónde se traslada el vértice la parábola  $y = ax^2$ .

En nuestro caso, la abscisa del vértice,  $-b/2a$ , nos indica la temperatura a la que los días empiezan a crecer, y la ordenada,  $c - b^2/4$ , el número de días correspondiente a dicha temperatura crítica.

## 2.5. Ajuste a parábolas de los datos de *Aonidiella aurantii*

Buscamos las parábolas  $y = ax^2 + bx + c$ , que mejor se ajustan a los datos.

Para 1ª Larva la parábola obtenida es  $\text{Días} = 0.07 T^2 - 4.167 T + 70.88$ , donde  $T$  es temperatura, con un ajuste  $R^2$  de 1. Tiene su temperatura crítica para 31.57 °C, vértice de la parábola, con un número de días para esa temperatura de 5.12. Y así para cada una de las fases: 1ª Larva, 1ª Muda, 2ª Larva, Hembra 2ª Larva, Hembra 2ª Muda, Hembra 3ª Larva, Hembra madura, Macho 2ª Larva, Macho prepupa y Macho pupa.

Se ha buscado la parábola:  $y = ax^2 + bx + c$ , que mejor se ajuste a los datos de YU AND LUCK [8] por el método de los mínimos cuadrados y se ha medido la bondad de esos ajustes. Los ajustes  $R^2$  se observa en la tabla 1 son bastante buenos.

Tabla 1: *Aonidiella aurantii*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$ , con ajuste, temperatura crítica y días

	Parábola	Ajuste $R^2$	Temperatura crítica en °C	Días
1ª Larva	Días = $0.07 T^2 - 4.167 T + 70.88$	1	31.57	5.12
1ª Muda	Días = $0.05 T^2 - 3.04 T + 50.41$	0.98	31.12	3.33
2ª Larva	Días = $0.05 T^2 - 3.04 T + 50.41$	0.91	27.06	3.09
Hembra 2ª Larva	Días = $0.01 T^2 - 0.41 T + 0.99$	0.99	32.56	1.46
Hembra 2ª Muda	Días = $0.04 T^2 - 2.65 T + 48.12$	0.94	32.86	4.59
Hembra 3ª Larva	Días = $0.04 T^2 - 2.23 T + 39.57$	0.99	29.39	6.75
Hembra madura	Días = $0.14 T^2 - 8.47 T + 137.97$	1	29.95	11.12
Macho 2ª Larva	Días = $0.02 T^2 - 1.44 T + 30.11$	0.98	37.75	2.89
Macho prepupa	Días = $0.01 T^2 - 0.58 T + 9.96$	0.97	29.84	1.32
Macho pupa	Días = $0.04 T^2 - 2.39 T + 38.78$	0.99	30.31	2.49

Para medir el ajuste obtenido se calcula para los datos de temperaturas utilizados por YU los días que les asignarían las parábolas obtenidas, y se calcula la diferencia, en valor absoluto, entre dicho valor y el de los datos que se proporcionados por YU. Se suman todos estos valores absolutos.

Por ejemplo, para 1ª Larva se tiene:

Temperatura	Diferencia en valor absoluto
17	0.03
20	0.01
25	0.32
26.7	0.49
30	0.14
33	0.06
Suma	1.05

Los valores obtenidos con dichos ajustes, para todas las fases, son: 1.05; 2.28, 0.38; 4.78; 1.06; 1.17; 1.68; 0.57; 1.14.

## 2.6. Ajuste a parábolas de los datos de *Aphytis melinus*

Buscamos las parábolas  $y = ax^2 + bx + c$ , que mejor se ajustan a los datos de *Aphytis melinus* por el método de los mínimos cuadrados y se ha medido la bondad de esos ajustes. Los ajustes  $R^2$  se observan en la tabla 2 y son bastante buenos.

Para Huevo la parábola obtenida es  $Días = 0.021T^2 - 1.346 T + 23.08$ , donde T es temperatura, con un ajuste  $R^2$  de 0.98. Tiene su temperatura crítica para 32.05 °C, vértice de la parábola, con un número de días para esa temperatura de 1.51. Y así para cada una de las fases: Huevo, Larva, Prepupa, Pupa incolora, Pupa de ojos verdes, y pupa de ojos rojos.

Tabla 2: *Aphytis melinus*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$ , con ajuste, temperatura crítica y días

	Parábola	Ajuste $R^2$	Temperatura crítica en °C	Días	Ajuste calculado
Huevo	$D = 0.021T^2 - 1.346 T + 23.08$	0.98	32.05	1.51	1.77
Larva	$D = 0.025 T^2 - 1.69 T + 32.30$	0.99	33.32	4.1	0.71
Prepupa	$D = 0.009 T^2 - 0.55 T + 9.399$	0.94	31.14	0.87	0.88
Pupa incolora	$D = 0.019 T^2 - 1.23 T + 21.44$	0.99	31.62	2.05	0.43
Pupa de ojos rojos	$D = 0.0078T^2 - 0.55 T + 11.16$	0.96	35.56	1.3	0.99
Pupa de ojos verdes	$D = 0.003 T^2 - 0.21 T + 4.468$	0.91	34.9	0.81	0.52

Los ajustes son, en todos los casos, muy buenos.

## 3 Resultados

### 3.1. Ajustes de *Aonidiella aurantii*

Se analizan los datos de YU & LUCK [7] para *Aonidiella aurantii* y se calculan las ecuaciones de las funciones (polinomio de segundo grado, lineal, potencial, polinomio de tercer grado, polinomio de cuarto grado) que mejor se ajustan a esos datos.

Se calculan las ecuaciones de la función polinómica de segundo grado:

Tabla 3: *Aonidiella aurantii*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	1ª Larva	1ª Muda	2ª Larva	Hembra 2ª Larva	Hembra 2ª Muda	Hembra 3ª Larva	Hembra madura	Macho 2ª Larva	Macho Prepupa	Macho pupa
$a =$	0.066	0.0486	0.0717	0.0063	0.0403	0.038	0.1414	0.0191	0.0097	0.0395
$b =$	-4.167	-3.0253	-3.8804	-0.4103	-2.6489	-2.2336	-8.4702	-1.442	-0.5789	-2.3948
$c =$	70.882	50.413	55.59	8.1398	48.118	39.569	137.97	30.107	9.9604	38.783
$R^2 =$	0.9977	0.9842	0.9112	0.9858	0.9375	0.9894	0.9992	0.9831	0.9682	0.9916
Temperatura crítica: T	31.57	31.12	27.06	32.56	32.86	29.39	29.95	37.75	29.84	30.31
Días: D	5.12	3.33	3.09	1.46	4.59	6.75	11.12	2.89	1.32	2.49

Se calcula el vértice de cada parábola que nos da la temperatura crítica a la que el número de días comienza a crecer y el número mínimo de días para cada una de las etapas. Se calculan los ajustes.

Tabla 4: *Aonidiella aurantii*. Ajustes de la función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	1ª Larva	1ª Muda	2ª Larva	Hembra 2ª Larva	Hembra 2ª Muda	Hembra 3ª Larva	Hembra madura	Macho 2ª Larva	Macho Prepupa	Macho pupa
P(17) =	0.03	0.40	0.40	0.07	1.03	0.02	0.13	0.39	0.11	0.26
P(20) =	0.01	0.83	0.45	0.09	1.81	0.08	0.27	0.67	0.15	0.47
P(25) =	0.32	0.34	0.36	0.10	0.16	0.34	0.45	0.08	0.01	0.13
P(26.7) =	0.49	0.34	0.28	0.00	0.59	0.12	0.27	0.40	0.07	0.13
P(30) =	0.14	0.37	1.61	0.09	0.58	0.36	0.04	0.04	0.17	0.05
P(33) =	0.06	0.01	0.77	0.02	0.60	0.16	0.02	0.09	0.06	0.10
<b>TOTAL</b>	<b>1.05</b>	<b>2.28</b>	<b>3.87</b>	<b>0.38</b>	<b>4.78</b>	<b>1.08</b>	<b>1.17</b>	<b>1.68</b>	<b>0.57</b>	<b>1.14</b>

Los valores obtenidos con estos ajustes son: 1.05; 2,28; 3,87; 0,38; 4,78; 1,08; 1,17; 1,68; 0.57 y 1.14.

El peor ajuste en la función polinomial de segundo grado es para la Hembra 2ª Muda (4.78).

El ajuste de las funciones polinómicas del segundo grado se compara con el ajuste lineal,  $Días = aT + b$ , y con el ajuste potencial:  $Días = aT^b$ , obtenido por el mismo procedimiento.

Tabla 5: Cálculo de los ajustes para ecuaciones polinómicas de segundo grado, funciones lineales y funciones potenciales. T es la temperatura y D, el número de días que tarda cada etapa en desarrollarse para esa temperatura.

	Polinómica de Segundo grado: $D = aT^2 + bT + c$	Función Lineal: $D = aT + b$	Función Potencial:
1ª Larva	1.05	58.1	2.79
1ª Muda	2.28	38.8	3.42
2ª Larva	3.87	0	6.97
Hembra 2ª Larva	0.38	12.1	0.41
Hembra 2ª Muda	4.78	0	36.22
Hembra 3ª Larva	1.08	22.1	2.69
Hembra Madura	1.17	56.1	6.67
Macho 2ª Larva	1.68	38.4	2.38
Macho prepupa	0.57	0	0.84
M pupa	1.14	17.5	2.79

Se observa que las funciones polinómicas de segundo grado tienen mejores ajustes.

Los datos también se ajustan a otras funciones: cúbicas, cuárticas... Por ejemplo, en el caso más desfavorable, para "2ª Muda", las cúbicas y cuárticas que se ajustan a los datos de YU son, respectivamente:  $Días = 0.0089 T^3 - 0.6339 T^2 + 13.866 T - 82.483$ , con un ajuste de 2.7, y las funciones polinómicas de cuarto grado son:

$$Días = 0.0008 T^4 + 0.0868 T^3 - 3.4885 T^2 + 59.496 T - 350.58, \text{ con un ajuste de } 54.55.$$

Dibujamos los gráficos para verificar la bondad del ajuste de las funciones polinómicas de segundo grado a los datos de YU & LUCK [7].

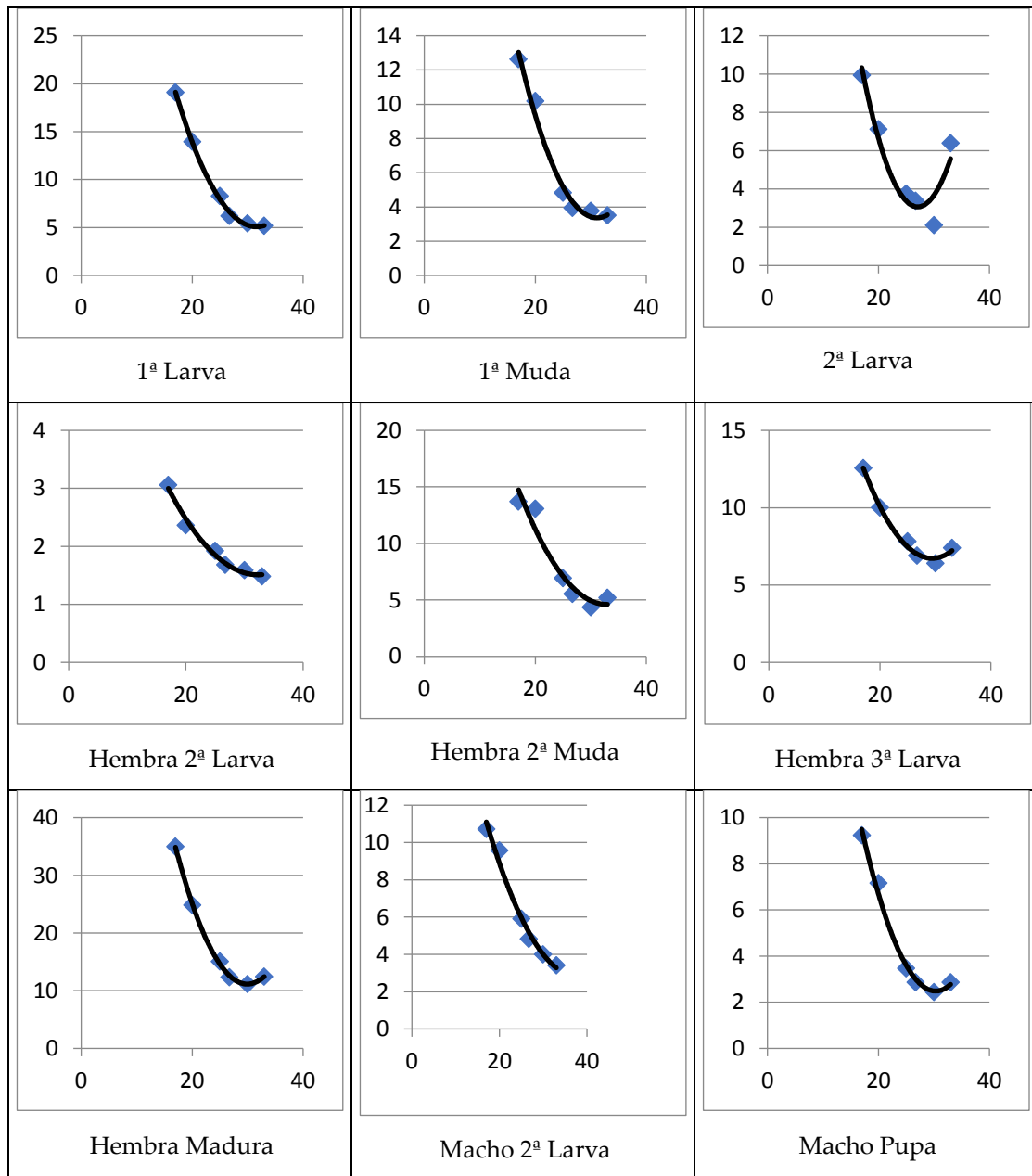


Figura 1: En los gráficos se representan (con puntos) los datos de Yu & Luck 1990 [7], y las funciones polinómicas de segundo grado (con línea continua) a las que se ajustan, en cada una de las etapas, para *Aonidiella aurantii*.

### 3.2. Ajustes de *Aphytis mellinus*

Se analizan los datos de YU, D.S. & LUCK, R. F. [8], para *Aphytis mellinus* y se calculan las funciones polinómicas de segundo grado (lineal, potencial, polinomio de tercer grado, polinomio de cuarto grado) que se ajustan mejor a esos datos.



Se calculan las ecuaciones de la función polinómica de segundo grado:

Tabla 6: *Aphytis mellinus*. Función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	Huevo	Larva	Prepupa	Pupa incolora	Pupa de ojos rojos	Pupa de ojos verdes
a =	0.021	0.0254	0.0088	0.0194	0.0078	0.003
b =	-1.346	-1.6926	-0.548	-1.2267	-0.5548	-0.2094
c =	23.081	32.302	9.3994	21.444	11.162	4.4685
R2 =	0.9842	0.996	0.9431	0.9966	0.9649	0.9102
Temperatura crítica: T	32.047	33.318	31.136	31.616	35.564	34.9
Días: D	1.513	4.104	0.868	2.052	1.296	0.814

Calculamos el vértice de cada parábola que nos da la temperatura crítica a la que el número de días comienza a crecer y el número mínimo de días para cada una de las etapas.

Para determinar los ajustes, hemos calculado la diferencia, en valor absoluto, entre el valor asignado por la función obtenida y el valor de YU (YU, D.S. & LUCK, R. F. [8]).

Tabla 7: *Aphytis mellinus*. Ajustes de la función polinómica de segundo grado:  $D = aT^2 + bT + c$

	Huevo	Larva	Prepupa	Pupa incolora	Pupa de ojos rojos	Pupa de ojos verdes
P(17) =	0.04	0.02	0.14	0.03	0.13	0.09
P(20) =	0.37	0.07	0.23	0.07	0.21	0.12
P(25) =	0.44	0.18	0.16	0.18	0.19	0.01
P(26.7) =	0.11	0.03	0.08	0.09	0.27	0.01
P(30) =	0.34	0.32	0.20	0.01	0.07	0.20
P(33) =	0.47	0.09	0.07	0.04	0.11	0.09
TOTAL:	1.77	0.71	0.88	0.43	0.99	0.52

Los valores obtenidos para estos ajustes son: 1.77; 0.71; 0.88; 0.43; 0.99 y 0.52. Se observa que los ajustes de *Aphytis mellinus* son mejores que para *Aonidiella aurantii*.

Del mismo modo, se calculan otras funciones que ajustan los datos de Yu (YU, D.S. & LUCK, R. F. [8]): funciones lineales, funciones potenciales, funciones polinómicas de tercer grado, funciones polinómicas de cuarto grado, funciones exponenciales, funciones logarítmicas ... y en todos los casos, se calcula la bondad de los ajustes para determinar qué función se ajusta mejor a esos datos. Como Yu ajusta los datos a una función lineal, indicamos los valores obtenidos para este caso y para la función potencial.

Tabla 8: Cálculo de los ajustes para ecuaciones polinómicas de segundo grado, funciones lineales y funciones potenciales.

	Polinómica de segundo grado: $D = aT^2 + bT + c$	Función lineal: $D = aT + b$	Función potencial: $a \square T^b$
Huevo	1.77	8.29	7.40
Larva	0.71	15.84	16.88
Prepupa	0.88		0.84
Pupa incolora	0.43		0.96

Pupa de ojos rojos	0.99	4.34	8.64
Pupa de ojos verdes	0.52	5.08	7.39

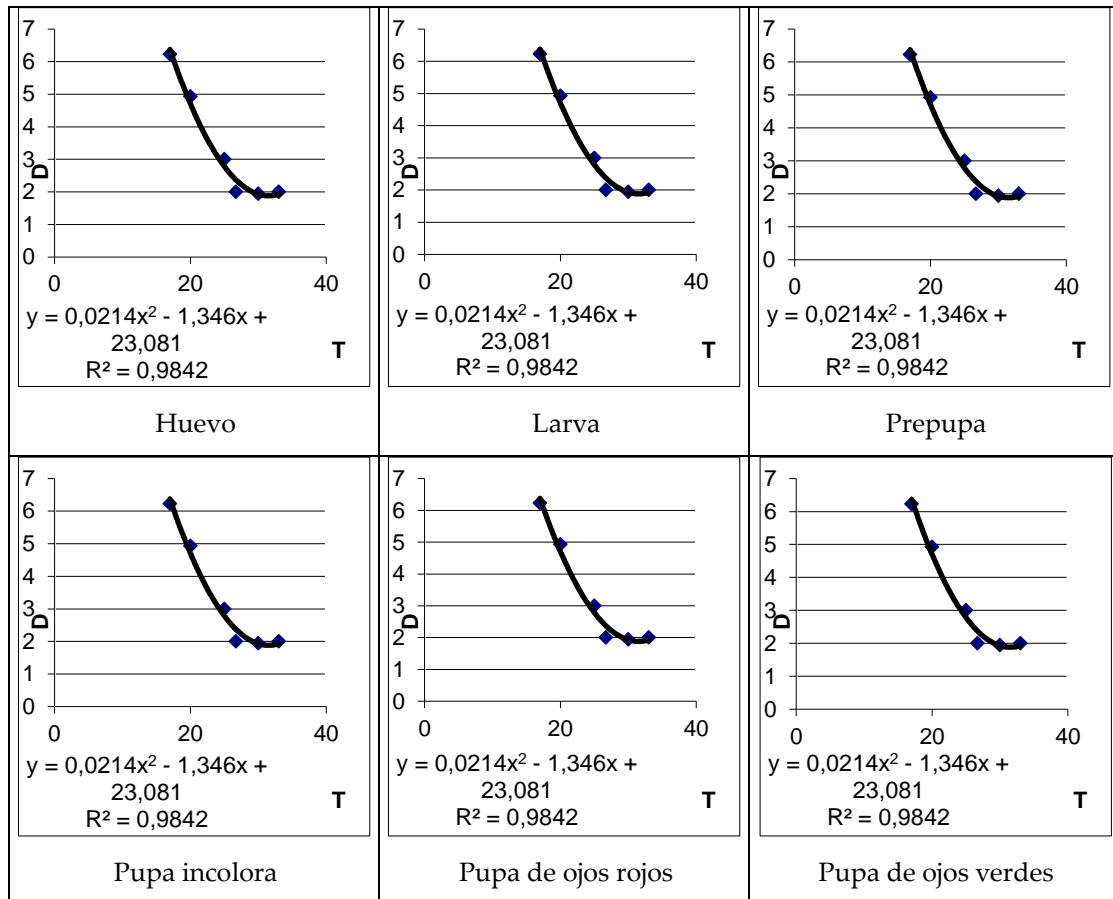


Figura 2: En los gráficos se representan (con puntos) los datos de Yu & Luck 1988 [8], y las funciones polinómicas de segundo grado (con línea continua) a las que se ajustan, para cada una de las etapas, para *Aphytis melinus*.

#### 4. Discusión

Los datos utilizados por YU [6] (y luego por otros autores) indican que para cada etapa de desarrollo de *Aonidiella aurantii* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [7]) y su enemigo *Aphytis melinus* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [8]) hay una temperatura crítica para la cual el número de días en que esta etapa completa su desarrollo comienza a crecer. Por lo tanto, hemos estudiado funciones como la función polinómica del segundo grado o la función polinómica del cuarto grado que decrecen hasta un valor mínimo y luego crecen.

Hemos estudiado el ajuste de los datos para éstas y otras funciones.

En el caso de *Aonidiella aurantii*, el peor ajuste con funciones polinomiales de segundo grado lo tenemos para hembra 2ª Muda (4.78). Esta es la razón por la cual hemos indicado el cálculo que hemos obtenido para esa etapa con la función polinómica de cuarto grado. Sin embargo, el valor obtenido es mayor (54.55), con lo que el ajuste es peor.

Parecía plausible que este ajuste fuera mejor ya que Yu ( YU, D.S. & LUCK, R. F., ([7]) usó solo seis temperaturas (17 °C, 20 °C, 25 °C, 26.7 °C, 30 ° C y 33 °C) y si se utilizara una función polinomial de quinto grado, pasaría por todos los datos (aunque siendo una función decreciente no la consideramos un buen modelo).

Analizamos los datos de YU, D.S. & LUCK, R. F., [8] para *Aphytis mellinus* y calculamos las funciones polinómicas de segundo grado que mejor se ajustan a esos datos. Para cada una de las etapas calculamos la temperatura crítica a la que comienza a crecer el número de días y el número mínimo de días.

Para determinar los ajustes, hemos calculado la diferencia, en valor absoluto, entre el valor asignado por la función obtenida y el valor de Yu ( YU, D.S. & LUCK, R. F., [8]). Los valores obtenidos con estos ajustes son: 1.77; 0,71; 0,88; 0,43; 0,99 y 0,52. Se observa que los ajustes para *Aphytis mellinus* son mejores que para *Aonidiella aurantii*.

## 5. Conclusiones

Ser capaz de modelar de la mejor manera posible el comportamiento de la plaga de *Aonidiella aurantii* y sus enemigos naturales ayuda a combatirla. En este trabajo se utilizan los datos de YU para analizar una mejor manera de modelar la relación entre la temperatura y la duración del desarrollo en *Aonidiella aurantii* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [7]) y su enemigo *Aphytis melinus* (YU, D.S. & LUCK, R. F., [8]). Algunos autores ajustan los datos usando una función lineal que no es adecuada. Las bajas temperaturas son desfavorables para la evolución de *Aonidiella aurantii* y su enemigo *Aphytis melinus* porque necesitan más días para completar la evolución de cada fase. Sin embargo, a medida que la temperatura aumenta desde una cierta temperatura óptima, esa tendencia se invierte y un exceso de temperatura también se vuelve desfavorable. Por esta razón, no tiene sentido aproximar los datos por una función que siempre sea decreciente, cuando hay una temperatura óptima a partir de la cual el número de días comienza a crecer. La mejor manera de modelar la relación entre los días de duración que toma cada etapa con la temperatura es usar la función polinómica de segundo grado. Para verificarlo, hemos aproximado los datos a través de otras funciones y hemos calculado en todos esos casos la medida del ajuste a dichos datos.

## Agradecimientos

Agradecemos al Dr. Apostolos Pekas por orientarnos en la búsqueda de las publicaciones que contenían los datos que son la base de este artículo.

## Referencias

- [1] ASPLANATO, G.; GARCÍA-MARÍ, F. *Parasitismo de la cochinilla roja californiana Aonidiella aurantii en la zona citrícola sur de Uruguay*. Bol. San. Veg. Plagas, 28: 5-20, 2002.

- [2] ABDELRAHIMAN, I., *The effect of extreme temperatures on California red scale, Aonidiella aurantii* Mask. (Hemiptera: Diaspididae), and its natural enemies. Australian Journal of Zoology 22(2): 203-212. 1974A.
- [3] KFIR, R. AND LUCK, R. F. *Effects of temperature and relative humidity on development rate and adult life span of three Aphytis species (Hymenoptera Aphelinidae) parasitising California red scale (Aonidiella aurantii)*. Zeitschrift für Angewandte Entomologie. Vol. 97. 314 – 320. 1984. Article first published online: 2009. doi: 10.1111/j.1439-0418.1984.tb03754.x. Division of Biological Control. University of California. Riverside.
- [4] MURDOCH ETAL. *Aphytis red scale system (Supplementary material to “Resource suppression and stability in a parasitoid host system experimental demonstration”)*. 1905.
- [5] ABDELRAHIMAN, I. *Growth, development and innate capacity for increase in Aphytis chrysomphali Mercet and Aphytis melinus DeBach, parasites of California red scale, Aonidiella aurantii (Mask.) in relation to temperature*. Australian Journal of Zoology 22 (2): 213-230. 1974B.
- [6] YU, D.S. *The interactions between California red scale Aonidiella aurantii (Maskell), and its parasitoids in citrus groves of inland southern California*. Ph.D. dissertation, University of California, Riverside, 105. 1986.
- [7] YU, D.S. & LUCK, R. F. *Variation in life history parameters of California red scale on different citrus cultivars*. Ecology - Wiley Online Library. 1990.
- [8] YU, D.S. & LUCK, R. F. *Temperature dependent size and development of California red scale and its effect on horst availability for the ectoparasitoid Aphytis melinus*. Environ. Entomol. 17: 154 – 161. 1988.

**Sobre los autores:**

Nombre: Alfonso Garmendia

Correo Electrónico: algarsal@upvnet.upv.es

Institución: Instituto Agroforestal Mediterráneo. Universitat Politècnica de València.

Nombre: Adela Salvador

Correo Electrónico: adela.salvador@upm.es

Institución: Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a las Ingenierías Civil y Naval. Universidad Politécnica de Madrid.