# Experiencias Docentes

# Modelización matemática con GeoGebra: colocación de circunferencias y esferas

# Mathematical modelling with GeoGebra: placing circumferences and spheres

Ricardo José García Bonaviña, Almudena Lloréns Payá,

Carmen Romero-García y Ana María Zarco García

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XI, Número 1, pp. 029–043, ISSN 2174-0410
Recepción: 4 Sep'20; Aceptación: 15 Nov'20

1 de abril de 2021

**Resumen**

En este trabajo, partiendo del marco teórico existente, entre la normativa curricular y la investigación sobre metodología para la educación matemática, presentamos una experiencia con estudiantes de Enseñanza Secundaria a los que planteamos un problema compuesto de varios subproblemas que requieren de una modelización matemática y exponemos una propuesta de evaluación de este tipo de actividades con el fin de tener en cuenta todos los aspectos que intervienen en este proceso. El problema consiste en determinar el número de bolas que puede colocarse en un ortoedro e indagar en las distintas posibilidades según los huecos que quedan entre las bolas. En una primera fase, se hace reflexionar a los estudiantes sobre cómo resolverían el problema si fuese en dimensión dos y, en una segunda fase, se lleva el problema a dimensión tres. El profesorado guía en la resolución y explica las herramientas que ofrece GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020). Finalmente, se propone la guía para la evaluación individual y grupal incluyendo dos instrumentos: rúbrica y diana. Como conclusión se obtiene que estas actividades pueden servir para trabajar la competencia matemática junto con el resto de las competencias clave de forma significativa.

**Palabras Clave:** Enseñanza Secundaria, GeoGebra, Modelización Matemática, Esfera, Circunferencia.

**Abstract**

In this work, starting from the existing theoretical framework, between curricular regulations and researching on methodology for mathematics education, we present an experience with Secondary Education students to whom we propose a problem composed of several subproblems that require mathematical modelling and we expose an evaluation proposal for this type of activity in order to take into account all the involved aspects in this process. The problem consists of determining the number of balls that can be placed in an orthohedron and investigating the different possibilities according to the gaps left between the balls. In a first step, students are made to reflect on how they would solve the problem if it were in dimension two, and in a second step, the problem is taken to dimension three. Teachers lead them into the resolution and explain tools offered by GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020). Finally, the guide for individual and group evaluations are proposed, including two instruments: rubric and dartboard. As a conclusion it is obtained that these activities can be useful to work mathematical skills along with the rest of the key competencies meaningfully.

**Keywords:** Secondary Education, GeoGebra, Mathematical Modelling, Sphere, Circumference

# 1. Introducción

La modelización matemática ha inspirado bastante literatura en el contexto de la Didáctica de las matemáticas en todos los niveles de enseñanza. Recientemente, diversos autores han realizado diferentes aportaciones sobre la aplicación de este proceso a la Enseñanza Secundaria; (véase Albarracín, 2017; Borromeo-Ferri, 2018; Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi y Gorgorió, 2017; Gallart, 2016 y las referencias incluidas en ellas). Podemos considerar la modelización matemática como un proceso o secuencia de acciones destinadas a la consecución de un fin concreto que requiere un cambio en el lenguaje que implica una traducción a expresiones y objetos matemáticos y que pone en marcha destrezas necesarias para resolver un problema contextualizado. En los niveles de enseñanza preuniversitarios españoles, la modelización está integrada en la definición de competencia matemática (Orden ECD/2015) y transversalmente en el resto de competencias y por ello, es importante diseñar actividades para que los estudiantes puedan trabajarla y entrenarla. La realización de estas tareas, desde el punto de vista de la normativa vigente en España, sirven para desarrollar específicamente la parte del del Real Decreto 1105/2014 que se refiere a procesos, métodos y actitudes matemáticas. Así, la realización de tareas de modelización, contribuyen a este fin porque ayudan a vehicular hacia un conocimiento concreto, como una forma de potenciar la competencia en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Además de esta normativa, una razón para justificar la realización de estas tareas es que se pueden plantear problemas realistas en consonancia con los intereses de los estudiantes y con la disciplina de las matemáticas y, quizás, de esta forma los docentes consigan motivar a los estudiantes para que se involucren en las actividades. Alsina (2007) propone diez ejemplos de problemas de modelización: el problema de la lata de cola, goles de penalti, localización óptima, un método de escaños políticos por sucesión de divisores, relaciones lineales y cuerpo humano, elegir un modelo de coche, ISBN, para los arquitectos "la tierra es plana", longitudes y latitudes, y aspirinas contra infartos.

Otro tipo de tareas de modelización que pueden plantearse son las relativas a problemas de Fermi que consisten en la estimación de grandes cantidades (García Navarro, 2013 y Albarracín, 2017). Ya se han realizado experiencias con estudiantes de Secundaria, por ejemplo, Bergman Ärlebäck y Bergsten (2010) describen una experiencia en la que se plantea a los estudiantes dos preguntas sobre el edificio *Empire State*. Concretamente, las preguntas eran:

> *¿Cuánto tiempo le lleva al ascensor turístico llegar al observatorio del último piso? ¿Si uno decide subir por las escaleras, cuánto tarda?* (p. 602)

Al plantear estas cuestiones, lo primero que ocurre es que los estudiantes quedan invadidos por la emoción de la sorpresa, y también, la frustración por no saber datos concretos sobre el problema. Una característica destacable de estos problemas es que es necesario aplicar conocimientos sobre realidades que no pertenecen a la disciplina matemática propiamente, es decir, requiere de un conocimiento extra-matemático (experiencia). Por ejemplo, en el problema del *Empire State*, los estudiantes puede que no sepan qué es eso y aunque lo sepan, puede que no conozcan, de forma exacta, las plantas que tiene.

Más aún, con estos problemas se pueden trabajar los valores de nuestra sociedad, incluyendo temas transversales. Blum y Borromeo-Ferri (2009) indican que la modelización matemática sirve para ayudar a los estudiantes a comprender mejor el mundo, apoyar el aprendizaje matemático, contribuir al desarrollo de diversas competencias matemáticas y actitudes correctas y contribuir a una imagen adecuada de las matemáticas.

Así pues, la única dificultad que encontramos es la falta de orientación en su implantación y de material práctico para el aula, aunque ya existen algunas iniciativas de manuales en este sentido como se recoge en el trabajo de Gallart, Ferrando y García-Raffi (2019). Para realizar estos problemas en clase, es conveniente disponer de un dossier de trabajo para los estudiantes, una serie de reglas que proporcionen información a los estudiantes sobre lo que se espera de ellos, una rúbrica de evaluación y una diana para la autoevaluación.

Para la evaluación de la actividad se han seleccionado como instrumentos de evaluación la rúbrica y la diana de autoevaluación por considerarse instrumentos que permiten realizar una evaluación integral y formativa centrada en el aprendizaje, valorando el desempeño en la realización del proceso y el resultado final de una actividad. A través de los indicadores de evaluación y de la escala de valoración establecida para cada uno de ellos, ofrecen al estudiante los aspectos esenciales de la tarea que serán objeto de valoración por parte del profesorado, contribuyen a clarificarle los requerimientos de una tarea que va a ser evaluada y a que reflexione sobre su propia actividad a partir de los criterios y valoraciones que se especifican (Herrán Álvarez, Heras Bernardirno y Pérez-Pueyo, 2019; Valverde y Cuidad, 2014).

También, se requiere un cambio de rol del profesorado que será observador, gestor de recursos, asesor, moderador y experto (Gallart, 2016). En el proceso de modelización se pueden distinguir una serie de fases según el ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007): 1, Comprensión del problema; 2, Simplificación/Estructuración; 3, Matematización; 4, Trabajo Matemático; 5, Interpretación; 6, Validación; y 7, Exposición. Estas fases en sí y no el orden se deben tener en cuenta en la rúbrica de evaluación, puesto que es conocido que este proceso no es secuencial.

## 2. Descripción de la experiencia

La experiencia consistió en plantear un problema en el que los estudiantes han de aplicar conceptos geométricos, así como también estrategias de representación en GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020). Se planteó el mismo problema a diferentes cursos: 1º, 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (alumnado de 12 a 16 años) y 2º de Graduado en Educación Secundaria para adultos (mayores de 16 años) del sistema educativo español, una vez que ya se habían tratado las unidades didácticas correspondientes de geometría.

Se crearon grupos de trabajo cooperativos, asignando roles y mostrándoles la rúbrica que se representa en la Tabla 1. En la primera sesión se trabajó en el aula habitual. Se les dejó una semana para que pensasen en casa las posibles soluciones y a la semana siguiente se les llevó al aula de informática para elaborar los posibles diseños, utilizando GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020) en dos sesiones seguidas. El informe final lo realizaron mediante un documento compartido.

*Figura 1. Estudiantes durante la primera sesión (izquierda: estudiantes de 1º de ESO, derecha: estudiantes adultos).*

## 2.1 Problema

Este problema incluye conceptos y cálculos de volumen, área, unidades de medida y densidad. Conlleva la realización de una práctica con GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020), en la que se aplican los conocimientos curriculares adquiridos sobre: ecuación de una recta en un plano, representación de puntos, paralelismo, perpendicularidad, ecuación de una circunferencia en un plano y ecuación de una esfera en el espacio. El problema consiste en estimar el número de bolas que caben en un tetrabrik. A los estudiantes se les entregó la ficha de la Figura 2.

APLICANDO LO APRENDIDO

*¿Cuántas bolas caben en un tetrabrik?*

**Guía para la resolución del problema:**

1 ¿Qué dimensiones tiene un tetrabrik?

2 Realiza una estimación de las bolas que caben. ¿Cómo? Comienza con el cálculo del volumen del tetrabrik.

3 Calcula el volumen de una bola.

4 ¿Por qué se llama tetrabrik y no *ortobrik*?

5 Entre las bolas siempre habrá huecos, pero si no tenemos en cuenta estos huecos, ¿cuál es el número máximo de bolas que cabrían?

6 Piensa cómo colocar las bolas para minimizar el volumen correspondiente a los huecos, es decir, para maximizar la cantidad de bolas.

*Figura 2. Ficha de trabajo para el alumno.*

## 2.2 Observaciones sobre la guía

1. ¿Qué dimensiones tiene un tetrabrik? Para unificar la solución del problema se les dice que tomen un tetrabrik de medidas $6{,}4\ cm \times 9{,}7\ cm \times 16{,}8\ cm$, que corresponden con las medidas reales de varias marcas.
2. El volumen del tetrabrik es $1042{,}944\ cm^3$. En este apartado se indicará a los estudiantes que piensen en un radio razonable para las bolas en relación con el tamaño del tetrabrik y cómodo para los cálculos. Por ejemplo, podemos sugerir que consideren como dato el radio de las bolas, fijándolo en 0,5 $cm$ para que hagan las primeras estimaciones. En un $cm^3$ cabe una bola sin intersección con otra bola, es decir, podríamos colocar 1042. Esta solución no tiene en cuenta la forma del tetrabrik porque como observamos en las Figuras 3, 4 y 5, existe un espacio sobrante donde no podemos colocar ninguna bola sin romperla previamente.
3. $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3,\ para\ r = 0{,}5\ \text{cm}\ tenemos{:}\ V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}5^3\ cm^3 \cong 0{,}52\ cm^3.$
4. Tetra Pak (2020) es la compañía fundada por el Dr. Ruben Rausing en 1943 a la que se debe el invento del tetrabrik. Surgió a partir de un modelo anterior que tenía forma de tetraedro.
5. Dividiendo el volumen total entre el volumen de una bola obtenemos 1991,88, es decir, como máximo se podrían poner 1991 bolas con la hipótesis de poder rellenar todos los huecos.
6. Suponiendo que ya hemos enseñado a los estudiantes el funcionamiento básico de GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020), les podemos pedir, incluso, que dibujen lo que correspondería a la proyección de un piso de bolas sobre el plano z=0. Así, en la Figura 3, tenemos una disposición posible que es la más sencilla, pero que deja mucho hueco. En este piso hemos colocado 54 bolas. Si ponemos plantas de bolas como esta,

podemos completar un total de 16 plantas. Así pues, tenemos colocadas $54 \times 16 = 864$ bolas.

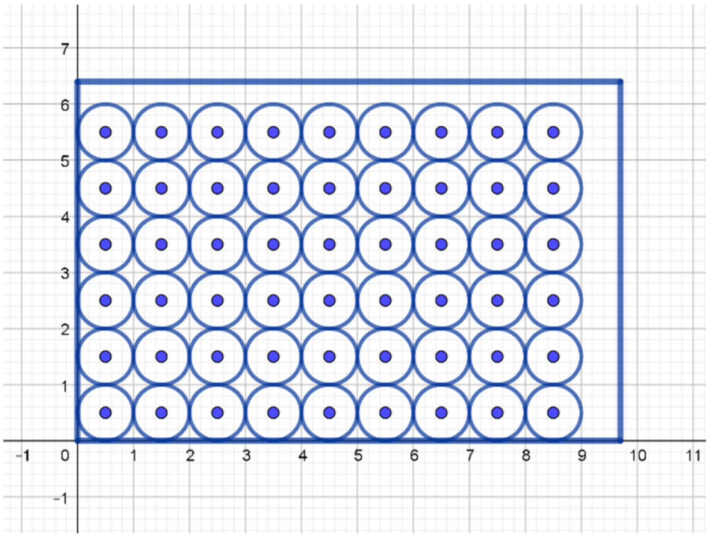


*Figura 3. Colocación 1 de las bolas sobre la base.*

Otra disposición puede ser la de la Figura 4, donde colocamos 61 bolas y entre las bolas quedan huecos más pequeños. Si ponemos 16 plantas como esta, colocaríamos $61 \times 16 = 976$.

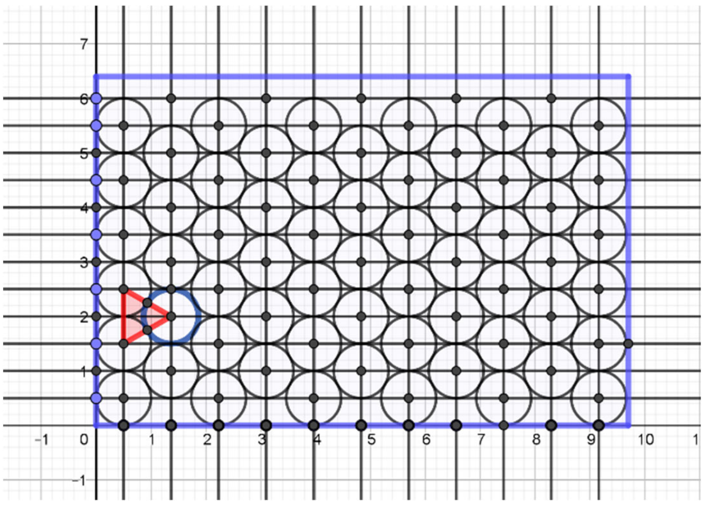


*Figura 4. Colocación 2 de las bolas sobre la base.*

En la Figura 5, tenemos una variante en la que en una planta colocamos 63 bolas.

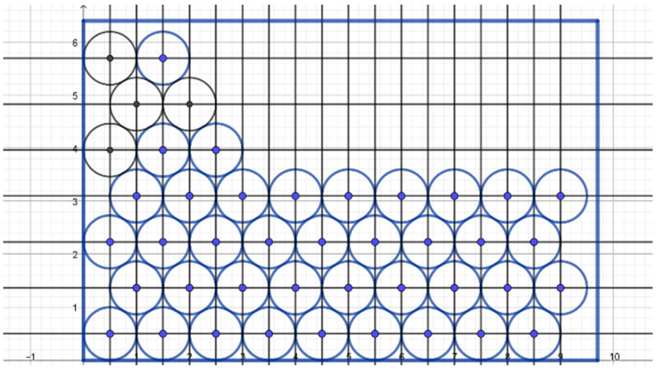


*Figura 5. Colocación 3 de las bolas sobre la base.*

Ahora podemos colocar los pisos como antes utilizando 63 × 16 = 1008 bolas o situando bolas encima de la primera fila con una bola en la esquina, intentando subir menos en altura como indica la Figura 6.

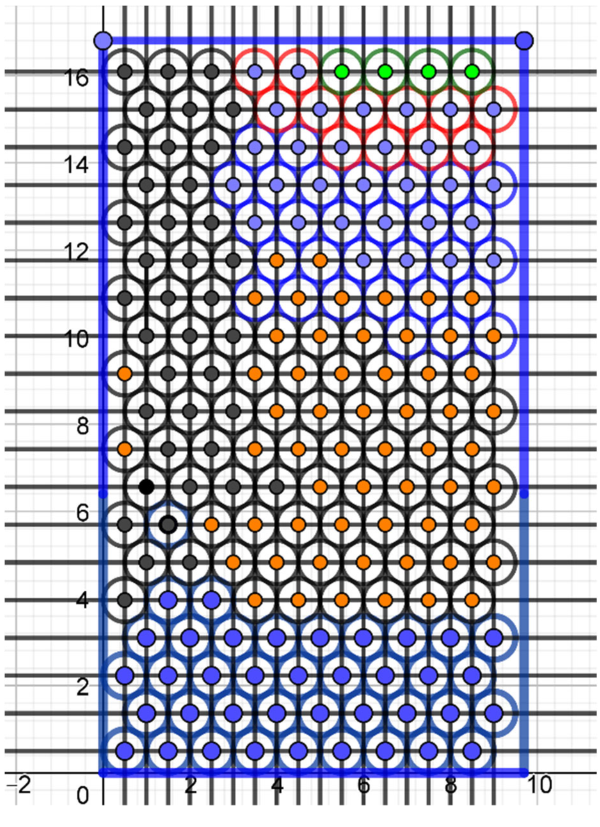



*Figura 6. Colocación de las bolas verticalmente (vista lateral).*

Con esta hipótesis tendríamos colocadas 63×19=1197 bolas.

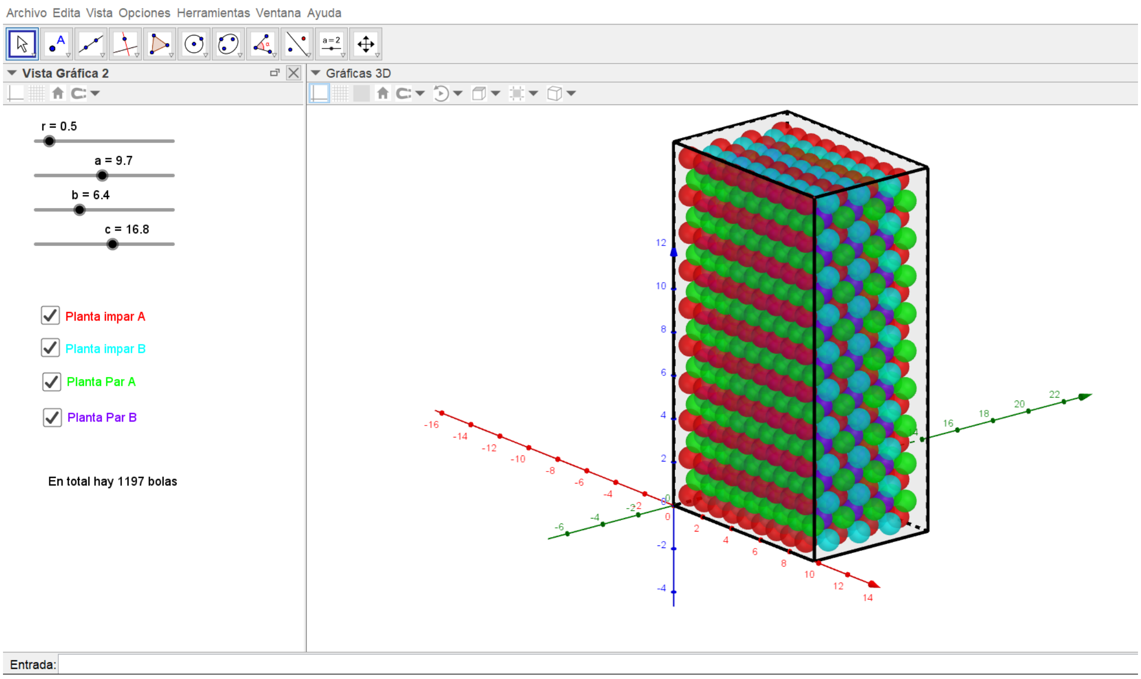



*Figura 7. Colocación de las bolas en dimensión tres con el tercer modelo.*

Para guiar la actividad se dividió la investigación en dos fases: estudio de la primera planta y deducción del resto de plantas. La imagen del tetrabrik en la ficha sugiere que se tome como primera planta la cara de menor superficie, pero también podría estudiarse el problema poniendo como base las otras caras. De hecho, el uso de deslizadores para las dimensiones del tetrabrik, permite visualizarlo con la cara de mayor superficie como base y con las bolas en el interior. En este caso se consigue colocar un número de bolas mayor. Se puede aprovechar este ejemplo para comentar la utilidad de mirar un mismo objeto geométrico desde distintos puntos de vista.

Para el estudio de la primera planta, previamente, trabajaron manipulando una caja y canicas para hacerse una idea de las disposiciones que pueden tener las bolas en la primera planta. En segundo lugar, hicieron un dibujo esquemático de la disposición decidida de las bolas (sería una proyección de las bolas en la base). Se les indicó que debía ser "como una foto desde arriba". El tercer paso fue el cálculo de las posiciones de los centros de cada bola y de las bolas que realmente cabían en la primera planta del tetrabrik. Por último, se representó con GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020) el rectángulo y las circunferencias, alcanzando distintos niveles según los conocimientos del alumnado.

Las instrucciones utilizadas en la representación son:

- Comando *Poligonal* o comando *Segmentos* para el dibujo del rectángulo y para cada circunferencia por separado, el comando *Circunferencia: centro y radio.*
- Utilización del comando *Secuencia* (junto con el comando *Circunferencia: centro y radio*) para dibujar automáticamente las circunferencias (haciendo variables las coordenadas x e y del centro). Es conveniente hacer en dos partes (por filas o columnas) algunos de los modelos a representar.

- Uso de variables (o *deslizadores*) para poder generalizar el estudio a otras dimensiones del recipiente o de las bolas.
- En este último caso es interesante conseguir que el programa cuente automáticamente el número de bolas que caben (con el comando *CuentaSi* aplicado a la lista que contiene las circunferencias). Para los modelos representados en dos partes, se pueden juntar las listas en una lista única (con el comando *Encadena*) para poder contar mejor.

Con estas indicaciones se obtiene la superposición de los tres modelos de base que vemos en la Figura 8.

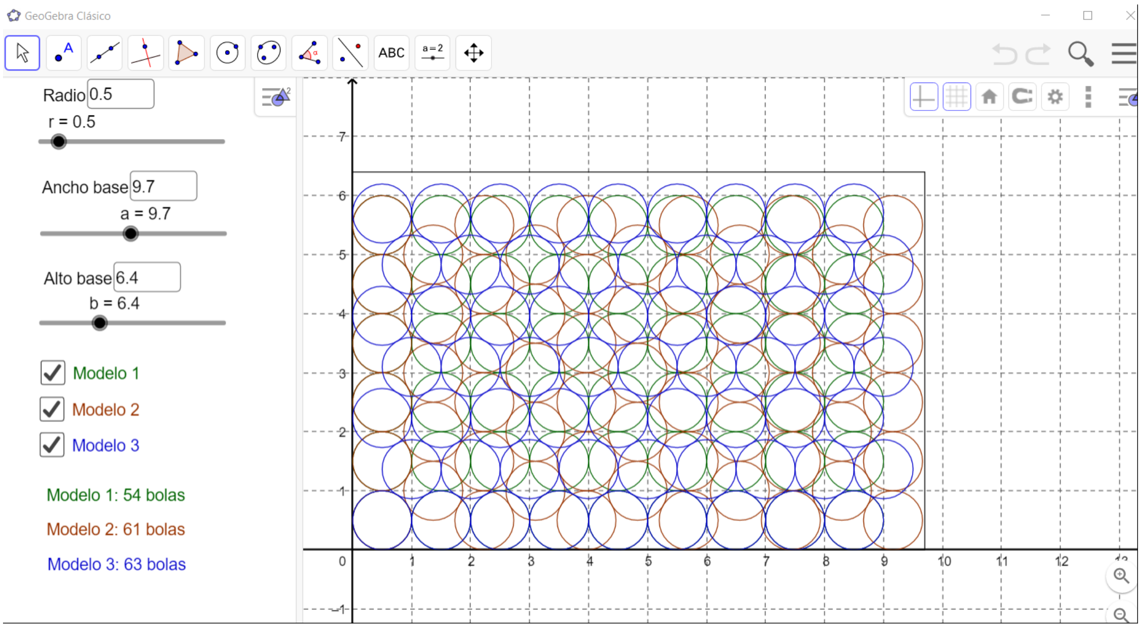



*Figura 8. Superposición de los tres modelos de base.*

El proceso para el resto de las plantas es análogo: manipulación de canicas, dibujo esquemático, cálculos de centros y número de bolas y representación en GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020) (en la vista Gráfica -proyecciones- o en la vista Gráfica 3D).

Sea cual sea el nivel alcanzado con el uso de GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020), no se debe olvidar, el cuidado en la presentación: colores (ayudan a visualizar la situación de los objetos), cuadrículas, ejes, textos explicativos, presentación selectiva de modelos o partes de un modelo (con el comando *Valor* para trabajar con valores lógicos y el comando *CasillaControl*), etc.

Con respecto a la utilidad práctica, que es siempre una inquietud de los estudiantes, y con el fin de que se valore la importancia del problema trabajado, la dificultad de su resolución y la constancia del quehacer matemático, se puede comentar que estas cuestiones están en conexión con los problemas de empaquetamiento de círculos y esferas relacionados con el distanciamiento social, las estructuras químicas o el envío de mensajes y la detección y corrección de errores. Además, se puede animar a los estudiantes para que busquen información sobre el concepto de densidad del empaquetamiento y su tratamiento por diferentes matemáticos desde Lagrange y Gauss hasta los resultados recientes en otras dimensiones en torno a la historia de la conjetura de Kepler (Miana Sanz y Romero Álvarez, 2010), formulada por Johannes Kepler en el siglo XVII sobre la mejor densidad de empaquetamiento de esferas en dimensión 3 y demostrada por Thomas Hales en 1998 (Hales, 2005). Como ampliación podría estudiarse la colocación según la disposición de las esferas en la conjetura de Kepler, es decir, como en la Figura 9. Para ello se pedirá a los estudiantes que comiencen dibujando esferas de radio $r$=0,5 *cm* según el modelo 1. En este caso, en la segunda planta podríamos colocar solamente 45 bolas. En el problema planteado queremos aprovechar todo el espacio del recipiente, además de tener en cuenta que las bolas se dispongan de forma que la densidad en el sentido de la conjetura de Kepler sea la mayor posible.

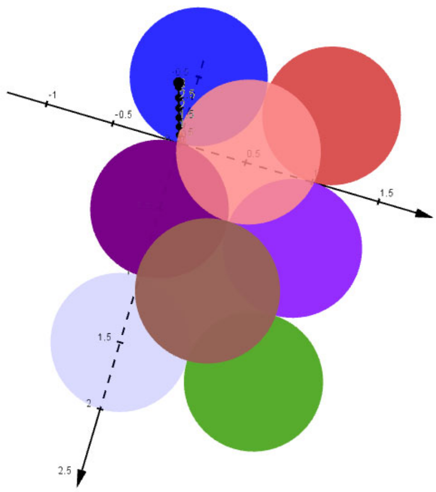



*Figura 9. Colocación de las bolas según la disposición de la conjetura de Kepler (Vista en planta).*

Por supuesto, existen otras posibilidades que los estudiantes podrían presentar y no debemos rechazar sin valorar, de ahí la importancia de realizar una evaluación por rúbrica, especialmente adecuada para problemas con solución abierta.

## 3. Evaluación

A la primera fase llegaron todos los grupos y la segunda fase se desarrolló con los estudiantes de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (15 y 16 años). Todos dieron al menos la solución de la colocación de bolas una encima de otra y guiados, la mayoría aportaron también la segunda opción explicada. Para valorar la actividad realizada se ha diseñado una rúbrica que se presenta en la Tabla 1. Teniendo en cuenta las conclusiones de Valverde y Cuidad (2014) y Herrán Álvarez et al. (2019) y en base a las fases del ciclo de modelización matemática de Blum y Leiβ (2007) se han establecido una serie de indicadores. Además, se han incorporado algunos indicadores que hacen referencia a la presentación del trabajo realizado, la autonomía y el trabajo del grupo. El problema se valora en una escala de 0 a 10 puntos.

*Tabla 1. Rúbrica de evaluación para un problema de modelización.*

| | **Nivel 1** | **Nivel 2** | **Nivel 3** | **Nivel 4** |
|---|---|---|---|---|
| **Comprensión del enunciado**<br><br>**1 punto** | Reconoce los conceptos matemáticos y variables implicadas en el problema y la relación que existe entre ellos<br><br>1 punto | Reconoce los conceptos matemáticos y variables, pero no la relación entre ellos<br><br>0,75 puntos | Reconoce la mayoría de los conceptos y variables<br><br>0,5 puntos | Sólo reconoce algunos de los conceptos y variables<br><br>0,25 puntos |
| **Simplificación/ Estructuración**<br><br>**2 puntos** | Simplifica el planteamiento del problema aplicando la estrategia heurística de dividir el problema en subproblemas y reflexiona sobre el proceso seguido<br><br>2 puntos | Simplifica el planteamiento del problema. No reflexiona sobre el proceso seguido 1,5 puntos | A veces simplifica el planteamiento del problema<br><br>1 punto | No utiliza la estrategia de dividir el problema en subproblemas<br><br>0,5 puntos |
| **Resolución**<br><br>**1 punto** | Resuelve correctamente el problema planteado y el modelo propuesto puede aplicarse a situaciones similares<br><br>1 punto | Resuelve el problema, pero el modelo no puede aplicarse a situaciones similares<br><br>0,75 puntos | El trabajo debe revisarse, el proceso de resolución contiene algunos errores<br><br>0,5 puntos | El trabajo debe revisarse, el proceso de resolución contiene muchos errores.<br><br>0,25 puntos |
| **Validación del resultado**<br><br>**1 punto** | Reflexiona sobre los resultados obtenidos indicando si son o no correctos y argumentándolo<br><br>1 punto | Analiza si los resultados son o no correctos, pero sin argumentarlo<br><br>0,75 puntos | Presenta cierta evidencia del análisis de los resultados<br><br>0,5 puntos | No analiza los resultados obtenidos y no indica si hay incongruencias en las soluciones<br><br>0,25 puntos |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Claridad y limpieza del informe 2 puntos** | El informe es claro y conciso. Uso adecuado del lenguaje matemático y representaciones que facilitan su comprensión. Presenta todos los puntos requeridos y añade algunos otros relevantes. No presenta faltas de ortografía y la sintaxis es correcta<br><br>2 puntos | El informe es claro y conciso. Uso aceptable del lenguaje matemático y representaciones. Presenta todos los puntos requeridos. No presenta faltas de ortografía y la sintaxis es correcta<br><br>1,5 puntos | El informe hace un uso pobre del lenguaje matemático con pocas representaciones. Contiene la mayoría de los puntos requeridos. La ortografía y sintaxis son correctas<br><br>1 punto | Apenas contesta a los puntos requeridos. Hay faltas de ortografía y la sintaxis no es correcta<br><br>0,5 puntos |
| **Autonomía**<br><br>**1 puntos** | Resuelven el problema sin solicitar la ayuda del profesorado<br><br>1 punto | Resuelven el problema con la ayuda del profesorado en momentos puntuales<br><br>0,75 puntos | Resuelven el problema recurriendo frecuentemente a la ayuda del profesorado<br><br>0,5 puntos | Deben ser guiados continuamente por el profesorado<br><br>0,25 puntos |
| **Colaboración**<br><br>**2 puntos** | Todos los miembros del grupo participan en el proceso de resolución ayudándose y tomando decisiones consensuadas<br><br>2 puntos | Todos los miembros del grupo participan el proceso de resolución, aunque a veces las decisiones no son consensuadas<br><br>1,5 puntos | Todos los miembros del grupo colaboran en la realización de la actividad, aunque tienen dificultades para entenderse y tomar decisiones conjuntas<br><br>1 punto | Solo algunos miembros del grupo colaboran en la realización de la actividad<br><br>0,5 puntos |

Los estudiantes deben reflexionar sobre su implicación en el trabajo realizado mediante cuatro cuestiones que se presentan a continuación. Cada una de ellas se valora como excelente, bueno, regular o inadecuado. Además, se pide al alumnado que diseñen una diana de autoevaluación como la que se presenta en la Figura 10.

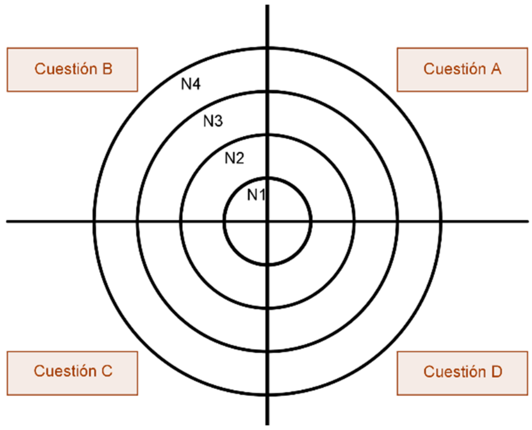
| | |
|---|---|
| Cuestión A: He cumplido con el compromiso asignado de la tarea esforzándome al máximo<br><br>Cuestión B: He cooperado y fomentado la participación de todos los miembros del equipo.<br><br>Cuestión C: Cuando surgía alguna dificultad o un error, he intentado llegar a acuerdos utilizando el debate y el razonamiento.<br><br>Cuestión D: He aprendido algo nuevo sobre el tema, escuchando y observando con comprensión y empatía. | <br><br>**N1: Excelente, N2: Bueno,**<br><br>**N3: Regular, N4: Inadecuado.** |

*Figura 10. Diana de autoevaluación.*

## 4. Conclusiones

Es una experiencia positiva en la que trabajamos la competencia matemática, entre otras, y los estudiantes no basan sus estrategias en una mera imitación del profesorado, al contrario, tienen que buscar una línea de trabajo propia y consensuada con los miembros de su grupo aplicando los conocimientos matemáticos y extra-matemáticos aprendidos. También, aprenden a ser más reflexivos, a dividir un problema en subproblemas (simplificación) como estrategia de resolución de problemas, a construir un plan de acción y ponerlo en marcha, a mejorar su proceso de escritura (rigor matemático), a utilizar distintas formas de presentación de resultados y a buscar resultados razonables al problema propuesto validando el resultado obtenido.

No podemos obviar las dificultades encontradas en la puesta en práctica por los estudiantes: bloqueos, falta de comprensión lectora, falta de autonomía, necesidad continuada de aprobación del docente, así como las dificultades del profesorado: tareas abiertas con distintas soluciones y complejidad de la evaluación, por las infinitas posibilidades de mejorar el modelo y el producto final.

En definitiva, la realización de actividades de modelización en la Enseñanza Secundaria tiene muchos aspectos positivos y, a la vez, dificultades que pueden salvarse. Sin duda, consideramos conveniente integrar este tipo de actividades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas para la formación de ciudadanos críticos y capaces de superar los nuevos retos del siglo XXI.

# Referencias bibliográficas

[1] ALBARRACÍN, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, Vol. 10, nº 2, 117-136. https://doi.org/10.4995/msel.2017.7707

[2] ALSINA, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, Vol. 43, nº 1, 85-101.

[3] BERGMAN ÄRLEBÄCK J. y BERGSTEN C. (2010) On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics. In: Lesh R., Galbraith P., Haines C., Hurford A. (eds) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_52

[4] BLUM, W. y BORROMEO-FERRI, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Vol. 1, nº 1, 45-58.

[5] BLUM, W. y LEIB, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. et al. (eds), *Mathematical Modelling: Education, engineering, and Economics*. (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

[6] BORROMEO-FERRI, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer International Publishing.

[7] FERRANDO, I., ALBARRACÍN, L., GALLART, C., GARCÍA-RAFFI, L. y GORGORIÓ, N. (2017). Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Vol. 31, nº 57, 220-242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

[8] GALLART, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial* (Tesis Doctoral). Universidad Politécnica de Valencia.

[9] GALLART, C., FERRANDO, I. y GARCÍA-RAFFI, L. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, Vol. 12, nº 1, 71-86. https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955.

[10] GARCÍA NAVARRO, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, Vol. 30(2), nº 84, 57-68.

[11] HERRÁN ÁLVAREZ, I., HERAS BERNARDIRNO, C. Y PÉREZ-PUEYO, A. (2019). La evaluación formativa. El mito de las rúbricas. Alternativas en la elaboración de instrumentos de evaluación en Secundaria. *Revista Infancia, Educación y Aprendizaje*, Vol. 5, nº 2, 601-609. https://doi.org/10.22370/ieya.2019.5.2.1784

[12] HALES, T. C. (2005). A proof of the Kepler Conjecture. *Annals of Mathematics*, Vol. 162, nº 3, 1065-1185.

[13] INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE (2020), http://www.geogebra.org. Consultado el 7/0772020.

[14] MIANA SANZ, P. J. Y ROMERO ÁLVAREZ, N. (2010) La historia de la conjetura de Kepler. In *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez* (pp. 367-374). Universidad de La Rioja.

[15] ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, *por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, 25, de 29 de enero de 2015, pp. 6986-7003.

[16] REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, *por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, 3, de 3 de enero de 2015, pp. 97858-97921.

[17] TETRA PACK (2020). History. http://www.tetrapak.com/about/history /Consultado el 26/08/2020.

[18] VALVERDE L., CUIDAD, A. (2014). El uso de e-rúbricas para la evaluación de competencias en estudiantes universitarios. Estudio sobre fiabilidad del instrumento. *REDU Revista de docencia universitaria,* Vol. 12, nº 1, 49-79.
https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/140009/Valverde?sequence=1

**Sobre los autores:**

*Nombre:* Ricardo José García Bonaviña
*Correo Electrónico:* rgarcia@iesfib.es
*Institución:* IES Fray Ignacio Barrachina (Ibi), España.

*Nombre:* Almudena Lloréns Payá
*Correo Electrónico:* almudena.llorens@salesianos.edu
*Institución:* Colegio Salesianos San Vicente Ferrer (Alcoy), España

*Nombre:* Carmen Romero-García
*Correo Electrónico:* mariadelcarmen.romero@unir.net
*Institución:* Universidad Internacional de la Rioja, España

*Nombre:* Ana María Zarco García
*Correo Electrónico:* anamaria.zarco@unir.net
*Institución:* Universidad Internacional de la Rioja, España