Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"

Universidad Politécnica de Madrid ISSN 2174-0410 Volumen XI, Número 1, Abril 2021

Pensamient Matematic

MAIC

# HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

**GEOMETRÍA ERES TÚ** 



**REGRESIÓN LINEAL ORTOGONAL** 

UNA MARCA DE AGUA FRÁGIL EN EL DUMINIO DE LOS MOMENTOS ORTUGONALES DE KHAWTCHOUK

# CUENTOS MATEMÁTICOS

SOÑAR ... ¿TE DA ALAS?

# EXPERIENCIAS DOCENTES

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON GEOGEBRA: COLOCACIÓN DE CIRCUNFERENCIAS Y ESFERAS

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA CON MATERIAL CONCRETO: OPINIÓN DE PROFESORES

ENSEÑANZA DEL SOFTWARE R A ALUMNOS DE MATEMÁTICAS

# JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

**ADIVINACIÓN COBRIZA** 

# **ENTREVISTA A:**

AURELIO SÁNCHEZ:



# CRÍTICAS Y RESEÑAS

**VIDEO JUEGO WHO'S THAT FUNCTION** 

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen XI, Número 1, Abril 2021

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC Ilustración de portada / https://www.iacs.es/wp-content/uploads/2020/07/colección-covid.jpg Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz, Sagrario Lantarón, Mariló López

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohibe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

### Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid



Volumen XI, Número 1, ISSN 2174-0410

#### Coordinación Comité Editorial

Mariló López González Sagrario Lantarón Sánchez Javier Rodrigo Hitos José Manuel Sánchez Muñoz

#### Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Santiago Higuera de Frutos, Fernando Chamizo Lorente, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Trinidad Menárguez Palanca, María Isabel Garrido Carballo, Luigi Montoro, María Medina de la Torre, Susana Merchán Rubira

1 de abril de 2021

# Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Vol. XI)	1
Investigación	
Regresión lineal ortogonal	5
Una marca de agua frágil en el dominio de los momentos ortogonales de Krawtchouk . Alicia María Centurión Fajardo, Nancy Céspedes Trujillo y Eduardo Moreno Roque	17
Experiencias Docentes	
Modelización matemática con Geogebra: colocación de circunferencias y esferas Ricardo José García Bonaviña, Almudena Lloréns Payá, Carmen Romero-García y Ana María Zarco García	29
Taller de Resolución de Problemas de Matemática con material concreto: opinión de	
profesores	45
Enseñanza del Software Estadístico R a alumnos de matemáticas	57
Historias de Matemáticas	
Geometría eres tú	69
Juegos y Rarezas Matemáticas	
Adivinación cobriza Aurelio Sánchez Estévez	91
Cuentos Matemáticos	
Soñar;te da alas?	101
Críticas y Reseñas	
Video Juego Who's That Function	105
Entrevista	
Aurelio Sánchez: el método KUMON	111

## Editorial del Número 1 (Volumen XI)

#### **Equipo Editorial**

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 001-004, ISSN 2174-0410

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

Este es el primer número del volumen XI de la Revista. Corresponde al año 2021, un año del que todos esperamos muchas cosas buenas después de lo vivido en el 2020 con el Covid-19. Esas cosas buenas vienen encabezadas por la esperanza en la vacuna, un avance debido a la Ciencia que siempre está al servicio de las personas y de su bien estar.

En este número de Pensamiento Matemático se incluyen una variedad de trabajos interesantes incluidos en cada una de las secciones de la publicación.

#### Abstract

This is the first number of volume XI of the Journal. It corresponds to the year 2021, a year which we all expect many good things after what we experienced in 2020 with Covid-19. These good things are led by hope in the vaccine, an advance due to Science that is always at the service of people and their well-being.

This issue of Mathematical Thought includes a variety of interesting works included in each of the sections of the publication.

#### Introducción

Tras un complicado y diferente 2020, la Ciencia parece volver a ser la solución a los grandes problemas. Todos tenemos esperanzas en que la vacuna contra el Covid 19 permita revocar una situación que ha sido realmente dura tanto desde el punto de vista humano como desde el económico.

Nuestra Revista ha recibido trabajos de gran interés que queremos compartir con todo el público interesado en las matemáticas. En este primer volumen del año se incluyen los siguientes artículos que estamos seguros os interesarán.

Equipo Editorial Editorial

#### Investigación

*Regresión lineal ortogonal*, presenta un método de regresión lineal que minimiza el error residual para un conjunto de puntos y se compara este método con los métodos tradicionales unilaterales de regresión.

Una marca de agua frágil en el dominio de los momentos ortogonales de Krawtchouk propone un esquema de marca de agua frágil basada en los momentos ortogonales de Krawtchouk. Se trata de un algoritmo que inserta la marca de agua generada en los primeros ocho coeficientes de los momentos de Krawtchouk.

#### **Experiencias Docentes**

En la sección dedicada a compartir experiencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se publican tres trabajos interesantes:

Modelización matemática con GeoGebra: colocación de circunferencias y esferas, se presenta una experiencia con estudiantes de Enseñanza Secundaria a los que se les plantea un problema compuesto de subproblemas que requieren de una modelización matemática. El profesorado guía a los alumnos en la resolución y explica las herramientas que ofrece GeoGebra.





En el artículo *Taller de Resolución de Problemas de Matemática con material concreto: opinión de profesores* se describe un taller de resolución de problemas de matemáticas con material específico y se dan a conocer y analizan las opiniones de los profesores participantes. Los talleres se han desarrollado con estudiantes del Preuniversitario de la Universidad del Bío-Bío.

Enseñanza del Software Estadístico R a alumnos de Matemáticas nos presenta una experiencia de profesores de la Universidad Complutense de Madrid que tras constatar la falta de formación en herramientas estadísticas de los estudiantes y la creciente importancia del software de programación R, han visto la necesidad de impartir un curso de Análisis de Datos con R.

Editorial Equipo Editorial

#### Historias de Matemáticas

Esta sección incluye estudios sobre Matemáticas y sus aplicaciones, así como artículos de historia de la Matemática. Es este número se presenta el artículo: *Geometría eres tú*.

Este precioso trabajo nos enseña que la matemática abstracta, a través del concepto de invariantes por una transformación o simetría, junto con el concepto de grupo de simetrías, permite dar una visión unificadora de cuestiones aparentemente inconexas: las diferentes geometrías, las obras artísticas, la apariencia de muchos seres vivos, las leyes físicas, las partículas elementales, los cristales y la conexión de estructuras neuronales o proteicas con las funciones en las que están involucradas. Nos enseña como la geometría da una medida del mundo y de nosotros mismos a través de los grupos de simetría.

#### Juegos y rarezas matemáticas

En este número se incluye un interesante trabajo dentro de la sección, siempre agradable y curiosa, que es la de juegos y rarezas matemáticas.

*Adivinación cobriza* analiza un caso particular de las sucesiones de de Bruijn que se utilizará para crear un juego de mentalismo diseñado para cuatro espectadores. Consiste en averiguar el medio de transporte pensado por cada uno de los participantes.

#### **Cuentos**

Soñar... ¿te da alas? es un relato corto escrito por, en el momento de realizarse, una estudiante de bachillerato que participó en el concurso de relatos con contenido matemático organizado por el GIE (Grupo de Innovación Educativa) Pensamiento Matemático de la UPM (Universidad Politécnica de Madrid), para alumnos de la ESO, Bachillerato y universitarios.

#### Reseñas

Profesores del Departamento de Matemática e Informáticas Aplicadas a la Ingeniería Civil y Naval de la Universidad Politécnica de Madrid, realizan trabajos relativos a la creación de juegos matemáticos que refuercen los contenidos matemáticos de las asignaturas de ESO, bachillerato y grados científicos y técnicos. *Video Juego Who's That Function* presenta un juego de ordenador de acceso libre, pensado para ejecutarse en el navegador, que enseña las propiedades de las funciones reales de variable real de manera interactiva.

#### **Entrevistas**

El número se cierra con una entrevista a un entusiasta de las matemáticas, de su divulgación y de sus aplicaciones más "ilusionantes": *Aurelio Sánchez: el método KUMON*. Aurelio, además de divulgador de la red de divulgación matemática DiMa y miembro de la

Equipo Editorial Editorial

Sociedad Española de Ilusionismo, es director de KUMON instituto de educación de España, S.A. En esta entrevista nos habla del método KUMON y sus particulares para aprender matemáticas.

### Investigación

### Regresión lineal ortogonal

## Linear orthogonal regression

José Manuel Recio-López

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 005–015, ISSN 2174-0410 Recepción: 24 Jul'20; Aceptación: 09 Ene'21

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

En este artículo se presenta un método de regresión lineal que minimiza el error residual para un conjunto de puntos  $x_i$ ,  $y_i$  con i = 1, 2, ..., N, entendido este error como la distancia mínima del punto a la recta de regresión.

Además, se compara este método con los métodos tradicionales unilaterales de regresión lineal de X sobre Y y de Y sobre X.

Palabras Clave: mínimos cuadrados, regresión lineal, estadística, componentes principales.

#### **Abstract**

This article presents a linear regression method that minimizes the residual error for a set of points xi, yi with i = 1, 2, ..., N, understood this error as the minimum distance from the point to the regression line.

Furthermore, this method is compared with the traditional unilateral linear regression methods of *X* over *Y* and *Y* over *X*.

**Keywords:** least squares, linear regression, statistics, principal components.

#### 1. Introducción

El problema tradicional de obtención de la recta de regresión lineal, de un conjunto de N puntos de coordenadas  $(x_i, y_i)$ , mediante mínimos cuadrados presenta el inconveniente de que existen dos rectas de regresión, la recta de regresión  $r_Y$  de Y sobre X y la recta de regresión  $r_X$  de X sobre Y.

Las ecuaciones de las rectas de regresión se pueden obtener, o bien por mínimos cuadrados, o bien mediante el método matricial de las ecuaciones normales de Gauss, y su obtención aparece en cualquier texto adecuado de álgebra lineal o cálculo numérico [2, 4, 5, 6, 7]. A continuación, se exponen los valores de los coeficientes de dichas rectas: José Manuel Recio-López Investigación

$$m_{y} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \bar{x}^{2}} = \frac{s_{xy}}{s_{x}^{2}}$$

$$n_{y} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} \bar{x}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} \bar{y} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} \bar{x}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} \bar{x}} = \frac{s_{xy}^{2}}{s_{x}^{2}}$$

$$(1)$$

$$m_{x} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} - \bar{y}^{2}} = \frac{s_{xy}}{s_{y}^{2}}$$

$$n_{x} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} \bar{x} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} \bar{y}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} - \bar{y}^{2}} = \frac{s_{y}^{2} \bar{x} - s_{xy} \bar{y}}{s_{y}^{2}}$$

$$(2)$$

en donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} - \bar{x} \bar{y}$$

$$s_{x}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \bar{x}^{2}$$

$$s_{y}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} - \bar{y}^{2}$$
(3)

siendo  $\bar{x}$  el valor medio de la variable X,  $\bar{y}$  el valor medio de la variable Y,  $s_x^2$  la varianza de la variable X,  $s_y^2$  la varianza de la variable Y e  $s_{xy}$  la covarianza.

En este artículo se obtienen las ecuaciones que determinan los dos coeficientes de una única recta de regresión, que es aquella que verifica que la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos a la misma es mínima, entendiendo por distancia, la norma euclidiana del vector que une el punto con la recta según la dirección perpendicular a la misma.

Regresión lineal ortogonal José Manuel Recio-López

#### 2. Enunciado del método de regresión lineal ortogonal

Dados N puntos en el plano de coordenadas  $(x_i, y_i)$ , la recta de regresión ortogonal tiene por ecuación y = mx + n, cuyos coeficientes son:

$$m = \frac{-s_x^2 + s_y^2 + \sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2}}{2s_{xy}}$$
(4)

y

$$n = \bar{y} - m\bar{x} \tag{5}$$

en donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i} y_{i} - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_{i} - \bar{x})(y_{i} - \bar{y})$$

$$s_{x}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - \bar{x}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_{i} - \bar{x})^{2}$$

$$s_{y}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} - \bar{y}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_{i} - \bar{y})^{2}$$
(6)

siempre y cuando la covarianza del conjunto de puntos sea no nula, es decir:  $s_{xy} \neq 0$ .

#### 3. Demostración

La distancia de un punto P de coordenadas  $(x_P, y_P)$  a una recta r de ecuación general ax + by + c = 0 viene dada por la expresión:

$$d(P,r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7}$$

Sea r la recta de regresión de ecuación explícita y=mx+n, que se corresponde con la ecuación implícita mx-y+n=0.

Por tanto, la distancia a dicha recta de un punto  $P_i$  del conjunto de puntos dados, con coordenadas  $(x_i, y_i)$ , será:

$$d(P_i, r) = \frac{|mx_i - y_i + n|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$
(8)

Esta distancia se corresponde con el residuo del punto  $P_i$ :

$$e_i = \frac{|mx_i - y_i + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} \tag{9}$$

José Manuel Recio-López Investigación

La función f(m, n), cuyo valor mínimo se desea calcular, es la suma de los cuadrados de los residuos de todos los puntos del conjunto. Por tanto:

$$f(m,n) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{mx_i - y_i + n}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2$$
 (10)

Para obtener el valor mínimo, aplicamos la teoría de optimización de funciones de dos variables [3]. En el valor mínimo, el vector gradiente de la función debe ser nulo, luego:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 2 \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{mx_i - y_i + n}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) \frac{x_i \sqrt{m^2 + 1} - (mx_i - y_i + n) \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}}{m^2 + 1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 2 \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{mx_i - y_i + n}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0$$
(11)

Operando, se llega al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\sum_{i=1}^{N} (mx_i - y_i + n)(x_i + my_i - mn) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} (mx_i - y_i + n) = 0$$
(12)

Definiendo los valores medios de las coordenadas del conjunto de puntos como:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i 
\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$$
(13)

el sistema de ecuaciones queda como:

$$\sum_{i=1}^{N} \left( mx_i^2 - my_i^2 + (m^2 - 1)x_iy_i + (1 - m^2)nx_i + 2mny_i - mn^2 \right) = 0$$

$$m\bar{x} - \bar{y} + n = 0$$
(14)

Desarrollando la primera ecuación, teniendo en cuenta la definición de los valores medios:

$$m\sum_{i=1}^{N}x_{i}^{2}-m\sum_{i=1}^{N}y_{i}^{2}+(m^{2}-1)\sum_{i=1}^{N}x_{i}y_{i}+(1-m^{2})n\bar{x}N+2mn\bar{y}N-mn^{2}N=0$$
 (15)

De la segunda ecuación de (14) se puede despejar el valor de *n* en función de *m*:

$$n = \bar{y} - m\bar{x} \tag{16}$$

Si ahora se sustituye el valor de n en la primera:

$$m\sum_{i=1}^{N} x_{i}^{2} - m\sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2} + (m^{2} - 1)\sum_{i=1}^{N} x_{i}y_{i} + (1 - m^{2})(\bar{y} - m\bar{x})\bar{x}N + 2m(\bar{y} - m\bar{x})\bar{y}N - m(\bar{y} - m\bar{x})^{2}N = 0$$
(17)

Regresión lineal ortogonal José Manuel Recio-López

Desarrollando y dividiendo por *N*:

$$m\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i}^{2} - m\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{i}^{2} + m^{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i}y_{i} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i}y_{i} + \bar{x}\bar{y} - m^{2}\bar{x}\bar{y} - m\bar{x}^{2} + m^{3}\bar{x}^{2} + 2m\bar{y}^{2} - 2m^{2}\bar{x}\bar{y} - m\bar{y}^{2} + 2m^{2}\bar{x}\bar{y} - m^{3}\bar{x}^{2} = 0$$

$$(18)$$

Agrupando términos en la ecuación anterior, resulta:

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i}y_{i} - \bar{x}\bar{y}\right)m^{2} + \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i}^{2} - \bar{x}^{2} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{i}^{2} + \bar{y}^{2}\right)m - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i}y_{i} - \bar{x}\bar{y}\right) = 0$$
(19)

Teniendo en cuenta las definiciones de la covarianza  $s_{xy}$  y las varianzas  $s_x^2$  y  $s_y^2$ :

$$s_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2$$
(20)

resulta:

$$s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy} = 0 (21)$$

que es una ecuación de segundo grado para la incógnita m.

Dicha ecuación tiene dos soluciones reales:

$$m_{1} = \frac{-s_{x}^{2} + s_{y}^{2} + \sqrt{(s_{x}^{2} - s_{y}^{2})^{2} + 4s_{xy}^{2}}}{2s_{xy}}$$

$$m_{2} = \frac{-s_{x}^{2} + s_{y}^{2} - \sqrt{(s_{x}^{2} - s_{y}^{2})^{2} + 4s_{xy}^{2}}}{2s_{xy}}$$
(22)

Para determinar cuál de los dos valores de la pendiente  $(m_1,m_2)$  minimiza a la función f(m,n), se debe determinar el hessiano de dicha función (10). Pero debido a que se conoce el valor de n para el que se obtiene el extremo de la función f, se puede construir la función de una variable F(m) = f(m,n(m)), que resulta ser:

$$F(m) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{m(x_i - \bar{x}) - y_i + \bar{y}}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2$$
 (23)

Esta función F(m) es el resultado de la intersección de la superficie definida por la función f(m,n) con el plano representado por la relación (16), y se ha determinado que los extremos de la función f(m,n) están en ese plano, es decir, cumplen la relación (16); por tanto, los extremos de F(m) coinciden con los extremos de f(m,n).

José Manuel Recio-López Investigación

Para determinar cuál de los extremos es el mínimo, se recurre a la derivada de esta función F(m):

$$\frac{dF}{dm} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})m^2 + ((x_i - \bar{x})^2 - (y_i - \bar{y})^2)m - (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(m^2 + 1)^2}$$
(24)

que puede expresarse en función de la covarianza y las varianzas como:

$$\frac{dF}{dm} = \frac{2N}{(m^2 + 1)^2} (s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy})$$
 (25)

Igualando a cero se determinan los extremos de F(m):

$$\frac{2N}{(m^2+1)^2}(s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy}) = 0$$
 (26)

Por tanto, el valor de la pendiente m debe cumplir la relación (26) para que sea un extremo de la función F(m). Esta ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación (21), por lo que F(m) y f(m,n) tienen los mismos extremos.

Calculando la derivada segunda, se comprueba si el extremo es máximo o mínimo:

$$\frac{d^2F}{dm^2} = \frac{2N(2s_{xy}m + s_x^2 - s_y^2)(m^2 + 1) - 8Nm(s_{xy}m^2 + (s_x^2 - s_y^2)m - s_{xy})}{(m^2 + 1)^3}$$
(27)

Evaluando la segunda derivada en  $m_1$  se tiene:

$$\frac{d^2F(m_1)}{dm^2} = \frac{2Ns_{xy}}{m_1(m_1^2 + 1)} = \frac{8Ns_{xy}^4}{(\sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2})(\sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2} - s_x^2 + s_y^2)^2} > 0$$
 (28)

por consiguiente, el valor de  $m_1$  se corresponde con el valor mínimo de la función. Evaluando la segunda derivada en  $m_2$  se tiene:

$$\frac{d^2F(m_2)}{dm^2} = \frac{2Ns_{xy}}{m_2(m_2^2 + 1)} = \frac{-8Ns_{xy}^4}{(\sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2})(\sqrt{(s_x^2 - s_y^2)^2 + 4s_{xy}^2 + s_x^2 - s_y^2)^2}} < 0$$
 (29)

por consiguiente, el valor de  $m_2$  se corresponde con el valor máximo de la función.

Además, ambos valores,  $m_1$  y  $m_2$  cumplen la siguiente condición:

$$m_1 m_2 = -1 (30)$$

por lo que se corresponden con las pendientes de dos rectas perpendiculares.

Regresión lineal ortogonal José Manuel Recio-López

### 4. Definición de residuo y de coeficiente de correlación

Sea r, la recta de regresión ortogonal de ecuación y = mx + n. Considérese el punto  $P_i$  de coordenadas  $(x_i, y_i)$  y su estimación  $\hat{P}_i$  de coordenadas  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ , que está en la intersección de la recta perpendicular a la recta de regresión, que pasa por el punto  $P_i$ , con dicha recta, tal como se muestra en la figura 1:

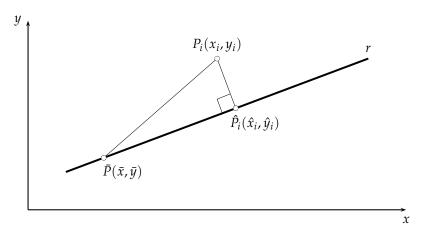


Figura 1. Representación de la recta de regresión ortogonal r

Denotando  $d(P_i, \bar{P})$  a la distancia entre el punto  $P_i$  y el punto  $\bar{P}$ ,  $d(P_i, \hat{P}_i)$  a la distancia entre el punto  $P_i$  y el punto  $\hat{P}_i$  y d $(\hat{P}_i, \bar{P})$  a la distancia entre el punto  $\hat{P}_i$  y el punto  $\bar{P}$ , aplicando el teorema de Pitágoras, resulta:

$$d(P_i, \bar{P})^2 = d(P_i, \hat{P}_i)^2 + d(\hat{P}_i, \bar{P})^2$$
(31)

Sumando para todos los puntos:

$$\sum_{i=1}^{N} d(P_i, \bar{P})^2 = \sum_{i=1}^{N} d(P_i, \hat{P}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} d(\hat{P}_i, \bar{P})^2$$
(32)

La distancia  $d(P_i, \hat{P}_i)$  representa el residuo  $e_i$ . Despejando, por tanto, la suma de los cuadrados de los residuos, resulta:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} d(P_i, \hat{P}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} d(P_i, \bar{P})^2 - \sum_{i=1}^{N} d(\hat{P}_i, \bar{P})^2$$
(33)

Teniendo en cuenta que:

$$d(P_i, \bar{P})^2 = (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2$$
(34)

$$d(\hat{P}_i, \bar{P})^2 = (\hat{x}_i - \bar{x})^2 + (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$
(35)

se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^{N} (\hat{x}_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$
(36)

José Manuel Recio-López Investigación

Ahora bien, el punto  $\hat{P}_i$  pertenece a la recta perpendicular a la recta de regresión ortogonal que pasa por el punto  $P_i$ , por tanto:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i + my_i + m(m\bar{x} - \bar{y})}{1 + m^2} \tag{37}$$

$$\hat{y}_i = \frac{m(x_i + my_i) + \bar{y} - m\bar{x}}{1 + m^2} \tag{38}$$

y además, se ha definido previamente:

$$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \tag{39}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 \tag{40}$$

Definiendo el coeficiente de correlación  $R^2$  como:

$$R^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} d(\hat{P}_{i}, \bar{P})^{2}}{\sum_{i=1}^{N} d(P_{i}, \bar{P})^{2}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} e_{i}^{2}}{\sum_{i=1}^{N} d(P_{i}, \bar{P})^{2}}$$
(41)

resulta:

$$R^{2} = \frac{s_{y}^{2}m^{2} + 2s_{xy}m + s_{x}^{2}}{(s_{x}^{2} + s_{y}^{2})(1 + m^{2})}$$

$$\tag{42}$$

Mientras más próximo esté  $R^2$  a la unidad, mayor será la correlación lineal entre las variables X e Y. Su raíz cuadrada R viene a ser el equivalente al coeficiente de correlación de Pearson de la regresión tradicional:

$$R = \sqrt{\frac{s_y^2 m^2 + 2s_{xy} m + s_x^2}{(s_x^2 + s_y^2)(1 + m^2)}}$$
 (43)

Las rectas de regresión tradicionales de X sobre Y, recta  $r_X$ , y de Y sobre X, recta  $r_Y$ , son fácilmente calculables en función de  $\overline{x}$ ,  $\overline{y}$ ,  $s_{xy}$ ,  $s_x^2$  y  $s_y^2$ :

$$r_Y: \quad y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x - \overline{x}) \tag{44}$$

$$r_X: y - \overline{y} = \frac{s_y^2}{s_{xy}}(x - \overline{x}) (45)$$

Y el coeficiente de correlación de Pearson  $r_P$ , igual para ambas, toma la expresión:

$$r_P = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}} \tag{46}$$

Regresión lineal ortogonal José Manuel Recio-López

# 5. Resolución de un caso particular y comparación con la regresión tradicional

Considérese el siguiente conjunto de puntos  $P_i$ , con i = 1, ..., 10, definidos por sus coordenadas  $(x_i, y_i)$ , que aparece en la tabla 1.

Tabla 1. Coordenadas de los puntos a correlacionar linealmente

i	$x_i$	$y_i$
1	0	2.10
2	1	3.55
3	2	3.22
4	3	4.56
5	4	3.58
6	5	4.85
7	6	5.92
8	7	5.71
9	8	7.35
10	9	6.59

Para este conjunto de puntos, en la tabla 2, se muestran los valores de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_{xy}$ ,  $s_x^2$  y  $s_y^2$ :

Tabla 2. Coeficientes del ejemplo

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$s_{xy}$	$s_x^2$	$s_y^2$
4.5000	4.7430	42.4050	82.5000	24.6540

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos para las rectas de regresión de Y sobre X,  $r_Y$ , de X sobre Y,  $r_X$ , y para la recta de regresión ortogonal r:

Tabla 3. Resultados del ejemplo y comparación

Recta	Pendiente	Ordenada en el origen	Coeficiente de correlación
r	0.5284	2.3652	0.9895
$r_Y$	0.5140	2.4300	0.9403
$r_X$	0.5814	2.1267	0.9403

Se ha empleado el programa de cálculo MATLAB para implementar las ecuaciones que determinan las rectas de regresión así como los coeficientes de correlación.

En el gráfico de la figura 2 se representan los puntos  $P_i$ , mediante el símbolo +, las rectas de regresión tradicionales y la recta de regresión ortogonal para este ejemplo propuesto.

José Manuel Recio-López Investigación

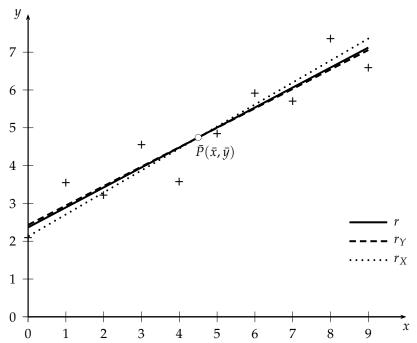


Figura 2. Representación de la recta de regresión ortogonal r y de las rectas de regresión  $r_X$  y  $r_Y$ 

#### 6. Conclusiones

Se observa gráficamente en la figura 2, que la recta de regresión ortogonal se sitúa entre las dos rectas de regresión tradicionales. Por tanto, queda reflejado que con la regresión ortogonal se obtiene un menor error residual (coeficiente de correlación de 0.9895) que con la regresión tradicional (coeficiente de correlación de 0.9403).

Como línea de investigación futura se propone demostrar analíticamente que, efectivamente, el coeficiente de correlación  $\mathbb{R}^2$ , obtenido en la regresión ortogonal, es siempre mayor que el obtenido en la regresión tradicional, es decir:

$$\frac{s_y^2 m^2 + 2s_{xy} m + s_x^2}{(s_x^2 + s_y^2)(1 + m^2)} > \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 s_y^2}$$
(47)

siendo m el valor  $m_1$  dado en la ecuación (22).

Comentar, además, que las rectas de regresión ortogonales, que se obtienen mediante este método de cálculo, se corresponden con las que se obtienen mediante un análisis de componentes principales con dos variables.

### 7. Agradecimientos

El autor desea agradecer a Juan Antonio Ortiz Guerra la motivación transmitida para la finalización de este trabajo; así como al profesor Manuel Heredia Zapata, por poner la semilla del mismo.

Regresión lineal ortogonal José Manuel Recio-López

#### Referencias

[1] CHAPRA, S. C., CANALE, R. P., Métodos numéricos para ingenieros, McGraw-Hill Interamericana, 2007.

- [2] DE BURGOS, J., Cálculo infinitesimal de una variable, McGraw-Hill Interamericana, 2000.
- [3] DE BURGOS, J., Cálculo infinitesimal de varias variables, McGraw-Hill Interamericana, 2000.
- [4] FAIRES, J. D., BURDEN, R., Métodos numéricos, Paraninfo, 2004.
- [5] MATHEWS, J. H., FINK, K. D., Métodos numéricos con Matlab, Prentice-Hall, 1999.
- [6] RODRÍGUEZ GÓMEZ, F. J., Cálculo y métodos numéricos: Teoría, algoritmos y problemas resueltos, Universidad Pontificia Comillas, 2003.
- [7] SAMARSKI, A. A., Introducción a los métodos numéricos, Editorial Mir Moscú, 1986.

#### Sobre el autor:

*Nombre:* José Manuel Recio-López *Correo electrónico:* josreclop@alum.us.es

Institución: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla.

# Investigación

# Una marca de agua frágil en el dominio de los momentos ortogonales de Krawtchouk

# A fragile watermarking on the domain of Krawtchouk's orthogonal moments

Alicia María Centurión Fajardo, Nancy Céspedes Trujillo, Eduardo Moreno Roque

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 017–028, ISSN 2174-0410 Recepción: 8 Jul'20; Aceptación: 8 Sep'20

#### 01 de abril de 2021

#### Resumen

En esta contribución, proponemos un esquema de marca de agua frágil basada en los momentos ortogonales de Krawtchouk. El algoritmo propuesto inserta la marca de agua generada en los primeros ocho coeficientes de los momentos de Krawtchouk, calculados a partir de la imagen cubierta, con el propósito de garantizar la integridad y autenticidad de la fuente emisora. Además, mediante una clave privada, una clave pública y la función criptográfica Hash - Sha256 se genera una marca de agua frágil que será incrustada en la imagen original. El trabajo experimental sobre la validación del esquema propuesto consiste en el cálculo de la relación señal / ruido pico (PSNR) y en la detección de manipulación de la imagen marcada.

**Palabras Clave:** Autenticidad, Detección de manipulación, Integridad, Marca de agua frágil, Momentos ortogonales de Krawtchouk

#### **Abstract**

In this contribution, we propose a fragile watermarking scheme based on Krawtchouk orthogonal moments. The proposed algorithm inserts the watermarking generated in the first eight coefficients of the Krawtchouk moments, calculated from the covered image, in order to guarantee the integrity and authenticity of the emitter source. Additionally, using a private key, a public key and the Hash-Sha256 cryptographic function, a fragile watermark is generated and will be embedded in the original image. The experimental work on the validation of the proposed scheme consists of calculating the signal-to-noise ratio (PSNR) and detecting manipulation of the watermarked image.

**Keywords:** Authenticity, Tamper detection, Integrity, fragile watermarking, Krawtchouk orthogonal moments

#### 1. Introducción

Hoy en día, la seguridad de la información es una preocupación constante por todos los usuarios de la red, y los piratas informáticos constituyen una amenaza para dicha seguridad, es por ello que para la transmisión de datos a través de los diferentes canales se necesitan técnicas de encriptación fuertes con el objetivo de garantizar la seguridad deseada [16], la popularización del internet y el uso cada vez más habitual de tecnologías digitales ha provocado que compartir información de diferentes medios digitales, ya sean imágenes, música o video, sea más fácil que nunca y se ha trabajado en proteger las imágenes digitales [14].

Lo anterior llega a ser un asunto de vital importancia, existiendo la necesidad de alcanzar, una protección adecuada de la información, evitando su uso, modificación, grabación o destrucción por usuarios no autorizados, o personas mal intencionadas [18, 19].

En los últimos años han surgido distintos métodos para tratar de proporcionar protección a la información digital y salvaguardar los derechos de sus propietarios, entre los cuales se destaca el uso de marcas de agua digitales, estas son un caso particular de una amplia familia de técnicas destinadas a ocultar información, englobada bajo el epígrafe común de esteganografía [10].

La esteganografía constituye un conjunto de técnicas las cuales permiten ocultar o camuflar cualquier tipo de datos dentro de información considerada como válida [8, 18, 19]. Además, la misma permite burlar la vigilancia electrónica en el Internet, o simplemente que terceras personas no tengan acceso a información no autorizada.

La marca de agua digital es un código de identificación que se inserta directamente en el contenido de un archivo multimedia (imagen, audio, video), de manera que sea difícil de apreciar por el sistema perceptual humano, pero fácil de detectar usando un algoritmo dado y una clave, en un ordenador [13].

Existen múltiples clasificaciones de las marcas de agua, dependiendo del tipo de señal sobre la que se aplica, del método de detección, el dominio con el cual se trabaja y la robustez.

Se pueden clasificar como visibles e invisibles. Las marcas de agua invisibles incrustan una señal aleatoria o una señal relacionada con la imagen, su ubicación es secreta, solo las personas autorizadas extraen la marca de agua durante el proceso de autenticación, y son invisibles al ojo humano [15].

En [15 y 21], se clasifican según su reacción ante los ataques en robustas, frágiles y semifrágiles

- > robustas deben resistir todo tipo de ataques, detectándoselas incluso después de producidos los mismos. Sirven para proteger los derechos de autor.
- semifrágiles sobreviven a cierto tipo de alteraciones, como compresión sin pérdidas, pero deben destruirse ante cambios importantes, no reversibles.

> frágiles son aquellas que quedan eliminadas o modificadas y dejan de cumplir su función en caso de ataque. La incapacidad de recuperarlas, revela que se produjo algún cambio y ese es el objetivo buscado. No toleran ninguna transformación, ni siquiera las más comunes en procesamiento de datos. Se utilizan fundamentalmente para asegurar integridad ya que a través de ellas se conoce si el objeto fue alterado.

Las marcas de agua frágiles que son las que nos interesan en este trabajo deben cumplir dos requisitos: imperceptibilidad y capacidad [21]. La imperceptibilidad de la marca tiene como base el comportamiento del sistema perceptual humano. Una marca de agua es imperceptible, si la degradación que causa en los archivos donde se ha insertado es muy difícil de apreciar [13] y la capacidad permite incorporar datos sin inconvenientes [4, 7].

Se han elaborado y son muy utilizados los algoritmos de marcas de agua frágiles, ya que su característica principal es que pueden detectar (idealmente) la alteración de un bit en el medio marcado [14].

La estructura de este documento es la siguiente: en la Sección 2 describimos el esquema de marca de agua propuesto. Finalmente, en la Sección 3, mostramos los resultados experimentales, vinculados al nivel de imperceptibilidad y a la detección de manipulación.

#### 2. Descripción del Algoritmo

#### 2.1 Función criptográfica Hash - Sha256

Una función hash es un proceso que transforma cualquier conjunto arbitrario de datos en una nueva serie de caracteres con una longitud fija, independientemente del tamaño de los datos de entrada. En general, funciona de la siguiente forma [1]:

- ➤ El mensaje de entrada se divide en bloques.
- ➤ Un formula calcula el hash, un valor con un tamaño fijo, para el primer bloque.
- Se calcula el hash del siguiente bloque y suma al resultado anterior.
- > Se realiza el mismo proceso sucesivamente hasta que se recorren todos los bloques.

[3] refiere que se llaman funciones hash criptográficas a las funciones hash que cumplen los requisitos de seguridad para ser empleadas en criptografía. Este tipo de funciones se caracterizan por presentar propiedades adicionales que las hacen resistentes frente a los ataques que intentan romper la seguridad de los sistemas informáticos.

#### 2.2 Momentos ortogonales de Krawtchouk

Los momentos ortogonales definidos en términos de un conjunto de base ortogonal son una de las herramientas más importantes en el análisis de imagen debido a su potencialidad para representar imágenes digitales con la cantidad mínima de redundancia en la información [11]. Además, en los últimos años los polinomios de Krawtchouk han sido ampliamente utilizados en el desarrollo de marcas de agua [5, 17, 20, 22] y en la creación de algoritmos esteganográficos para la protección y seguridad de la información confidencial [17].

Los polinomios discretos de Krawtchouk de orden n,  $K_n^{p,N}(x)$ , con 0 [23], son aquellos polinomios que satisfacen la condición de ortogonalidad [11]

$$\sum_{0 \le x \le N} K_m^{p,N}(x) K_n^{p,N}(x) \omega(x; p, N) = \rho(n; p, N) \delta_{m,n},$$

los cuales están dados explícitamente mediante

$$K_n^{p,N}(x) = {}_2F_1 {\begin{pmatrix} -n, -x \\ -N \end{pmatrix}} p^{-1},$$
 (1)

donde la función peso  $\omega(x; p, N)$  está dada por

$$\omega(x; p, N) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x},$$

mientras que el cuadrado de la norma  $\rho(n; p, N)$  está dado mediante

$$\rho(n; p, N) = (-1)^n \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \frac{n!}{(-N)_n}.$$

Aquí, <sub>r</sub>F<sub>s</sub> denota la serie hiper-geométrica ordinaria definida por

$$_{r}F_{s}$$
  $\begin{pmatrix} a_{1}, \dots, a_{r} \\ b_{1}, \dots, b_{s} \end{pmatrix} x = \sum_{k>0} \frac{(a_{1}, \dots, a_{r})_{k} x^{k}}{(b_{1}, \dots, b_{s})_{k} k!}$ 

donde

$$(a_1,\ldots,a_r)_k \coloneqq \prod_{1\leq i\leq r} (a_i)_{k_i}$$

y  $(\cdot)_n$  denota el símbolo de Pochhammer [9], también se le denomina factorial desviado, definido por

$$(x)_n = \prod_{0 \le j \le n-1} (x+j), \qquad n \ge 1, \qquad (x)_0 = 1.$$

Ciertamente,  $\{a_i\}_{i=1}^r$  y  $\{b_j\}_{j=1}^s$  son números complejos que cumplen la condición  $b_j \neq -n$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  para j=1,2,...,s.

Además, estos polinomios satisfacen la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden (ecuación de tipo hiper–geométrica)

$$(1-p)x \triangle \nabla K_n^{p,N}(x) + \left(N_p - x\right) \Delta K_n^{p,N}(x) + n K_n^{p,N}(x) = 0,$$

así como la relación de recurrencia de tres términos

 $-xK_n^{p,N}(x)=p(N-n)K_{n+1}^{p,N}(x)-[p(N-p)+n(1-p)]K_n^{p,N}(x)+n(1-p)K_{n-1}^{p,N}(x), \quad n\geq 1,$  con las condiciones iniciales  $K_0^{p,N}(x)=1$  y  $K_1^{p,N}(x)=(Np-x)(Np)^{-1}$ . Este resultado es usado para calcular los polinomios de Krawtchouk de orden superior. Aquí,  $\Delta$  y  $\nabla$  denotan los

operadores en diferencias progresivas y regresivas definidos por  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$  y  $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$ , respectivamente.

Según algunos autores [6, 24] el cálculo de los polinomios ortogonales de Krawtchouk usando (1) conduce a fluctuaciones numéricas y por tanto se hace necesario usar una versión más estable de estos, los así llamados polinomios normalizados de Krawtchouk, dados mediante,

$$\overline{K}_n^{p,N}(x) = K_n^{p,N}(x) \sqrt{\frac{\omega(x;p,N)}{\rho(n;p,N)}},$$

los cuales satisfacen la siguiente relación de recurrencia de tres términos [12]

$$\alpha_n(Np - 2np + n - x)\overline{K}_n^{p,N}(x) = p(n - N)\overline{K}_{n+1}^{p,N}(x) + \beta_n n(1 - p)\overline{K}_{n-1}^{p,N}(x), \quad n \ge 1,$$

con las condiciones iniciales

$$\overline{K}_0^{p,N}(x) = \sqrt{\omega(x; p, N)p^{-1}},$$

y

$$\overline{K}_1^{p,N}(x) = (Np - x)(Np)^{-1} \sqrt{\omega(x; p, N)(1-p)(Np)^{-1}}$$

donde

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{(1-p)(n+1)}{p(N-n)}},$$

y

$$\beta_n = \sqrt{\frac{(1-p)^2(n+1)n}{p^2(N-n)_2}}.$$

Los momentos directos de Krawtchouk de orden (n + m) en términos de los polinomios normalizados de Krawtchouk para una imagen con función de intensidad, f(x, y), están definidos como sigue:

$$Q_{nm} = \sum_{0 \le x \le N-1} \sum_{0 \le y \le N-1} \overline{K}_n^{p,N-1}(x) \, \overline{K}_m^{p,N-1}(y) f(x,y), \quad 0 \le m, n \le N-1,$$

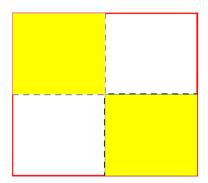
y los inversos mediante,

$$f(x,y) = \sum_{0 \le x \le N-1} \sum_{0 \le y \le N-1} Q_{nm} \overline{K}_n^{p,N-1}(x) \, \overline{K}_m^{p,N-1}(y), \quad 0 \le x,y \le N-1.$$

#### 2.3 Algoritmo de inserción de la marca de agua frágil

A continuación se describirá detalladamente el esquema de inserción de la marca de agua frágil. Aquí se asume, que tanto el emisor como el receptor poseen el mismo sistema de claves privadas.

- 1.- El emisor solicita al receptor una clave pública de 128 bits.
- 2.- El emisor aplica la función Hash-Sha256 tanto a la clave pública como a la privada para generar de esta manera las secuencias binarias Key1Sha256 y Key2Sha256, respectivamente.
- 3.- Dividir la imagen en bloques no solapados de  $32 \times 32$  bytes.
- 4.- Dividir cada bloque de  $32 \times 32$  bytes en 4 bloques de  $16 \times 16$  bytes.



- 5.- Crear una copia de cada bloque descrito en el paso 4.
- 6.- Sustituir los bloques de 16 × 16 bytes de la copia descrita en el paso 5, representados mediante el color amarillo, por Key1Sha256 y Key2Sha256, respectivamente.
- 7.- Aplicar la función Hash-Sha256 al bloque resultante del paso anterior para generar la secuencia binaria blockSha256.
- 8.- Crear la marca de agua frágil WaterMark = Unión de los primeros y últimos 32 bits de la secuencia binaria blockSha256.
- 9.- Dividir los bloques de  $16 \times 16$  bytes, representados por el color amarillo, en 8 bloques de  $8 \times 8$  bytes.
- 10.- Aplicar los momentos directos de Krawtchouk a cada uno de los bloques de  $8 \times 8$  bytes.
- 11.- Insertar la WaterMark en los bits menos significativos de los primeros 8 coeficientes de los momentos directos de Krawtchouk.
- 12.- Aplicar los momentos inversos de Krawtchouk a cada uno de los bloques de  $8 \times 8$  bytes resultantes del paso 10, para así conseguir la imagen marcada.

#### 2.4 Algoritmo de autenticidad y detección de manipulación

1.- El receptor aplica la función Hash-Sha256 tanto a la clave pública como a la privada para generar las secuencias binarias Key1Sha256 y Key2Sha256, respectivamente.

- 2.- Dividir la imagen en bloques no solapados de  $32 \times 32$  bytes.
- 3.- Dividir cada bloque de  $32 \times 32$  bytes en 4 bloques de  $16 \times 16$  bytes.
- 4.- Crear una copia de cada bloque descrito en el paso 4.
- 5.- Sustituir los bloques de 16 × 16 bytes de la copia descrita en el paso 5, representados mediante el color amarillo, por Key1Sha256 y Key2Sha256, respectivamente.
- 6.- Aplicar la función Hash-Sha256 al bloque resultante del paso anterior para generar la secuencia binaria blockSha256.
- 7.- Crear la marca de agua frágil WaterMark = Unión de los primeros y últimos 32 bits de la secuencia binaria blockSha256.
- 8.- Dividir los bloques de  $16 \times 16$  bytes, representados por el color amarillo, en 8 bloques de  $8 \times 8$  bytes.
- 9.- Aplicar los momentos directos de Krawtchouk a cada uno de los bloques de 8 × 8 bytes.
- 10.- Extraer los bits menos significativos de los primeros 8 coeficientes de los momentos directos de Krawtchouk y representar la secuencia binaria resultante mediante extractedLSB.
- 11.- Comparar la secuencia binaria extractedLSB con WaterMark,
  - ✓ Si coinciden, la fuente emisora de la imagen marcada es auténtica.
  - ✓ En caso contrario, la fuente emisora de la imagen marcada no es auténtica y se señalan los bloques modificados.

### 3. Análisis experimental

#### 3.1 Prueba de imperceptibilidad

En esta sección se presentan los resultados vinculados a nivel de imperceptibilidad y a la detección de manipulación de la imagen marcada.

Una medida para determinar el nivel de imperceptibilidad es la conocida PSNR (Relación Señal a Ruido Pico). El PSNR está dado en unidades llamadas decibelios (dB) y se escribe de la siguiente forma

$$PSNR=10 \log_{10} \left( \frac{256^2}{MSE} \right)$$
,

donde MSE está dado por el error cuadrático medio

$$MSE = \frac{1}{3mn} \sum_{1 \le i \le m} \sum_{1 \le j \le n} \sum_{1 \le k \le 3} |I(i, j, k) - E(i, j, k)|^2,$$

siendo *I* la imagen original y *E* el esteganograma.

Para el primer experimento se calcularon los valores de PSNR para las imágenes de la base de datos [2], consiguiéndose valores que se encuentran alrededor de  $51.71557353931331 \approx 51.72$ 

dB, lo cual indica que no existen diferencias significativas entre las imágenes marcadas y las imágenes originales, alcanzándose así un elevado nivel de imperceptibilidad.

### 3.2 Prueba de detección de manipulación



Figura 1. A la izquierda se muestran las imágenes originales y a la derecha las marcadas.

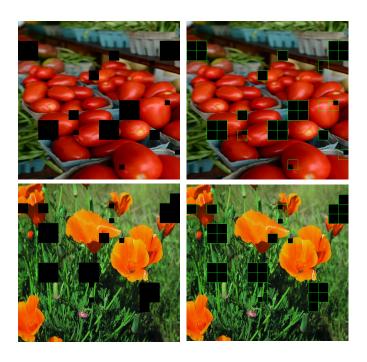


Figura 2. Aplicación y detección del ruido cropping.



Figura 3. Aplicación y detección del ruido gaussiano.

En la Figura 1 se muestran dos imágenes originales tomadas de la base de datos [2] y sus correspondientes imágenes marcadas; mientras que en las Figuras 2 y 3 se aprecia la aplicación de los ruidos cropping y gaussiano, así como su detección por parte del algoritmo propuesto.

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un esquema de marca de agua frágil que utiliza una clave privada y una clave pública de 128 bits, así como los momentos ortogonales de Krawtchouk para generar la imagen marcada. De acuerdo con los análisis de los valores de PSNR se mostró que no existen anomalías detectables a simple vista, entre la imagen original y la marcada, alcanzándose un elevado nivel de imperceptibilidad. Además el algoritmo propuesto es capaz de detectar cualquier tipo de manipulación a la imagen marcada, clasificando la fuente emisora en auténtica o no.

#### Referencias

- AEPD. Introducción al Hash como técnica de seudonimización de datos personales, European Data Protection Supervisor; Octubre 2019.
- [2] ALJARRAH. RGB-BMP Steganalysis Dataset. Mendeley Data, v1, http://dx.doi.org/10.17632/ sp4g8h7v8k.1, 2018
- [3] ANDRADE, A.L. Características y aplicaciones de las funciones resumen criptográficas en la gestión DE contraseñas. Universidad de Alicante, Tesis de Grado Científico, Doctor en

- Ciencias Computacionales, pp. 118, Instituto Universitario de Investigación en Informática, Universidad de Alicante, 2019.
- [4] ARTZ, D. Digital Steganography: Hiding Data within Data, IEEE Internet Computing Journal, June 2001.
- [5] AVILA, E., SORIA, A. Watermarking Based on Krawtchouk Moments for Handwritten, Progress in Artificial Intelligence and Pattern Recognition, pp.122-129, 2018. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-01132-1 14.
- [6] BARMAK, S. A. Y JAN, F. Fast computation of Krawtchouk moments, Inform. Sci, 288, pp. 73-86, 2014
- [7] BISWAJITA DATTA, UPASANA MUKHERJEE, KUMAR BANDYOPADHYAY, Samir. *LSB Layer Independent Robust Steganography using Binary Addition*, Procedia Computer Science, 85, pp. 425 432, 2016.
- [8] BISWASA, D., BISWASB, S., MAJUMDERA, A., SARKARA, D., SINHAA, D., CHOWDHURYA, A., DASA, S. K. *Digital Image Steganography using Dithering Technique*, Procedia Technology, 4, pp. 251–255, 2012.
- [9] CHONG, C. Y RAVEENDRAN, P. On the computational aspects of Zernike moments. Image and Vision Computing, 25, pp. 967-980, 2007.
- [10] ESPAÑA BOQUERA, María Carmen. *Aplicaciones y Servicios de Comunicaciones*, 2003, Disponible en: http://www.google libros/. [Consulta: 6 de junio de 2020].
- [11] GUIBERT, Y., CENTURIÓN, A.M., SORIA, A. Los momentos de krawtchouk y tchebichef y sus aplicaciones en el procesamiento de imágenes digitales, ROCA, Revista científico- educacional de la provincia Granma, 14(2), pp. 128-136, 2018.
- [12] HU, B. Y LIAO, S. *Local Feature Extraction Property of Krawtchouk Moment*, Lecture Notes on Software Engineering, 1, pp. 356-359, 2013.
- [13] ORÚE LÓPEZ, Amalia Beatriz. *Marcas de agua en el mundo real*, 2002. Disponible en: https://digital.csic.es/bitstream/10261/8864/1/Marcas\_de\_agua\_en\_el\_mundo\_real.pdf, [Consulta: 6 de junio de 2020].
- [14] PÉREZ, Valdemar. *Marca de Agua asimétrica para Imágenes con Propiedades de Traitor Tracing*, Tesis de Grado Científico, Master en Ciencias Computacionales, pp. 97, INAOE, México, 2015.
- [15] RAMÍREZ GUTIÉRREZ, Kelsey Alejandra. Esquemas de Seguridad para Imágenes Digitales, Cátedra CONACyT- INAOE, 2018, https://ccc.inaoep.mx/~kramirez/Esquemas%20de% 20Seguridad %20para %20 Imagenes%20Digitales.pdf/.
- [16] SENA REDDY, M.I., SIVA KUMAR, A.P. Secured Data Transmission Using Wavelet Based Steganography and Cryptography by Using AES Algorithm, Procedia Computer Science, 85, pp. 62 69, 2016.
- [17] SORIA, A., BERRES, S., AVILA, E. *Hiding data inside images using orthogonal moments*, arXiv:1910.07383v1 [cs.MM] 16 Oct 2019, https://arxiv.org/pdf/1910.07383.pdf.
- [18] SORIA, A Y BERRES, S. A secure steganographic algorithm based on frequency domain for the transmission of hidden information, Security and Communication Networks, 2017.
- [19] SORIA, A., MECÍAS, R., PÉREZ, A. A. & RODRÍGUEZ, D. *Algoritmo esteganográfico pseudo-asimétrico*, Lecturas Matemáticas, 35 (2), pp. 183–196, 2014.
- [20] TENGFEI, Y., JIANFENG, M., YINBIN, M., XIMENG, L., XUAN, W., BIN, X., QIAN, M. *Privacy-Preserving Krawtchouk Moment feature extraction over encrypted image data*, Information Sciences, 536, pp. 244-262, 2020, https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.05.093.

- [21] VARGAS, Laura M., VERA, Elizabeth, DI GIONANTONIO, Alejandra. *Marcas de agua: una contribución a la seguridad de archivos digitales*, Revista Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 3(1), pp. 49-54, 2016.
- [22] VENKATARAMANA, A., ANANTH, P. *Image Watermarking Using Krawtchouk Moments*, IEEE, 2007, DOI: 10.1109/ICCTA.2007.72.
- [23] WANG, G. B. Y WANG, S. G. Recursive computation of Tchebichef moment and its inverse transform, Pattern Recognition, 39, pp. 47-56, 2007.
- [24] YAP, P., PARAMESRAN, R. Y ONG, S. H. *Image Analysis by Krawtchouk Moments*, IEEE Trans, Image Process, 12, pp. 1367-1377, 2003.

#### Sobre el/los autor/es:

Nombre: Alicia María Centurión Fajardo Correo Electrónico: <u>acenturionf@udg.co.cu</u> Institución: Universidad de Granma, Cuba.

Nombre: Nancy Céspedes Trujillo

Correo Electrónico: <u>nancyct@ult.edu.co.cu</u> Institución: Universidad de Las Tunas, Cuba.

Nombre: Eduardo Moreno Roque

Correo Electrónico: <u>emorenor@udg.co.cu</u> *Institución:* Universidad de Granma, Cuba.

### **Experiencias Docentes**

# Modelización matemática con GeoGebra: colocación de circunferencias y esferas

# Mathematical modelling with GeoGebra: placing circumferences and spheres

Ricardo José García Bonaviña, Almudena Lloréns Payá, Carmen Romero-García y Ana María Zarco García

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 029–043, ISSN 2174-0410 Recepción: 4 Sep'20; Aceptación: 15 Nov'20

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

En este trabajo, partiendo del marco teórico existente, entre la normativa curricular y la investigación sobre metodología para la educación matemática, presentamos una experiencia con estudiantes de Enseñanza Secundaria a los que planteamos un problema compuesto de varios subproblemas que requieren de una modelización matemática y exponemos una propuesta de evaluación de este tipo de actividades con el fin de tener en cuenta todos los aspectos que intervienen en este proceso. El problema consiste en determinar el número de bolas que puede colocarse en un ortoedro e indagar en las distintas posibilidades según los huecos que quedan entre las bolas. En una primera fase, se hace reflexionar a los estudiantes sobre cómo resolverían el problema si fuese en dimensión dos y, en una segunda fase, se lleva el problema a dimensión tres. El profesorado guía en la resolución y explica las herramientas que ofrece GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020). Finalmente, se propone la guía para la evaluación individual y grupal incluyendo dos instrumentos: rúbrica y diana. Como conclusión se obtiene que estas actividades pueden servir para trabajar la competencia matemática junto con el resto de las competencias clave de forma significativa.

**Palabras Clave:** Enseñanza Secundaria, GeoGebra, Modelización Matemática, Esfera, Circunferencia.

#### Abstract

In this work, starting from the existing theoretical framework, between curricular regulations and researching on methodology for mathematics education, we present an experience with Secondary Education students to whom we propose a problem composed of several subproblems that require mathematical modelling and we expose an evaluation proposal for this type of activity in order to take into account all the involved aspects in this process. The problem consists of determining the number of balls that can be placed in an

orthohedron and investigating the different possibilities according to the gaps left between the balls. In a first step, students are made to reflect on how they would solve the problem if it were in dimension two, and in a second step, the problem is taken to dimension three. Teachers lead them into the resolution and explain tools offered by GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020). Finally, the guide for individual and group evaluations are proposed, including two instruments: rubric and dartboard. As a conclusion it is obtained that these activities can be useful to work mathematical skills along with the rest of the key competencies meaningfully.

**Keywords:** Secondary Education, GeoGebra, Mathematical Modelling, Sphere, Circumference

#### 1. Introducción

La modelización matemática ha inspirado bastante literatura en el contexto de la Didáctica de las matemáticas en todos los niveles de enseñanza. Recientemente, diversos autores han realizado diferentes aportaciones sobre la aplicación de este proceso a la Enseñanza Secundaria; (véase Albarracín, 2017; Borromeo-Ferri, 2018; Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi y Gorgorió, 2017; Gallart, 2016 y las referencias incluidas en ellas). Podemos considerar la modelización matemática como un proceso o secuencia de acciones destinadas a la consecución de un fin concreto que requiere un cambio en el lenguaje que implica una traducción a expresiones y objetos matemáticos y que pone en marcha destrezas necesarias para resolver un problema contextualizado. En los niveles de enseñanza preuniversitarios españoles, la modelización está integrada en la definición de competencia matemática (Orden ECD/2015) y transversalmente en el resto de competencias y por ello, es importante diseñar actividades para que los estudiantes puedan trabajarla y entrenarla. La realización de estas tareas, desde el punto de vista de la normativa vigente en España, sirven para desarrollar específicamente la parte del del Real Decreto 1105/2014 que se refiere a procesos, métodos y actitudes matemáticas. Así, la realización de tareas de modelización, contribuyen a este fin porque ayudan a vehicular hacia un conocimiento concreto, como una forma de potenciar la competencia en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Además de esta normativa, una razón para justificar la realización de estas tareas es que se pueden plantear problemas realistas en consonancia con los intereses de los estudiantes y con la disciplina de las matemáticas y, quizás, de esta forma los docentes consigan motivar a los estudiantes para que se involucren en las actividades. Alsina (2007) propone diez ejemplos de problemas de modelización: el problema de la lata de cola, goles de penalti, localización óptima, un método de escaños políticos por sucesión de divisores, relaciones lineales y cuerpo humano, elegir un modelo de coche, ISBN, para los arquitectos "la tierra es plana", longitudes y latitudes, y aspirinas contra infartos.

Otro tipo de tareas de modelización que pueden plantearse son las relativas a problemas de Fermi que consisten en la estimación de grandes cantidades (García Navarro, 2013 y Albarracín, 2017). Ya se han realizado experiencias con estudiantes de Secundaria, por ejemplo, Bergman Ärlebäck y Bergsten (2010) describen una experiencia en la que se plantea a los estudiantes dos preguntas sobre el edificio *Empire State*. Concretamente, las preguntas eran:

¿Cuánto tiempo le lleva al ascensor turístico llegar al observatorio del último piso? ¿Si uno decide subir por las escaleras, cuánto tarda? (p. 602)

Al plantear estas cuestiones, lo primero que ocurre es que los estudiantes quedan invadidos por la emoción de la sorpresa, y también, la frustración por no saber datos concretos sobre el problema. Una característica destacable de estos problemas es que es necesario aplicar conocimientos sobre realidades que no pertenecen a la disciplina matemática propiamente, es decir, requiere de un conocimiento extra-matemático (experiencia). Por ejemplo, en el problema del *Empire State*, los estudiantes puede que no sepan qué es eso y aunque lo sepan, puede que no conozcan, de forma exacta, las plantas que tiene.

Más aún, con estos problemas se pueden trabajar los valores de nuestra sociedad, incluyendo temas transversales. Blum y Borromeo-Ferri (2009) indican que la modelización matemática sirve para ayudar a los estudiantes a comprender mejor el mundo, apoyar el aprendizaje matemático, contribuir al desarrollo de diversas competencias matemáticas y actitudes correctas y contribuir a una imagen adecuada de las matemáticas.

Así pues, la única dificultad que encontramos es la falta de orientación en su implantación y de material práctico para el aula, aunque ya existen algunas iniciativas de manuales en este sentido como se recoge en el trabajo de Gallart, Ferrando y García-Raffi (2019). Para realizar estos problemas en clase, es conveniente disponer de un dossier de trabajo para los estudiantes, una serie de reglas que proporcionen información a los estudiantes sobre lo que se espera de ellos, una rúbrica de evaluación y una diana para la autoevaluación.

Para la evaluación de la actividad se han seleccionado como instrumentos de evaluación la rúbrica y la diana de autoevaluación por considerarse instrumentos que permiten realizar una evaluación integral y formativa centrada en el aprendizaje, valorando el desempeño en la realización del proceso y el resultado final de una actividad. A través de los indicadores de evaluación y de la escala de valoración establecida para cada uno de ellos, ofrecen al estudiante los aspectos esenciales de la tarea que serán objeto de valoración por parte del profesorado, contribuyen a clarificarle los requerimientos de una tarea que va a ser evaluada y a que reflexione sobre su propia actividad a partir de los criterios y valoraciones que se especifican (Herrán Álvarez, Heras Bernardirno y Pérez-Pueyo, 2019; Valverde y Cuidad, 2014).

También, se requiere un cambio de rol del profesorado que será observador, gestor de recursos, asesor, moderador y experto (Gallart, 2016). En el proceso de modelización se pueden distinguir una serie de fases según el ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007): 1, Comprensión del problema; 2, Simplificación/Estructuración; 3, Matematización; 4, Trabajo Matemático; 5, Interpretación; 6, Validación; y 7, Exposición. Estas fases en sí y no el orden se deben tener en cuenta en la rúbrica de evaluación, puesto que es conocido que este proceso no es secuencial.

### 2. Descripción de la experiencia

La experiencia consistió en plantear un problema en el que los estudiantes han de aplicar conceptos geométricos, así como también estrategias de representación en GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020). Se planteó el mismo problema a diferentes cursos: 1º,

3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (alumnado de 12 a 16 años) y 2º de Graduado en Educación Secundaria para adultos (mayores de 16 años) del sistema educativo español, una vez que ya se habían tratado las unidades didácticas correspondientes de geometría.

Se crearon grupos de trabajo cooperativos, asignando roles y mostrándoles la rúbrica que se representa en la Tabla 1. En la primera sesión se trabajó en el aula habitual. Se les dejó una semana para que pensasen en casa las posibles soluciones y a la semana siguiente se les llevó al aula de informática para elaborar los posibles diseños, utilizando GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020) en dos sesiones seguidas. El informe final lo realizaron mediante un documento compartido.





Figura 1. Estudiantes durante la primera sesión (izquierda: estudiantes de 1º de ESO, derecha: estudiantes adultos).

#### 2.1 Problema

Este problema incluye conceptos y cálculos de volumen, área, unidades de medida y densidad. Conlleva la realización de una práctica con GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020), en la que se aplican los conocimientos curriculares adquiridos sobre: ecuación de una recta en un plano, representación de puntos, paralelismo, perpendicularidad, ecuación de una circunferencia en un plano y ecuación de una esfera en el espacio. El problema consiste en estimar el número de bolas que caben en un tetrabrik. A los estudiantes se les entregó la ficha de la Figura 2.

#### APLICANDO LO APRENDIDO

¿Cuántas bolas caben en un tetrabrik?



## Guía para la resolución del problema:

- 1 ¿Qué dimensiones tiene un tetrabrik?
- 2 Realiza una estimación de las bolas que caben. ¿Cómo? Comienza con el cálculo del volumen del tetrabrik.
- 3 Calcula el volumen de una bola.
- 4 ¿Por qué se llama tetrabrik y no ortobrik?
- 5 Entre las bolas siempre habrá huecos, pero si no tenemos en cuenta estos huecos, ¿cuál es el número máximo de bolas que cabrían?
- 6 Piensa cómo colocar las bolas para minimizar el volumen correspondiente a los huecos, es decir, para maximizar la cantidad de bolas.

Figura 2. Ficha de trabajo para el alumno.

# 2.2 Observaciones sobre la guía

- 1. ¿Qué dimensiones tiene un tetrabrik? Para unificar la solución del problema se les dice que tomen un tetrabrik de medidas 6,4 cm × 9,7 cm × 16,8 cm, que corresponden con las medidas reales de varias marcas.
- **2.** El volumen del tetrabrik es 1042,944 *cm*<sup>3</sup>. En este apartado se indicará a los estudiantes que piensen en un radio razonable para las bolas en relación con el tamaño del tetrabrik y cómodo para los cálculos. Por ejemplo, podemos sugerir que consideren como dato el radio de las bolas, fijándolo en 0,5 *cm* para que hagan las primeras estimaciones. En un *cm*<sup>3</sup> cabe una bola sin intersección con otra bola, es decir, podríamos colocar 1042. Esta solución no tiene en cuenta la forma del tetrabrik porque como observamos en las Figuras 3, 4 y 5, existe un espacio sobrante donde no podemos colocar ninguna bola sin romperla previamente.
- 3.  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ , para r = 0.5 cm tenemos:  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0.5^3$  cm<sup>3</sup>  $\approx 0.52$  cm<sup>3</sup>.
- **4.** Tetra Pak (2020) es la compañía fundada por el Dr. Ruben Rausing en 1943 a la que se debe el invento del tetrabrik. Surgió a partir de un modelo anterior que tenía forma de tetraedro.
- 5. Dividiendo el volumen total entre el volumen de una bola obtenemos 1991,88, es decir, como máximo se podrían poner 1991 bolas con la hipótesis de poder rellenar todos los huecos.
- **6.** Suponiendo que ya hemos enseñado a los estudiantes el funcionamiento básico de GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020), les podemos pedir, incluso, que dibujen lo que correspondería a la proyección de un piso de bolas sobre el plano z=0. Así, en la Figura 3, tenemos una disposición posible que es la más sencilla, pero que deja mucho hueco. En este piso hemos colocado 54 bolas. Si ponemos plantas de bolas como esta,

podemos completar un total de 16 plantas. Así pues, tenemos colocadas  $54 \times 16 = 864$  bolas.

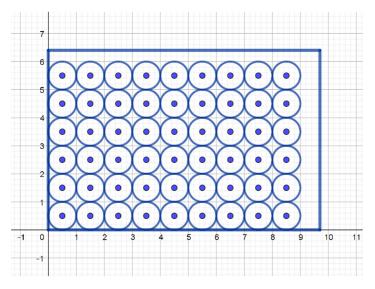


Figura 3. Colocación 1 de las bolas sobre la base.

Otra disposición puede ser la de la Figura 4, donde colocamos 61 bolas y entre las bolas quedan huecos más pequeños. Si ponemos 16 plantas como esta, colocaríamos  $61 \times 16 = 976$ .

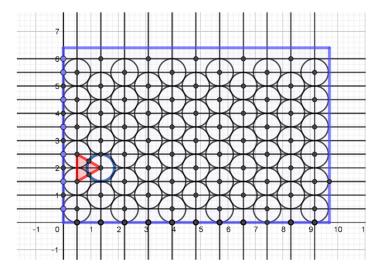


Figura 4. Colocación 2 de las bolas sobre la base.

En la Figura 5, tenemos una variante en la que en una planta colocamos 63 bolas.

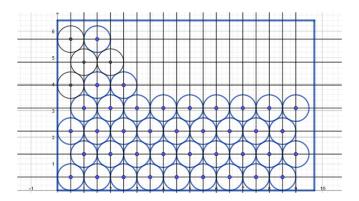


Figura 5. Colocación 3 de las bolas sobre la base.

Ahora podemos colocar los pisos como antes utilizando  $63 \times 16 = 1008$  bolas o situando bolas encima de la primera fila con una bola en la esquina, intentando subir menos en altura como indica la Figura 6.

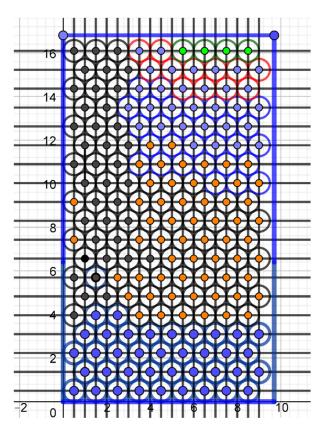


Figura 6. Colocación de las bolas verticalmente (vista lateral).

Con esta hipótesis tendríamos colocadas 63×19=1197 bolas.

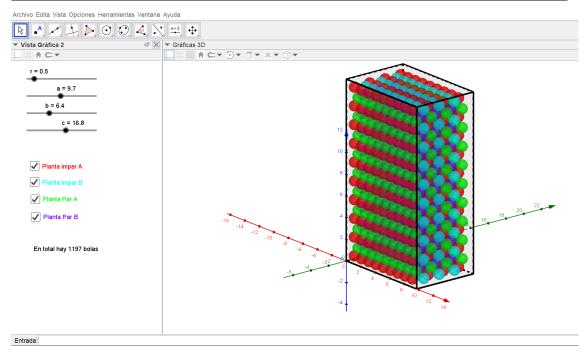


Figura 7. Colocación de las bolas en dimensión tres con el tercer modelo.

Para guiar la actividad se dividió la investigación en dos fases: estudio de la primera planta y deducción del resto de plantas. La imagen del tetrabrik en la ficha sugiere que se tome como primera planta la cara de menor superficie, pero también podría estudiarse el problema poniendo como base las otras caras. De hecho, el uso de deslizadores para las dimensiones del tetrabrik, permite visualizarlo con la cara de mayor superficie como base y con las bolas en el interior. En este caso se consigue colocar un número de bolas mayor. Se puede aprovechar este ejemplo para comentar la utilidad de mirar un mismo objeto geométrico desde distintos puntos de vista.

Para el estudio de la primera planta, previamente, trabajaron manipulando una caja y canicas para hacerse una idea de las disposiciones que pueden tener las bolas en la primera planta. En segundo lugar, hicieron un dibujo esquemático de la disposición decidida de las bolas (sería una proyección de las bolas en la base). Se les indicó que debía ser "como una foto desde arriba". El tercer paso fue el cálculo de las posiciones de los centros de cada bola y de las bolas que realmente cabían en la primera planta del tetrabrik. Por último, se representó con GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020) el rectángulo y las circunferencias, alcanzando distintos niveles según los conocimientos del alumnado.

Las instrucciones utilizadas en la representación son:

- Comando *Poligonal* o comando *Segmentos* para el dibujo del rectángulo y para cada circunferencia por separado, el comando *Circunferencia: centro y radio.*
- Utilización del comando *Secuencia* (junto con el comando *Circunferencia: centro y radio*) para dibujar automáticamente las circunferencias (haciendo variables las coordenadas x e y del centro). Es conveniente hacer en dos partes (por filas o columnas) algunos de los modelos a representar.

- Uso de variables (o *deslizadores*) para poder generalizar el estudio a otras dimensiones del recipiente o de las bolas.
- En este último caso es interesante conseguir que el programa cuente automáticamente el número de bolas que caben (con el comando *CuentaSi* aplicado a la lista que contiene las circunferencias). Para los modelos representados en dos partes, se pueden juntar las listas en una lista única (con el comando *Encadena*) para poder contar mejor.

Con estas indicaciones se obtiene la superposición de los tres modelos de base que vemos en la Figura 8.

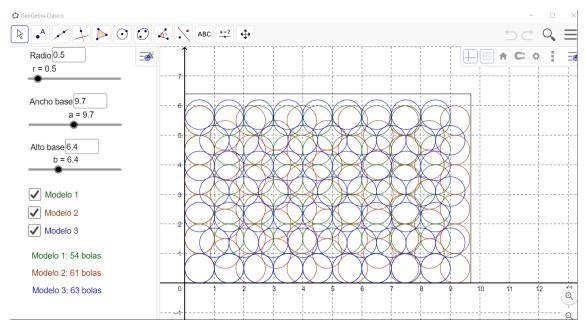


Figura 8. Superposición de los tres modelos de base.

El proceso para el resto de las plantas es análogo: manipulación de canicas, dibujo esquemático, cálculos de centros y número de bolas y representación en GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020) (en la vista Gráfica -proyecciones- o en la vista Gráfica 3D).

Sea cual sea el nivel alcanzado con el uso de GeoGebra (International Geogebra Institute, 2020), no se debe olvidar, el cuidado en la presentación: colores (ayudan a visualizar la situación de los objetos), cuadrículas, ejes, textos explicativos, presentación selectiva de modelos o partes de un modelo (con el comando *Valor* para trabajar con valores lógicos y el comando *CasillaControl*), etc.

Con respecto a la utilidad práctica, que es siempre una inquietud de los estudiantes, y con el fin de que se valore la importancia del problema trabajado, la dificultad de su resolución y la constancia del quehacer matemático, se puede comentar que estas cuestiones están en conexión con los problemas de empaquetamiento de círculos y esferas relacionados con el distanciamiento social, las estructuras químicas o el envío de mensajes y la detección y corrección de errores. Además, se puede animar a los estudiantes para que busquen información sobre el concepto de densidad del empaquetamiento y su tratamiento por

diferentes matemáticos desde Lagrange y Gauss hasta los resultados recientes en otras dimensiones en torno a la historia de la conjetura de Kepler (Miana Sanz y Romero Álvarez, 2010), formulada por Johannes Kepler en el siglo XVII sobre la mejor densidad de empaquetamiento de esferas en dimensión 3 y demostrada por Thomas Hales en 1998 (Hales, 2005). Como ampliación podría estudiarse la colocación según la disposición de las esferas en la conjetura de Kepler, es decir, como en la Figura 9. Para ello se pedirá a los estudiantes que comiencen dibujando esferas de radio r=0,5 cm según el modelo 1. En este caso, en la segunda planta podríamos colocar solamente 45 bolas. En el problema planteado queremos aprovechar todo el espacio del recipiente, además de tener en cuenta que las bolas se dispongan de forma que la densidad en el sentido de la conjetura de Kepler sea la mayor posible.

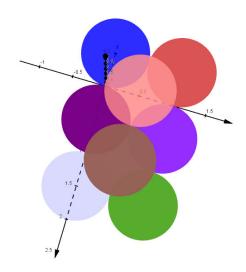


Figura 9. Colocación de las bolas según la disposición de la conjetura de Kepler (Vista en planta).

Por supuesto, existen otras posibilidades que los estudiantes podrían presentar y no debemos rechazar sin valorar, de ahí la importancia de realizar una evaluación por rúbrica, especialmente adecuada para problemas con solución abierta.

## 3. Evaluación

A la primera fase llegaron todos los grupos y la segunda fase se desarrolló con los estudiantes de  $4^{\circ}$  de Educación Secundaria Obligatoria (15 y 16 años). Todos dieron al menos la solución de la colocación de bolas una encima de otra y guiados, la mayoría aportaron también la segunda opción explicada. Para valorar la actividad realizada se ha diseñado una rúbrica que se presenta en la Tabla 1. Teniendo en cuenta las conclusiones de Valverde y Cuidad (2014) y Herrán Álvarez et al. (2019) y en base a las fases del ciclo de modelización matemática de Blum y Lei $\beta$  (2007) se han establecido una serie de indicadores. Además, se han incorporado algunos indicadores que hacen referencia a la presentación del trabajo realizado, la autonomía y el trabajo del grupo. El problema se valora en una escala de 0 a 10 puntos.

Tabla 1. Rúbrica de evaluación para un problema de modelización.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Compressión	Reconoce los	Reconoce los		
Comprensión del enunciado			Reconoce la	Sólo reconoce
der enunciado	conceptos	conceptos	mayoría de los	algunos de los
1 punto	matemáticos y	matemáticos y	conceptos y	conceptos y
1 punto	variables	variables, pero no	variables	variables
	implicadas en el	la relación entre	0.5 nuntos	0.25 nuntos
	problema y la	ellos	0,5 puntos	0,25 puntos
	relación que existe	0.75 muntos		
	entre ellos	0,75 puntos		
	1 punto			
Simplificación/	Simplifica el	Simplifica el	A veces simplifica	No utiliza la
Estructuración	planteamiento del	planteamiento del	el planteamiento	estrategia de
	problema	problema. No	del problema	dividir el
2 puntos	aplicando la	reflexiona sobre el	der problema	problema en
•	estrategia	proceso seguido	1 punto	subproblemas
	heurística de	1,5 puntos	1	sapproblemas
	dividir el	1,5 pulitos		0,5 puntos
				, r
	problema en			
	subproblemas y			
	reflexiona sobre el			
	proceso seguido			
	2 puntos			
Resolución	Resuelve	Resuelve el	El trabajo debe	El trabajo debe
	correctamente el	problema, pero el	revisarse, el	revisarse, el
1 punto	problema	modelo no puede	proceso de	proceso de
	planteado y el	aplicarse a	resolución	resolución
	modelo propuesto	situaciones	contiene algunos	contiene muchos
	puede aplicarse a	similares	errores	errores.
	situaciones			
	similares	0,75 puntos	0,5 puntos	0,25 puntos
	1 punto			
Validación del	Reflexiona sobre	Analiza si los	Presenta cierta	No analiza los
resultado	los resultados	resultados son o	evidencia del	resultados
	obtenidos	no correctos, pero	análisis de los	obtenidos y no
1 punto	indicando si son o	sin argumentarlo	resultados	indica si hay
	no correctos y		,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,	incongruencias er
	argumentándolo	0,75 puntos	0,5 puntos	las soluciones
	1 punto	•	•	0,25 puntos
	r			0,20 puillos

Claridad y limpieza del informe 2 puntos	El informe es claro y conciso. Uso adecuado del lenguaje matemático y representaciones que facilitan su comprensión. Presenta todos los puntos requeridos y añade algunos otros relevantes. No presenta faltas	El informe es claro y conciso. Uso aceptable del lenguaje matemático y representaciones. Presenta todos los puntos requeridos. No presenta faltas de ortografía y la sintaxis es correcta	El informe hace un uso pobre del lenguaje matemático con pocas representaciones. Contiene la mayoría de los puntos requeridos. La ortografía y sintaxis son correctas	Apenas contesta a los puntos requeridos. Hay faltas de ortografía y la sintaxis no es correcta 0,5 puntos
	de ortografía y la sintaxis es correcta	•	1 punto	
	2 puntos			
Autonomía	Resuelven el	Resuelven el	Resuelven el	Deben ser
1 puntos	problema sin solicitar la ayuda del profesorado	problema con la ayuda del profesorado en momentos	problema recurriendo frecuentemente a la ayuda del	guiados continuamente por el profesorado
	1 punto	puntuales	profesorado	0,25 puntos
		0,75 puntos	0,5 puntos	
Colaboración	Todos los miembros del	Todos los miembros del	Todos los miembros del	Solo algunos miembros del
2 puntos	grupo participan en el proceso de resolución ayudándose y	grupo participan el proceso de resolución, aunque a veces las	grupo colaboran en la realización de la actividad, aunque tienen	grupo colaboran en la realización de la actividad
	tomando decisiones consensuadas	decisiones no son consensuadas	dificultades para entenderse y tomar decisiones	0,5 puntos
	2 puntos	1,5 puntos	conjuntas	
			1 punto	

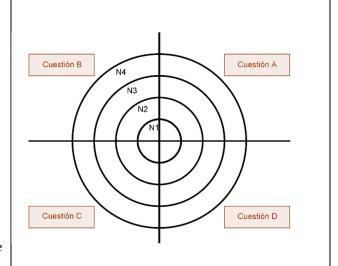
Los estudiantes deben reflexionar sobre su implicación en el trabajo realizado mediante cuatro cuestiones que se presentan a continuación. Cada una de ellas se valora como excelente, bueno, regular o inadecuado. Además, se pide al alumnado que diseñen una diana de autoevaluación como la que se presenta en la Figura 10.

Cuestión A: He cumplido con el compromiso asignado de la tarea esforzándome al máximo

Cuestión B: He cooperado y fomentado la participación de todos los miembros del equipo.

Cuestión C: Cuando surgía alguna dificultad o un error, he intentado llegar a acuerdos utilizando el debate y el razonamiento.

Cuestión D: He aprendido algo nuevo sobre el tema, escuchando y observando con comprensión y empatía.



N1: Excelente, N2: Bueno,

N3: Regular, N4: Inadecuado.

Figura 10. Diana de autoevaluación.

## 4. Conclusiones

Es una experiencia positiva en la que trabajamos la competencia matemática, entre otras, y los estudiantes no basan sus estrategias en una mera imitación del profesorado, al contrario, tienen que buscar una línea de trabajo propia y consensuada con los miembros de su grupo aplicando los conocimientos matemáticos y extra-matemáticos aprendidos. También, aprenden a ser más reflexivos, a dividir un problema en subproblemas (simplificación) como estrategia de resolución de problemas, a construir un plan de acción y ponerlo en marcha, a mejorar su proceso de escritura (rigor matemático), a utilizar distintas formas de presentación de resultados y a buscar resultados razonables al problema propuesto validando el resultado obtenido.

No podemos obviar las dificultades encontradas en la puesta en práctica por los estudiantes: bloqueos, falta de comprensión lectora, falta de autonomía, necesidad continuada de aprobación del docente, así como las dificultades del profesorado: tareas abiertas con distintas soluciones y complejidad de la evaluación, por las infinitas posibilidades de mejorar el modelo y el producto final.

En definitiva, la realización de actividades de modelización en la Enseñanza Secundaria tiene muchos aspectos positivos y, a la vez, dificultades que pueden salvarse. Sin duda, consideramos conveniente integrar este tipo de actividades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas para la formación de ciudadanos críticos y capaces de superar los nuevos retos del siglo XXI.

# Referencias bibliográficas

- [1] Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, Vol. 10, nº 2, 117-136. https://doi.org/10.4995/msel.2017.7707
- [2] ALSINA, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, Vol. 43, nº 1, 85-101.
- [3] BERGMAN ÄRLEBÄCK J. y BERGSTEN C. (2010) On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics. In: Lesh R., Galbraith P., Haines C., Hurford A. (eds) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. Springer, Boston, MA. <a href="https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1">https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1</a> 52
- [4] BLUM, W. y BORROMEO-FERRI, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Vol. 1, nº 1, 45-58.
- [5] BLUM, W. y LEIB, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. et al. (eds), *Mathematical Modelling: Education, engineering, and Economics*. (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.
- [6] BORROMEO-FERRI, R. (2018). Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education. Springer International Publishing.
- [7] FERRANDO, I., ALBARRACÍN, L., GALLART, C., GARCÍA-RAFFI, L. y GORGORIÓ, N. (2017). Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Vol. 31, nº 57, 220-242. <a href="https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11">https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11</a>
- [8] GALLART, C. (2016). La modelización como herramienta de evaluación competencial (Tesis Doctoral). Universidad Politécnica de Valencia.
- [9] GALLART, C., FERRANDO, I. y GARCÍA-RAFFI, L. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, Vol. 12, nº 1, 71-86. <a href="https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955">https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955</a>.
- [10] GARCÍA NAVARRO, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. Épsilon Revista de Educación Matemática, Vol. 30(2), nº 84, 57-68.
- [11] HERRÁN ÁLVAREZ, I., HERAS BERNARDIRNO, C. Y PÉREZ-PUEYO, A. (2019). La evaluación formativa. El mito de las rúbricas. Alternativas en la elaboración de instrumentos de evaluación en Secundaria. *Revista Infancia, Educación y Aprendizaje*, Vol. 5, nº 2, 601-609. https://doi.org/10.22370/ieya.2019.5.2.1784
- [12] HALES, T. C. (2005). A proof of the Kepler Conjecture. *Annals of Mathematics*, Vol. 162, nº 3, 1065-1185.

- [13] INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE (2020), <a href="http://www.geogebra.org">http://www.geogebra.org</a>. Consultado el 7/0772020.
- [14] MIANA SANZ, P. J. Y ROMERO ÁLVAREZ, N. (2010) La historia de la conjetura de Kepler. In *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez* (pp. 367-374). Universidad de La Rioja.
- [15] ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 25, de 29 de enero de 2015, pp. 6986-7003.
- [16] REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3, de 3 de enero de 2015, pp. 97858-97921.
- [17] TETRA PACK (2020). History. <a href="http://www.tetrapak.com/about/history">http://www.tetrapak.com/about/history</a> /Consultado el 26/08/2020.
- [18] VALVERDE L., CUIDAD, A. (2014). El uso de e-rúbricas para la evaluación de competencias en estudiantes universitarios. Estudio sobre fiabilidad del instrumento. *REDU Revista de docencia universitaria*, Vol. 12, nº 1, 49-79. https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/140009/Valverde?sequence=1

#### Sobre los autores:

Nombre: Ricardo José García Bonaviña Correo Electrónico: rgarcia@iesfib.es

Institución: IES Fray Ignacio Barrachina (Ibi), España.

Nombre: Almudena Lloréns Payá

Correo Electrónico: almudena.llorens@salesianos.edu

Institución: Colegio Salesianos San Vicente Ferrer (Alcoy), España

Nombre: Carmen Romero-García

Correo Electrónico: mariadelcarmen.romero@unir.net Institución: Universidad Internacional de la Rioja, España

Nombre: Ana María Zarco García

Correo Electrónico: anamaria.zarco@unir.net

Institución: Universidad Internacional de la Rioja, España

# **Experiencias Docentes**

# Taller de Resolución de Problemas de Matemática con material concreto: opinión de profesores

# Math Problem Solving Workshop with concrete material

Héctor Bastías Montaner y Ángelo Fierro Fierro

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 045–055, ISSN 2174-0410 Recepción: 10 ago'20; Aceptación: 17 sep'20

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

Este articulo tiene como propósito describir un taller de Resolución de Problemas de Matemática con material concreto y dar a conocer las opiniones de los profesores participantes. En los talleres participaron estudiantes del Preuniversitario de la universidad del Bío-Bío. Se realizó un análisis descriptivo de los datos recolectados sobre la implementación de los talleres mediante entrevistas semiestructuradas a los profesores que realizaron los talleres. Los resultados indican que el trabajo con estudiantes con contenidos disciplinares descendidos se puede ver mejorado, además se fortalecen las habilidades de comprender, aplicar y evaluar al utilizar la metodología permitiendo que lleguen con una mejor preparación a la universidad. Es importante que se masifiquen las actividades de Resolución de Problema de Matemáticas, pues son múltiples los beneficios que entregan en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras Clave: Resolución de Problemas, Secundaria, Preuniversitario

#### Abstract

The purpose of this article is to describe a Mathematical Problem Solving workshop with specific material and to publicize the opinions of the participating teachers. Students from the Pre-University of Bío-Bío University participated in the workshops. A descriptive analysis of the data collected on the implementation of the workshops is carried out through a semi-structured interview with the teachers who carry out the workshops. The results indicate that working with students with descending disciplinary content can be improved, in addition to strengthening comprehension skills, applying and evaluating the use of specific methods that lead to better preparation for university. It is important that the Mathematical Problem Solving activities are overcrowded, since there are multiple benefits that begin in the teaching-learning process.

Keywords: Problem Solving, Secondary, preuniversity

## 1. Introducción

La sociedad actual sufre cambios constantes debido a los avances rápidos que presenta la tecnología y el desarrollo científico, esto obliga a las instituciones educativas a estar a la vanguardia de los cambios entregando las herramientas necesarias para afrontar con éxito las nuevas necesidades que demandan los puestos de trabajo. El nuevo escenario de la sociedad del conocimiento requiere de nuevas competencias que reemplacen las habilidades básicas y las expectativas de conocimiento del pasado por otras que se necesitan para la vida y el trabajo actual (Schleicher, 2016). Cada vez se necesitan profesionales con competencias más flexibles, interpersonales que les permitan enfrentarse a tareas complejas e interactivas (Van de Oudeweetering y Voogt, 2018), por esto es necesario que los sistemas educativos formen a los futuros ciudadanos basándose en las competencias del siglo XXI como son el pensamiento crítico, el pensamiento creativo o la resolución de problemas (Almerich, Díaz, Cebrián y Suárez, 2018). Ante lo expuesto, las universidades en las últimas décadas están incorporando de manera transversal la Resolución de Problemas (RP) en las diversas carreras que imparten, entendiendo que es fundamental esta competencia, pues constituye un conjunto de conocimiento y habilidades que los alumnos podrán aplicar o usar para realizar tareas académicas y transferirlas al mundo laboral (Almerich, Díaz, Cebrián y Suárez, 2018). Casos como las carreras de; Medicina (Lermanda, 2007), Física general (Almudi, Zuza y Guisasola, 2016), Ingeniería Civil (Echazarreta y Haudemand, 2009) evidencian que el paso de los estudiantes universitarios por la metodología, como medio para la adquisición de competencias académicas -profesionales en las aulas, mejora su rendimiento académico en comparación con los casos en que se aplican metodologías más convencionales. Según distintos autores (Falcón, 2018; Gil-Galvan, 2018; Fach, 2012; Fernandez, Garcia, De Caso, Fidalgo y Arias, 2004) esta mejora de resultados se debe a que esta metodología fomenta el papel protagonista del alumno en el proceso enseñanzaaprendizaje, lo aproxima a la realidad laboral en la que tendrá que desenvolverse, consolida contenidos teóricos y desarrolla habilidades cognitivas y habilidades transversales (respeto, empatía, trabajo en equipo), además potencia el desarrollo y optimiza las competencias tendentes a la profesionalización del estudiante. En lo que respecta a la Resolución de Problemas (RP) en el escenario de enseñanza media (etapa previa al ingreso a la universidad) los sistemas educacionales del mundo la consideran un elemento fundamental del currículo, tal es el caso de Singapur, Estados Unidos, Finlandia y Colombia quienes en la última década la sitúan en el centro del currículo escolar, además la RP está presente en las principales evaluaciones internacionales como PISA y TIMMS. Chile, siguiendo la tendencia internacional, incorpora la RP en la asignatura de matemática considerándola junto con la argumentación y comunicación, representación y modelamiento una habilidad a desarrollar en los estudiantes. El ministerio de educación chileno el año dos mil nueve declaró que la RP es tanto un medio como un fin en la adquisición de una buena educación matemática, pues esta tiene la particularidad de promover el desarrollo de las otras habilidades del currículo (Felmer, Perdomo – Diaz, Giaconi y Espinoza 2015) y es transversal a los ejes de Número, Algebra, Geometría y Datos y azar perteneciente al currículo de matemática. De esta manera se convierte en el eje principal del proceso enseñanzaaprendizaje de la matemática en el aula escolar. A pesar de ser considerada un elemento clave el desarrollo de la RP en el aula, las pocas investigaciones nacionales sobre el tema evidencian que está ausente de la formación inicial de los docentes y quienes ya están ejerciendo en el aula no la utilizan (Felmer y Perdomo - Díaz, 2015; Preiss, Larrain y Valenzuela, 2011), ante lo expuesto no es de sorprender que en evaluaciones a estudiantes de enseñanza media salgan mal evaluados en la RP, tenemos el caso de la evaluación internacional PISA donde los estudiantes chilenos no lograron alcanzar el nivel de competencia adecuado y fue el país OECD con el menor desempeño estando por debajo del promedio. Bastias, García y Caro (2019) afirman que la habilidad más débil en estudiantes de primer año en carreras universitarias con asignaturas de Matemática es la Resolución de Problemas de Matemática. Estos resultados coinciden con el diagnostico académico de matemática realizado por el preuniversitario de la universidad del Bío-Bío, donde se evaluaron a estudiantes de último año de enseñanza media respecto a contenidos disciplinares en los ejes de Números, Álgebra, Geometría y Datos y azar, además de las habilidades de comprender, aplicar y evaluar los resultados. Esta evaluación a nivel global arroja que los estudiantes no superan el 50 % de logro en contenidos y habilidades los cuales son necesarios para afrontar con mayor probabilidad de éxito la rigurosidad impuesta por las actividades académicas inherentes a las universidades. Considerando que las universidades están incorporando de manera transversal la Resolución de Problemas (RP) en las diversas carreras que imparten por el papel que desempeña como una habilidad del siglo XXI y la ausencia en el aula de clase en enseñanza media, lo que acarrea un déficit para los estudiantes que ingresarán en la universidad, en el año 2018 y 2019 el Preuniversitario de la Universidad del Bío-Bío elaboró y ejecutó talleres centrados en la RP matemáticos con material concreto con el objetivo de fortalecer contenidos disciplinares y habilidades cognitivas necesarias para afrontar la articulación de enseñanza media con la universitaria.

# 2. Taller Resolución de Problemas de Matemática con material concreto

El taller considera ocho sesiones de las cuales dos hacen referencia a contenidos del eje de números, dos al eje de álgebra, dos al eje de geometría y dos al eje de datos y azar. Las sesiones son semanales y se trabaja un eje en cada una de ellas con una duración de entre 90 a 120 minutos. La cantidad de participantes en promedio es de 20 estudiantes y trabajan en equipo de 3 a 4 estudiantes. En los talleres participan dos profesores de matemática. Para cada taller se cuenta con material concreto con la finalidad de que los estudiantes puedan manipular, construir, diseñar o calcular según las especificaciones de cada problema. En los problemas no se presenta toda la información necesaria para resolverlo, de tal manera que el estudiante tenga que discernir qué información necesita y por medio del material concreto y fuentes de conocimiento como libros, internet o apoyo del docente pueda obtenerla. Esto se debe a que en la realidad cuando nos enfrentamos a un problemas este no siempre tiene toda la información necesaria de manera explícita para encontrar la solución. Los problemas están adaptados de manera que puedan ser resueltos por medio de varias estrategias y sean accesibles a los diversos estilos de aprendizaje de los estudiantes.

A continuacion presentamos el primer taller y sus orientaciones didacticas:

## Taller 1.

La empresa Chilena "Pinturas Top" es contratada por la minera del norte para que pinten las oficinas container que tienen en sus distintos sectores. Ver figura. ¿Cuanta pintura necesitaran?



Oficina sector 1



Oficinas sector 2



Oficinas sector 3



Oficinas sector 4

Este es el primer taller que se trabaja con los estudiantes y si bien su contenido es de primeros años de enseñanza media su objetivo fundamental es que los estudiantes se familiaricen con la metodología de resolución de problema y cuales son las directrices de trabajo en cada taller.

Orientaciones didácticas: al inicio de la clase se forman los equipos y se entrega en papel el problema, luego se le pide a algun estudiante que lea el problema en voz alta y se les pregunta si conocen este tipo de oficina. Independientemente de las respuestas se realiza la proyeccion de un video de oficina container en la mineras. Una vez formados los equipos y con la lectura del problema realizada, el profesor se pasea por los equipos donde de forma espontánea comienzan a surgir preguntas como por ejemplo: ¿de que tamaño son las oficinas?, ¿cuanto rinde un litro de pintura?, ¿cual es la formula de área de un rectángulo?. ¿no tengo que pintar el área de la ventana y puertas?, en el momento que comienzan a surgir las preguntas el profesor le pide a un representante por equipo que anote en la pizarra las preguntas relacionadas con la informacion necesaria para resolver el problema y mediante lluvia de ideas comienzan a dar respuestas, algunos recuerdan las formulas, otros las buscan en libros o internet y se llega a concenso en algunas cosas por ejemplo cuánto rinde un litro de pintura o si es necesario una mano o dos. El profesor en todo momento está atento a los grupos y cómo funcionan sus dinámicas para asegurar que todos participen. Cuando los grupos comienzan a hacer cálculos y plasmar ideas en el papel se dan cuenta de la idea para resolver el problema (de no ser asi el profesor orienta a esta idea por medio de preguntas) que no se va a poder pintar las paredes que quedan juntas o la base por lo tanto no será necesario gastar pintura ahi y en este momento luego de intentar calcular estas caras es que el profesor da inicio a la tercera parte que es la entrega de material concreto (es dificil calcular las caras que no se pintan solo con la figura entregada en papel). El material concreto consiste en figuras con la forma de container. Con el material concrreto se forman las oficinas como están en el papel y comienzan los estudiantes a calcular las caras que no se pueden pintar. El profesor va guiando que los estudiantes noten cierta regularidades de caras no pintadas o caras pintadas en cada sector a medida que aumentan las oficinas. Dependiendo del nivel de cada grupo se puede solicitar llegar a una fórmula de la regularidad que va ocurriendo. Si hay equipos que logren el objetivo de manera rápida el profesor puede extender el problema solicitando que calculen el tiempo que se demorarían en pintar todas las oficinas contaiiner si saben por ejemplo que se demoran 3 horas en pintar una. El Problema se puede resolver de muchas maneras y el profesor tiene que identificar en los grupos las ditintas formas que lo abordaron y resolvieron, pues ahora viene la ultima parte del taller y es que el profesor les da la palabra a un integrante de cada grupo para que exponga cómo lo abordaron y resolvieron, tambien tiene que generar el ambiente propicio para la discusión de las respuestas con el objetivo de que los estudiantes decidan por la forma más optima para resolver el problema. Finalmente el profesor cierra su taller con algunas reflexiones a partir de las diversas respuestas entregadas por sus estudiantes.

A continuación presentamos algunos problemas que se trabajaron en los talleres:

#### Taller 2

Construir un recipiente cerrado en un extremo utilizando el mínimo de material, este debe ser capaz de contener tres esferas de volumen de 102 cm³ cada una, además determine el volumen interior que queda desocupado.

#### Materiales:

1 cartulina 26,5 x 37,5 cm (aproximado)

1 tijera

1 regla de 30 cm

1 compás

1 scotch

#### Taller 3

En un terreno (la cartulina) hay un caballo y conejos, el caballo debe pastar diariamente sobre una superficie de 415 m² aproximado, considerando los materiales a escala de 1:100. ¿cuál es la superficie que pastan los conejos?.

Observaciones: No pueden cortar ni sobreponer los palos, ni salir del terreno

#### Materiales:

1 cartulina 26,5 x 37,5 cm (aproximado)

8 palos de helados de colores de 11,5 cm de largo

30 cm de lana

Figuras de 3 conejos, 1 caballo y 1 árbol

1 silicona liquida

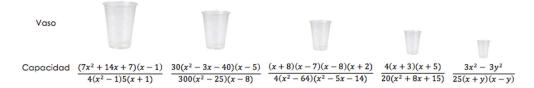
1 tijera

1 regla de 30 cm

1 compas

#### Taller 4

Se necesita transferir 1.110 cc de cloro a una piscina. El técnico encargado olvidó traer el medidor de cc y el bidón que porta el cloro es de 500 litros. Para resolver el problema el técnico logró conseguir vasos de distintas medidas como se ven en la figura que representan una parte de un litro (1000 cc). ¿Utilizando los vasos es posible medir los 1.110 cc de cloro a la piscina? Justifique.



Orientaciones didácticas: al inicio de la clase se forman los equipos y se entrega en papel el problema, luego se le pide a algún estudiante que lea el problema en voz alta. Luego de esto el profesor les pide a los grupos que conversen sobre el problema y que anoten las posibles dudas que surgen para ser presentadas a viva voz. Mientras los estudiantes están discutiendo en grupos el profesor está atento a las posibles preguntas y estrategias a utilizar. El profesor pregunta a los grupos si tienen dudas, la pregunta más frecuente de los estudiantes puede ser ¿Cuál es la capacidad de los vasos? A lo que el profesor puede responder que esa capacidad está expresada mediante fracciones algebraicas y, además, les puede preguntar si se les ocurre alguna forma de obtener dicha capacidad. El profesor mediante preguntas va dirigiendo a los estudiantes para que se den cuenta de que esas expresiones algebraicas fraccionarias se pueden factorizar y simplificar, quedando para cada vaso un número racional que representa una parte de un litro (1000 cc) de esta forma para el vaso uno tendríamos:



$$\frac{(7x^2+14+7)(x-1)}{4(x^2-1)5(x+1)} = \frac{7(x^2+2x+1)(x-1)}{4(x-1)(x+1)5(x+1)} = \frac{7(x+1)^2(x-1)}{20(x+1)^2(x-1)} = \frac{7}{20}$$

Para el vaso numero uno tenemos que luego de las factorizaciones y simplificaciones se obtuvo  $\frac{7}{20}$ , luego tenemos que  $\frac{7}{20}$  de 1.000 cc es 350 cc. Por lo tanto el vaso numero uno tiene una capacidad de 350 cc. De manera análoga al procedimiento anterior obtenemos las medidas para los demás vasos.

Todos los grupos tienen que llegar a este paso por lo que si un grupo está teniendo dificultades, el profesor tendrá que prestar atención a éste para que no se retrase. Una vez que los grupos encuentran la capacidad de todos los vasos el profesor les pregunta si utilizando los vasos es posible medir los 1110 cc de cloro a la piscina. Independientemente de la respuesta, el profesor entrega a los grupos los vasos correspondientes a cada medida más un recipiente con la medida marcada de 1110 cc para que experimente distintas estrategias y puedan, en el momento, corroborar sus respuestas. El problema se puede resolver de varias maneras y el profesor tiene que identificar en los grupos las distintas formas que lo abordaron y resolvieron. En la ultima parte del taller, el profesor le da la palabra a un integrante de cada grupo para que exponga cómo abordaron y resolvieron el problema (y demuestre con los vasos y el recipiente que sí pudieron utilizar los vasos para medir los 1110 cc de cloro); además el profesor debe generar el ambiente propicio para la discusión de las respuestas con el objetivo de que los estudiantes decidan resolver el problema de la forma más optima. Finalmente el profesor cierra su taller con algunas reflexiones a partir de las diversas respuestas entregadas por sus estudiantes.

## Materiales:

Recipiente con la medida marcada de 1110 cc Vasos de 120 (dos), 200 (uno), 250 (dos), 300 (uno), 350 cc (uno) Un recipiente con 2000 cc de agua

#### Taller 5

En un jardín infantil se tiene los datos de peso de sus alumnos en una hoja de registro la cual sufrió algunos daños que no permiten visualizar todos los datos. Se necesita saber el peso promedio de los alumnos ¿Es posible determinarlo? ¿Cuál es el peso promedio?



# 3. Metodología

Se realiza un análisis descriptivo de los datos recolectados sobre la implementación de los talleres mediante entrevistas semiestructuradas a los 2 profesores que realizan los talleres. La entrevista fue diseñada para recoger información de la implementación de la RP en la sala y dominio de contenidos disciplinares y habilidades de los estudiantes.

## 4. Resultados

En las entrevistas los profesores dan a conocer lo siguiente:

Implementación del taller en la sala: Que no fue fácil la implementación de los talleres de RP, pues los alumnos no están familiarizados con la metodología ya que declaran que en clase el profesor realiza ejercicios rutinarios, por lo tanto, se tuvo que utilizar mucho tiempo en el primer taller para explicar la metodología y la importancia de esta como competencia del siglo XXI y en su proceso de formación universitaria. Cuando se entregaban los problemas los alumnos tomaban una actitud pasiva esperando que el profesor resolviera el problema, tomaron varios talleres para que entendieran que ellos son el centro de la clase y el profesor solo un guía que los orienta en el proceso de aprendizaje. En el penúltimo taller los estudiantes ya tenían autonomía en el desarrollo del taller, trabajaban de manera activa y motivados en la actividad. El uso de material concreto permitió que los estudiantes tuvieran curiosidad e interés por la actividad siendo este además de una herramienta en el proceso de aprendizaje, un incentivo para los estudiantes. El lograr que trabajaran en equipo fue un desafío, pues muchos

estudiantes no entendían que el trabajo en conjunto podría permitir lograr los objetivos, con el tiempo el trabajo se fue desarrollando de manera eficiente y todos los estudiantes participaban en la resolución del problema.

Dominio de contenidos disciplinares: Los estudiantes presentaban dificultades en los talleres relacionado con Geometría y datos y azar, en Geometría confundían fórmulas de volúmenes y no las comprendían, pero el taller se realiza con material concreto donde podían manipular y crear figuras, lo que les permitió poder comprender y diferenciar una fórmula de otra. En datos y azar presentaban dificultad con los conceptos y cálculos en probabilidad y medida de tendencia central pero en el taller lograron construir los conceptos y cálculos a partir del contexto y la aplicación de los problemas a situaciones reales lo que les permitió darles sentido a estos contenidos y apropiarse de ellos. En los ejes de Números y Algebra fortalecieron lo que respecta a operatoria en los distintos conjuntos numéricos y expresiones algebraicas, logrando modelar diversas situaciones del problema. La actitud hacia los contenidos fue mejorando a medida que los estudiantes comprendían que estos tenían un uso práctico y más habitual de lo que pensaban, esto se debe a que los problemas que se trabajaron fueron situaciones reales en contexto de diversas áreas de la sociedad. Al final del taller se realiza una evaluación para asegurar la comprensión y aplicación del contenido en la cual presentaron un alto porcentaje de logro. De manera progresiva en los talleres los alumnos utilizaban más contenidos disciplinares los cuales se presentaban fortalecidos con el fin de poder resolver los problemas que iban aumentando su dificultad, además hubo una mejora en el lenguaje matemático utilizándolo de forma adecuada según cada contenido.

Dominio de habilidades: A medida que los estudiantes avanzaban en los talleres se fueron desarrollando de manera progresiva las habilidades, acorde a la complejidad de cada taller. Las habilidades de Comprender y Aplicar se potenciaron obteniendo un dominio por parte de los alumnos respecto de éstas mientras que en la habilidad de evaluar presentaron un dominio menor. Se pudo observar cómo de manera progresiva en cada problema interpretaban la información en diversos contextos, donde manejaban conceptos, propiedades, además de leer e interpretar datos en distintas representaciones. En el último taller del semestre los estudiantes discriminaban información, descubrían patrones y sacaban conclusiones, además evaluaban la pertinencia de la solución del problema y las soluciones de otros grupos. Los estudiantes en un comienzo no sabían trabajar en equipo: al momento de afrontar los problemas del taller había en el grupo estudiantes que no se involucraban activamente, esto se fue mejorando a medida que avanzaban en los talleres por medio de las orientaciones del profesor logrando que cada integrante del equipo participara de manera activa en distintos roles de la actividad. Se pudo observar una mejora respecto a la empatía y el respeto por el otro entendiendo que todos son claves en el trabajo en equipo para afrontar y resolver el problema de la actividad, además se evidenció una mejora en la argumentación y comunicación de sus respuestas, ellos declaraban que el trabajar con otros compañeros les permitía poder mejorar los argumentos y el cómo comunicar sus soluciones al problema. Los profesores manifestaron que el taller desarrolló y potenció la creatividad en los estudiantes, pues fueron diversas las formas en que abordaron y resolvieron los problemas, siendo crucial el uso de material concreto para la estimulación de la creatividad.

## 5. Conclusiones

De acuerdo a los resultados observados se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- 1. El trabajo con estudiantes con contenidos disciplinares descendidos se puede ver mejorado, permitiendo que lleguen con una mejor preparación a la universidad.
- 2. La resolución de problemas ayudó a desarrollar o fortalecer las habilidades de comprender, aplicar y evaluar, además de las habilidades de argumentar y comunicar en los estudiantes siendo estas fundamentales para el ingreso a la universidad.
- 3. Se evidencio un interés y motivación hacia la matemática por los estudiantes que participaron en estos talleres, además de seguridad al enfrentar un problema en matemática.
- 4. Los estudiantes aprendieron a trabajar en equipo para concretar el objetivo que planteaba cada problema.
- 5. Es necesario que los profesores trabajen la resolución en sus clases, pues se evidenció que los alumnos no están familiarizados con ella.

# Referencias

- [1] Almerich, G., Diaz, M., Cebrian, S., & Suarez, J. Estructura dimensional de las competencias del siglo XXI en los estudiantes universitarios de educación, Relieve: Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, 24(1), 2018.
- [2] ALMUDÍ, J. M., ZUZA, K., & GUISASOLA, J. Aprendizaje de la teoría de inducción electromagnética en cursos universitarios de física general. Una enseñanza por resolución guiada de problemas. pp. 7-24, Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 34(2), 2016.
- [3] BASTÍAS, H., GARCÍA, D., CARO, C. Debilidades identificadas por docentes universitarios respecto a contenidos y habilidades de matemática en estudiantes de primer año que ingresan a la universidad por vía inclusiva, pp. 389-396, Educación, (18), 2019.
- [4] ECHAZARRETA, D. R., & HAUDEMAND, R. E. Resolución de Problemas Integradores en la Enseñanza de la Física para Estudiantes de Ingeniería Civil. pp, 31-38, Formación universitaria, 2(6), 2009.
- [5] FACH GÓMEZ, K. "Ventajas del Problem Based Learning (PBL) como método de aprendizaje del Derecho internacional", pp, 59-73, Bordón Revista de Pedagogía, 64(1), 2012.
- [6] FALCÓN, O. Auto-creación de problemas para la resolución de sistemas de ecuaciones en Matemáticas, pp. 15-29, Pensamiento Matemático, 8(1), 2018.
- [7] FELMER, P., PERDOMO-DÍAZ, J., GIACONI, V., & ESPINOZA, C. *Problem solving teaching practices: Observer and teacher's view, pp.* 2022-2028, In CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2015.
- [8] GIL-GALVÁN, R. El uso del aprendizaje basado en problemas en la enseñanza universitaria. Análisis de las competencias adquiridas y su impacto, pp. 73-93, Revista mexicana de investigación educativa, 23(76), 2018.
- [9] LERMANDA, C. *Aprendizaje basado en problemas (ABP): una experiencia pedagógica en medicina*, pp. 127-143, REXE-Revista de Estudios y Experiencias en Educación, 6(11), 2007.
- [10] PREISS, D., LARRAÍN, A., & VALENZUELA, S. Discurso y pensamiento en el aula matemática

chilena, pp. 131-146. Psykhe (Santiago), 20(2), 2011.

- [11] SCHLEICHER, A. Teaching excellence through professional learning and policy reform. Lessons from Around the World, International Summit on the Teaching Profession, 2016.
- [12] VAN DE OUDEWEETERING, K., & VOOGT, J. Teachers' conceptualization and enactment of twentyfirst century competences: exploring dimensions for new curricula, pp. 116-133, The Curriculum Journal, 29(1),2018.

#### Sobre el/los autor/es:

Nombre: Héctor Gonzalo Bastías Montaner

Correo Electrónico: hbastias@udec.cl

Institución: Preuniversitario Universidad del Bío-Bío, Chile.

Nombre: Ángelo Fierro Fierro

Correo Electrónico: afierro@ubiobio.cl

Institución: Preuniversitario Universidad del Bío-Bío, Chile.

# **Experiencias Docentes**

# Enseñanza del Software Estadístico R a alumnos de Matemáticas.

# Teaching R to Mathematical Students

Elena Castilla y Pedro J. Chocano

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 057–068, ISSN 2174-0410 Recepción: 28 Sep'20; Aceptación: 21 Oct'20

# 1 de abril de 2021

#### Resumen

Habiendo constatado la falta de formación en herramientas estadísticas en algunas titulaciones de matemáticas, así como la creciente importancia del software de programación R, se ha visto la necesidad de impartir un curso de Análisis de Datos con R. Éste se ha desarrollado dentro de la iniciativa "Compumates" de la Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, y ha constado de diferentes sesiones, que parten desde la instalación del software y uso de comandos básicos, hasta su aplicación en técnicas de análisis y predicción. Para ello se ha provisto a los alumnos de un manual de aprendizaje. En este trabajo se muestran los resultados que ha tenido la experiencia en el aprendizaje del alumno y la valoración que tiene éste sobre la misma.

Palabras Clave: Aprendizaje, software estadístico, R.

#### Abstract

The lack of statistical tools in some bachelor's degrees of Mathematics jointly with an increasing importance of the software R leads to the need of giving a course of Data Analysis with R. This course has been developed under the iniciative "Compumates" of the Faculty of Mathematics at Complutense University of Madrid. It consists on different sessions that go from the basic commands to their application to techniques of analysis and prediction. In this paper, it is shown the results obtained by the students and their opinion about the course.

Keywords: Learning, statistical software, R.

# 1. Contextualización del curso y objetivos

En el curso 2019-2020 se llevó a cabo la II edición de la iniciativa "Compumates". "Compumates" engloba una serie de cursos organizados por la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) sobre distintos recursos matemáticos tales como Python o LATEX, entre otros. Estos cursos están dirigidos a estudiantes de cualquier grado, máster o doctorado, así como a cualquier miembro del personal de la Facultad (PDI, PAS) o persona interesada. La inscripción es totalmente gratuita. En este contexto, en la primera quincena de noviembre de 2019, se desarrolló el curso "Análisis de Datos con R". Nótese que dicho curso surge como una evolución natural del curso "Introducción a R" llevado a cabo en la I edición por los mismos profesores. En el curso desarrollado durante la primera edición se enseñaban los comandos más básicos de R y se daban unas pequeñas pinceladas de su posible aplicación a la estadística. Si bien este primer curso recibió muy buena acogida por los estudiantes, la mayoría de éstos comentaron la necesidad de expandir su duración y temática, centrándose en temas como predicción o representación gráfica y análisis de datos multivariantes. Una de las sugerencias más solicitadas era la de poder disfrutar de un manual dinámico y sencillo para seguir el curso con mayor comodidad y tener más ejemplos al alcance.

R es un lenguaje de programación orientado a la estadística, cuyo uso ha ido ganando protagonismo en los últimos años. Se trata de un software libre en el que los usuarios pueden publicar sus propios paquetes o modificar a su antojo diversos aspectos. Esto último dota a R de gran versatilidad. Por otro lado, la importancia de R en los ámbitos laborales, de investigación y de docencia en nuestros días es un hecho innegable. Así, en 2018, R fue el segundo software estadístico con más artículos en google scholar [8]. En el ámbito laboral R no se queda atrás. En en el año 2015, Rexer Analytics llevó a cabo una encuesta a 1,220 científicos de datos, preguntándoles sobre ciertos aspectos de su trabajo. A la pregunta de qué herramientas usaban para su trabajo (en la que podían seleccionar tantas respuestas como quisieran), R fue la más seleccionada tanto como herramienta primaria como secundaria. En particular, 76 % de los encuestados dijeron usar R y más de un tercio (36 %) identificaron R como herramienta principal [7]. Por otra parte, RStudio es una de las interfaces más utilizadas con R, por su sencillez de uso y su estética (véase Figura 1). Por tanto, la importancia de R, y en particular de su interfaz RStudio, no debe ser ignorada por las universidades.

#### **DOMINANT RINTERFACE**

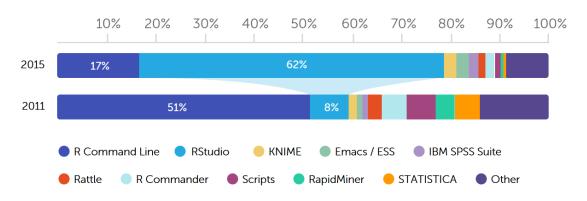


Figura 1. Interfaces de R, comparativa de uso en 2011 y 2015. Imagen obtenida de [7].

Obsérvese que en la Facultad de CC. Matemáticas de la UCM se imparten actualmente 3 grados y 3 dobles grados, así como 4 másteres y 2 programas de doctorado de matemáticas y/o estadística. Los grados (*Matemáticas, Matemáticas y Estadística y Ingeniería Matemática*) constan

de 4 cursos académicos, mientras que los dobles grados (*Matemáticas y Física*, *Matemáticas e Informática y Matemáticas*, *Estadística y Economía*) constan de 5 cursos académicos. El software R sólo se imparte en los grados de *Matemáticas y Estadística* y el doble grado de *Matemáticas Estadística y Economía*, así como en los másteres aplicados (*Máster en Estadísticas Oficiales*, *Máster en Tratamiento Estadístico Computacional de la Información y Máster en Ingeniería Matemática*). Entendemos, por tanto, necesario el ofrecer esta formación al resto de alumnos de grado y máster, así como reforzar la de los alumnos que lo hayan estudiado previamente. Es importante observar que en el sistema educativo español el acceso a la universidad es a partir de los 18 años.

Por otra parte, la Facultad de CC. Matemáticas de la UCM ofrece a los alumnos de cualquier Grado y Doble Grado de la Facultad, además de alumnos de los Másteres en *Ingeniería Matemática y Estadísticas Oficiales e Indicadores Sociales y Económicos*, la posibilidad de realizar prácticas curriculares. El único requisito es, para los alumnos de grado o doble grado, el haber cursado al menos la mitad de su plan de estudios. Es decir, este tipo de actividad está dirigida para alumnos de últimos cursos y posgrado. Si bien este tipo de prácticas se consideran de aprendizaje, y las propias empresas contratantes son conscientes de ello, es muy habitual que soliciten conocimiento básico de algún software estadístico. La posibilidad de acreditar un curso de análisis de datos con R sirve de ayuda a aquellos alumnos que quieran realizar prácticas externas y, ya de manera general, a todos ellos que al terminar sus estudios acceden al mundo laboral.

# 2. Aplicación Práctica

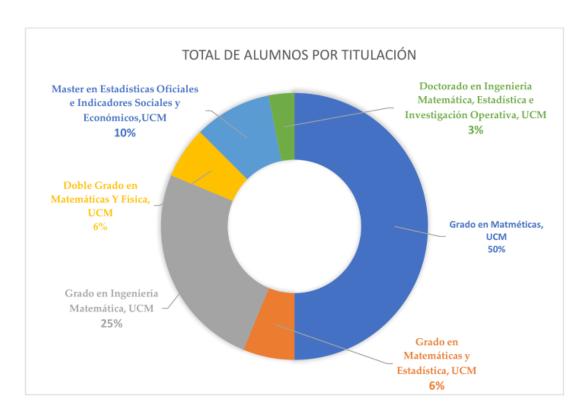
#### 2.1. Recursos Materiales

El curso se realizó en un aula con acceso libre a internet y enchufes para que los alumnos, que tenían que traer su propio ordenador personal, pudieran conectarse. En caso de que algún alumno no dispusiera de ordenador personal, se permitía el trabajo por parejas. Los profesores disponían de una pantalla digital en el aula con la que poder compartir la pantalla de su ordenador, así como una pizarra complementaria. Para seguir el curso se proporciona a los alumnos un manual, que se actualiza constantemente, realizado por los propios profesores. Dicho manual puede encontrarse en la página web de ambos profesores [3].

# 2.2. Participantes

Atendiendo a el orden de inscripción, se aceptó la matriculación de un total de 32 alumnos, de los cuáles todos tenían una relación directa con la Facultad, siendo 28 alumnos de grado o doble grado, y el resto alumnos de posgrado (máster o doctorado). La edad de los estudiantes se sitúa entre los 18 y los 26 años.

En la Figura 2 podemos ver la distribución de los alumnos por titulación y por curso académico, respectivamente. La mayoría de los alumnos pertenece a alguno de los grados o dobles grados, principalmente de cursos intermedios o finales. Observamos que la mitad de los alumnos provienen del grado en *Matemáticas*, mientras que sólo un 6 % de ellos proviene del citado grado en *Matemáticas y Estadística*. Parece claro que hay un gran interés por parte de aquellos alumnos que no tienen la posibilidad de estudiar R en su titulación, lo cuál refuerza uno de los objetivos planteados con anterioridad. Además, que la mayoría de alumnos sean de cursos elevados puede estar ligado al interés de una futura incorporación al mundo laboral, también tratado en la sección previa.



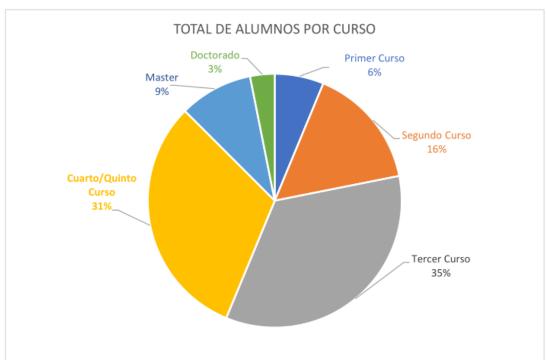


Figura 2. Distribución de alumnos por titulación (arriba) y distribución de alumnos por curso acdémico (abajo).

## 2.3. Metodología

Se realizaron 6 sesiones de 2 horas de duración cada una. Para el desarrollo de las clases se tuvo en cuenta la formación previa de los estudiantes, la cuál se pidió en el momento de inscripción mediante un formulario. Al tratarse de alumnos de la propia facultad y, por tanto, con buena base matemática (muchos de ellos, además, de cursos superiores), se optó por desarrollar el contenido de manera más profunda explicando con más detalle las ideas intuitivas de los conceptos matemáticos que se aplicaban sin obviar la parte más práctica y aplicada.

#### Sesión 1: Introducción, Instalación de R, RStudio y Conceptos Básicos

Esta sesión inicial comienza con una pequeña introducción motivadora a R y su importancia en los últimos años. Se enseña a los alumnos el proceso de descarga e instalación del Software. Es importante aquí entender que no todos los alumnos disponen del mismo sistema operativo, y que R dispone de un procedimiento diferente en cada situación. En cualquier caso, toda la información puede encontrarse en la propia página web oficial de R (https://cran.r-project.org/index.html). Para facilitar el uso del Software se aconseja y ayuda a los alumnos a que instalen la interfaz RStudio a pesar de no ser algo estrictamente necesario para poder seguir el curso.

Aunque se trate de un software libre y su instalación no entrañe demasiados problemas, este proceso dura gran parte de la primera sesión. El resto de la primera sesión se emplea para introducir los conceptos más sencillos de R como pueden ser operadores básicos, definición de vectores, matrices, etc. Es importante que el alumno pierda el miedo en esta primera toma de contacto con el Software y vea que R es un entorno de programación intuitivo y sencillo de manejar.

#### Sesión 2: Condicionales y Operadores Lógicos, Bucles y Funciones

Esta sesión es de un contenido matemático más puro, en el que se enseña al alumno a usar condicionales, operadores lógicos y bucles y a incluirlos dentro de sencillas funciones. Si bien es un poco más difícil de seguir para los estudiantes del máster de *Estadísticas Oficiales* (con una formación generalmente no tan matemática), y es cierto que existen gran cantidad de librerías y paquetes de R, es importante que sean capaces de crear sus propias funciones.

La sesión consta de una primera hora en la que se enseñará el manejo de R para estas cuestiones, seguida de otra hora de trabajo propio, en la que se les plantearán una serie de problemas a resolver. La solución de estos problemas se mostrará al final de la clase. A continuación, vemos un ejemplo:

**Ejemplo 1.** Crea una función que tenga como parámetros de entrada una matriz A y un número natural n, y devuelva  $A^n$ . Resolver el problema usando recursividad.

### Sesión 3: Análisis Gráficos de Datos y Tests Estadísticos

Esta es la primera sesión con contenido estadístico, en la que se enseña a los alumnos la representación de datos con distintos gráficos, e.g., histogramas, diagramas de barras, diagramas de cajas y bigotes, así como comandos más específicos para definir color, leyendas o ejes. Es importante que no sólo aprendan a realizar gráficos, sino también a interpretarlos y elegir el más apropiado para cada situación.

A su vez, se les enseña algunos de los principales tests estadísticos, tales como: el test de independencia  $\chi^2$ , tests de Normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk y test de

Kolmogorov-Smirnov para otras distribuciones, explicándoles el concepto de p-valor.

#### Sesión 4: Generación de Variables Aleatorias e Introducción al método de Monte Carlo

En esta sesión se enseña la importancia de generación de variables aleatorias y se realiza una pequeña introducción al método de Monte Carlo. Dichos conceptos juegan un papel importantes en labores de investigación. Para ello, es necesario en primer lugar que conozcan el concepto de "semilla" (seed en inglés). Entendemos que la mejor forma de asimilarlo es de manera visual, por lo que se propone el siguiente ejercicio.

**Ejemplo 2.** Genera 20 observaciones de la variable aleatoria N(1,2). Ejecuta el programa realizado varias veces. ¿Qué observas? Con la ayuda de R busca la función set.seed() y aplícala al principio de tu programa. ¿Qué observas?

Una manera divertida y muy visual de entender la simulación matemática son los diversos métodos que hay de estimar el número  $\pi$ . A continuación proponemos otro ejercicio que sirve a los alumnos para adentrase en el Método de Monte Carlo sin conceptos muy avanzados.

**Ejemplo 3** (Estimación de  $\pi$ ). Dado un cuadrado de lado 2, con vértices en (-1,-1), (-1,1), (1,-1), y (1,1); la probabilidad de que un punto generado aleatoriamente en ese cuadrado caiga dentro de la circunferencia de radio 1 y centro el origen es igual al área del círculo correspondiente entre el área del cuadrado,  $\frac{\pi}{4}$ . A partir de n puntos, hacer una estimación de  $\pi$ . Usa diferentes valores de n y observa las diferencias.

#### Sesión 5: Modelos de Regresión, Análisis de Componentes Principales

En esta sesión, introducimos métodos estadísticos multivariantes de análisis y predicción. En concreto nos centramos en modelos de regresión y análisis de componentes principales. Es importante tener en cuenta para esta sesión que sólo unos pocos alumnos han visto estos conceptos en sus respectivas titulaciones. Así pues, antes de la propia aplicación práctica, es necesario hacer una explicación teórica de los modelos, así como de su importancia en la vida real. Para llevar a cabo dicha tarea se intentan transimitir las ideas intuitivas que subyacen de una manera sencilla y directa.

#### Sesión 6: Análisis de Datos Topológico y Resolución de dudas.

El análisis de datos topológico es una herramienta matemática que ha ganado gran importancia en los últimos años. En ella se mezclan herramientas de topología, álgebra y cada vez más de estadística y probabilidad [2, 6]. En esta sesión se dan unas pinceladas sobre esta materia y se enseñan los principales paquetes de R que incorporan esta herramienta. Esto se hace de manera superficial y teniendo en cuenta que algunos de los conceptos necesarios no se estudian hasta el último curso del grado en *Matemáticas*.

También se deja espacio para la resolución de dudas surgidas a lo largo de las sesiones, así como para la realización de una encuesta final, la cuál se detallará más adelante.

## 2.4. Evaluación

Al final de curso se realiza una sencilla prueba de evaluación. Esta prueba tiene dos objetivos principales:

- Motivar al alumnado. Al informar a los alumnos el primer día de clase de que se les realizará una prueba de evaluación, se consigue mantener una mayor atención, incluso en temas que pueden ser de menor interés personal.
- Acreditar. Además del anteriormente comentado interés que puede suscitar el tener una acreditación de R para entrar en el mundo laboral, desde el Decanato de la Facultad de CC. Matemáticas se pide aprobar esta prueba para poder realizar una convalidación de créditos de estudios.

En cualquier caso, y dado el carácter de la actividad, así como la diversidad de alumnos (tanto en titulaciones como en cursos), se le da la opción al alumno que no supere la prueba de resolver un ejercicio, adaptado a su nivel e intereses, para aprobar el curso.

La prueba constó de 11 preguntas y se realizó con el programa *kahoot*, que permite responder cuestiones desde dispositivos móviles o desde el propio ordenador personal (https://kahoot.com). Se puede elegir el tiempo de respuesta que se deja al alumno, las diferentes opciones y se puede adjuntar un gráfico a la pregunta. En la Figura 3 se puede observar un ejemplo de las preguntas del examen. El uso de un programa tan visual fue de gran acogida entre los alumnos, como era de esperar [9, 5]. Los resultados de la prueba fueron muy positivos, tal y como se muestra en la Figura 4.



Figura 3. Ejemplo de pregunta de la Prueba de Evaluación

# 3. Satisfacción del alumnado y posibles mejoras

Se realizó una encuesta al alumnado para ver su satisfacción con el curso. La encuesta constaba de 6 preguntas con 4 opciones cada una (Apéndice A). Se trata de un cuestionario totalmente anónimo y de carácter voluntario, a la que respondieron un total de 20 alumnos. En las Figura 5 recogemos alguno de los principales resultados. Podemos resumir las conclusiones obtenidas en los siguientes puntos:

• Una gran satisfacción con el curso. A la pregunta ¿cómo valorarías el curso?, 19 alumnos respondieron que útil o muy útil, mientras que sólo un alumno respondió que poco útil. Además, la mayoría de los alumnos recomendarían el curso a un compañero. Esto está en concordancia con los buenos resultados de satisfacción del curso.

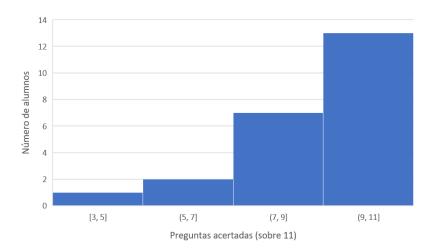


Figura 4. Resultados de la Prueba de Evaluación

- El ritmo del curso resultó algo rápido a algunos alumnos, mientras que a la mayoría les resultó adecuado. Sólo dos alumnos consideraron que había tenido un ritmo lento. Esto es explicable con la gran cantidad de materia en sólo 6 sesiones. Sería importante, por tanto, barajar la posibilidad de alargar un poco la duración del curso. También se plantea la opción de dar tutorías personales a aquellos alumnos que sientan que el ritmo es demasiado elevado.
- Si bien el tema que más había gustado varía mucho entre los alumnos, la mitad de ellos eligieron *Análisis gráfico y tests estadísticos*, lo que lleva a pensar sobre la eficacia de los sistemas de visualización para estudiantes con poco conocimiento de la materia [4].
- Más de la mitad de los alumnos dieron una valoración muy buena al material didáctico proporcionado. Esto, acompañado de las valoraciones personales de los alumnos a lo largo del curso, refuerza la importancia de dar al alumno una guía que ayude en esa labor de auto-aprendizaje.

## 4. Conclusiones

En el curso 2019-2020 se impartió el curso "Análisis de Datos con R" dentro de la inciativa "Compumates", de la Facultad de CC. Matemáticas, UCM. Este curso, ofrecido de manera gratuita, surgió con dos objetivos principales:

- 1. Proporcionar a todos los alumnos de la Facultad la opción de formarse en esta materia, con independencia de la titulación al que pertenezcan o al curso académico en el que se encuentren.
- 2. Ofrecer a los alumnos una formación básica que les permita acceder con más facilidad a un mercado de trabajo que cada vez valora más este tipo de conocimientos.

Como hemos visto a lo largo del artículo, el curso tuvo una gran acogida entre los estudiantes, sobre todo entre aquellos con titulaciones más teóricas (como el grado en *Matemáticas* y el doble grado en *Matemáticas* y *Física*). El curso constó de 6 sesiones de 2 horas cada una, en las

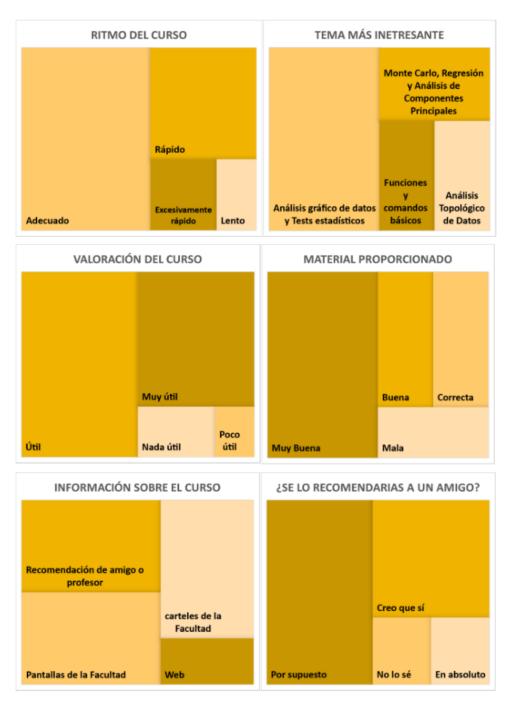


Figura 5. Resultados de la Encuesta de Satisfacción

que se enseñó desde la instalación del Software y ejecución de comandos básicos, hasta la aplicación de diversas técnicas estadísticas de análisis y predicción. Dada la naturaleza matemática de todos los alumnos, se dieron algunas pinceladas del análisis de datos topológico, área en pleno crecimiento en los últimos años. Mediante una prueba de evaluación, los alumnos acreditaron con grandes resultados su aprovechamiento del curso. Gracias a los resultados obtenidos de una encuesta final, voluntaria y anónima, vemos gran satisfacción entre los alumnos, que valoran muy positivamente que se les proporcione un manual para seguir el curso. Si bien todos los temas vistos son del agrado de los alumnos, el tema que recibe una valoración más alta es el de análisis gráfico de datos. Sin embargo, parece que el curso resulta rápido o excesivamente rápido para algunos estudiantes.

Tras la realización del curso y las conclusiones obtenidas de él, parece claro lo positivo de volver a realizar esta actividad en el futuro. Ahora bien, planteamos los siguientes puntos a desarrollar o mejorar en esa futura práctica:

- Pese a que el curso estaba dirigido a cualquier estudiante, con independencia de su facultad o universidad, en esta edición sólo hubo alumnos de la propia facultad. Si bien eso tiene sus ventajas, como asegurar unas bases de conocimiento comunes entre todos los alumnos, evita en gran medida la transversalidad de conocimiento [1]. Si la actividad sigue siendo abierta en un futuro, seria necesario mejorar su publicidad fuera del centro.
- El ritmo del curso resultó generalmente adecuado, pero unos pocos alumnos sintieron que éste era excesivamente rápido. Podría ser interesante ampliar el número de sesiones, o incluso reducir el número de alumnos en el curso, para poder hacer un seguimiento más personalizado. También se plantea la inclusión de horas de tutoría, para aquellos alumnos a los que les cueste más seguir el ritmo.
- La proporción de un manual didáctico surgió como respuesta a las sugerencias recibidas en una primera edición. La respuesta ha sido muy positiva, por lo que se ve necesaria la continua actualización y revisión del mismo.
- Dado que uno de los objetivos principales del curso es ayudar a los alumnos en su formación para la búsqueda de trabajo, sería interesante hacer un seguimiento posterior, en el que los propios alumnos valoraran si el curso les ha ayudado en su búsqueda de trabajo o qué mejoras proponen a posteriori.

# A. Encuesta de Satisfacción

- 1. ¿Cómo valoras el curso?
  - a) Muy útil
  - b) Útil
  - c) Poco útil
  - d) Nada útil
- 2. El ritmo del curso ha sido...
  - a) Excesivamente rápido
  - b) Rápido
  - c) Adecuado
  - d) Lento
- 3. ¿Qué tema te ha interesado más?
  - a) Funciones y comandos básicos (bucles, condicionales...)
  - b) Montecarlo, Modelos de regresión y análisis de componentes principales
  - c) Análisis gráfico de datos y Tests estadísticos
  - d) Análisis topológico de datos
- 4. ¿Qué valoración das a las notas y material proporcionado?
  - a) Muy buena
  - b) Buena
  - c) Correcta
  - d) Mala
- 5. ¿Se lo recomendarías a un amig@?
  - a) Por supuesto
  - b) Creo que sí
  - c) No lo sé
  - d) En absoluto
- 6. ¿Cómo te enteraste de la existencia de este curso?
  - a) Carteles pegados por la facultad
  - b) Página web
  - c) Pantallas de la facultad
  - d) Recomendación de un amigo o profesor

# Referencias

- [1] BLANCO SANDÍA, M. D. L. Á, CORCHUELO MARTÍNEZ-AZUA, B., CORRALES DIOS, N., & LÓPEZ REY, M. J. Ventajas de la interdisciplinariedad en el aprendizaje: experiencias innovadoras en la educación superior. XI Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria, 2014.
- [2] CARLSSON, G. *Topology and data*. Bulletin of the American Mathematical Society, 2009, vol. 46, no 2, p. 255-308.
- [3] CASTILLA, E., & CHOCANO, P.J. Análisis de Datos con R, 2020. https://sites.google.com/view/elenacastillagonzlez/home/teaching/teaching/ https://sites.google.com/view/pedrojchocanofeito/home/teaching-and-notes/
- [4] COMPAÑ-ROSIQUE, P., SATORRE-CUERDA, R., LLORENS-LARGO, F. & MOLINA-CARMONA, R. Enseñando a programar: un camino directo para desarrollar el pensamiento computacional. Revista de Educación a Distancia, 2015.
- [5] FERNÁNDEZ-VEGA, I., JIMÉNEZ, J. & QUIRÓS, L. M. Uso de la app Kahoot para cuantificar el grado de atención del alumno en la asignatura de Anatomía Patológica en Medicina y evaluación de la experiencia. Educación Médica, 2020.
- [6] GHRIST, R. *Barcodes: the persistent topology of data*. Bulletin of the American Mathematical Society, 2008, vol. 45, no 1, p. 61-75.
- [7] REXER, K., GEARAN, P., & ALLEN, H. *Data science survey*. Rexer Analytics. Winchester, Massachusetts, 2015.
- [8] ROBERT, A., Muenchen. The popularity of data analysis software, 2019. http://r4stats.com/articles/popularity/
- [9] SEMPERE, F. Kahoot como herramienta de autoevaluación en la universidad. IN-RED 2018. IV Congreso Nacional de Innovación Educativa y Docencia en Red. Editorial Universitat Politècnica de València, 2018.

#### Sobre el/los autor/es:

Nombre: Elena Castilla González Correo electrónico: elecasti@ucm.es

*Institución:* Becaria FPU en el Departamento de Estadística e Investigacaión Operativa I, Universidad Complutense de Madrid.

Nombre: Pedro J. Chocano Feito Correo electrónico: pedrocho@ucm.es

*Institución:* Becario FPI en el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid.

# Geometría eres tú You are Geometry

## María Jesús Vázquez-Gallo

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 069–089, ISSN 2174-0410 Recepción: 9 jul'20; Aceptación: 1 sep'20

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

Hay toda una constelación de proteínas presentes en el cuerpo humano que expresan nuestro material genético y determinan el funcionamiento de nuestras células. Una mutación en uno de nuestros genes puede producir un cambio en una de esas proteínas que origina cierta enfermedad. Además, los virus pueden entrar en las células usando proteínas, como la proteína S de los coronavirus que forma espículas para adherirse a nuestras células. Pero, a la vez, se pueden diseñar vacunas fabricando proteínas en las que se encajen geométricamente nuestros anticuerpos, activando nuestro sistema inmunológico. Entendemos un cambio cuando comprendemos lo que ha permanecido sin alterarse tras él. Las diversas geometrías consideran propiedades que no varían -son invariantes- cuando actúa cierto grupo de transformaciones o simetrías. El concepto de grupo de simetrías tiene aplicaciones, no solo estéticamente, sino como algo constitutivo del espacio físico y de la biología. Los grupos de simetría influyen en las composiciones artísticas en bellas artes, en música o en poesía, pero también gobiernan el comportamiento de las partículas elementales de la física, de las conexiones neuronales, de la configuración de nuestro material genético y de la función de nuestras proteínas, así que somos geometría.

Palabras Clave: geometría, simetría, grupo, invariante, física, biología, proteína, virus.

#### **Abstract**

There is a constellation of proteins present in the human body that express our genetic material and determine the function of our cells. A mutation in our genes can produce a change in one of those proteins that causes disease. Viruses can enter cells using proteins, such as the coronavirus protein S that forms spicules to adhere to our cells. But, at the same time, vaccines can be designed by manufacturing proteins in which our antibodies geometrically fit, activating our immune system. We understand a change when we understand what has remained unchanged after that change. The different geometries consider properties that do not vary –that are invariant- under the action of a certain group of transformations or symmetries. The concept of group of symmetries has applications, not only aesthetically, but as something constitutive of the physical space and of the biology. Symmetry groups influence the artistic compositions in fine arts, music or poetry but they also govern the behavior of the elementary particles of physics, of the neural connections, of the configuration of our genetic material and of the function of our proteins, so we are geometry.

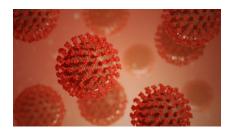
Keywords: Geometry, symmetry, group, invariant, Physics, Biology, protein, virus.

María Jesús Vázquez-Gallo Historias de Matemáticas

# 1. Introducción

La geometría -en sus orígenes, medida de la tierra- como disciplina de la matemática que se ocupa de comprender el espacio, está relacionada necesariamente con muchos otros campos de la matemática y de la física. Los conceptos y resultados geométricos subyacen de manera clara en multitud de aplicaciones prácticas como la cartografía, la óptica, la visión artificial, la animación por ordenador, la robótica, el diseño industrial o las estructuras de la ingeniería y de la arquitectura. Pero la ubicuidad de la geometría va más allá, pues ejerce su influencia a cualquier escala, gobernando desde las interacciones entre las partículas fundamentales, a nivel subatómico, a la evolución del universo, a nivel cosmológico, y desde la estructura de los minerales y la configuración vegetal a nuestra propia organización como seres vivos.

Los virus son organismos acelulares muy primitivos formados por asociaciones estructuradas de moléculas, con un tamaño minúsculo que varía entre unos 10 y unos 300 nanómetros. Un nanómetro (nm) es la unidad de longitud equivalente a una millonésima parte de un milímetro, es decir, 1 nm corresponde a 10-9 metros, algo así como el resultado de dividir por 50.000 el grosor de uno de nuestros cabellos. Los virus son la causa de muchas enfermedades de los seres vivos. De los dos ácidos nucleicos, ácido desoxirribonucleico o ADN y ácido ribonucleico o ARN, que contienen la información genética con la que se desarrollan las formas superiores de vida, los virus solo poseen uno de ellos y no pueden reproducirse por sí mismos. Ese único tipo de ácido nucleico presente en un virus va protegido por una capa llamada cápside, compuesta por unidades de estructura que se agrupan en unidades morfológicas, los capsómeros, de tal manera que la estructura final del cápside, helicoidal en unos casos y poliédrica en otros, forme un sello eficaz para contener el ácido nucleico. Un virus permanece inerte hasta que se introduce en una célula viva y la utiliza para replicar su ácido nucleico, con el fin de multiplicarse y liberarse, habiendo causado un daño en el proceso que puede llegar a la muerte de la célula.



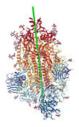


Fig. 1. Izquierda: Recreación de coronavirus (<a href="http://pixabay.com">http://pixabay.com</a>). Derecha: Esquema tridimensional de la proteína S del coronavirus (<a href="https://www.rcsb.org/pdb/">https://www.rcsb.org/pdb/</a>).

Los coronavirus (CoV), pertenecientes a la familia *Coronaviridae*, subfamilia *Orthocononavirinae*, son patógenos reconocidos en humanos, mamíferos y aves. Los coronavirus humanos, encontrados por primera vez hacia 1960 en las fosas nasales de pacientes con resfriado común, tienen un tamaño de 120 a 160 nm. Presentan cápside helicoidal y una envoltura externa en la que se encuentran al menos 3 estructuras proteicas: la proteína M de membrana, la proteína E de ensamblaje viral, y la proteína S de las espículas (spikes, en inglés)

implicada en la penetración del virus en las células huésped. Esas espículas dan a la parte externa del virus la apariencia de una corona, y de ahí su nombre.

Hay varias cepas diferentes de coronavirus, entre ellas las que habitualmente infectan a cualquier persona en diversos momentos de su vida, causando conjuntivitis, resfriados o problemas gastrointestinales. Pero también hay variedades que producen problemas respiratorios que pueden llegar a ser graves, como el SARS-CoV, MERS-CoV y la catalogada como 2019-nCoV o COVID-19, causante de una pandemia en 2020.

Además de estar presentes en los virus, afectando al modo en el que se produce una infección, las proteínas son sustancias constituyentes de la materia viva que expresan el material genético y regulan la actividad celular, entre otras muchas funciones. Un gen es una unidad funcional situada en cierta posición o locus en la estructura de doble hélice del ADN que se ocupa de codificar un producto específico, como proteínas, ARN y otros. Esas estructuras de ADN comprimidas forman los cromosomas que están contenidos en las células y controlan sus actividades. Cada gen consiste en una larga secuencia de las cuatro bases nitrogenadas del ADN -adenina (A), timina (T), citosina (C) y guanina (G)-.

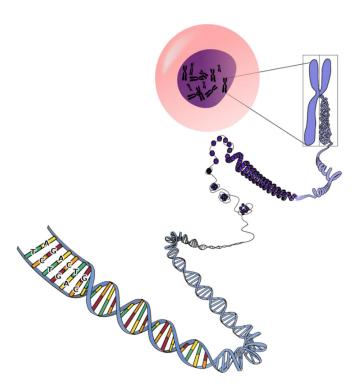


Fig. 2. Doble hélice de ADN. Genes y cromosomas (http://pixabay.com).

En el proceso de formación de las proteínas, cierto tipo de ARN va leyendo la secuencia de bases del gen, de modo que cada triplete de bases da lugar a un aminoácido. El grupo amino  $(NH_2)$  de cada aminoácido se va enlazando con el grupo carboxilo (COOH) de otro, dando lugar a una cadena o estructura lineal de aminoácidos que, cuando alcanza una estructura estable, se denomina proteína. Hay una variedad enorme de proteínas en los seres vivos, sin que todavía esté claro cuántas diferente existen, pero todas ellas se forman a partir de veinte tipos distintos de aminoácidos [Saint-Léger et al., 2016]. A veces, por efectos ambientales, por herencia o por

la propia evolución, sucede una mutación en un gen y se altera la cadena de aminoácidos de las proteínas que lo expresan, pudiendo causar enfermedades.

Así que una proteína defectuosa puede originar enfermedades o una proteína presente en un virus puede facilitar su entrada en nuestro organismo pero, a la vez, algunas de las vacunas frente a virus están basadas en el diseño de proteínas adecuadas. Estas proteínas de las vacunas actúan como antígenos. Cuando en la sangre, una célula de tipo linfocito B se encuentra con su antígeno desencadenante, produce abundantes células plasmáticas que actúan como fábricas donde se generan anticuerpos específicos para ese antígeno. Cada anticuerpo se encaja en su antígeno a través de un acoplamiento estructural específico, como en la Figura 3 [Graille, 2001] y lo deja marcado para su destrucción. De esta manera, la inmunidad adquirida depende de la interacción antígeno-anticuerpo, en la que cada anticuerpo es estructuralmente específico para cada tipo de antígeno.

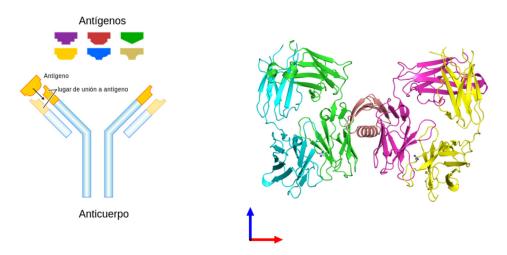


Fig. 3. Izquierda: Esquema unión antígeno-anticuerpo (https://es.wikipedia.org/wiki/Ant%C3%ADgeno). Derecha: Esquema complejo antígeno-anticuerpo de un estreptococo y un anticuerpo humano (https://www.ebi.ac.uk/pdbe/entry/pdb/1hez).

Desgraciadamente, en ocasiones las proteínas que constituyen nuestros anticuerpos interpretan a nuestras propias moléculas como antígenos y desencadenan respuestas inesperadas, generando enfermedades autoinmunes, a veces muy graves. En este tipo de enfermedades, la naturaleza exacta de la interacción antígeno-anticuerpo todavía plantea muchas incógnitas.

En resumen, entender la estructura geométrica de las proteínas puede contribuir a determinar cómo se comportan y cómo les afectan las mutaciones, con el fin de evitar enfermedades y de diseñar medicamentos y vacunas.

Queremos adentrarnos en la comprensión del espacio, en el paraíso de la geometría, descubriendo que la geometría es simetría en un sentido que precisaremos, que la simetría se relaciona con el concepto matemático de grupo y que conceptos abstractos como el de grupo de simetría pueden servir para explicar nuestro mundo y para mejorarlo.

## 2. Geometría: simetrías y grupos.

Comprender el espacio a través de sus medidas es algo que ya comenzaron a hacer los babilonios, en Oriente Medio, hace más de tres mil años. A base de prueba y error, fueron capaces de medir longitudes, áreas y volúmenes, e incluso cultivaron la astronomía. Con la caída de Babilonia unos seis siglos antes de Cristo, sus conocimientos se fundieron con los de egipcios y griegos. Los griegos convirtieron la geometría en una ciencia deductiva. Euclides (325 - 265 a. C.) recopiló el conocimiento matemático de su época en los trece volúmenes de los *Elementos*. En esta obra, utilizando como base cinco *axiomas o postulados* evidentes –como que dos puntos determinan un segmento de recta- se deducían, usando argumentos lógicos, numerosos resultados como el famoso *teorema de Pitágoras*, que constituyen el elegante edificio de la *geometría euclídea*, el único durante dos milenios... Hasta que G. Saccheri (1667-1733), entre otros, sugirió que quizá podía existir otra geometría distinta, con un quinto postulado diferente...

#### El quinto postulado de Euclides afirmaba:

... si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos...

Este postulado era el de enunciado más complicado y no se utilizaba en la demostración de las veintiocho primeras proposiciones de los Elementos. Esto hizo suponer que quizá era una consecuencia de los otros cuatro postulados y hubo muchos intentos de demostrarlo a partir de ellos. Nadie lo consiguió. Se comprobó que el quinto postulado era equivalente a otros enunciados como por ejemplo:

En un plano, dada una recta y un punto que no está en ella, a lo sumo se puede trazar por el punto una recta paralela a la dada.

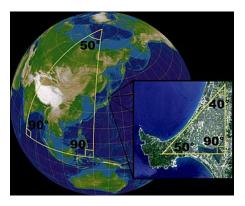
#### O también:

La suma de (las medidas de) los ángulos de cualquier triángulo es igual a (la suma de las medidas de) dos ángulos rectos.

De manera análoga, se puede ver que el hecho de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo sea menor (respectivamente, mayor) que dos ángulos rectos equivale al hecho de que por un punto exterior a una recta, haya más de una recta paralela a la dada (respectivamente, no exista ninguna).

Si en una hoja de papel dibujamos un triángulo cualquiera, las medidas de sus ángulos siempre suman 180°, y si dibujamos una recta y un punto exterior a ella, resulta evidente que solo podemos trazar una recta por dicho punto que sea *paralela* a la recta dada (y por tanto, no la corte).

Pero, en la superficie de una silla de montar, los ángulos de un triángulo parecen estrecharse y sumar una cantidad menor de 180°. Y sobre la piel de una naranja o de una esfera, sin embargo, los ángulos de un triángulo parecen agrandarse y sumar más de 180°. En una esfera tampoco se cumple el quinto postulado de Euclides puesto que en una esfera las "rectas", como camino más corto entre dos puntos, son los círculos máximos (los meridianos del globo terráqueo) y cada pareja de círculos máximos se corta en dos puntos (los polos).



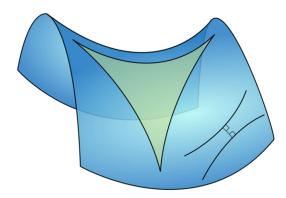


Fig. 4. Izquierda: Geometría elíptica. Imagen: Lars H. Rohwedder, Sarregouset (Licencia GFDL and CC-By-SA). Derecha: Geometría hiperbólica. <a href="https://es.wikipedia.org">https://es.wikipedia.org</a>

Así que, como intuyó Saccheri, como imaginó C. F. Gauss (1777-1855) sin llegar a publicarlo, y como descubrieron, primero, J. Bolyai (1802-1860) y N. Lobachevsky (1792-1856) - independientemente- y después, B. Riemann (1826-1866), ¡sí!, ¡existen otras geometrías, y son distintas de la euclídea! En ellas, las premisas han cambiado pero el edificio geométrico sigue siendo consistente. Se trata de empezar con unas reglas de juego diferentes a los cinco postulados de Euclides y la geometría que resulta también es diferente. Con los cuatro primeros postulados de Euclides y el hecho de la suma de ángulos de un triángulo sea menor que 180°, se construye la *geometría hiperbólica* de Bolyai y Lobachevsky, y cambiando menor por mayor en este último postulado, se tiene la *geometría elíptica* de Riemann (que incluye la geometría esférica).

En el siglo XIX se desarrollaron más geometrías, como la *geometría proyectiva* cuyos antecedentes se remontan a los teorema proyectivos de Pappus de Alejandría, en el siglo III, y a los problemas de perspectiva en el contexto artístico del Renacimiento [Vázquez-Gallo, 2002]. Esta geometría refleja el funcionamiento de la visión humana cuando, al mirar a lo lejos, las vías del tren parecen cortarse en un punto del horizonte. Pero aún hubo más geometrías, la *geometría conforme*, la *geometría diferencial*, etc. Distintas abstracciones que acaban formando parte de cómo entendemos la realidad.





Fig. 5. Izquierda: grabado de Durero (1471-1528) sobre perspectiva (<a href="http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/durero.html">http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/durero.html</a>).

Derecha: percepción visual de rectas paralelas cortándose en un punto del horizonte (<a href="http://pixabay.com">http://pixabay.com</a>).

La utilidad de estas nuevas geometrías que, en un principio, despertaban incredulidad y desconfianza, se iba a hacer patente en muchas ocasiones. En una de ellas, H. Poincaré (1854-

1912) y A. Einstein (1879-1955), independientemente, emplearon una *geometría pseudoeuclídea* como marco en la teoría de la *relatividad especial* que describe eventos o sucesos espaciotemporales en ausencia de gravedad y que explica los efectos de dilatación del tiempo o de contracción del espacio. Aunque estos efectos vayan en contra de nuestra intuición y no los percibamos directamente, intervienen en parte de la tecnología moderna, por ejemplo, en los sistemas de posicionamiento global o GPS [Fuente et al, 2020].

Ante esta gran variedad de geometrías, S. Lie (1842-1899), H. Poincaré (1854-1912) y F. Klein (1849-1925), con su *Programa Erlangen*, encontraron el principio unificador de todas ellas, al caracterizar cada *geometría*, no por sus objetos típicos -como circunferencias, polígonos, poliedros, etc., en la geometría euclídea,- sino por el *grupo de transformaciones* del espacio que la mantienen inalterada, que no la cambian. Así, por ejemplo, la geometría euclídea es la que no se altera cuando se le aplica cualquier traslación, rotación o reflejo, o una combinación de ellos, es decir, un *movimiento rígido* cualquiera, que conserva distancias y ángulos. Una circunferencia sigue siendo la misma si la trasladamos, giramos o reflejamos, y lo mismo ocurre con un triángulo, con un hexaedro, etc. Por otro lado, en la geometría proyectiva, las transformaciones consideradas son *proyecciones* que no mantienen ángulos ni distancias, pero sí envían rectas a rectas y dejan invariantes propiedades como la incidencia, es decir, el hecho de que un punto pertenezca a una recta o a un plano, y la razón doble de 4 puntos alineados.

Bajo este principio, una colección concreta de transformaciones da lugar a una geometría particular cuyas propiedades típicas son las que no se alteran por las transformaciones consideradas. Esta colección de transformaciones se denomina *grupo de simetrías*. El diccionario define "simetría" como una correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo. Eso es lo que percibimos cuando una mariposa cierra sus alas y por eso decimos que es simétrica: sus mitades parecen ser el reflejo la una de la otra, tomando como espejo un eje a lo largo de su cuerpo.



Fig. 6. Simetría de la mariposa: reflejo respecto a un eje (http://pixabay.com).

La simetría produce en nosotros una sensación particular de armonía y belleza, y no solo está presente en la Naturaleza, sino también en multitud de composiciones pictóricas, arquitectónicas, musicales y poéticas, como en la rima XXI del romántico G.A. Bécquer (1836-1870) a la que alude el título de este trabajo (alusión que ya utilizó C. Alsina [Alsina et al., 1997]).

¿Qué es poesía?, dices mientras clavas en mi pupila tu pupila azul.

¿Qué es poesía? ¿Y tú me lo preguntas? Poesía... eres tú.

En la jerga matemática, el término simetría se refiere precisamente a esa correspondencia entre partes que señala el diccionario. En el caso de la mariposa, simplificando y asumiendo que fuera plana, la simetría es el reflejo a lo largo del eje que recorre su cuerpo y lo que se queda invariante es la imagen de la mariposa con las alas abiertas. *Una simetría es una transformación que deja algo inalterado o invariante*. En el lenguaje común, la palabra simetría suele indicar este tipo de simetría bilateral - reflejo respecto a eje o reflejo respecto a plano- frecuente en el reino animal, en los objetos diseñados para llevar en nuestro cuerpo o en multitud de objetos artificiales como utensilios, muebles, vehículos, fachadas de edificios, etc. También una circunferencia posee este tipo de simetría bilateral aún más rica porque el reflejo respecto a cualquiera de sus diámetros no cambia. Un reflejo es un ejemplo de simetría muy común y, de hecho, lo más habitual es llamar simetría a un reflejo pero ¡hay más!, existen simetrías que no son reflejos, aunque no tengamos tanta costumbre de percibirlas.

Por ejemplo, si escogemos un ángulo y un punto en un plano, la transformación que consiste en girar alrededor de ese punto ese ángulo, movería cada punto de una circunferencia cuyo centro sea el punto elegido, mientras que la circunferencia como un todo, no cambiaría. El giro la dejaría invariante y por tanto decimos que cualquiera de esos giros es una simetría de la circunferencia.

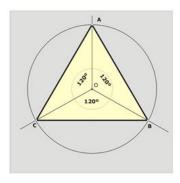


Fig. 7. Circunferencia y triángulo equilátero (http://recursostic.educacion.es/artes/plastic/web/cms/index.php?id=3691).

Sin embargo, al aplicar estos giros a un triángulo equilátero centrado en el punto escogido, la posición del triángulo cambiaría excepto cuando el ángulo es 120°, 240° ó 360° (que equivale al giro de 0°) o cualquier múltiplo (entero) suyo -que tiene el mismo efecto y no se considera un nuevo giro-. Con estos tres giros, el triángulo equilátero permanece invariante: mirándolo antes y después sería imposible detectar si esa transformación ha sucedido o no. Así que estos tres giros también son simetrías del triángulo equilátero. Y si consideramos reflejos para el triángulo equilátero, observamos que solo escogiendo como eje una recta que vaya de un vértice al punto medio del lado opuesto (una *mediana*), el triángulo quedará invariante.

Se puede comprobar que las simetrías que dejan invariante un triángulo equilátero son los tres giros y los tres reflejos descritos antes, en total seis transformaciones. Si hacemos que actúe una simetría detrás de otra, es decir, componemos dos de estas simetrías, la transformación que resulta vuelve a dejar el triángulo equilátero invariante, con lo cual tiene que ser una de esas

seis transformaciones. En lenguaje matemático, esto se describe diciendo que la *composición* es una *operación cerrada* en el conjunto de las seis simetrías, ya que al combinarlas con esa operación, "no se salen fuera" del conjunto.

¿Pero qué ocurrirá cuando componemos tres de estas simetrías? Según lo anterior, se obtendrá otra simetría de la colección y, además, se puede comprobar que todo funciona bien, es decir, se obtiene la misma simetría *asociándolas* de dos maneras diferentes. Llamando  $s_1, s_2$  y  $s_3$  a las tres simetrías, para no perderlas de vista: si la simetría  $s_3$  actúa tras la que resulta de componer  $s_1$  con  $s_2$ , se obtiene la misma simetría que componiendo primero  $s_2$  con  $s_3$  y haciendo actuar la simetría que resulta tras  $s_1$ . Usando "  $\circ$  " como símbolo para la composición, se cumple siempre:  $s_3 \circ (s_2 \circ s_1) = (s_3 \circ s_2) \circ s_1$ .

Por supuesto, al componer una simetría cualquiera de un triángulo equilátero con el giro de 360°, que equivale al giro de 0°, como este giro no produce ningún efecto, el resultado de la composición es la simetría original -por eso al giro de 0° se le denomina *identidad*-. Y es posible encontrar, para cada simetría de la colección, otra con el efecto *opuesto o inverso*, es decir tal que al componerlas en cualquier orden el resultado es la identidad (es como no hacer nada). Por ejemplo, la simetría inversa del giro de 120° es el giro de 240° y la inversa de cualquier reflejo es el mismo reflejo.

Así que este *grupo* de simetrías de un triángulo equilátero no es un grupo cualquiera, no es un conjunto sin más sino que, cuando lo consideramos con la *operación de composición*, sucede que la operación es *cerrada*, es *asociativa*, hay un elemento *identidad* y cada elemento tiene un *opuesto o inverso*. Este es el concepto abstracto de grupo: un conjunto con una operación tal que se cumplen las propiedades mencionadas.

	$g_0 = I$	$g_{120}$	$g_{240}$	$L_1$	$L_2$	$L_3$
$g_0 = I$	I	$g_{120}$	$g_{240}$	$L_1$	$L_2$	$L_3$
$g_{120}$	$g_{120}$	$g_{240}$	I	$L_3$	$L_1$	$L_2$
$g_{240}$	$g_{240}$	I	$g_{120}$	$L_2$	$L_3$	$L_1$
$L_1$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	Ι	$g_{120}$	$g_{240}$
$L_2$	$L_2$	$L_3$	$L_1$	$g_{240}$	Ι	$g_{120}$
$L_3$	$L_3$	$L_1$	$L_2$	$g_{120}$	$g_{240}$	Ι

Fig. 8. Tabla del grupo de simetrías de un triángulo equilátero que resume su estructura.  $L_i$  denota el reflejo respecto a la mediana que pasa por el vértice número i.

Se podría pensar que en la definición de grupo falta una propiedad muy familiar, la conmutativa, es decir, que cuando se operan dos elementos del conjunto, el orden no afecta. Pero la conmutatividad se considera una propiedad extra para un grupo y a los que la poseen se les llama *grupos conmutativos o abelianos* -por N. H. Abel (1802-1829) que aparecerá enseguida. El grupo de simetrías de un triángulo equilátero (con la composición) no es abeliano, como puede verse fácilmente en su tabla de grupo de la Figura 8, que no es simétrica.

También existen grupos que no tienen un número finito de elementos, como el grupo de simetrías de una circunferencia pues incluye a los giros de cualquier ángulo alrededor de su centro y a los reflejos respecto a cualquier diámetro de la circunferencia.

Hay grupos discretos, finitos o no, cuyos elementos están aislados. El grupo de las simetrías de un triángulo equilátero y el grupo que forman los números enteros con la operación suma son ejemplos de grupos discretos. El grupo de simetrías de una circunferencia no lo es.

El grupo de las simetrías de un triángulo equilátero es un ejemplo de *grupo diédrico*,  $D_n$ , que, en general, describe las simetrías de un polígono regular de n lados y, su orden es 2n ya que contiene n reflejos y n giros. Estos n giros forman por sí mismos otro grupo más pequeño –un subgrupo del grupo diédrico- llamado grupo cíclico de orden n,  $C_n$ , en el que cada giro se puede generar componiendo cierto número de veces un mismo giro, el de ángulo una n-ésima parte de  $360^\circ$  alrededor del centro del polígono, como se observa en la subtabla morada de la Figura 8. Es claro que los grupos cíclicos son abelianos. Los grupos cíclicos y los grupos diédricos, como grupos de transformaciones del plano, se conocen como grupos de Leonardo ya que el mismísimo Leonardo da Vinci (1452-1519) estudió estos grupos, utilizados en el Renacimiento para proyectar plantas de capillas adyacentes a un núcleo central, manteniendo la simetría central [Moratalla y Sanz, 2008]. Un grupo de Leonardo es entonces un grupo puntual, es decir, un grupo de simetrías de cierta figura, todas ellas con un punto invariante en común, el centro de simetría.



Fig. 9. Planta, secciones y capiteles del Cristo de la Luz en Toledo. MARTÍNEZ APARICI, DOMINGO, CALCOGRAFÍA NACIONAL, PICÓN GARCÍA, JOSÉ. Copyright de la imagen ©Museo Nacional del Prado.

El concepto abstracto de *grupo* es un ejemplo de *estructura* matemática y, como tal, constituye una potente herramienta de reconocimiento de patrones: puede haber dos colecciones de elementos completamente distintas, pero que posean la misma estructura (que sean *isomorfas*) y eso permite tratar a las dos colecciones de la misma manera y trasladar resultados de un contexto a otro. Por ejemplo, el grupo de los giros alrededor de un punto de cualquier ángulo con la operación de composición es isomorfo al de los números complejos de módulo o tamaño 1 con la multiplicación [Dorronsoro y Hernández, 1996].

La definición de grupo, como pareja de conjunto y operación con ciertas propiedades, se extiende a la de grupo topológico o grupo continuo, cuando a esa pareja se le añade una topología

compatible con la operación de grupo –es decir, la operación del grupo y la inversión son aplicaciones *continuas*-. Entre los grupos topológicos se encuentran los *grupos de Lie*, aquellos que además tienen estructura de *variedad diferenciable* y las aplicaciones anteriores son *diferenciables* [Fulton y Harris, 2004]. Por ejemplo, el conjunto de los números reales no nulos con la multiplicación es un grupo de Lie. Los grupos de Lie proveen del lenguaje para manejar las simetrías de las *ecuaciones diferenciales* tan frecuentes en los modelos físicos.

En la próxima sección veremos cómo los grupos, en general, juegan un papel central no solo en física, sino también en biología, pero antes, veamos otro ejemplo importante de grupo.

Un grupo con seis elementos, los que tenía el grupo de simetrías de un triángulo equilátero, es el de las posibles ordenaciones o *permutaciones* de un conjunto de tres elementos, digamos  $\{a,b,c\}$ , que son  $\{abc,acb,bac,bca,cab,cba\}$ . Pensemos en cada permutación como una *simetría* del conjunto que forman (puesto que al reordenar los elementos de un conjunto, este no cambia, permanece invariante). Entonces, es sencillo comprobar que el conjunto de estas seis permutaciones es un grupo con la composición, conocido como *grupo simétrico de 3 elementos* y que, en general, las  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  permutaciones de n elementos dan lugar al *grupo simétrico de n* elementos, o  $S_n$  para abreviar.

El grupo simétrico no es un ejemplo más de grupo, pues el *teorema de Cayley* (1821-1895) afirma que todo grupo finito es *isomorfo* a un subgrupo de un grupo simétrico, es decir, ambos tienen la misma tabla. ¿Serán isomorfos los grupos  $D_3$  y  $S_3$ ? ¿Lo serán  $D_n$  y  $S_n$ ? Se trata de reconocer cuándo dos estructuras o esqueletos son iguales o no, aunque su apariencia externa pueda ser similar.

De hecho, Cayley se percató de que las permutaciones, las matrices (con la operación producto) y los cuaterniones (también con el producto) compartían la misma estructura. Antes de que surgiera el concepto axiomático de grupo tras los resultados de Cayley, se trabajaba directamente con colecciones de permutaciones. Eso tuvo tiempo de hacer E. Galois (1811-1832) en su corta vida, al proponer una teoría revolucionaria, según la cual, el que exista una fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación polinómica –como la que solemos aprender para resolver una ecuación de segundo grado- depende del comportamiento de la colección de permutaciones de las supuestas soluciones, es decir, del grupo de simetrías del conjunto de soluciones de la ecuación, que acabó llamándose grupo de Galois. En relación con los trabajos de Galois, el matemático noruego Abel, que también murió muy joven, en 1824 demostró por reducción al absurdo que lo que tanto se había buscado durante tres siglos -esto es, una fórmula algebraica que diera las soluciones de una ecuación polinómica de quinto grado en función de sus coeficientes- ¡no podía existir! [Sánchez Muñoz, 2011].

En líneas generales, la demostración plantea que si existiera tal fórmula, el grupo simétrico de orden 5,  $S_5$ , con sus 5! = 120 permutaciones, debería poseer una cadena de *subgrupos normales* -un subgrupo H de un grupo G es normal cuando los elementos de G conmutan con los de H-, todos ellos con orden un número *primo*. Eso ocurre con los grupos simétricos de orden 2, 3 y 4 pero, resulta que  $S_5$  posee un subgrupo normal de 60 elementos (el de las permutaciones pares, es decir, permutaciones que se pueden escribir como composición de un número par de transposiciones o intercambios). Se puede ver que este subgrupo de las permutaciones pares de 5 elementos, con orden 60, es un *grupo simple*, o sea, no posee subgrupos normales no triviales (a diferencia de lo que ocurre con los grupos de permutaciones pares de un conjunto de 2, 3 o 4 elementos). Pero entonces, en la cadena de subgrupos normales de  $S_5$ , este subgrupo de permutaciones pares tendría un número de elementos que no es primo. Habríamos llegado a

una contradicción que viene del hecho de suponer que existe una tal fórmula, así que... no puede existir.

Aparte del éxito en cuanto a la resolución de ecuaciones polinómicas y otros temas relacionados, como el de la construcción de polígonos regulares con regla y compás, o la estructura de *cuerpo* y en particular los cuerpos finitos –Galois fields, en inglés- y sus aplicaciones a todo lo relacionado con la informática y las telecomunicaciones, como la criptografía o los códigos detectores y correctores de errores, hay numerosas cuestiones de la matemática en las que el concepto de grupo y los vinculados con él, como el de invariantes o el de simetrías, tienen un papel importante.

Especialmente ubicuo es el problema de clasificar, para lo que se construyen *espacios cociente*, a partir de un espacio inicial dado y una relación de equivalencia establecida en él, de forma que elementos equivalentes del espacio inicial pertenecen a la misma clase y cada elemento del espacio cociente representa a una de esas clases, como una etiqueta en un cajón representa a los objetos de cierta clase que están contenidos en él.

Por ejemplo [Vázquez-Gallo, 2002], para clasificar las direcciones posibles a partir de un punto (distinguiendo en cada una de ellas dos sentidos posibles), se puede considerar el espacio de parejas de coordenadas (reales) con respecto al punto dado, salvo la pareja nula que no determina ningún dirección, y hacer cociente por la relación: dos parejas son equivalentes cuando son proporcionales. Así cada dirección por el punto dado corresponde a infinitas parejas de coordenadas, todas ellas con una proporción fija (digamos segunda coordenada entre primera). Y esta proporción puede ser infinitamente grande cuando la primera coordenada es cero. Identificando cada dirección original con la proporción asociada y señalando este número en una recta, se obtiene una recta proyectiva (real) con un punto en el infinito. De manera análoga, empezando con ternas de coordenadas se puede construir un plano proyectivo (real) con una recta de infinito en su horizonte en la que vemos cortarse las vías del tren, como en la Figura 5 derecha. Este tipo de espacio cociente describe las direcciones por un punto dado de forma geométrica: direcciones "cercanas" entre sí corresponden a puntos cercanos en el espacio cociente.

En general, para construir espacios cociente con buenas propiedades geométricas, D. Mumford (1937-) empleó ideas de la teoría clásica de invariantes para desarrollar la teoría geométrica de invariantes -GIT, por sus siglas en inglés- [Mumford, 1970], por lo que recibió la medalla Fields en 1974. En GIT, la relación de equivalencia viene dada por un grupo (de transformaciones) que actúa en una variedad algebraica (dada por los ceros de unos cuantos polinomios), o en espacios más generales como los esquemas, de forma que las clases de equivalencia son las órbitas buenas o estables del grupo y de este modo el espacio cociente resultante tiene propiedades geométricas razonables. Se construyeron así espacios de moduli –el término moduli indica variación y lo introdujo Riemann a mediados del siglo XIX- que parametrizan objetos como curvas de cierto tipo (a veces con estructura extra, como un conjunto de puntos marcados), fibrados vectoriales de cierto tipo, fibrados vectoriales (o conjuntos de ellos) con estructura extra, etc. Estos nuevos espacios tienen sus propias características geométricas y topológicas [Muñoz et al, 2008] y, en el contexto de la física matemática, se interpretan como espacios de parámetros de soluciones de ciertas ecuaciones o de ciertos tipos de partículas, relevantes para la moderna teoría de supercuerdas o para el concepto de supersimetría (SUSY, por sus siglas en inglés).

Por cierto, y ya que los grupos son útiles para clasificar, surge el problema de clasificación de los propios grupos (como grupos abstractos). Empecemos considerando los grupos finitos por un lado y los demás por otro.

Para los grupos finitos, en 1889, el *teorema de Jordan-Hölder* implica que cada grupo finito se puede construir usando grupos finitos simples como ladrillos básicos, es decir, los grupos finitos simples son, a los grupos finitos, lo que los números primos a los números naturales. Para los grupos finitos simples, el *teorema "enorme"* dice que cada grupo finito simple o bien es uno de los 26 grupos esporádicos o, si no, pertenece a una de entre 18 familias, pero ¡en cada una de estas familias hay infinitos grupos! [Alegría]. Por ejemplo, una de esas familias es la de los grupos cíclicos con un número primo de elementos. Lo de llamar enorme al teorema viene de que consiste en miles de páginas de resultados de una centena de matemáticos que comenzaron a demostrarse hacia 1940 y terminaron a principios del siglo XXI. Actualmente se trabaja en simplificar demostraciones y en el llamado problema de extensión, es decir, determinar las reglas de construcción de nuevos grupos a partir de grupos finitos simples.

Para los grupos infinitos, dada la inmensa variedad de formas en las que aparecen estos grupos, todavía no existe nada parecido a una clasificación...

Podría parecer que este punto de vista sobre la geometría, que incide en los conceptos de invariancia por un grupo y de grupo de simetrías, es innecesariamente complicado pero, es este enfoque más abstracto el que ha permitido predecir la existencia de ciertas partículas fundamentales subatómicas o el que ayuda a comprender la estructura de las proteínas, como se verá en la próxima sección. Estos versos del Bhagavad-Gita, texto hinduista escrito hacia el siglo III a. C., parecen hechos a medida [Gorini, 1996]...

He who in action sees inaction and in inaction sees action is wise among men. He is united, he has accomplished all action.

# 3. Geometría en Física y Biología

El hecho de que la geometría influya en cuestiones de la realidad física suena razonable pero, la profundidad de esa influencia, de forma que los grupos de simetrías parecen regir lo que sucede en nuestro Universo, es más llamativa. Una de las muestras de esta profunda conexión de las leyes físicas con el concepto abstracto de grupo de simetrías y sus invariantes, puede verse en el trabajo de Emmy Noether (1882-1935), hija del también matemático Max Noether (1844-1921) que, pese a todas las dificultades que encontró por ser mujer y por su ascendencia judía, fue capaz de conectar la simetría del espacio y del tiempo con la compleja dinámica del mundo físico [Cariñena, 2004]. Noether realizó una tesis doctoral sobre invariantes algebraicos y demostró entre otros el imponente teorema de Noether:

Por cada simetría continua de las leyes físicas ha de existir una ley de conservación. Por cada ley de conservación, ha de existir una simetría continua.

De este modo, el que las leyes físicas sean invariantes respecto a cualquier traslación en el espacio da lugar a la ley de conservación del momento o cantidad de movimiento –la masa por el vector velocidad, en mecánica clásica-. Es lo que sucede cuando chocan dos bolas de billar pero también cuando interaccionan los átomos. Y al revés, el hecho comprobado de que el momento se conserva, implica que las leyes físicas no cambian al variar la posición en el espacio. Análogamente, la invariancia de las leyes físicas respecto a rotaciones equivale a la ley de conservación del momento angular y el que las leyes físicas permanezcan invariantes bajo traslaciones en el tiempo equivale a la ley de conservación de la energía.

El propio Einstein expresó su admiración ante este resultado iluminador sobre el papel de la conservación de la energía en el marco de la *relatividad general*, y ante el resto de la obra de E. Noether que se centró en cuestiones algebraicas como la teoría de *anillos* e *ideales*. Incluso intervino en el largo y difícil proceso para que ella obtuviera un puesto en la universidad alemana de Gotinga, a la que había llegado por invitación de Klein, entre otros, si bien el puesto no estuvo a su altura. Con la llegada de los nazis, E. Noether tuvo que emigrar a Estados Unidos, y trabajó en Princeton de forma fructífera y reconocida hasta su muerte [Blanco, 2011]. Einstein escribió un obituario en el New York Times afirmando que E. Noether había desarrollado métodos de enorme importancia y que la matemática pura es la poesía de las ideas lógicas [Lederman y Hill, 2006]. Una vez más: geometría eres tú...

La relatividad general fue concebida por Einstein como una teoría unificadora del espaciotiempo y la gravedad, sin necesidad de realizar experimentos específicos, estableciendo que las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas –bajo cualquier cambio en las coordenadas del espacio-tiempo-. Así que la relatividad general expresa una simetría continua de las leyes físicas, como en el teorema de Noether. Según Einstein, la invariancia por esta simetría implica la existencia de la gravedad que, bajo el principio de equivalencia, es una faceta de la aceleración –en el descenso brusco de un ascensor, sus ocupantes se sentirían ingrávidos, sin peso-. La gravedad/aceleración curva el espacio-tiempo como se comba la red de seguridad de un artista que cae súbitamente. Los planetas al moverse en sus órbitas cerradas y elípticas están en caída libre en un espacio-tiempo curvado. El marco en el que Einstein pudo formular su profunda teoría hacia 1915 fue el de una geometría no euclídea [Livio, 2005].

Y todavía más, en mecánica cuántica, a nivel subatómico, la existencia de algunas partículas fundamentales como los *quarks* que forman parte de protones y neutrones, se predijo gracias los grupos de simetría, en este caso gracias a los grupos de Lie y a las llamadas *representaciones de un grupo* [Gell-Mann, 1995]. Simplificando, las representaciones de un grupo son maneras de asociar a cada elemento del grupo, una matriz cuadrada con determinante no nulo, de forma compatible con la operación del grupo. El tamaño de la matriz es la *dimensión* de la representación. Hacia 1960, se conocía toda una gama de partículas denominadas *hadrones*, los protones y los neutrones eran ejemplos de hadrones pero había muchas más y existía la necesidad de comprenderlas mejor [Livio, 2004; Frenkel, 2015]. Entre todas esas partículas, se conocían 9 vinculadas a una representación de dimensión 10 de cierto grupo de Lie. Fue entonces cuando M. Gell-Mann (1929-2019) conjeturó que debía existir una décima partícula con una serie de propiedades determinadas por la simetría y... dos años después, en un acelerador se detectó esa partícula, la  $\Omega^-$ , con las propiedades predichas por Gell-Mann, lo que le valió el premio Nobel en 1969. Este hecho no era algo aislado porque existen resultados

teóricos de E. Wigner (1902-1995) que garantizan la relación entre simetrías de sistemas cuánticos y representaciones de grupos.

Actualmente, la Física y la Matemática siguen activas para encontrar una visión unificadora total que conectaría la mecánica cuántica con la gravedad. Películas de ciencia ficción como "Interestellar", de C. Nolan (2019), abordan este tema. El modelo estándar describe las fuerzas de electromagnetismo, interacción fuerte e interacción débil, a través de los llamados grupos de *simetría gauge* (que significa calibre o escala pero no suele traducirse) pero aún falta por incluir la gravedad de manera satisfactoria, incluso se debate sobre la existencia real de la supersimetría. En todo caso, parece probable que la eventual teoría física global se escribirá en términos de invariancia por ciertos grupos de simetría.

La faceta matemática de esta visión unificadora, que propone relaciones entre conceptos de áreas muy diversas como las representaciones de grupos y el análisis armónico [Castrillón et al., 2019], se conoce como *Programa Langlands*, por R. Langlands (1936-), el matemático que por azar -o quizá no- ocupa actualmente el mismo despacho que tuvo Einstein en Princeton [Frenkel, 2015].

Así que la geometría y los grupos de simetría se muestran como una potente herramienta de *clasificación* que parece dictar cómo se comporta el mundo físico, pero también lo hace en química y en biología. Los casos en los que este enfoque ha sido útil son numerosos: veamos algunos.

D. Mendeleiev (1834-1907) propuso su *tabla periódica* de los elementos químicos en 1869, bajo la hipótesis de que sus propiedades dependen del patrón de los electrones de sus átomos. La tabla periódica actual es una versión modificada de la propuesta por Mendeleiev. Los modelos atómicos actuales proponen el concepto de *orbitales* o regiones donde la probabilidad de encontrar a los electrones se maximiza. Los orbitales moleculares se obtienen por combinación de orbitales atómicos. Para que dos orbitales se solapen sus grupos de simetría deben tener unas propiedades compatibles. Los grupos de simetría permiten clasificar orbitales atómicos y moleculares y, por tanto, sirven para predecir el comportamiento de los elementos en las reacciones químicas.

En la mayoría de los casos, estos grupos de simetría son grupos de transformaciones en el espacio tridimensional que además son *grupos puntuales* en el sentido de que existe un punto fijo para todos los elementos del grupo (como ocurría en los grupos de Leonardo en el plano). Conocido el grupo puntual molecular se puede adivinar una serie de propiedades, entre ellas, el comportamiento de las vibraciones de los enlaces en moléculas sencillas, midiéndolas bajo luz infrarroja.

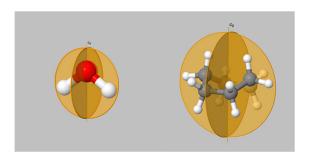


Fig. 10. El agua  $(H_2O)$  y el ciclohexano  $(C_6H_{12})$  siendo moléculas diferentes poseen el mismo grupo de simetría molecular. https://symotter.org/assets/img/c2vfig.png

Por ejemplo, el agua y el ciclohexano (que se utiliza para producir nailon) en apariencia diferentes a nivel molecular, poseen el mismo grupo puntual de simetría que incluye cuatro transformaciones que dejan la molécula invariante (ver Figura 10: dos reflejos respecto a plano y dos giros respecto a la recta intersección de los dos planos anteriores -uno de los giros es la identidad del grupo-).

En los materiales cristalinos, los átomos y las moléculas se distribuyen de manera ordenada y paralela de acuerdo con ciertas reglas de simetría formando una red. En 1891, el geómetra y cristalógrafo ruso E.S. Fedorov (1853-1919) clasificó las redes cristalinas por medio de la teoría de grupos, resolviendo uno de los problemas fundamentales de la cristalografía [Alegría]. En sus inicios, la cristalografía era una ciencia descriptiva que se incluía como parte de la mineralogía, pero pronto se conectó con otras disciplinas como la química y la biología. Hoy en día, para entender el comportamiento de una proteína es útil conocer su estructura tridimensional molecular que, en general, no se puede predecir a partir de su secuencia de aminoácidos. El método más común para determinar esta estructura es la difracción por rayos X que consiste en hacer interferir un haz de rayos X con un cristal de proteína, es decir, con una agrupación ordenada de moléculas de proteína, obtenida por un proceso de cristalización bastante trabajoso. De esta forma, se ha construido la base de datos Protein Data Bank [PDB] que contiene archivos con las coordenadas tridimensionales de decenas de miles de proteínas, complejos de proteínas y ácidos nucleicos. Esto permite estudiar los grupos de simetría de cada uno de ellos y visualizar su estructura a través de esquemas o caricaturas.

En PDB, más de la mitad de las entradas son complejos de estructura, compuestos por subunidades idénticas. De esta manera, se requiere menor cantidad de información para codificar la proteína y se multiplican los lugares de unión. Usualmente, las estructuras simétricas cerradas son más estables. Aplicando teoría de grupos, se ha obtenido una lista completa de todos los patrones de movimiento global asociados a complejos con grupo de simetría cíclico, diédrico, tetraédrico (grupo de simetrías de un tetraedro) u octaédrico (grupo de simetrías de un octaedro) [Song, 2017].

Complejos con la misma simetría siguen los mismos patrones de movimiento global y pueden funcionar de manera similar. Las proteínas con grupos cíclicos de orden 2 suelen especializarse en funciones que requieren direccionalidad o distinción de mitades como la formación de tubos o la interacción con membranas. Los grupos de simetría diédricos proporcionan mayor variedad de interfaces y conducen a una mayor estabilidad de la proteína.

Las simetrías helicoidales con invariancia por traslación más rotación se vinculan con la formación de filamentos extendidos. En algunos virus, se empaquetan subunidades de proteína con envolturas icosaédricas usando cuasi-simetría.

Conocer la estructura de las proteínas y conectarla con la dinámica y con los mecanismos funcionales permite actualmente crear anticuerpos y moléculas basadas en ellos con un amplio espectro de indicaciones terapéuticas, entre ellas la acción antiviral. Es lo que se conoce como ingeniería de proteínas. El proyecto computacional distribuido Folding@home simula dinámica de proteínas implicadas en diversas enfermedades. Iniciado en la universidad de Stanford por V. Pande [FAH], es un proyecto de ciencia ciudadana en el que la contribución de cientos de miles de ordenadores de personas voluntarias realizando simulaciones de plegado de proteínas es capaz de alcanzar un capacidad de computación récord y ayudar a entender cómo las proteínas alcanzan su estructura final.

En el siglo XXI, han surgido nuevos agentes infecciosos para causar epidemias, tales como los coronavirus SARS-CoV, MERS-CoV y el 2019-nCoV, responsable una pandemia en 2020. El ARN de los coronavirus codifica poliproteínas que se dividen en varias proteínas responsables de la replicación en la célula huésped. Las proteasas que producen esta escisión son dianas terapéuticas preferentes para los fármacos antivirales.

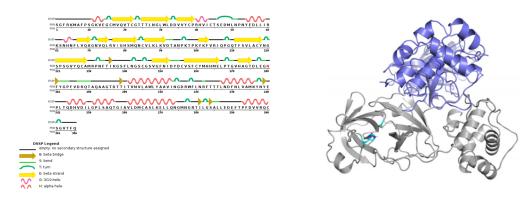


Fig. 11. Secuencia de aminoácidos de la Mpro del 2019-nCoV con su reconstrucción tridimensional a la derecha. (<a href="https://www.rcsb.org/pdb/">https://www.rcsb.org/pdb/</a>).

En una situación de emergencia sanitaria, dado que el desarrollo de fármacos nuevos conlleva años de investigaciones y ensayos clínicos, una de las vías alternativas es identificar entre los fármacos ya aprobados, candidatos con capacidad de atenuar o controlar la infección viral. Las posibilidades de éxito aumentan si la acción de los fármacos se dirige a un sustrato común a una familia de virus, es decir, a lo que se mantiene invariante ante cambios o mutaciones de estos virus.

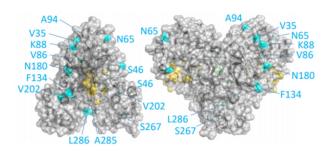


Fig 12. Reconstrucción de la proteasa Mpro del coronavirus 2019-nCoV con los aminoácidos diferentes de los de la Mpro del SARS-CoV coloreados en azul (https://www.rcsb.org/pdb)

La proteasa principal Mpro (por su abreviatura en inglés) es uno de esos sustratos que se conservan en gran medida entre los diferentes coronavirus. Solo 12 aminoácidos diferencian las Mpro del SARS-CoV y la del 2019-nCoV. Se cree que dos de estos aminoácidos están relacionados con una mayor capacidad de infectar para el nuevo coronavirus. Para atacar a la Mpro del 2019-nCoV, teniendo en la mano los datos cristalinos estructurales y de acoplamiento [PDB], es decir, información geométrica sobre los grupos de simetrías, se ha identificado por métodos computacionales el inhibidor N3 basado en un inhibidor conocido de la Mpro del SARS-CoV, entre otros [JIN et al., 2020].

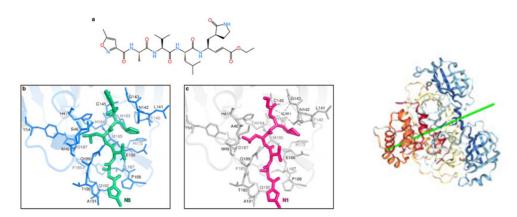


Fig. 13. Izquierda: a) Inhibidor N3. b) Complejo Mpro de2019-nCoV con inhibidor N3. c) Complejo Mpro de SARS-CoV con inhibidor N1. [JIN].Derecha: estructura cristalina del complejo Mpro de2019-nCoV con inhibidor N3, mostrando el eje de giro de 180°que lo deja invariante (https://www.rcsb.org/pdb).

Otras proteínas juegan un papel muy relevante en las infecciones por el virus 2019-nCoV uniéndose a receptores de las células huésped que en algunos casos son también proteínas. Evitar la entrada del virus a las células bloqueando esos receptores de las células humanas podría ser otra de las formas de detener al 2019-nCoV.

La relación entre estructura y función, mediada por los grupos de simetría, también comienza a tenerse en cuenta al estudiar conectomas, que son redes de conexiones neuronales. Al igual que los grupos de simetría gauge ayudan a describir las fuerzas de la mecánica cuántica en el modelo estándar, la invariancia por una serie de grupos puede ayudar a caracterizar las redes neuronales relacionadas con cierta función de un organismo. Es el caso de la locomoción

del nemátodo Caenorhabditis elegans y ciertos grupos cíclicos, determinados vía factorización del grupo de simetría del circuito neuronal correspondiente. [Morone y Makse, 2019].

En resumen, con una mayor comprensión de la interrelación entre estructura y función, vinculada a conceptos teóricos como la invariancia por grupos de simetría, podría mejorar el diseño de fármacos antivirales o el desarrollo vacunas que generen inmunidad frente a virus, y en general la lucha contra las enfermedades.

## 4. Conclusiones

Cuando algo cambia, el considerar qué es lo que permanece sin alterarse pese al cambio, ayuda a entender cuestiones dinámicas. Así, la matemática abstracta, a través del concepto de invariantes por una transformación o simetría, junto con el concepto de grupo de simetrías, permite dar una visión unificadora de cuestiones aparentemente inconexas: las diferentes geometrías, las obras artísticas, la apariencia de muchos seres vivos, las leyes físicas, las partículas elementales, los cristales y la conexión de estructuras neuronales o proteicas con las funciones en las que están involucradas.

La predilección estética por aquello que posee más simetría, la sorpresa ante lo que rompe patrones simétricos, la selección natural vinculada a la simetría por razones funcionales que sucede tanto a nivel molecular, como a nivel celular y a nivel de organismo... De lo más pequeño a lo más grande, de lo exterior a lo profundo, de lo estético a lo funcional, la geometría nos da una medida del mundo y de nosotros mismos a través de los grupos de simetría. Geometría eres tú...

#### Referencias

- [1] SAINT-LÉGER, A. ET AL. Saturation of recognition elements blocks evolution of new tRNA identities. Science Advances, Vol. 2, no. 4, 2016, <a href="https://doi.org/10.1126/sciadv.1501860">https://doi.org/10.1126/sciadv.1501860</a>
- [2] Graille M. et al. Complex between Peptostreptococcus magnus protein L and a human antibody reveals structural convergence in the interaction modes of Fab binding proteins. Structure 9, 679-87. http://dx.doi.org/10.1016/S0969-2126(01)00630-X, 2001.
- [3] ALSINA C. ET AL. ¿Por qué Geometría? Ed. Síntesis, 1997.
- [4] VÁZQUEZ-GALLO, M.J. Las 27 rectas de una superficie cúbica. La Gaceta de la RSME, Vol. 5.2, 271–296, 2002.
- [5] FUENTE, de la, D., SÁNCHEZ J. A., ZAMORA, A. Enseñando relatividad especial gráficamente, Pensamiento Matemático, vol. X, 73-82, 2020.
- [6] MORATALLA, A., SANZ, M. A. *Grupos de Leonardo en la Mezquita del Cristo de la luz*. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura. 63-74. <a href="http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/%C3%8Dndice%20SEG.htm">http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/%C3%8Dndice%20SEG.htm</a>, 2008.
- [7] DORRONSORO, J., HERNÁNDEZ, E. Números, grupos y anillos. Ed. Addison-Wesley, 1996.
- [8] FULTON, W., HARRIS, J. Representation theory: a first course. GTM, 129. Ed. Springer, 2004.

[9] SÁNCHEZ MUÑOZ, J.M. *Abel y la imposibilidad de resolver la "quíntica" por radicales*. Pensamiento Matemático, vol. I, 1-31, 2011.

- [10] MUMFORD, D., *Introduction to the theory of moduli*. Algebraic Geometry, Oslo, F. Oort, ed. Woltes-Noordhoff, 171-222, 1970.
- [11] Muñoz, V., Ortega, D., Vázquez-Gallo, MJ. *Hodge polynomials of the moduli spaces of triples of rank* (2, 2). The Quarterly Journal of Mathematics 60 (2), 235-272, 2008.
- [12] GORINI, C. Symmetry A Link Between Mathematics and Life. Humanistic Mathematics Network Journal, 13, 19-22, https://doi.org/10.5642/hmnj.199601.13.08, 1996.
- [13] CARIÑENA, J. F., Emmy Noether: innovación y creatividad en Ciencia. La Gaceta de la RSME, Vol. 7.2, 347-369, 2004.
- [14] BLANCO, D. Emmy Noether. Matemática ideal, Editorial Nívola, 2011.
- [15] LEDERMAN, L. M., HILL, C. T. La simetría y la belleza del universo. Tusquets Ed, 2006.
- [16] Livio, M. La ecuación jamás resuelta. Ed. Ariel, 2007.
- [17] GELL-MANN, M. El quark y el jaguar. Aventuras de lo simple y lo complejo. Tusquets Ed., 1995.
- [18] FRENKEL, E. Amor y matemáticas. Editorial Ariel, 2015.
- [19] CASTRILLÓN, M., GIL, O., VÁZQUEZ-GALLO, M.J. *Ingeniería y Matemática: Armonías*. Rev. Pensamiento Matemático, Volumen IX, Número 2, 37–48, 2019.
- [20] Alegría, P. Las simetrías en la Naturaleza. <a href="http://www.ehu.eus/~mtpalezp/lassimetrias.pdf">http://www.ehu.eus/~mtpalezp/lassimetrias.pdf</a>
- [21] The Protein Data Bank (PDB; <a href="http://www.rcsb.org/pdb/">http://www.rcsb.org/pdb/</a>
- [22] SONG, G. The finite number of global motion patterns available to symmetric protein complexes. <a href="https://doi.org/10.1002/prot.25331">https://doi.org/10.1002/prot.25331</a>, 2017.
- [23] Folding@home <a href="https://foldingathome.org/">https://foldingathome.org/</a>
- [24] JIN Z. et al. Structure of Mpro from COVID-19 virus and discovery of its inhibitors. bioRxiv. <a href="https://doi.org/10.1101/2020.02.26.964882">https://doi.org/10.1101/2020.02.26.964882</a>, 2020.
- [25] MORONE F., MAKSE, H. A. Symmetry group factorization reveals the structure-function relation in the neural connectome of Caenorhabditis elegans. Nat. Comm. <a href="https://doi.org/10.1038/s41467-019-12675-8">https://doi.org/10.1038/s41467-019-12675-8</a>, 2019,

#### Sobre el/los autor/es:

Nombre: María Jesús Vázquez Gallo

Correo Electrónico: mariaejesus.vazquez@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

En memoria de Omar Gil (1965-2020):

"Que las partículas que somos se sigan encontrando con amor y alegría".

# Juegos y Rarezas Matemáticas Adivinación cobriza Copper-colored divination

#### Aurelio Sánchez Estévez

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 091–100, ISSN 2174-0410 Recepción: 25 jun'20; Aceptación: 1 sep'20

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

Este artículo analiza un caso particular de las sucesiones de de Bruijn que se utilizará para crear un juego de mentalismo en el que intervendrán cuatro espectadores. El efecto consiste en averiguar el medio de transporte pensado por cada uno de los participantes entre un total de dieciséis vehículos terrestres, aéreos y marítimos. Como punto de partida para la creación del juego se define en primer lugar el concepto de sucesión de de Bruijn, que se ejemplifica mediante una sucesión de orden n que usa los símbolos 0 y 1 como alfabeto y una explicación sobre cómo construir este tipo de sucesiones usando los denominados grafos de de Bruijn.

**Palabras Clave:** matemáticas discretas, combinatoria, sucesiones de de Bruijn, grafos de de Bruijn, ilusionismo, magia, mentalismo, magia matemática, matemagia.

#### **Abstract**

This article analyzes a specific case of de Bruijn's sequences that will be used to create an effect of mentalism in which four spectators can participate. The effect is to figure out the means of transport that each participant in the trick is thinking of among a total of sixteen terrestrial, aerial and maritime vehicles. As a starting point for the creation of the trick, the concept of a de Bruijn sequence is first defined, which is exemplified by a sequence of order 4 that uses an alphabet consisting of the symbols 0 and 1 and an explanation on how to create this kind of sequences using the so-called de Bruijn graphs.

**Keywords:** discrete mathematics, combinatorics, de Bruijn sequences, de Bruijn graphs, illusionism, magic, mentalism, mathematical magic, mathemagic.

Aurelio Sánchez Estévez Adivinación cobriza

# 1. Las sucesiones de de Bruijn

Dentro del área de las matemáticas discretas, las sucesiones de de Bruijn pertenecen a la rama de la combinatoria, que entre otras cuestiones estudia la manera de ordenar o agrupar un número de elementos determinado.

El nombre de estas sucesiones procede del matemático neerlandés Nicolaas Govert de Bruijn que escribió acerca de ellas en 1946. Sin embargo, Camille Flye Sainte-Marie ya había descubierto este tipo de sucesiones 52 años antes y el propio de Bruijn reconoció la precedencia de Flye en un artículo publicado en 1975. Su utilidad abarca campos tan diversos como pueden ser la genética o la criptografía, pero también podemos encontrar algunas aplicaciones lúdicas en el ámbito del ilusionismo que sin duda sorprenderán incluso a los conocedores de muchos otros juegos de magia basados en las matemáticas.

## 1.1 Definición y caso particular

Podemos definir una sucesión de de Bruijn de orden n que usa un alfabeto de k símbolos como una sucesión cíclica en la que todas las subsucesiones posibles de longitud n ocurren una y solo una vez.

Para entender la definición anterior vamos a construir como ejemplo una sucesión de de Bruijn con un alfabeto de dos símbolos, que va a estar compuesto exclusivamente por el cero y el uno. Dicho de otra forma, el parámetro k va a tomar el valor 2 (k = 2) y el alfabeto vendrá definido por el conjunto {0, 1}. En la definición que nos ocupa, los símbolos 0 y 1, que son los empleados por el sistema de numeración binario, se pueden agrupar formando cadenas de una determinada longitud. En nuestro ejemplo esa longitud vendrá dada por n = 4. Podemos pensar en estas cadenas como palabras de 4 letras, solo que en este caso las "letras" de nuestro alfabeto serían exclusivamente los símbolos 0 y 1.

Como queremos que nuestra sucesión de de Bruijn sea de orden 4, tiene que contener todas las cadenas posibles de longitud 4 que se pueden construir usando los dos elementos de nuestro alfabeto. El número total de estas cadenas, a las que hemos llamado subsucesiones en la definición anterior, se calcula elevando el número de símbolos del alfabeto al orden de la sucesión, es decir,  $k^n$ . En nuestro caso  $2^4 = 16$ . Si las enumeramos todas, obtenemos las siguientes cadenas:

1	0000	5	0100	9	1000	13	1100
2	0001	6	0101	10	1001	14	1101
3	0010	7	0110	11	1010	15	1110
4	0011	8	0111	12	1011	16	1111

Tabla 1. Subsucesiones o cadenas de longitud 4

Por otro lado, como se dice en la definición, la sucesión de de Bruijn tiene que ser cíclica y las cadenas que contiene deben aparecer solamente una vez. Esto significa que a medida que avancemos por la secuencia, cada grupo de cuatro elementos que podamos formar debe ser diferente de todos los anteriores y así hasta llegar a la decimosexta cadena, tras la cual volvería a comenzar el ciclo. Por supuesto, no cualquier secuencia de ceros y unos cumple

Adivinación cobriza Aurelio Sánchez Estévez

esas condiciones. En nuestro caso, utilizaremos como ejemplo la sucesión 0000111101100101 formada por 16 dígitos.

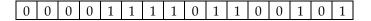


Figura 1. Sucesión de de Bruijn de 16 dígitos

Podemos verificar que empezando por el lado izquierdo se formaría la cadena 0000. Si ahora saltamos una posición hacia la derecha y comenzamos a contar a partir del segundo elemento, la siguiente cadena es 0001; si iniciamos la cuenta a partir del tercer elemento, obtenemos la cadena 0011 y así sucesivamente hasta llegar a la cadena 1000 que es la decimosexta y que está formada por el último dígito del lado derecho y los tres primeros del lado izquierdo. A partir de este momento, la secuencia es cíclica ya que regresaríamos a la primera cadena. Además, las 16 cadenas son diferentes entre sí y no falta ninguna. Por lo tanto, 0000111101100101 es una sucesión de de Bruijn con parámetros k = 2 y n = 4.

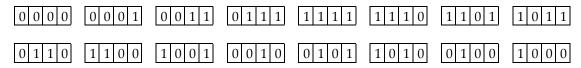


Figura 2. Subsucesiones o cadenas de longitud 4

## 1.2 Grafos de de Bruijn

Para poder crear este tipo de sucesiones se utilizan los denominados grafos de de Bruijn. Un grafo, de forma general, se puede definir como un esquema en el que se representan unos elementos llamados nodos o vértices, que se encuentran unidos mediante otros denominados arcos o aristas que sirven para simbolizar las relaciones entre los nodos.

El primer paso para generar un grafo de de Bruijn es determinar la cantidad de vértices que lo componen, que se calcula elevando k, que en nuestro caso toma el valor 2, a la longitud de las cadenas de la sucesión menos 1, es decir, a n-1. Como hemos considerado que n=4, la cantidad de vértices será  $2^{4-1} = 2^3 = 8$ 

A cada vértice del grafo le asociaremos una cadena que tenga longitud n-1, en este caso 4-1=3. Las 8 únicas cadenas de 3 elementos que se pueden construir con nuestro alfabeto son 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111. Estas cadenas serán las etiquetas asignadas a cada vértice.

Posteriormente añadimos las aristas que unen los vértices. Para que dos vértices puedan estar unidos se tiene que cumplir que la parte derecha de la etiqueta del primer vértice tiene que ser igual a la parte izquierda de la etiqueta del segundo vértice. Por ejemplo, el vértice 100 se puede unir con el 000, porque el primer vértice termina en 00 y el segundo empieza por 00. Sin embargo, el vértice 100 no se puede unir con el 111. Hay que tener en cuenta dos aspectos muy importantes:

Es posible que un vértice esté unido consigo mismo, siempre que cumpla la condición.

Aurelio Sánchez Estévez Adivinación cobriza

• En este grafo es fundamental la dirección de las aristas, es decir, en qué vértice empiezan y en qué vértice terminan. Esto se indica poniendo una pequeña flecha en cada arista. Este tipo de grafos reciben el nombre de grafos dirigidos.

Por último, tenemos que poner una etiqueta a cada arista. Para ello, formamos una cadena de longitud 4 que empiece con los dos primeros dígitos de la etiqueta del vértice inicial y termine con los dos últimos dígitos de la etiqueta del vértice final. Por ejemplo, la arista que va desde el vértice 000 al 001 tendríamos que etiquetarla con la cadena 0001.

Teniendo en cuenta lo explicado anteriormente, llegaríamos a un grafo como el siguiente:

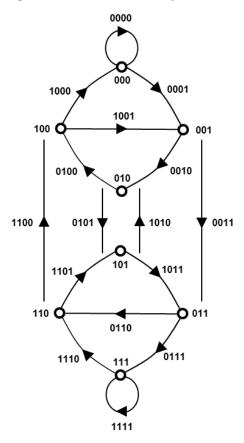


Figura 3. Grafo de de Bruijn con parámetros k = 2 y n = 4

Construir una sucesión de de Bruijn a partir de este grafo resulta muy sencillo. Elegimos para empezar un vértice cualquiera y a partir de él recorremos el grafo siguiendo las flechas de manera que pasemos por todas las aristas una única vez. No importa si pasamos más de una vez por los vértices, pero sí es necesario que al final lleguemos otra vez al vértice de partida y que no nos dejemos ninguna arista sin recorrer. Esto se conoce como un circuito euleriano.

Como ejemplo vamos a empezar nuestro itinerario en el vértice 000, después tomamos la arista 0000, que nos deja otra vez en el vértice 000. Ahora recorremos la arista 0001 y llegamos al vértice 001 y así sucesivamente. Existen varias maneras diferentes de continuar, no importa cuál elijamos. Por ejemplo, podríamos pasar por los vértices 000, 000, 001, 011, 111, 111, 110,

Adivinación cobriza Aurelio Sánchez Estévez

101, 011, 110, 100, 001, 010, 101, 010, 100 y 000 (que es otra vez el vértice de partida). Para ello tenemos que recorrer las aristas 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 1110, 1101, 1011, 0110, 1100, 1001, 0010, 0101, 1010, 0100 y 1000. Nos daremos cuenta de que habremos pasado por todas y sin repetir ninguna.

Si nos fijamos bien en los vértices que vamos recorriendo, cada uno de ellos termina con los dos mismos símbolos con el que empieza el siguiente. Si escribimos solo el primer dígito de cada vértice (sin contar el último que es repetición del primero) obtenemos 0000111101100101. También se llega al mismo resultado si escribimos el primer dígito de cada arista.

Pues bien, la sucesión de de Bruijn que hemos utilizado como ejemplo es precisamente 0000111101100101. Se puede comprobar fácilmente que contiene todas las cadenas de longitud 4, correspondientes a las aristas que hemos recorrido.

A medida que la longitud de las cadenas se incrementa, es decir, a medida que n aumenta, se hace muy difícil encontrar circuitos eulerianos.

# Aplicación a un juego de mentalismo: Adivinación cobriza

Tomando como punto de partida los conceptos explicados, contamos ya con todas las herramientas necesarias para crear nuestro juego y entender su funcionamiento.

Recordemos que en la sucesión de de Bruijn construida en el apartado anterior, utilizamos un alfabeto de dos símbolos (k = 2), compuesto por el 0 y por el 1 y que la longitud de las cadenas era n = 4, lo que nos permitía crear la sucesión 0000111101100101 compuesta por 16 dígitos.

Gracias a que la sucesión es cíclica y a que las 16 cadenas o subsucesiones que la componen no se repiten, podemos diseñar un juego de mentalismo en el que seremos capaces de adivinar los medios de transporte en los que están pensando 4 personas. Para ello vamos a elaborar en primer lugar una tabla en la que aparezcan distintos tipos de vehículos, clasificándolos en terrestres, aéreos y marítimos.

Vehículos terrestres	Vehículos aéreos	Vehículos marítimos
Automóvil	Ala delta	Buque
Autobús	Avión	Canoa
Bicicleta	Cohete	Ferry
Camión	Dirigible	Moto acuática
Motocicleta	Dron	Submarino
Patinete	Globo aerostático	Transatlántico
Tren	Helicóptero	Velero
Trineo	Parapente	Yate

Tabla 2. Clasificación de vehículos

De los vehículos anteriores elegiremos un total de 16, que escribiremos o dibujaremos en otras tantas tarjetas, preferiblemente recortadas de una cartulina de buena calidad. Para este

Aurelio Sánchez Estévez Adivinación cobriza

juego, seleccionaremos 8 vehículos terrestres, 4 aéreos y 4 marítimos, según se refleja a continuación:

Tabla 3. Clasificación	de vehículos se	leccionador p	ara el juego
------------------------	-----------------	---------------	--------------

Vehículos terrestres	Vehículos aéreos y marítimos
Automóvil	Avión
Autobús	Canoa
Bicicleta	Globo aerostático
Camión	Moto acuática
Motocicleta	Helicóptero
Patinete	Submarino
Tren	Parapente
Trineo	Velero

La clasificación anterior nos va a permitir asociar estos vehículos a la sucesión de de Bruijn 0000111101100101, de tal manera que los vehículos terrestres se pueden vincular al valor 1 y los vehículos no terrestres, es decir, la selección final que hemos hecho de vehículos aéreos y marítimos al valor 0.

Las tarjetas irían colocadas de arriba a abajo en el mismo orden que la sucesión según se muestra en la *Tabla 4*, de manera que si colocamos el grupo de dieciséis tarjetas cara abajo sobre la palma de la mano, la primera de ella sería la que tiene escrita la palabra *Avión* y la última, la que reposa sobre nuestra palma, la que contiene la palabra *Trineo*.

Tabla 4. Asignaciáon de vehículos a cada dígito de la sucesión de de Bruijn

0	Avión
0	Canoa
0	Globo aerostático
0	Moto acuática
1	Automóvil
1	Autobús
1	Bicicleta
1	Camión
0	Helicóptero
1	Motocicleta
1	Patinete
0	Submarino
0	Parapente
1	Tren
0	Velero
1	Trineo

Adivinación cobriza Aurelio Sánchez Estévez

Recordemos ahora que de la sucesión anterior se derivan 16 cadenas diferentes. Cada una de ellas es única y podemos asignarle los vehículos siguiendo el mismo orden que aparece en la Tabla 4. Una vez realizada la asignación, tendríamos lo siguiente:

0	0	0	0	Avión	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática
0	0	0	1	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática	Automóvil
0	0	1	1	Globo Aerostático	Moto acuática	Automóvil	Autobús
0	1	1	1	Moto acuática	Automóvil	Autobús	Bicicleta
1	1	1	1	Automóvil	Autobús	Bicicleta	Camión
1	1	1	0	Autobús	Bicicleta	Camión	Helicóptero
1	1	0	1	Bicicleta	Camión	Helicóptero	Motocicleta
1	0	1	1	Camión	Helicóptero	Motocicleta	Patinete
0	1	1	0	Helicóptero	Motocicleta	Patinete	Submarino
1	1	0	0	Motocicleta	Patinete	Submarino	Parapente
1	0	0	1	Patinete	Submarino	Parapente	Tren
0	0	1	0	Submarino	Parapente	Tren	Velero
0	1	0	1	Parapente	Tren	Velero	Trineo
1	0	1	0	Tren	Velero	Trineo	Avión
0	1	0	0	Velero	Trineo	Avión	Canoa
1	0	0	0	Trineo	Avión	Canoa	Globo aerostático

Tabla 5. Asignación de vehículos a cada subsucesión o cadena

Necesitarás también un cuaderno de los que tienen las páginas unidas por una espiral en el lado izquierdo. En él escribirás o pegarás en la parte interior de la portada una nota impresa con el contenido de la Tabla 5, en la que se relaciona cada cadena de cuatro dígitos con los cuatro vehículos correspondientes. Sin embargo, en lugar de reproducir la tabla anterior tal y como la hemos presentado, una alternativa mejor consistiría en organizar las cadenas en orden creciente, para que a la hora de localizar la que te interesa el proceso sea más rápido. Además, la tabla se podría imprimir con una tonalidad más suave para que pase totalmente desapercibida tal y como se muestra en la Figura 4. La finalidad, como verás en detalle más adelante, es que puedas consultar la información que te permite saber los vehículos pensados por los espectadores sin que estos puedan sospechar en ningún momento que en realidad lo estás haciendo con la ayuda del propio cuaderno. Por otro lado, la manera de manejarlo durante el transcurso del juego impide que el público pueda ver los datos que contiene y que son la clave para realizar con éxito la adivinación.

La información, una vez optimizada para nuestros propósitos, presentaría el siguiente aspecto:

Aurelio Sánchez Estévez Adivinación cobriza

0	0	0	0	Avión	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática
0	0	0	1	Canoa	Globo aerostático	Moto acuática	Automóvil
0	0	1	0	Submarino	Parapente	Tren	Velero
0	0	1	1	Globo Aerostático	Moto acuática	Automóvil	Autobús
	-						
0	1	0	0	Velero	Trineo	Avión	Canoa
0	1	0	1	Parapente	Tren	Velero	Trineo
0	1	1	0	Helicóptero	Motocicleta	Patinete	Submarino
0	1	1	1	Moto acuática	Automóvil	Autobús	Bicicleta
					-		-
1	0	0	0	Trineo	Avión	Canoa	Globo aerostático
1	0	0	1	Patinete	Submarino	Parapente	Tren
1	0	1	0	Tren	Velero	Trineo	Avión
1	0	1	1	Camión	Helicóptero	Motocicleta	Patinete
1	1	0	0	Motocicleta	Patinete	Submarino	Parapente
1	1	0	1	Bicicleta	Camión	Helicóptero	Motocicleta
1	1	1	0	Autobús	Bicicleta	Camión	Helicóptero
1	1	1	1	Automóvil	Autobús	Bicicleta	Camión

Figura 4. Cadenas organizadas en orden creciente

Supondremos que los espectadores se encuentran situados en frente de la persona que realiza el juego. Se puede presentar diciendo que tienes varias tarjetas en las cuales está escrito el nombre de un vehículo, al tiempo que las muestras nombrando varios de ellos y mencionando que los vehículos pueden ser terrestres, aéreos o marítimos. A continuación, le pedimos a un espectador que sujete el grupo de tarjetas cara abajo y que corte tantas veces como quiera. Después le puedes indicar que se lo entregue a alguien más para que corte también. Una vez finalizado este proceso, darás instrucciones a la persona que está sujetando las tarjetas para que mire la que ha quedado arriba del todo (Tarjeta 1) y que la guarde por un momento en su bolsillo, que entregue la siguiente (Tarjeta 2) al espectador que tiene a su izquierda, otra más (Tarjeta 3) al que está a continuación de este y una última tarjeta (Tarjeta 4) al siguiente. La manera en la que se distribuyen los espectadores y las tarjetas es muy importante para facilitar los siguientes pasos del juego. Desde tu posición, la distribución descrita se podría representar esquemáticamente de la siguiente forma:

Tabla 6. Posición de los espectadores en frente de la persona que realiza el juego

Espectador 1	Espectador 2	Espectador 3	Espectador 4
Tarjeta 1	Tarjeta 2	Tarjeta 3	Tarjeta 4

Para continuar, pedirás al primer espectador que te entregue las tarjetas sobrantes, que guardarás sin necesidad de mirarlas, y que vuelva a tomar la que dejó en el bolsillo. Recuerda que le dijimos que lo hiciera para poder entregar las otras tres tarjetas a los espectadores que

Aurelio Sánchez Estévez Adivinación cobriza

estaban a su izquierda. Ahora solicitarás que todos ellos se concentren en el vehículo que han visto escrito y que se imaginen que están viajando en él porque vas a tratar de adivinar cuál es. Sacas a continuación el cuaderno que habías preparado de antemano y dices que vas escribir el nombre de los vehículos que te vayan transmitiendo mentalmente, aunque todavía no lo abrirás. Llegado el momento, también puedes optar por dibujarlos si se te da bien. Simulas concentrarte y tras unos segundos comentas que te llegan varias imágenes entremezcladas. Continúas explicando que hay vehículos terrestres, aéreos y marítimos y pides que levanten la mano los espectadores que estén pensando en algún vehículo terrestre. Podría ocurrir que todos levanten la mano, que no la levante ninguno, o que la levanten una, dos o tres personas. En cualquiera de los cinco casos y gracias a la sucesión de de Bruijn sabrás en qué vehículo está pensando cada espectador. Por ejemplo, vamos a suponer que el segundo y el tercer espectador levantaron la mano. Les pedirás que la bajen y que se concentren en su vehículo. Ahora abres tu cuaderno de manera que a la derecha se encuentre la primera página en blanco y a la izquierda la imagen del interior de la portada. Te fijarás en la secuencia 0110 ya que es la que nos indica que en la segunda y tercera posición hay un vehículo terrestre:

Tabla 7. Vehiculos pensados por los espectadores

0   1   1   0   Helicoptero   Motocicleta   Patinete   Submarino
--

Por lo tanto, el primer espectador estará imaginando que vuela en un helicóptero, el segundo que conduce una motocicleta, el tercero que se desplaza en un patinete y el cuarto que se encuentra a bordo de un submarino. Adivinas en primer lugar el vehículo del segundo espectador y lo escribes en letras mayúsculas (o lo dibujas) mostrándolo para que te diga si es correcto. La manera de enseñarlo es muy sencilla: con el cuaderno abierto y mirando hacia ti, girarás hacia los espectadores el bloque completo de páginas para mostrarles lo que acabas de escribir en la primera de ellas, de manera que el interior de la portada con la información que has consultado quedará frente a ti y oculto a la vista de los espectadores. Si quieres, puedes arrancar la página y continuar adivinando los vehículos elegidos por los otros tres espectadores de la misma manera. En realidad, como ya conoces los cuatro vehículos elegidos, no necesitas volver a consultar la tabla con la información, de manera que lo que puedes hacer es pasar a la segunda página del cuaderno para escribir el vehículo del tercer espectador y proceder igualmente con el primero y el cuarto. La ventaja de hacerlo así, es que en las siguientes ocasiones en las que muestres el cuaderno lo podrás hacer de forma totalmente despreocupada porque la información que consultaste quedará oculta por las páginas previas.

Este juego está basado en la dualidad que podemos encontrar en el tipo de elementos que utilizamos. En el caso de los vehículos, el juego funciona porque, aunque todos ellos son diferentes, los estamos clasificando en dos tipos: los terrestres y todos los demás (aéreos y marítimos). Por lo tanto, la idea es extrapolable a cualquier grupo de elementos en el que podamos encontrar esa dualidad, como por ejemplo instrumentos musicales (de cuerda por un lado y de viento y percusión por otro), las cartas de una baraja (rojas y negras) o diferentes tipos de alimentos1. Además, este efecto también se puede realizar con conjuntos de menor o mayor tamaño, como aquellos compuestos por 8 o 32 objetos.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Artur Antúnez Vitales, profesor de secundaria de Gerona, presentó en el II Encuentro de Ciencia, Magia y Educación celebrado en diciembre de 2017 varios juegos basados en las sucesiones de de Bruijn, entre ellos uno en el que tres espectadores elegían cada uno una carta en la que aparecía representado un alimento. En este caso particular la dualidad venía dada por el hecho de que el alimento fuera una comida o una bebida.

Aurelio Sánchez Estévez Adivinación cobriza

En caso de que te hayas preguntado en algún momento por qué el juego se titula *Adivinación cobriza*, se da la circunstancia de que el apellido neerlandés *de Bruijn* hace referencia al color marrón, probablemente en alusión al cabello. Dado que el juego se basa en las sucesiones de de Bruijn y con la finalidad de que el título no pudiera dar pistas sobre el método empleado para realizar las adivinaciones, la solución pasó por buscar algún sinónimo de *marrón* que pudiera resultar sugerente como título.

## Referencias

- [1] DE BRUIJN, Nicolaas Govert. *A combinatorial problem*. Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Vol. 49, Nº 7, pp. 758-764, the Netherlands, 1946.
- [2] FLYE SAINTE-MARIE, Camille. "Solution to question nr. 48". L'Intermédiaire des Mathématiciens, 1, pp. 107–110, 1894.
- [3] DE BRUIJN, Nicolaas Govert. Acknowledgement of priority to C. Flye Sainte-Marie on the counting of circular arrangements of 2<sup>n</sup> zeros and ones that show each n-letter word exactly once, EUT report. WSK, Dept. of Mathematics and Computing Science; Vol. 75-WSK-06, Technological University Eindhoven, the Netherlands, 1975.
- [4] DIACONIS, Persi, GRAHAM, Ron. *Magical Mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks*, pp. 18-24, Princeton University Press, New Jersey, 2012.

#### Sobre el autor:

Nombre: Aurelio Sánchez Estévez

Correo Electrónico: contacto@ilusionesmatematicas.com

Institución: www.ilusionesmatematicas.com

# Cuentos Matemáticos

Soñar... ¿te da alas?

# Dreaming gets you fly?

## Alba González Martín

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 101–103, ISSN 2174-0410 Recepción: 8 Ene'16; Aceptación: 25 Feb'16

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

En este artículo se muestra uno de los cuentos presentados al concurso de relatos con contenido matemático organizado por el GIE (Grupo de Innovación Educativa) Pensamiento Matemático de la UPM (Universidad Politécnica de Madrid), para alumnos de la ESO, Bachillerato y universitarios. En este caso se trata de un cueto realizado por una alumna de bachillerato.

Palabras Clave: Cuentos con contenido matemático, lenguaje matemático.

#### **Abstract**

This paper shows one of the tales presented to the contest about tales with mathematical content organized by the Innovation Educative Group "Mathematical Thinking". In this case it is a tale writen by a high school student.

**Keywords:** Tales with mathematical content, Mathematical Language.

# 1. Soñar... ¿te da alas?

No sé muy bien por qué este miércoles me levanté tan cansado, pasé el día aturdido y sin ganas de hacer nada. A mitad de tarde me surgió un problema en el trabajo y creí que era buena idea tomarme una bebida energética a ver si de esta manera espabilaba un poco.

De repente me encuentro volando... sí volando. Con los brazos abiertos hacia atrás, formando con mi tronco y mis piernas un ala delta. En ese momento recuerdo a una de mis profesoras de primaria explicándome los tipos de triángulos que existen... equiláteros, isósceles y escalenos y planeando sobre un campo verde con puntitos rojos, que debían ser amapolas por la época del año en la que estamos, me encuentro analizando qué tipo de

Alba González Martín Cuentos Matemáticos

triángulo soy. Soy un triángulo equilátero cuyo perímetro es... 3xL y el área un medio de la base por su altura.

De repente veo cómo pierdo altura, me he distraído, paso cerca del tejado de una iglesia, una señal me hace perder el equilibrio y me encuentro a punto de darme de bruces contra un triángulo dibujado en el suelo. Muevo los brazos, lucho contra el viento, tomo algo de altura y recuerdo a la profesora de tercero de primaria que, cuando nos cansábamos de las matemáticas, es decir... siempre, nos decía "las mates están por todas partes", en ese momento me di cuenta de que era cierto. En un breve espacio de tiempo había localizado cuatro triángulos.

Con este primer obstáculo superado, me encuentro surcando el cielo, a mi izquierda un radiante sol, circular por cierto. Me da por pensar en su área y recuerdo aquella fórmula tan graciosa,  $A=\pi\ r^2$ , intento encontrar el centro del círculo para calcular el radio y por un momento, me quedo ciego.

Se me acumulan los pensamientos, el sol es un círculo en el dibujo de mi sobrino pequeño, en la realidad es una esfera, con volumen. Miro de frente para intentar recuperar visión y me encuentro con el horizonte, una línea recta... horizontal y pienso, mientras no dejo de palmotear, ¡vaya, otra vez las mates! pierdo altura de nuevo, giro la cabeza hacia la derecha y me encuentro la ladera de una montaña con forma de línea recta oblicua y me viene a la cabeza el póster que teníamos en el corcho de clase con las ecuaciones de las rectas horizontales, verticales y oblicuas. Para mi sorpresa, miro de frente de nuevo y... ¡uyyyy!, rozo una línea recta vertical con forma de poste de luz, que nuevamente me desestabiliza, haciéndome perder el equilibrio.

Me centro, intento tomar altura, respiro, mi corazón late con fuerza y rapidez. Miro a lo lejos y veo... qué veo. ¿Es un pájaro? Pero un pájaro con un ala más corta que la otra no puede ser porque no sería estable, me confunde que estoy alterado o será la perspectiva. ¡No me lo puedo creer! Otra vez las matemáticas. La perspectiva, era de matemáticas o de dibujo o de ambas. La cosa es que no sé muy bien lo que estoy viendo. Intento girar y acercarme y cuál es mi sorpresa cuando veo una raíz cuadrada que pasa a mi lado.

Abro y cierro los ojos, para intentar aclarar mi vista, sé que no puede ser. Me centro de nuevo en el horizonte, me tranquilizo, a los pocos minutos miro hacia abajo y veo una ciudad compuesta por diferentes barrios y los barrios a su vez por bloques, plazas, parques, ..., todos ellos con formas geométricas, los bloques eran rectángulos, las plazas círculos y los parques triángulos. Tomo de nuevo altura, sobrevuelo la ciudad y me percato de una peculiaridad. Cada barrio tiene forma de una letra distinta.

Decido investigar, giro mi cuerpo, bajo la cabeza y comienzo mi excursión. Paso por debajo de un semicírculo en el que pone Ciudad de los Números, a la derecha una flecha me indica el barrio N, decido empezar por aquí. Por una acera encuentro al 1 y al 2 de la mano,

Soñar... ¿te da alas? Alba González Martín

delante corretea un 3 más pequeño de lo normal. En el cruce se encuentra un guardia municipal, bastante rechoncho, es el ocho. No dejo de mirar de un lado para otro y me doy cuenta de que estoy en el Barrio de los Números Naturales, que son todos los mayores de 0 y que no pueden tener parte decimal ni fraccionaria.

A dos pasos de allí, veo un cartel rectangular en el que pone Barrio de los Números Enteros, me acerco y veo al lado izquierdo un grupo de números con una rayita que les sale a la altura de la barriga, son los números enteros negativos, al lado derecho los mismos números, pero sin rayita y en el centro..., en el centro el pobre número 0. En seguida pensé que como era gordito se estarían metiendo con él, me acerqué y vi que me equivocaba, estaban jugando al corro de la patata.

Decido seguir investigando, aunque parezca mentira, sigo sin creer lo que estoy viviendo, tomo altura, oigo un ruido, giro a la izquierda y veo varios bloques que forman una Q, me acerco y encuentro un gran aparcamiento en el que veo andando a una raya que tiene un 5 de cabeza y un 10 de piernas, intento centrarme, remuevo mis recuerdos matemáticos y deduzco que estoy en el Barrio de los Números Racionales que son aquellos que pueden expresarse como una fracción de dos números enteros.

Intento ordenar todo esto en mi cabeza mientras me centro en no chocarme con una línea recta vertical, que sostiene un rectángulo de poca base y mucha altura con tres círculos, uno rojo otro amarillo y otro verde, lo que nosotros llamamos semáforo. Rebusco y rebusco y me doy cuenta de que la Ciudad de los Números, es en realidad un conjunto que engloba varios subconjuntos... y cuando más centrado me encuentro, cuando me estoy percatando de que las matemáticas están en todas partes, noto unas turbulencias, cada vez de mayor intensidad. Me hacen perder el equilibrio, miro hacia los lados, estoy cerca de unas líneas rectas verticales terminadas en círculos de color verde llamados árboles, caigo, caigo y caigo al vacío.

Abro los ojos y ahí estoy, apoyado sobre mi mesa rectangular, con mi papelera en forma de cilindro llena de esferas de folios arrebuñados, y mi pantalla, también rectangular llena de números enteros, positivos y negativos, líneas rectas, horizontales y verticales.... Me giro y mientras miro a mi jefe con cara de pocos amigos, afirmo en voz alta: ¡¡SOÑAR, TE DA ALAS!!!

#### Sobre la autora:

Nombre: Alba González Martín

*Institución*: Estudiante de Bachillerato del colegio Santa Fe en el momento del concurso.

# Críticas y Reseñas

# Video Juego Who's That Function

# Videogame Who's That Function

## Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 105–109, ISSN 2174-0410 Recepción: 08 Dic'20; Aceptación: 10 Ene'21

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

Este artículo presenta un juego de ordenador, pensado para ejecutarse en el navegador, que enseña las propiedades de las funciones de manera interactiva. Al inicio, el programa selecciona aleatoriamente una función de una lista de 28, y el usuario debe adivinar de cuál se trata realizando preguntas de Verdadero/Falso, de manera similar al juego tradicional "¿Quién es Quién?". Además, las respuestas a las preguntas se convierten en un código binario basado en unos y ceros que el jugador debe pasar a decimal para poder recibir su puntuación en base a un ranking.

Palabras Clave: Video juegos educativos, Gamificación, Innovación educativa, Juegos matemáticos.

#### **Abstract**

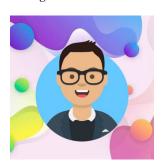
This paper presents an online computer game that shows the properties of the functions in an interactive way. First, the program randomly selects a function from a database with 28 functions, then, the user must discover the selected function by means of True/False questions in a similar way to the well known game Who is who? Besides this, the answers to the questions are transformed in a binary code that the player must convert to a decimal code in order to receive his/her ranking based score.

Keywords: Videogames, Gamification, Innovative Education, Mathematical games.

# 1. El Video juego Who's That Function

El diseño del juego está basado en el juego clásico ¿Quién es quién? cuyas reglas son las siguientes:

 Cada jugador cuenta con una serie de tarjetas con personajes diversos. Uno de los participantes elige una de



ellas y la coloca sin que el otro jugador la vea. El contrario realiza la misma operación.

- El objetivo del juego es adivinar qué personaje ha elegido el otro jugador.
- Por turnos, se realizan preguntas sobre los rasgos del personaje que se quiere descubrir.
- El otro jugador responde a dichas preguntas con un SÍ o un NO:
- Si el jugador contesta SÍ a una pregunta: se eliminan las fichas de los personajes que NO tengan ese rasgo.
- Si el jugador contesta NO: se eliminan las fichas de los personajes que SÍ tengan ese rasgo.

#### Adaptación del juego:

Se ha querido adaptar la idea de este juego al marco del estudio de funciones reales de variable real (de la misma forma podría hacerse con otros temas), incluyendo además algunos otros conceptos como los sistemas de numeración, concretamente el sistema binario de gran utilidad en computación. Figura 1.

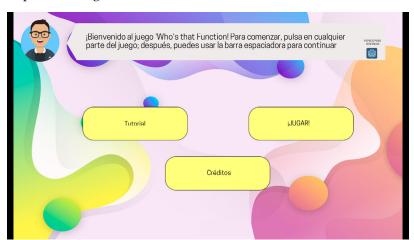


Figura 1: Panel de inicio del juego

Para ello, en lugar de personajes, la idea es trabajar con funciones definidas tanto analíticamente como gráficamente. El primer paso es elegir las características (rasgos en el juego clásico) sobre las que se va a preguntar con la finalidad de descubrir la función elegida por el contrincante. En la propuesta, las seleccionadas han sido: signo de la función, acotación, monotonía, continuidad, derivabilidad y existencia de asíntota vertical. De forma que las seis preguntas a realizar sobre la función, a partir de las cuales debería poderse seleccionar la función buscada, son:

- ¿Es una función no negativa?
- ¿Es acotada?
- ¿Es monótona?

- ¿Es continua?
- ¿Es derivable?
- ¿Tiene alguna asíntota vertical?

A cada una de estas preguntas se contestará con un Sí (1) o un No (0). Con ello, cada una de las funciones que forman parte del juego tiene una definición en código binario que está formada por un vector de seis dígitos, ceros o unos, según sean para esa función las respuestas a cada una de las preguntas a realizar. Ver Figura 2.

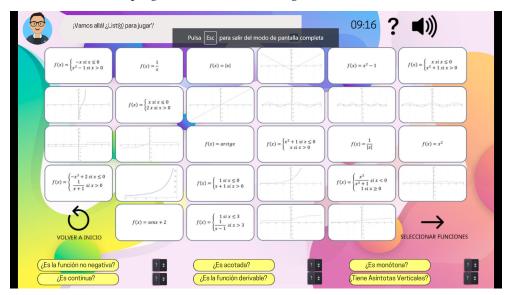


Figura 2: Panel de juego

Pasos a seguir:

El juego tiene un tutorial que explica al jugador cómo se desarrolla el juego (Figura 3).

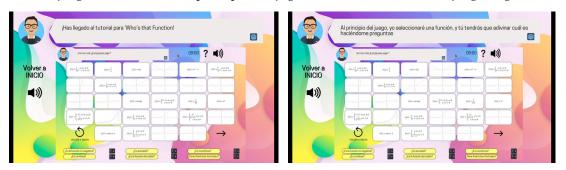


Figura 3: Diversas pantallas del tutorial del juego.

- Los jugadores tienen visibles todas las funciones de las que consta el juego. El juego ha seleccionado una de ellas.
- Empezará un turno de preguntas y el cronómetro se pone en marcha. Se irá cumplimentando el vector de seis posiciones con las respuestas que se van obteniendo y

aplicando los conocimientos sobre las funciones (algunas respuestas pueden tener implícitamente respuestas a otras preguntas no realizadas).

• En el momento que se piense que se conoce la respuesta de cuál es la función elegida, se pasa a la pantalla de resolución. Se seleccionará y se dará el número en el sistema decimal que corresponde a ella. Esto supone que se debe cambiar el vector de ceros y unos que corresponde a las respuestas a las preguntas a realizar, por el número en sistema decimal correspondiente.

El programa indica si se ha acertado, en ese caso asigna una puntuación dependiendo del tiempo empleado, número de preguntas realizadas... En el caso de no acertar, sugiere volver a intentarlo.

La búsqueda de una buena estrategia de juego hace que los participantes realicen una amplia reflexión sobre los conceptos relacionados con las funciones reales de variable real. Un buen conocimiento de la teoría permite al participante hacer las preguntas adecuadas que le lleven a una rápida resolución.

# 2. Descripción técnica del juego

El Video juego es el resultado de un proyecto ideado por los miembros del Grupo de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid "Pensamiento Matemático" <a href="http://www.caminos.upm.es/matematicas/WEBGIE/">http://www.caminos.upm.es/matematicas/WEBGIE/</a> y programado por el alumno Pablo Ignacio Marcos López como parte de la Beca de Colaboración "Del Juego a la Teoría".

Puede accederse libremente al juego en: https://flyingflamingo.itch.io/whos-that-function

• Lenguaje de Programación:

El juego ha sido programado usando Godot Engine, cuyo lenguaje de scripting es GDScript, similar a Python. Para su ejecución en el navegador, el sistema permite crear un archivo ejecutable traducido a HTML5.

• Entorno operativo:

El entorno operativo es cualquier navegador estándar de escritorio, por lo que puede jugarse en plataformas como GNU/Linux, Windows o MacOS. Ha sido testeado en Firefox 82 y Chromium 85.

• Diagrama de flujo (Figura 4):

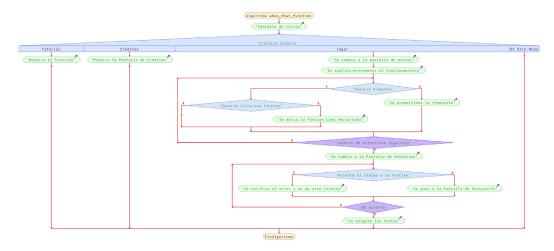


Figura 4: Diagrama de flujo para el juego "Who's That Function". Creado usando Pseint, software libre licenciado bajo GPLv2

#### 4. Conclusiones

Se considera que este tipo de video juegos consigue:

- despertar el interés por el aprendizaje de las matemáticas.
- que el alumno repase y sepa aplicar los conocimientos adquiridos.
- potenciar habilidades basadas en el razonamiento matemático: estrategia, planificación, toma de decisiones, etc.
- aplicar las dinámicas y principios de los juegos para mejorar la motivación, el interés y la implicación de los estudiantes en las materias con contenido matemático.

La consecución de los objetivos citados anteriormente, conlleva la facilitación del proceso de aprendizaje del alumno, pudiéndose éste realizar a través de un mecanismo ameno, lúdico, flexible, dinámico e interactivo, el cual se espera atraerá al estudiante y fomentará su implicación en la materia.

Estamos seguros de que los juegos como este contribuyen al acercamiento de los alumnos hacia materias básicas imprescindibles para sus estudios. La aplicación de los juegos resulta altamente motivadora y es un buen refuerzo si se aplica a asignaturas matemáticas. Además, les permite integrarse y relacionarse entre ellos ya que propone acciones en equipo.

#### Sobre los autores:

Nombre: Equipo Editorial de Pensamiento Matemático

Página Web: <a href="http://www.caminos.upm.es/matematicas/revistapm/">http://www.caminos.upm.es/matematicas/revistapm/</a>

Institución: Universidad Politécnica de Madrid.

# Entrevista

# Aurelio Sánchez: el método KUMON

Aurelio Sánchez: KUMON

## Aurelio Sánchez/Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen XI, Número 1, pp. 111–117, ISSN 2174-0410 Recepción: 14 Feb'21; Aceptación: 17 Feb'21

#### 1 de abril de 2021

#### Resumen

Aurelio Sánchez Estévez es subdirector general de Kumon Instituto de Educación de España y divulgador perteneciente a la Red de Divulgación Matemática (DiMa). Además de su actividad profesional en Kumon, imparte numerosos talleres y conferencias dirigidos a familias y estudiantes de todos los niveles educativos dentro y fuera de España, así como cursos de formación del profesorado.

Palabras Clave: Kumon, programa de matemáticas, métodos de aprendizaje

#### **Abstract**

Aurelio Sánchez Estévez works as Deputy General Manager at Kumon Instituto de Educación de España and is a science popularizer belonging to the DiMa network for the dissemination of mathematics. In addition to his professional activity at Kumon, he gives numerous workshops and conferences aimed at families and students of all educational levels both inside and outside Spain, as well as teacher training courses.

Keywords: Kumon, maths programme, learning methods

Aurelio Sánchez Entrevista



Figura 1. Aurelio Sánchez Estévez

#### - Hola, Aurelio. Cuéntanos brevemente quién eres.

- Soy licenciado en Ciencias Económicas y Empresariales y actualmente trabajo como director del Área de Servicios Generales en Kumon España, que está compuesta por los departamentos de Comunicación, Logística, Material Didáctico de Lectura y Servicios Lingüísticos. Desde mis comienzos en la empresa, a finales de 1999, he desempeñado diversas funciones: empecé siendo orientador de uno de nuestros centros piloto y coordinador de los centros franquiciados de Madrid, País Vasco, Cataluña y Comunidad Valenciana. En mi etapa de director de la Oficina de Valencia, fui también responsable del Departamento de Formación durante tres años, lo que me permitió conocer de primera mano los programas educativos de Kumon, aprender mucho de la experiencia de los

orientadores de cada región y formarme en Japón con profesionales de la educación que habían trabajado directamente con Toru Kumon, el fundador del método.

#### - ¿Qué es Kumon?

- Kumon es un método de aprendizaje de origen japonés que tiene como objetivo lograr el máximo desarrollo intelectual del alumno utilizando un enfoque muy diferente al de la enseñanza tradicional. El papel de los orientadores de nuestros programas de matemáticas, lectura e inglés se centra en observar y conocer con detalle la capacidad individual de todos los estudiantes con la finalidad de guiarlos en su formación de manera completamente personalizada. Esto permite que la asimilación de los contenidos y la motivación se mantengan siempre en niveles óptimos al tiempo que los alumnos logran mayor autonomía y eficacia. Así, son capaces de avanzar de forma autodidacta en su aprendizaje incluso varios años más allá de su nivel escolar. En este sentido, el avance se produce en función de la capacidad del estudiante y de cómo evoluciona dicha capacidad y no depende, por lo tanto, de su edad ni de los contenidos de su curso académico.

Kumon utiliza un material didáctico que está en continua revisión para introducir mejoras basadas en la experiencia de millones de estudiantes de todo el mundo con diversas edades y capacidades. Las hojas de estudio de Kumon dotan a los alumnos de una base sólida y de las herramientas que necesitan para convertirse en personas inteligentes, competentes y responsables que aprenden de forma autodidacta y adquieren la seguridad necesaria para enfrentarse a cualquier tarea presente o futura, incluidas por supuesto aquellas relacionadas con su curso escolar.

Además, las técnicas de observación y seguimiento que aplican los orientadores son tan versátiles que las familias pueden elegir entre las modalidades presencial, online y mixta en función de sus circunstancias. El uso de programas de videollamadas y reuniones virtuales permite una gran flexibilidad para que los alumnos puedan trabajar en su domicilio bajo la supervisión del equipo pedagógico del centro. Todo ello hace que las actividades de observación, motivación, orientación o evaluación del progreso contribuyan a un desarrollo rápido y provechoso de cada alumno con independencia de la modalidad elegida.



Figura 2. Logotipo de Kumon. La O representa una cara pensativa que simboliza la expresión de los alumnos, quienes aprenden, piensan y crecen en los centros Kumon, y también la de los orientadores y el personal, quienes comparten el afán por crecer y mejorar poniendo la educación y el desarrollo del potencial de cada alumno al frente de sus prioridades.

#### - ¿Desde cuándo trabajáis en España?

- Comenzamos en 1991 y actualmente tenemos oficinas en Madrid, Barcelona y Valencia, que dan respaldo a más de 200 centros franquiciados y propios distribuidos por España, Andorra, Portugal e Italia.

#### - ¿Cuándo puede un estudiante empezar con Kumon?

- Puede hacerlo desde los dos años. El orientador mantiene una entrevista con la familia y realiza una prueba que permite evaluar la capacidad inicial del alumno y determinar el tipo de contenidos más adecuados para comenzar a trabajar.

#### - ¿Y concretamente, en qué consiste Kumon Matemáticas?

- En el caso particular de este programa, los estudiantes desarrollan habilidades matemáticas y el gusto por los números. Además, el aprendizaje de las matemáticas contribuye al desarrollo de las capacidades de razonamiento, abstracción, deducción, reflexión y análisis, que al ser genéricas facilitan el trabajo en otras áreas de estudio y trascienden al ámbito académico.

Los contenidos se distribuyen en niveles cuya complejidad va aumentando escalonadamente. Por ejemplo, los alumnos de muy corta edad aprenden a reconocer, recitar, leer y entender la secuencia numérica de manera progresiva y a escribir los números de forma autónoma. En las hojas de estudio se emplean imágenes, cantidades de puntos y tablas numéricas para afianzar estos contenidos antes de introducir las cuatro operaciones básicas por las que siempre se avanza de forma muy gradual. En ellas también se muestran ejemplos y ejercicios parcialmente resueltos como referencia y se practica la resolución en horizontal antes de hacerlo en vertical.

Tomando siempre como premisa la adquisición de unos cimientos sólidos, el programa progresa hacia temas más complejos, como operaciones con fracciones y decimales, números positivos y negativos, expresiones algebraicas, sistemas de ecuaciones, funciones lineales, operaciones con monomios y polinomios, factorización, raíces cuadradas, ecuaciones y funciones cuadráticas o el teorema de Pitágoras. Estos contenidos se amplían con el estudio del álgebra avanzada y de todo tipo de funciones que los alumnos aprender a derivar, integrar y representar gráficamente. En el bloque final del programa se desarrollan también habilidades para trabajar con puntos, rectas, circunferencias, lugares geométricos y regiones, trigonometría, sucesiones, series y límites, y se profundiza en las aplicaciones del cálculo diferencial e integral.

Por último, existe un nivel adicional más relacionado con las matemáticas aplicadas, en el que se aborda el estudio de vectores, matrices, aplicaciones entre conjuntos, probabilidad y estadística.

Aurelio Sánchez Entrevista

Los alumnos del programa de matemáticas resuelven siempre hojas de estudio acordes con su capacidad y nivel de conocimientos actuales, pero también se busca que los ejercicios les supongan un reto asumible. Volviendo al ejemplo de los alumnos más jóvenes, si todavía no saben manejar el lápiz, existen contenidos adicionales diseñados específicamente para desarrollar esta habilidad, contenidos que les permiten practicar el trazado de líneas rectas, curvas, ángulos, dibujos y formas al tiempo que continúan con el proceso de aprendizaje de la secuencia numérica.

La supervisión del trabajo por parte del orientador posibilita llevar a cabo los ajustes necesarios para que el alumno pueda enfrentarse a la tarea con éxito. Para ello se tiene en cuenta el tiempo que le ha llevado completarla y el número de errores cometidos, pero también la naturaleza de dichos errores, ya que no es lo mismo equivocarse como consecuencia de un despiste que por no haber asimilado todavía algún contenido previo. Esto se puede evaluar prestando atención a cómo resuelve los ejercicios y realiza las correcciones el alumno. Por supuesto, existen muchas otras observaciones que permiten extraer información para definir cuál es el mejor camino para seguir avanzando. Por otra parte, los conceptos no se explican directamente, sino que se introducen mediante pistas y ejemplos que el alumno utilizará para entender, resolver, redescubrir y dominar progresivamente contenidos que con el tiempo estarán muy por encima de su nivel escolar.





Figura 3. Alumnos resolviendo hojas de estudio en las modalidades presencial y online

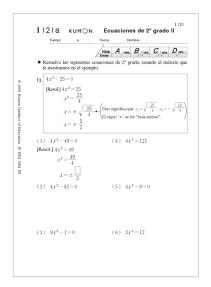
#### - ¿Cómo ayuda el método a los estudiantes de matemáticas?

Por un lado, empezando en un nivel del programa en el que se sientan cómodos. Es muy importante generar en el alumno una sensación de logro y superación desde el primer momento para que se encuentre motivado y pueda desarrollar seguridad y confianza. Esto le permitirá avanzar más fácilmente hacia temas de mayor complejidad.

Otro de los aspectos más destacables de Kumon sería el desarrollo del aprendizaje autodidacta. En la actualidad, el autodidactismo es fundamental para superar retos formativos y gestionar el proceso educativo de cada persona de forma más satisfactoria.

Las personas autodidactas sienten verdadera pasión por aprender y por eso disfrutan superando desafíos cada día, lo que las conducirá a ser estudiantes brillantes y profesionales competentes. En el caso del programa de matemáticas de Kumon, a partir de las pistas y los ejemplos, el alumno tiene que reflexionar y tomar decisiones que le permiten aprender por sí mismo y disfrutar de la reconfortante y motivadora sensación de poder decir: «¡Lo conseguí!».

Para lograr lo anterior, existen dos claves fundamentales. Una es la manera en la que los creadores del programa de matemáticas han diseñado y organizado los ejercicios: han definido el itinerario que tiene que realizar el alumno por sí mismo y, a la vez, se han asegurado de que desarrolla las capacidades y actitudes necesarias para poder trabajar con autonomía a lo largo de los contenidos. La segunda clave es el papel del orientador como mentor y guía del alumno: va proporcionándole los recursos necesarios para acompañarlo en el proceso de aprendizaje autónomo de manera que pueda culminarlo con éxito y busca siempre desarrollar al máximo su capacidad.



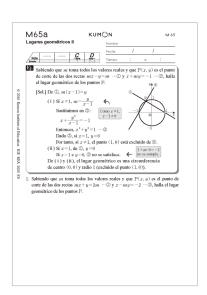


Figura 4. Ejemplos de hojas de estudio de los niveles I y M del programa de matemáticas

#### - ¿Será el autoaprendizaje una habilidad imprescindible en los próximos años?

- Nuestros hijos y las futuras generaciones trabajarán en algunas profesiones que aún no se han inventado y que además evolucionarán con gran rapidez, por lo que es razonable pensar que los nuevos empleos demandarán personas capaces de aprender por sí mismas y que no tengan miedo a los cambios. Las nuevas generaciones deberán ser más adaptables de lo que lo han sido hasta ahora los profesionales de cualquier sector y para conseguirlo será fundamental contar con una alta capacidad de autodidactismo. Quienes lo logren van a poder afrontar más fácilmente cualquier situación que se les presente.

Para llegar a ser autodidactas, el método Kumon y sus orientadores contribuyen a que los alumnos desarrollen capacidades y habilidades como la autonomía, la disciplina, la constancia y la responsabilidad y, sobre todo, adquieran una alta dosis de motivación para aprender.

El autodidactismo implica también creatividad. Cuando en las primeras etapas del aprendizaje matemático los alumnos son capaces de automatizar y dominar a la perfección ciertos procedimientos de trabajo y de cálculo, están liberando de alguna manera otros recursos intelectuales que pueden utilizar más adelante para explorar vías que les permitan resolver un determinado problema de muy diversas maneras. De esta forma, extraen sus propias conclusiones durante el proceso y crean las estrategias de resolución correspondientes.

Aurelio Sánchez Entrevista

#### - ¿Qué resultados estáis obteniendo?

- Un elevado porcentaje de alumnos de Kumon trabajan contenidos por encima de su nivel escolar, por lo que continuamente están experimentando el aprendizaje autodidacta al que me refería antes y disfrutando de todas las ventajas que conlleva. Cabe destacar el aumento de la capacidad de aprendizaje, el desarrollo de la perseverancia y la disciplina y el crecimiento de su confianza en sí mismos, que convierten a los alumnos en protagonistas de su educación y les permiten establecer sus propias metas con ayuda del orientador de su centro.

Cada vez hay más alumnos que han logrado finalizar el contenido íntegro del programa de matemáticas antes de acabar primaria, lo que supone asimilar y dominar a edades muy tempranas conceptos y ejercicios que por lo general se estudian en secundaria, bachillerato o durante el primer año de algunas carreras universitarias.

- Hablando de la Universidad, y para terminar: la premisa de poner al alumno como centro y responsable de su propio aprendizaje, parece común para el método Kumon y para los nuevos planes universitarios. ¿Crees que el seguimiento del método Kumon favorece el éxito académico de los alumnos en el nivel universitario? ¿Sería adecuado que un estudiante universitario comenzara con el método ya en la Universidad?
- Estoy convencido de que estudiar el programa de matemáticas de Kumon es una gran ayuda a la hora de abordar estudios superiores, no solo en carreras de ciencias como podríamos pensar si atendemos exclusivamente al tipo de contenidos, sino también para cualquier otro tipo de planes universitarios, donde las capacidades que se desarrollan a través del programa van a resultar muy útiles.

Con respecto a esta cuestión, es interesante conocer que, cuando Toru Kumon creó su método, lo hizo desde el punto de vista de un profesor de Matemáticas del curso anterior a la Universidad y se esmeró en detectar aquellos contenidos que eran más relevantes para ir avanzado desde primaria a los cursos superiores. Prescindió de las partes innecesarias, alargó los temas que consideró esenciales y estableció un orden lógico en el que los contenidos debían presentarse, todo ello para aprovechar al máximo el tiempo de estudio y desarrollar el gusto por las matemáticas que él mismo había descubierto de pequeño. Su hijo disfrutó de todo el proceso de aprendizaje y antes de acabar primaria había finalizado el cálculo diferencial del currículum de bachillerato; es decir, era capaz de resolver con facilitad la mayoría de los ejercicios de las pruebas de acceso a la Universidad. El hecho de que un alumno de 12 años o de menor edad pueda llegar a trabajar con soltura este tipo de contenidos y, además, disfrutar con el estudio nos da una idea de la repercusión que puede tener el perfeccionamiento de ese potencial en las sucesivas etapas formativas, incluida la universitaria.

Comenzar con el método estando ya en la Universidad es perfectamente viable. En la actualidad, el 70 % de los alumnos del programa de matemáticas cursan infantil y primaria, y el 30 % restante estudia cursos de secundaria en adelante. Por supuesto, empezar cuanto antes les permite abordar las etapas formativas posteriores con mayores garantías, pero nunca es tarde, y los alumnos adultos también consiguen tener una excelente evolución y resultados.

## Referencias

- [1] KUMON, Toru. *Give it a try Yattemiyo. The autobiography of Toru Kumon.* Kumon Toru Research Insitute of Education (KTRIE), Japan, 1991
- [2] RUSSEL, David W. Every Child and achiever. A parents' guide to the Kumon Method, Intercultural Group, New York, 1993
- [3] El método Kumon. Recuperado de https://www.kumon.es

#### Sobre los autores:

Nombre: Aurelio Sánchez Estévez

Correo Electrónico: aurelio.sanchez@kumon.es

Institución: Kumon Instituto de Educación de España

*Nombre*: Equipo Editorial de Pensamiento Matemático http://www.caminos.upm.es/matematicas/revistapm/ Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

#### Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

#### Bajo la siguientes condiciones:

**Atribución** Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

**Licenciar Igual** Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.



Esta revista fue 100% maquetada con software de código abierto

