

# Historias de Matemáticas

## Algunos problemas de optimización geométrica

### On some geometric optimization problems

Federico Ruiz López

Revista de Investigación



Volumen V, Número 2, pp. 027–054, ISSN 2174-0410

Recepción: 24 Feb'15; Aceptación: 10 Jul'15

1 de Octubre de 2015

#### Resumen

Los problemas de optimización han sido estudiados de forma recurrente desde la época de los griegos. En sus inicios estos problemas nacen de cuestiones puramente geométricas, como *el problema de la Reina Dido*. Las técnicas de demostración eran muy ingeniosas, pero particulares a cada caso. Con el nacimiento del cálculo diferencial e integral las herramientas para abordar este tipo de problemas adoptaron un carácter más general y analítico. No obstante, el pensamiento geométrico encierra resultados de indudable belleza y simplicidad. En este artículo vamos a abordar algunos problemas desde un punto de vista puramente geométrico, mostrando interesantes herramientas de demostración, hasta llegar a un curioso resultado relacionado con el triángulo órtico.

**Palabras Clave:** Geometría Euclídea, optimización, polígonos, simetrías, triángulo órtico.

#### Abstract

Optimization problems have been studied recurrently since the time of the Greeks. In the beginning these problems arise from purely geometric issues such as *the problem of Queen Dido*. The demonstration techniques were very ingenious, but specific to each case. With the birth of differential and integral calculus tools to address such problems adopted a more general and analytical nature. However, geometrical thinking encloses results of unquestionable beauty and simplicity. In this article we will address some problems from a purely geometrical point of view, showing interesting demonstration tools, until a curious result related to the orthic triangle.

**Keywords:** Euclidean geometry, optimization, polygons, simetry, orthic triangle.

## 1. Algunos problemas de máximos

Desde muy antiguo, los científicos han pensado (y en muchos casos probado) que las leyes que gobiernan la Naturaleza operan de forma óptima para realizar sus propósitos. Un buen ejemplo lo tenemos en el comportamiento de la luz, que siempre sigue una trayectoria de tiempo

mínimo (*Principio de Fermat*), la forma que adopta una cadena colgante, minimizando tensiones, o la que adopta una gota de lluvia, en su descenso en caída libre. Un análisis detallado de estos problemas nos revela en muchos casos la existencia de simetrías. Y es que la Naturaleza obra, generalmente, buscando las configuraciones más simétricas posibles. En este trabajo vamos a tratar de mostrar que ambos conceptos *optimización-simetría* están íntimamente relacionados.

### 1.1. Rectángulos isoperimétricos

Comencemos con un problema sencillo. Dibujemos en un plano diferentes rectángulos, todos ellos con el mismo perímetro y comparemos sus áreas.

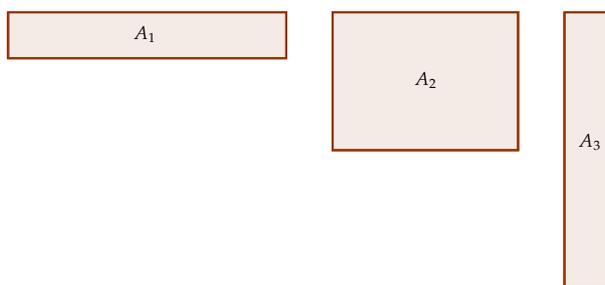


Figura 1. Rectángulos con el mismo perímetro.

Observamos que cuanto menor sea la altura mayor deberá ser la base, y el área disminuirá hasta hacerse despreciable. De igual modo, cuanto mayor sea la altura menor será la longitud de la base, y de igual modo el área del rectángulo irá disminuyendo. Los rectángulos intermedios tienen un área mayor que estos casos extremos, y cabe preguntarse cuál de ellos posee el área más extensa. El problema consiste en trazar, mediante un procedimiento geométrico, los lados de ese rectángulo de área máxima.

Este es un problema de máximos que ya aparece en el Libro VI de Euclides, teorema 27. Nuestra demostración empleará los mismos principios que la de Euclides pero diferirá de ella en el planteamiento exclusivamente y en la notación empleada.

El rectángulo  $ABCD$  de la figura 2 representa supuestamente cualquier rectángulo con un perímetro dado  $P$ . Los lados del cuadrado  $BEGF$  tienen cada uno  $\frac{1}{4}P$ , luego su perímetro es también  $P$ . Afirmamos que el cuadrado es la solución de nuestro problema y que su área es mayor que la de cualquier rectángulo (no cuadrado)  $ABCD$  con el mismo perímetro.

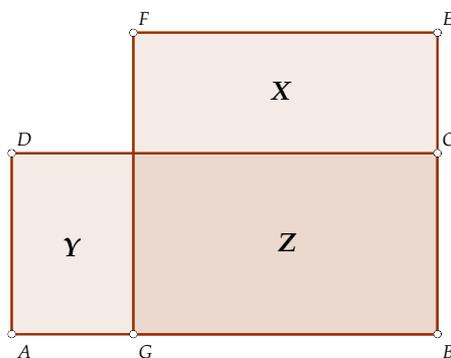


Figura 2.  $ABCD$  es un rectángulo de área inferior a  $BEEF$ .

En efecto, en la figura se observa que el rectángulo rayado  $Z$  forma parte del rectángulo

original y del cuadrado. El área de cada figura será por tanto,

$$\text{Area}(ABCD) = Y + Z$$

$$\text{Area}(GBEF) = X + Z$$

Ahora bien,  $AB + BC = GB + BE$ , valor que coincide con el semiperímetro de las figuras. Para expresarlo de otro modo

$$AG + GB + BC = BG + BC + CE$$

de lo cual se deduce que  $AG = CE$ . Esto es, la altura del rectángulo  $X$  es igual a la longitud de la base de  $Y$ . Sin embargo la longitud de la base de  $X$  constituye uno de los lados del cuadrado, mientras que la altura de  $Y$  es una parte del lado, y por tanto menor. Resulta claro entonces que  $X$  es mayor que  $Y$ . En consecuencia,

$$X + Z > Y + Z$$

y el cuadrado encierra mayor área que el rectángulo. La altura de  $Y$  dejaría de ser solamente una parte del cuadrado, sólo si  $ABCD$  fuera un cuadrado, y entonces  $BEFG$  sería el mismo rectángulo inicial  $ABCD$ . Por consiguiente queda probado que *el cuadrado es la figura que encierra mayor área con el mismo perímetro*.

Este resultado ha sido expresado de la forma que lo hubieran hecho los griegos. Pero también podríamos hacer uso de notación algebraica, como se haría en la actualidad. Si denotamos por  $x$  e  $y$  las dimensiones del rectángulo, su perímetro será

$$P = 2(x + y)$$

El lado del cuadrado sería  $l = \frac{x+y}{2}$ , y su área

$$A = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Los razonamientos anteriores demuestran que

$$x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

o bien

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Esto es, *la media geométrica de dos números reales siempre es menor que su media aritmética, dándose la igualdad si y sólo si  $x$  e  $y$  son iguales*.

De lo anterior se deduce que la solución óptima al problema se obtiene en el caso de la figura con mayor número de simetrías,  $x = y$ , es decir, el polígono regular de cuatro lados.

## 1.2. Un resultado sobre paralelogramos

En la obra de Euclides también encontramos el siguiente problema:

**Problema:** *Dado un triángulo  $ABC$ , ¿cuál es el paralelogramo  $ADEF$  inscrito en el triángulo que encierra área máxima?*

La respuesta la ofrece el propio Euclides. Los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  deben ser los puntos medios de los respectivos lados.

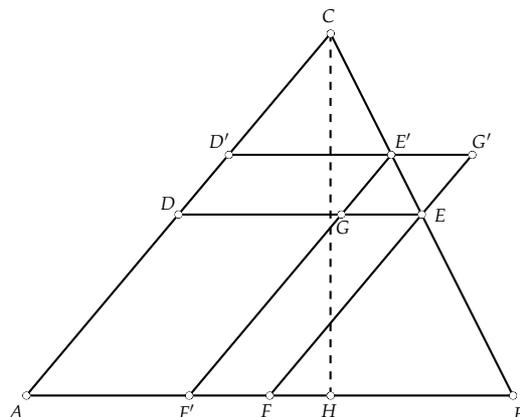


Figura 3. ADEF es el paralelogramo de área máxima en ABC.

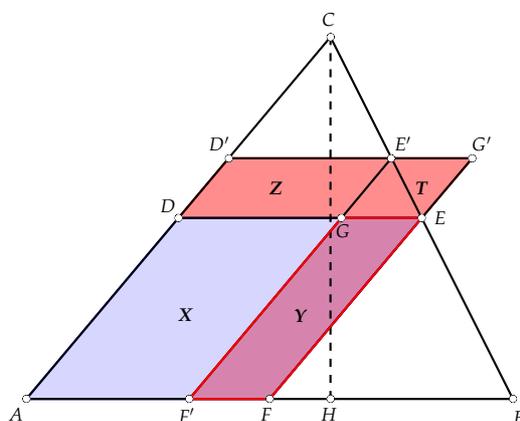


Figura 4. Los paralelogramos DD'G'E y EGFF' son iguales.

Es interesante analizar la demostración de este hecho. Consideremos  $AD'E'F'$  un paralelogramo inscrito en el triángulo  $ABC$ , distinto del paralelogramo  $ADEF$  (sobre los puntos medios). Sea  $G'$  el punto de intersección de las rectas  $D'E'$  y  $FE$ , y  $G$  el punto de intersección de las rectas  $DE$  y  $F'E'$  (figura 3).

Probaremos que el área del paralelogramo  $ADEF$  es mayor que la de  $AD'E'F'$ .

De la figura 4 se observa que

$$Area(ADEF) = X + Y$$

$$Area(AD'E'F') = X + Z$$

Afirmamos que  $DD'G'E$  y  $EGFF'$  son iguales, esto es,  $Z + T = Y$ . En tal caso,

$$Area(ADEF) = X + Y = X + Z + T = Area(AD'E'F') + T > Area(AD'E'F')$$

obtendríamos nuestro resultado. Todo se centra en probar que los paralelogramos  $DD'G'E$  y  $EGFF'$  son iguales. Para ello recordemos que el área de un paralelogramo es base por altura. Denotemos por  $H$  el punto pie de la perpendicular a  $|AB| = c$  trazada desde  $C$ , de suerte que  $|CH| = h$ , y por  $h_1$  la altura del triángulo  $GEE'$  trazada desde  $E'$ . Puesto que los triángulo  $ABC$ ,  $GEE'$  son semejantes, se tiene:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{|AB|}{|GE|} = \frac{c}{|GE|}$$

En consecuencia

$$|GE| \cdot \frac{h}{2} = \frac{c}{2} \cdot h_1$$

esto es, el área del paralelogramo de base  $|GE| = |FF'|$  y altura  $\frac{h}{2}$ , coincide con la del paralelogramo de base  $|DE| = \frac{c}{2}$  y altura  $h_1$ , por lo que  $EGFF'$  y  $DD'G'E$  son iguales.

### 1.3. Triángulos en la circunferencia

En la sección anterior hemos visto cual era el modo de proceder de en la geometría griega. Para un problema de máximos se proponía una figura y luego se demostraba que ésta era la solución óptima. En esta sección vamos a considerar triángulos inscritos en una circunferencia. Nos preguntamos cuál de ellos es el que encierra mayor área. Siguiendo la filosofía de trabajo griega e intuyendo algún tipo de simetría como en el caso del cuadrado, trataremos de probar, que de todos los triángulos inscritos en una circunferencia, el triángulo equilátero es el que encierra mayor área.

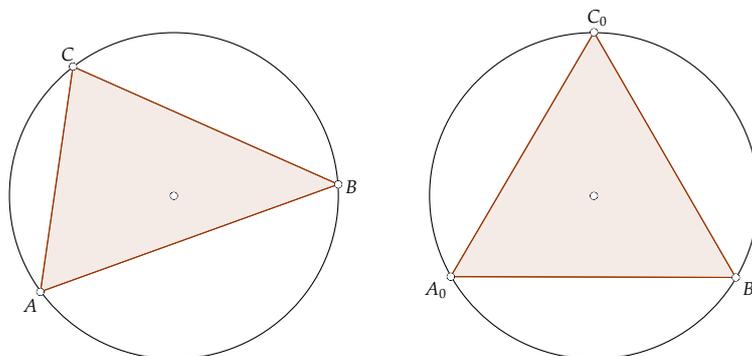


Figura 5. Triángulos inscritos en una circunferencia.

Es muy probable que este problema fuera estudiado, si no resuelto, en tiempos de Platón, un siglo antes de Euclides. No obstante, ni Euclides, ni libros más modernos dan la siguiente solución, que pudo muy bien ser entendida y descubierta por los griegos.

Lo primero que observamos es que al inscribir cualquier triángulo en nuestro círculo, la circunferencia queda dividida en tres arcos iguales en el caso del triángulo equilátero y desiguales en un caso más genérico. En este segundo caso, uno de los arcos debe ser mayor que un tercio de la circunferencia. De la misma forma uno de los arcos debe ser menor que un tercio de la circunferencia. El tercer arco puede ser mayor o menor que un tercio del total. No podemos concluir si es lo primero o lo segundo, pero esto no afecta a nuestro razonamiento.

Supongamos que el triángulo considerado cumple que el arco  $AB$  es menor que la tercera parte de la circunferencia y el arco  $BC$  mayor. Dejando el segmento  $AB$  fijo y moviendo el punto  $C$  sobre la circunferencia, podemos observar que las áreas de estos triángulos varían con la distancia al segmento base, y por tanto será máxima cuando dicha distancia lo sea. Esto sólo sucede cuando el punto  $C$  se encuentra precisamente en la recta mediatriz del segmento  $AB$ , esto es, cuando el triángulo sea isósceles.

Es claro que podemos encontrar un punto  $C'$  de suerte que el arco  $AC'$  sea exactamente un tercio de la circunferencia. Este nuevo triángulo tiene área mayor que el triángulo original, y además uno de sus lados es exactamente igual al de un triángulo equilátero inscrito.

Si el triángulo  $ABC'$  no fuera equilátero, hacemos un razonamiento similar al anterior, pero tomando como base ahora el lado  $AC'$ . Desplazando el punto  $B$ , encontraríamos un nuevo

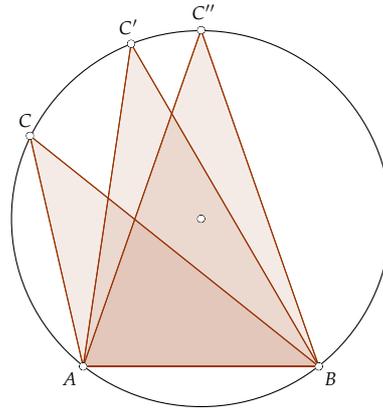


Figura 6. La mayor área se obtiene cuando  $ABC$  es isósceles.

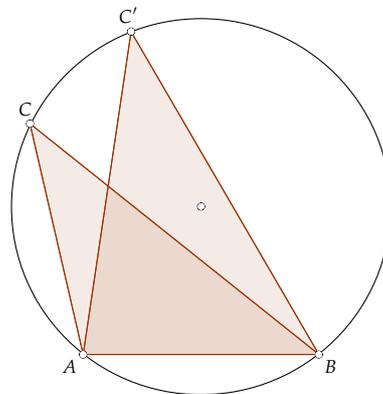


Figura 7. El arco  $AC'$  es un tercio de la circunferencia.

punto  $B'$  que divide al arco  $AC'$  por la mitad, de manera que cada arco mediría un tercio de la circunferencia. Esto sólo es posible si el triángulo es equilátero.

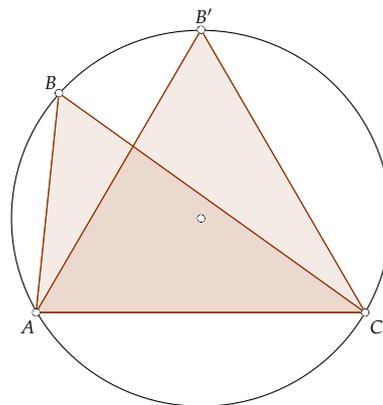


Figura 8. El triángulo  $AC'B'$  es equilátero y encierra área máxima.

Todo esto dota de sentido a la siguiente línea de razonamiento: supongamos que exista un triángulo inscrito en la circunferencia cuya área sea mayor que la de cualquier otro inscrito que podamos dibujar. Llamémosle  $T$ . De lo anteriormente expuesto, resulta claro que  $T$  no puede

ser escaleno, puesto que desplazando uno de los puntos, como antes, obtendríamos un nuevo triángulo  $T'$  de área mayor. De igual modo  $T$  no puede ser isósceles, porque fijando los vértices de uno de los lados iguales y moviendo el tercero adecuadamente, podríamos encontrar otro triángulo isósceles de área mayor. Por tanto si dicho triángulo maximal  $T$  existe debe ser equilátero. En este caso cualquier variación de los vértices crea un triángulo de área menor. Con esto se concluye la demostración.

Observar que si dejamos los vértices moverse libremente por la circunferencia, dándoles la libertad que abarquen la mayor superficie, la configuración geométrica que adoptarían es la que encierra mayores simetrías. Este resultado también lo podríamos analizar de un modo sencillo mediante el uso del calculo diferencial moderno.

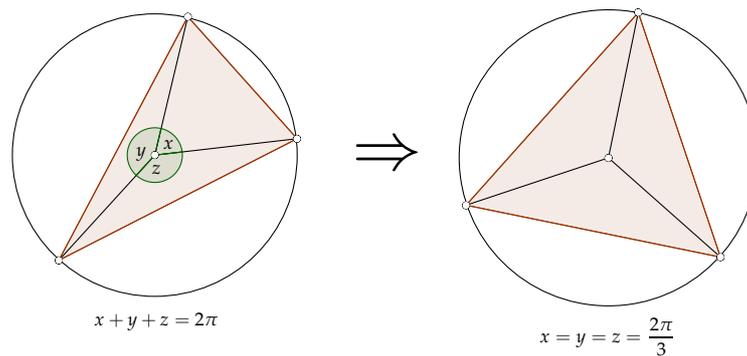


Figura 9. La solución al problema es la figura con mayores simetrías.

Denotemos por  $R$  el radio de la circunferencia y  $x, y, z$  la amplitud en radianes de los arcos determinados por los vértices. Resulta claro que  $x + y + z = 2\pi$ . Puesto que el área de cada triángulo viene determinado por dicha amplitud, de acuerdo con la expresión  $A = \frac{1}{2}R^2\text{sen}(\theta)$ , el área cubierta por nuestro triángulo en una configuración aleatoria será

$$A(x, y, z) = \frac{R^2}{2} \cdot (\text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z))$$

con  $x + y + z = 2\pi$ . Despejando  $z$  de esta ecuación y sustituyendo arriba, construimos una función en dos variables

$$A(x, y) = \frac{R^2}{2} \cdot (\text{sen}(x) + \text{sen}(y) - \text{sen}(x + y))$$

Haciendo uso de la técnicas del calculo diferencial, obtenemos el gradiente de esta función e igualamos a cero para obtener los extremos relativos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{R^2}{2} \cdot (\cos(x) - \cos(x + y)) = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{R^2}{2} \cdot (\cos(y) - \cos(x + y)) = 0 \end{aligned}$$

Esto nos lleva a que en los puntos críticos  $(x, y)$  se debe verificar que

$$\cos(x) = \cos(y) = \cos(x + y)$$

donde  $x, y \in [0, 2\pi]$ . De la primera igualdad se deduce que  $x = y$ , y por tanto nos queda la ecuación trigonométrica

$$\cos(2x) = \cos(x) \rightarrow 2\cos^2(x) - 1 = \cos(x) \rightarrow 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son dos: o bien  $\cos(x) = 1$ , en cuyo caso  $x = y = z = 0 \pmod{2\pi}$ , que es la solución degenerada del problema (los tres vértices juntos no definen ninguna superficie plana). O bien  $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ , lo cual nos lleva a que  $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$ , como queríamos probar.

### 1.4. Polígonos inscritos en una circunferencia

El resultado anterior es un caso particular de un hecho mucho más general:

*de todos los polígonos de  $n$  lados inscritos en un círculo dado, el polígono regular es el mayor de todos (encierra mayor área). Si  $n = 3$ , el polígono es un triángulo equilátero como hemos visto.*

La primera demostración rigurosa de este hecho se debe al matemático griego Zenodoro que vivió aproximadamente en el año 180 a.C. Investigadores de la Historia de la Ciencia como J. Mongenet le atribuyen el haber desarrollado completamente la teoría de los isoperímetros en el siglo III a.C., en un tratado sobre figuras isoperimétricas hoy desaparecido. A Zenodoro lo situamos entre Arquímedes (m. 212 a.C) y Pappus, (320 d.C) dado que cita al primero y es citado por el segundo.

*Theón de Alejandría* (390 d.C) da prueba de este hecho haciendo alusión al libro de Zenodoro en uno de sus comentarios al primer libro del *Almagesto* diciendo:

*... vamos a demostrarlo de modo algebraico siguiendo la demostración que dio Zenodoro en su tratado de figuras isoperimétricas.*

No vamos a entrar en los detalles de la prueba que tradicionalmente se le atribuye a Zenodoro. Pero sí notar que si distribuimos  $n$  puntos aleatoriamente sobre una circunferencia y los dotamos de vida y capacidad para generar un polígono de área máxima, la solución del problema la proporciona precisamente la figura geométrica con mayor número de simetrías, y donde los ángulos centrales son todos iguales entre sí.

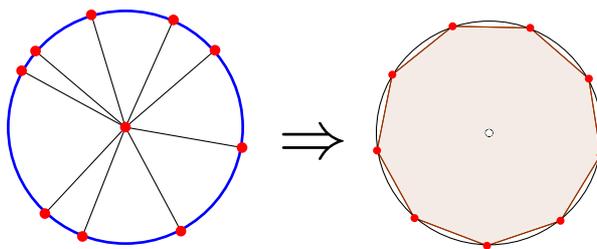


Figura 10. La disposición óptima es la más simétrica.

Esto es una cuestión de pura geometría. Y lo vamos a ilustrar con el siguiente ejemplo. Consideremos un ángulo central como en la figura de cierta amplitud  $\theta$ , y un punto situado aleatoriamente en dicho arco. Nos planteamos determinar la posición del punto  $P$  que hace máxima la superficie del cuadrilátero  $OAPB$  (figura 11).

Resulta claro que el área de nuestro cuadrilátero es suma de dos triángulos isósceles. Denotemos por  $M$  y  $N$ , los pies de las perpendiculares trazados desde el punto  $P$  sobre cada los lados  $OB$  y  $OA$  respectivamente, de suerte que  $|PM| = h_1$  y  $|PN| = h_2$ . De igual modo denotemos por  $c = |OA| = |OB|$ , el radio del círculo.

El área de nuestro cuadrilátero es

$$Area(OAPB) = \frac{|OB| \cdot h_1}{2} + \frac{|OA| \cdot h_2}{2} = \frac{c}{2} (h_1 + h_2)$$

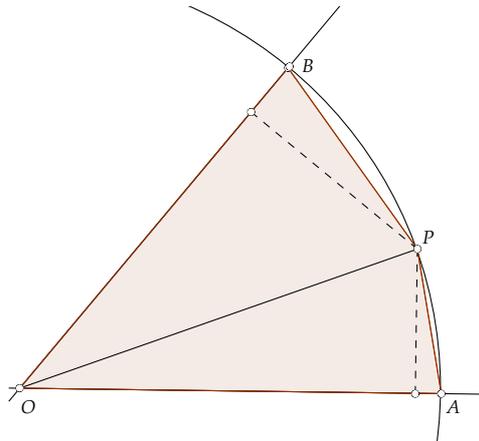


Figura 11. El punto  $P$  se mueve sobre el arco libremente.

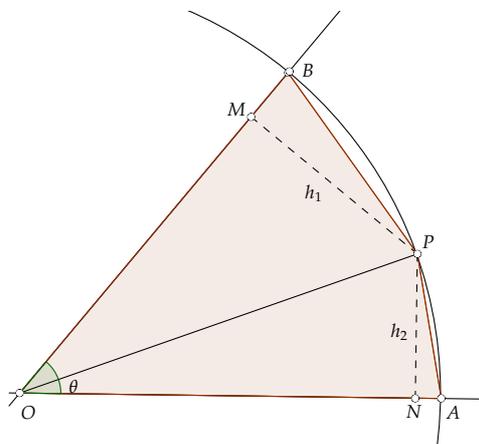


Figura 12. El cuadrilátero  $OAPB$  es suma de dos triángulos isósceles.

Este área será máxima cuando lo sean la suma de las alturas lo que nos lleva a un problema equivalente en términos de distancias. Lo que vamos a demostrar es que la suma de alturas trazadas desde  $P$  sobre los lados del ángulo central es máxima cuando el punto  $P$  se encuentra sobre la bisectriz de dicho ángulo. Para ello observamos que podemos trazar las alturas desde  $A$  y  $B$ , sobre el segmento  $OP$ , de suerte que se tiene la siguiente configuración (figura 13):

Observar que la bisectriz del ángulo central coincide con la mediatriz del segmento  $AB$ , por tratarse de un triángulo isósceles. Si el punto  $P$  no se encuentra en dicha mediatriz, el segmento  $AB$  no corta perpendicularmente a la recta  $OP$  y por tanto se forman dos triángulos rectángulos donde las alturas son precisamente dos catetos. Si denotamos por  $d_1 = |BC|$  y  $d_2 = |AC|$ , dichas distancias corresponden a las hipotenusas de dichos triángulos y por tanto tienen mayor longitud. De este modo

$$h_1 + h_2 < d_1 + d_2 = |AB|$$

Haciendo uso de la desigualdad anterior deducimos que

$$Area(OAPB) = \frac{c}{2} (h_1 + h_2) \leq \frac{|OA| \cdot |AB|}{2}$$

dándose la igualdad si y sólo si el punto  $P$  se encuentra sobre la bisectriz del ángulo  $\theta$ .

Esta es la configuración más simétrica posible. La simetrías vuelven a resolver el problema.

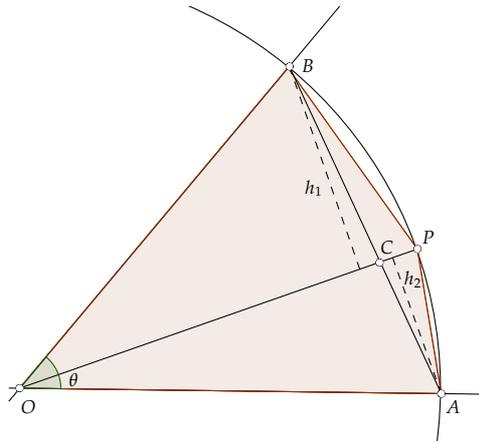


Figura 13. Buscamos el punto que maximice la suma de distancias.

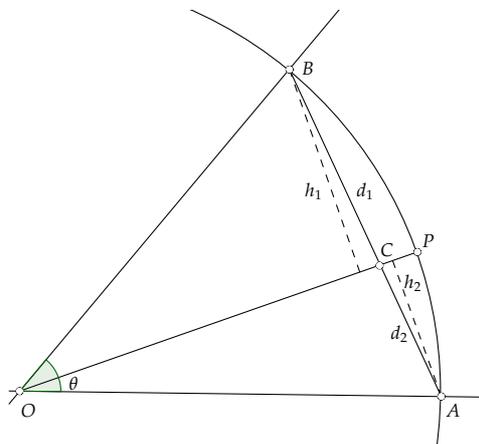


Figura 14. Si  $P$  no esta en la mediatriz de  $|AB|$ , se forman dos triángulos rectángulos.

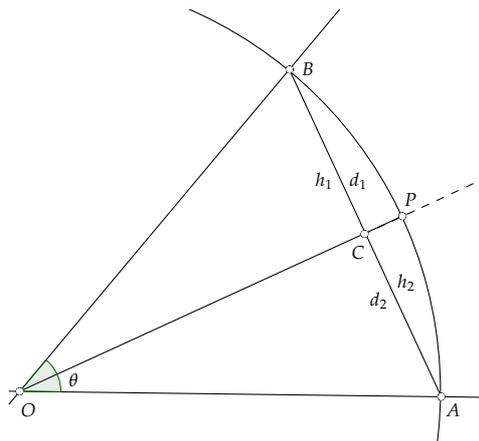


Figura 15. Si  $P$  divide al arco en dos partes iguales del área obtenida es máxima.

No es restrictivo suponer que el ángulo central sea mayor, igual o menor a un recto. De hecho, al mismo resultado anterior se puede llegar de un modo más simple, considerando directamente el segmento  $|AB|$ , tal y como se muestra en la figura 16:

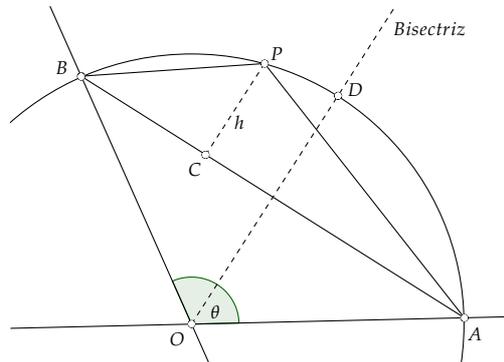


Figura 16. El cuadrilátero OAPB es suma de dos triángulos.

El cuadrilátero OAPB en este caso es descompuesto en suma de dos triángulos, uno isósceles OAB y otro APB escaleno, que va variando en función del punto P. Observamos, en consecuencia, que nuestro cuadrilátero encerrará área máxima cuando así lo haga APB, puesto que OAB no se ve alterado. Esto sólo se consigue cuando la altura h trazada desde P sobre el segmento AB, sea la máxima posible, esto es, cuando se encuentre sobre la bisectriz del triángulo OAB, y las distancia |PA| y |PB| sean las mismas.

En esta demostración, no obstante, no se aprecia el resultado sobre la suma de distancias del punto P a cada uno de los lados que determinan el ángulo. Sabemos que, en la situación óptima del problema, esta suma de distancias es máxima. Por lo que consideramos la primera prueba mucho mas interesante.

Este resultado nos va a ayudar a obtener una demostración alternativa al problema de Zenodoro sobre polígonos inscritos en una circunferencia. Imaginemos que disponemos de cuatro puntos aleatoriamente distribuidos y les pedimos que se redistribuyan para maximizar el área del polígono que generan. Los puntos buscarán establecer el mayor número de simetrías, lo cual sólo sucede si se sitúan en los vértices de un cuadrado. Y lo mismo sucede con configuraciones de cinco, seis o n vértices.

Como caso particular, acabamos de resolver un viejo problema: *De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia encontrar el que posee mayor perímetro.*

En efecto, de lo anterior se deduce (tomando un ángulo central de 90°) que la solución al problema viene determinada cuando el punto sobre el arco se encuentre en la bisectriz del primer cuadrante, y por tanto las distancias a los ejes de coordenadas sean las mismas, i.e , la figura debe ser un cuadrado. En este caso no solo se obtiene un máximo de perímetro sino también de superficie cubierta.

### 1.5. Un juego geométrico

En esta sección vamos a proponer un curioso procedimiento geométrico que nos va a ser de utilidad más adelante. Partimos de un segmento de longitud L dividido en tres partes no necesariamente iguales. Denotemos por a, b, c las longitudes respectivas de cada una de las partes, de suerte que  $a \leq b \leq c$  con

$$a + b + c = L$$

A continuación procedemos del siguiente modo: unimos los segmentos de mayor longitud b, c y los transformamos en otros dos de idéntica longitud, calculando el punto medio del segmento concatenado que determinan, siendo ahora sus longitudes  $\frac{b+c}{2}$ .

Repetimos este proceso como se aprecia en la figura 18. Dejando invariante el primero de la

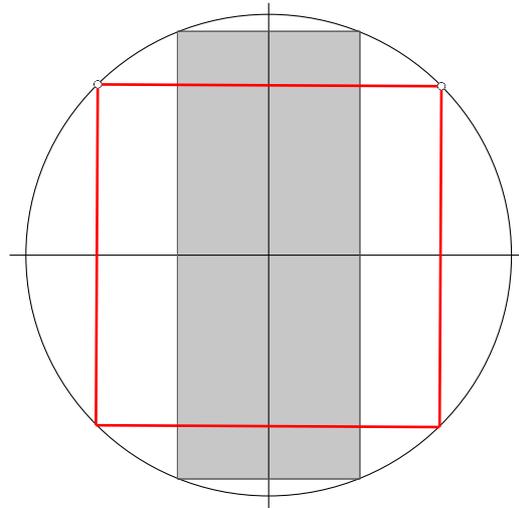


Figura 17. El cuadrado inscrito posee mayor área y perímetro que cualquier otro rectángulo.

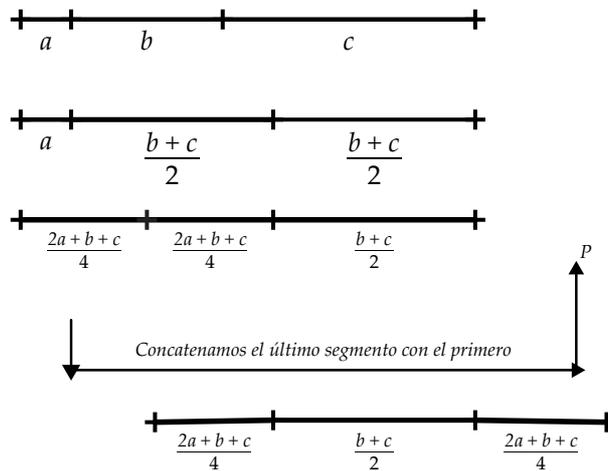


Figura 18. Proceso de construcción.

derecha, transformamos los otros dos en segmentos de igual longitud, determinando el punto medio del segmento concatenado que forman. Finalmente desplazamos este último segmento, transformado de  $a$ , delante del situado mas a la derecha, (hacemos un corta y pega) obteniendo tres nuevos subsegmentos concatenados de longitudes:

$$\frac{2a + b + c}{4}, \frac{b + c}{2}, \frac{2a + b + c}{4}$$

en ese orden. Volvemos a repetir este proceso innumerables veces. Si realizan el experimento observarán como los segmentos cada vez son más parecidos, esto es, adoptarán aproximadamente la misma longitud igual a  $\frac{L}{3}$ . Esto es un ejemplo claro de un proceso iterativo que termina en una configuración completamente simétrica.

Para fundamentar matemáticamente lo anterior necesitamos calcular como son exactamente estas longitudes que se van generando. Definamos  $l_n$  la sucesión de longitudes obtenidas del siguiente modo:

$$l_0 = a, l_1 = \frac{b + c}{2}, l_2 = \frac{2a + b + c}{4}, l_3 = \frac{2a + 3b + 3c}{8} \dots$$

La ley de recurrencia está clara:

$$l_{n+1} = \frac{l_n + l_{n-1}}{2}$$

Esta relación guarda interesantes consecuencias. La primera de ellas es que la longitud entre dos intervalos consecutivos es

$$|l_{n+1} - l_n| = \frac{|l_n - l_{n-1}|}{2} = \dots = \frac{l_1 - l_0}{2^n} = \frac{b + c - 2a}{2^{n+1}} = \frac{L - 3a}{2^{n+1}}$$

Si  $a = \frac{L}{3}$  todas las longitudes son iguales y se produce el equilibrio del sistema. Si no es así, observamos que las distancias de longitudes consecutivas tiende a cero cuando el número de iteraciones aumenta. Por tanto esta sucesión de números reales tiene que converger a un cierto valor dentro del intervalo. Denotémosle por  $l$ . Como por otra parte

$$l_{n-1} + 2l_n = L$$

al tomar  $n$  un valor suficientemente grande, obtendremos que  $3l = L$ , esto es, las longitudes tienden al valor  $l = \frac{L}{3}$ .

Un modo más directo de probar todo esto, pasa por determinar exactamente una fórmula explícita de  $l_n$ . No es complicado encontrar que

$$l_n = \frac{a_n \cdot a + b_n \cdot b + c_n \cdot c}{2^n}$$

donde

$$a_n = \frac{2^n \pm 2}{3}, b_n = c_n = \frac{2^n \pm 1}{3}$$

La distinción del signo en cada caso viene determinada por la paridad de  $n$ . Cuando  $n$  es par  $a_n$  toma la determinación positiva, y  $b_n, c_n$ , negativas, y cuando  $n$  es impar al contrario con el fin de que se cumpla la relación siempre cierta

$$a_n + b_n + c_n = 2^n$$

Esto permite definir la sucesión como una secuencia de coordenadas baricéntricas de la forma

$$l_n = \alpha_n a + \beta_n b + \gamma_n c$$

donde  $\alpha_n = \frac{a_n}{2^n}$ ,  $\beta_n = \frac{b_n}{2^n}$ ,  $\gamma_n = \frac{c_n}{2^n}$  y se cumple

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$$

De la naturaleza de estas expresiones se comprueba nuevamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \frac{1}{3}$$

Estos razonamientos se pueden generalizar a un número finito de segmentos concatenados. Si consideramos el caso de cuatro segmentos de diferente longitud, y denotamos por  $l_n$  la sucesión que, como antes, se va generando, la ley de formación se traduce en este caso en:

$$l_{n+1} = \frac{l_n + l_{n-2}}{2}$$

y se deberá cumplir que, en cualquier estado del sistema

$$2l_n + l_{n-1} + l_{n-2} = L$$

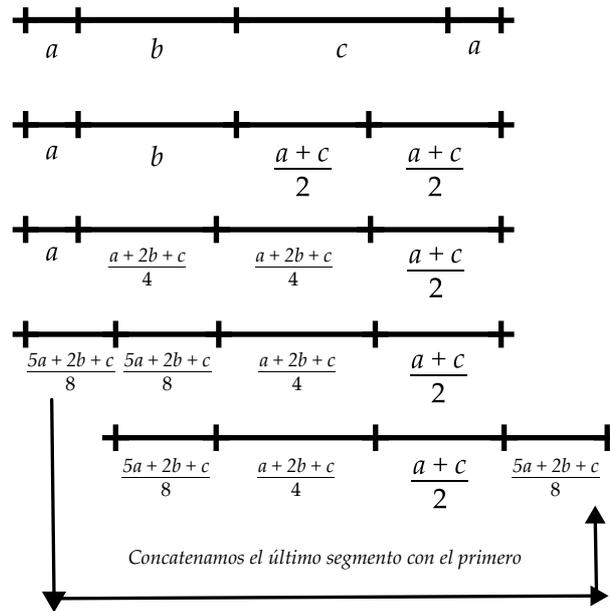


Figura 19. Proceso de construcción para cuatro intervalos.

De converger esta sucesión a algún valor, deberá serlo a  $\frac{L}{4}$ , que es una configuración estable. De momento no hemos encontrado ningún argumento consistente a favor de esta convergencia aunque el cálculo de la expresión para  $l_n$  en este caso es bastante clarificadora.

En efecto, si consideramos un segmento de longitud  $L$ , dividido en cuatro secciones  $a, b, c, a$  como se aprecia en la figura 19, (no es restrictivo suponer que hay dos iguales), y aplicamos el proceso iterativamente, llegamos a las siguientes expresiones para  $l_n$

$$l_0 = a, l_1 = \frac{a+c}{2}, l_2 = \frac{a+2b+c}{4}, l_3 = \frac{5a+2b+c}{8} \dots$$

$$l_4 = \frac{9a+2b+5c}{16}, l_5 = \frac{13a+10b+9c}{32}, l_6 = \frac{33a+18b+13c}{64} \dots$$

con  $2a + b + c = L$ . Igual que antes,

$$l_n = \alpha_n a + \beta_n b + \gamma_n c$$

donde  $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$  De la naturaleza de estas expresiones se comprueba nuevamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \frac{1}{4}$$

Como ejemplo práctico hemos calculado el valor

$$l_{12} = \frac{2015a + 1058b + 1013c}{4096}$$

Aquí

$$\alpha_{12} = \frac{2025}{4096} \approx \frac{1}{2}$$

$$\beta_{12} = \frac{1058}{4096} \approx \frac{1}{4}$$

y

$$\gamma_{12} = \frac{1013}{4096} \approx \frac{1}{4}$$

Es decir

$$l_{12} \approx \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c = \frac{2a + b + c}{4} = \frac{L}{4}$$

como buena aproximación.

### 1.6. A vueltas con el círculo

Uniendo los dos resultados de secciones anteriores, nos encontramos en condiciones de dar una prueba alternativa al problema de Zenodoro. En efecto, sean

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

los  $n$  vértices de un polígono inscrito en una circunferencia. Denotemos por  $s_i$  el arco de circunferencia entre  $P_i$  y  $P_{i+1}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .  $s_n$  será el arco  $P_n P_1$ . No es restrictivo suponer que los arcos están dispuestos en orden decreciente a sus longitudes, aunque no es algo realmente necesario. Si no es así siempre podemos encontrar un polígono regular de la misma área, con los arcos dispuestos de este modo. Sea  $s_1$  es el arco con mayor longitud tal como se muestra en la figura 20.

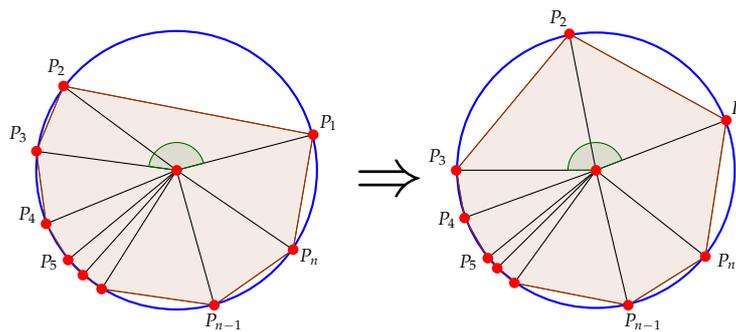


Figura 20. Se desplaza el punto  $P_2$  a la bisectriz del arco  $P_1 P_3$  para mejorar la superficie del polígono.

Consideremos el arco  $P_1 P_3$ . Desplazamos el punto  $P_2$  que lo contiene, hasta hacerlo coincidir con la bisectriz del arco de longitud  $s_1 + s_2$ . Por los resultados anteriores sabemos que este nuevo polígono encierra un área mayor que el anterior. Pasamos al punto  $P_3$  y lo situamos en la bisectriz del arco formado por el nuevo punto  $P_2$  y  $P_4$ . Vamos pasando por cada punto, repitiendo el proceso sobre la nueva configuración obtenida.

De este modo creamos una nueva sucesión de segmentos de arco que cumplen la propiedad dada en la sección anterior. De hecho obedecen al mismo principio de construcción. En este caso

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = L = 2\pi$$

Sus amplitudes van aproximándose al valor

$$\frac{2\pi}{n}$$

esto es, los puntos  $P_i$  se van situando cada vez más cerca de los vértices de un polígono regular, que es la solución óptima del problema. Y esta figura será la que encierre mayor área, porque cada polígono aumenta la superficie del anterior y está acotada por el área del círculo.

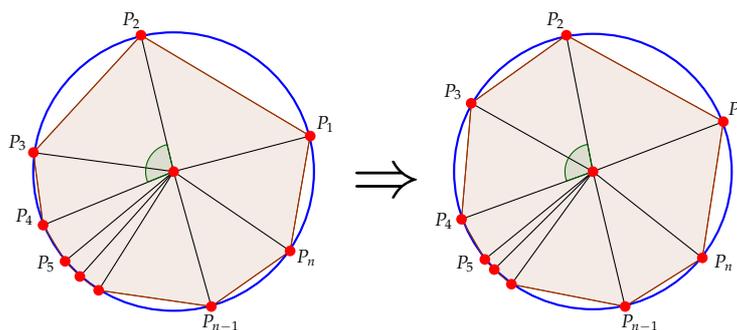


Figura 21. Movemos el punto  $P_3$  hasta maximizar el área del cuadrilátero  $OP_2P_3P_4$ .

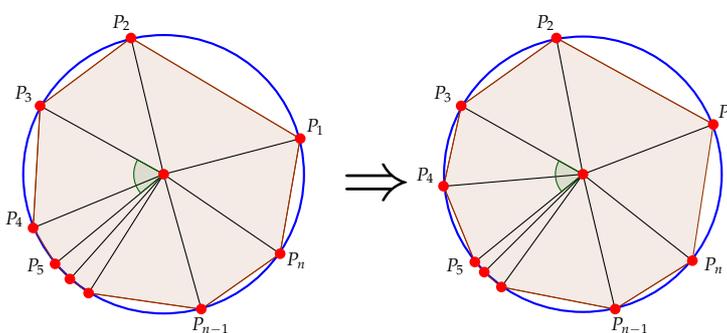


Figura 22. Repetimos el proceso moviendo  $P_4$ .

## 2. El triángulo órtico como un problema de mínimos

Antes de considerar nuestro principal teorema, veamos un problema muy sencillo que concierne a las leyes de reflexión de la luz. Es sabido que si un rayo de luz que parte de un punto  $A$  choca con un espejo, es reflejado en dirección  $B$  de forma que el ángulo de incidencia y de reflexión son iguales (figura 24).

En esencia, este fenómeno óptico es consecuencia del *principio del tiempo mínimo de Fermat*, que afirma que la luz siempre emplea el menor tiempo en viajar entre dos puntos (a velocidad constante, esto también implica el recorrido de menor distancia).

Vamos a demostrar que en efecto, la trayectoria  $ADB$  que sigue el rayo es la mas corta de todas las posibles trayectorias que, tocando el espejo, vayan de  $A$  a  $B$ . Este es el mismo camino que seguiría un barco que tuviera que ir del lugar  $A$  al  $B$  tocando un punto de la orilla en el trayecto. No entraremos ahora en la cuestión de por qué un rayo de luz tiene capacidad para escoger del mismo modo que lo haría el piloto del barco. Lo único que demostraremos es el hecho puramente matemático de que:

*la trayectoria  $ADB$  con ángulos de reflexión e incidencia iguales es más corta que cualquier otra trayectoria  $ACB$ .*

Este problema se conoce como el *problema de Herón*, llamado así en honor a *Herón de Alejandría* (siglo I a.C.). La demostración depende de un recurso que desde el punto de vista matemático parece muy artificial, pero muy natural desde el punto de vista de la óptica.

Consideremos  $A'$  el simétrico de  $A$  respecto de la recta que determina la superficie del espejo. Resulta claro que la longitud del camino  $ACB$  es el mismo que  $A'CB$ , por una cuestión de

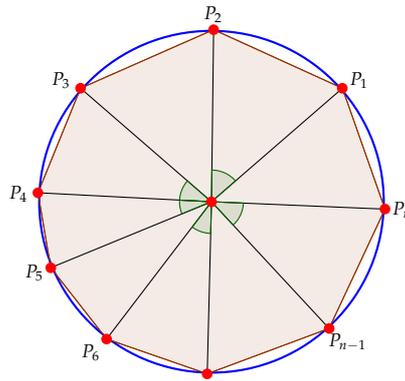


Figura 23. Cuando el número de iteraciones es elevado los puntos se distribuyen en los vértices de un polígono regular.

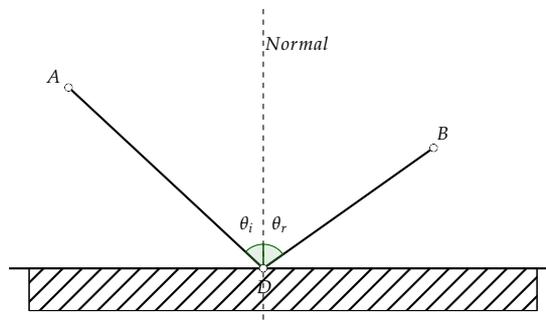


Figura 24. La ley de la reflexión es consecuencia del comportamiento geométrico de la luz.

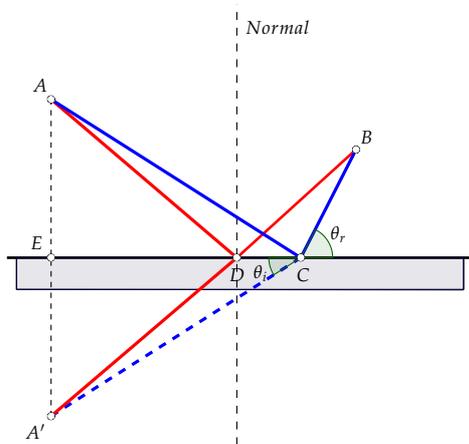


Figura 25. La trayectoria de ACB es una línea quebrada.

simetría:  $|A'C| = |AC|$ . Además

$$|A'D| = |AD|, |A'E| = |AE|$$

Por tanto los triángulos  $EDA$  y  $EDA'$  son iguales. Según nuestra hipótesis tenemos que el ángulo  $EDA$  es igual al ángulo  $CDB$  y consecuentemente los ángulos  $CDB$  y  $EDA'$  son iguales al ser opuestos por el vértice, es decir, que  $A'DB$  es una línea recta.

Entonces la longitud de las trayectorias  $ADB$  y  $A'DB$ , así como  $ACB$  y  $A'CB$  son iguales. Puesto que  $A'DB$  es una línea recta es más corta que la trayectoria  $A'CB$ , ya que en geometría euclídea, la distancia más corta entre dos puntos es siempre la línea recta.

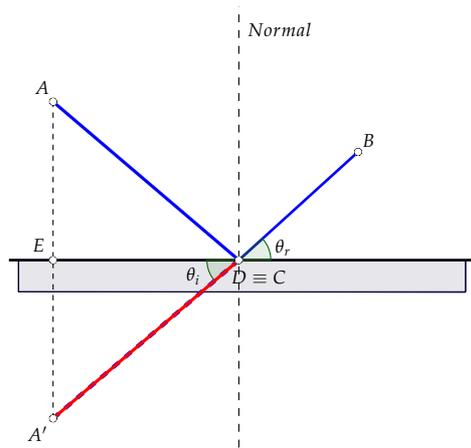


Figura 26. La trayectoria de ACB es una línea quebrada.

Una aplicación práctica de este resultado la podemos encontrar en el siguiente problema: imaginemos que dos ciudades A y B se encuentran situadas a un mismo lado de un río  $r$ . Se quiere construir una fuente a la orilla del río de manera que abastezca de agua a las dos ciudades. Por cuestiones de economía se debe procurar que la suma de distancias a los dos pueblos sea la mínima posible. ¿En qué punto sobre la orilla debemos situar dicha fuente?

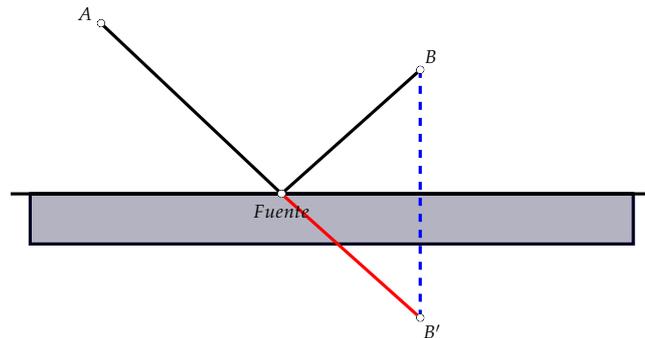


Figura 27. La trayectoria de ADB' debe ser una línea recta.

La respuesta la tenemos en las consideraciones previas. Basta con determinar  $B'$ , el punto simétrico de  $B$  respecto de la línea del río, y determinar el punto de intersección de la recta  $AB'$  con dicha línea. Exactamente ese punto es el que minimiza la suma de distancias, ya que cualquier otro punto proporcionara una línea quebrada de longitud mayor.

### 2.1. El triángulo órtico

Dado un triángulo  $ABC$  se llama *triángulo órtico* aquel que tiene por vértices los pies de las alturas del triángulo.

Este triángulo tiene interesantes propiedades. La primera de ellas tiene que ver con los ángulos interiores que se forman. Podemos afirmar que los ángulos  $AFG$  y  $CFE$  son iguales (como ocurre en las leyes de reflexión). No solo eso. Todos los ángulos marcados en el mismo color en la figura 29 son iguales.

La demostración de este hecho se basa en tres teoremas básicos de geometría plana: El teorema de Tales, que afirma que todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto; que los ángulos

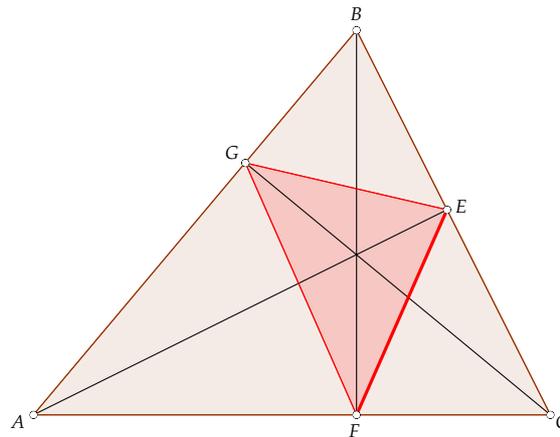


Figura 28. El triángulo órtico inscrito a ABC.

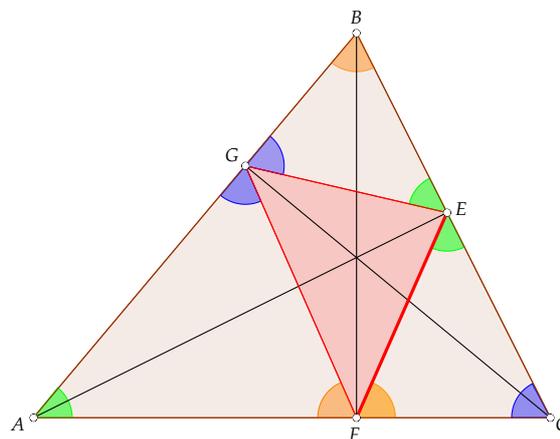


Figura 29. Propiedad de los ángulos del triángulo órtico.

que interceptan un mismo arco son iguales; que las alturas de un triángulo se encuentran en un punto ( $H$ ). Empleando éstos, podemos observar lo siguiente:

Sea  $H$  el ortocentro del triángulo  $ABC$ . Comprobamos que el círculo con diámetro  $AH$  pasa por  $G$  y  $F$ , y que el círculo con diámetro  $CH$  pasa por los puntos  $E$  y  $F$ . Además, el ángulo  $AFG$  intercepta al arco  $AG$ , como también lo hace el ángulo  $AHG$ . Por consiguiente estos dos ángulos son iguales. De la misma manera vemos que los ángulos  $CFE$  Y  $CHE$  son también iguales. Pero los ángulos  $AHG$  y  $CHE$  son opuestos por el vértice y por tanto también son iguales. Tenemos entonces que el ángulo  $AFG = \text{ángulo } CFE$ .

En particular los triángulos  $EFC$ ,  $FGA$ ,  $GEB$  son semejantes entre sí y semejantes al triángulo  $ABC$ .

Otra consecuencia es que las alturas del triángulo  $\triangle ABC$  son las bisectrices interiores de su triángulo órtico (y los lados de  $\triangle ABC$  las exteriores) y por tanto el ortocentro del triángulo  $ABC$  es el incentro de su triángulo órtico. Esta propiedad fue descubierta por *Giovanni Francesco Fagnano*.

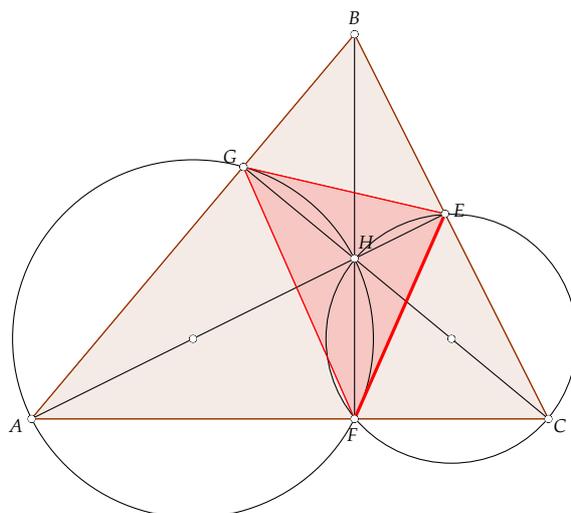


Figura 30. Demostración de la propiedad de ángulos.

## 2.2. El teorema de Fagnano

Podemos ahora comenzar con nuestro problema central:

Dado un triángulo acutángulo  $ABC$ , inscribir en él otro triángulo  $PQR$  con el menor perímetro posible.

Afirmamos que el triángulo órtico  $EFG$ , cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo  $ABC$ , tiene un perímetro menor que cualquier otro inscrito  $PQR$ .

La primera demostración que vamos a dar se debe a A.H. Schwarz. A pesar de ser un problema matemático de orden relativamente menor, nos muestra la forma en que el genio de este gran matemático se manifiesta en trabajos relativamente triviales o extremadamente importantes. La demostración hace un ingenioso uso del concepto de simetría. En efecto partimos del triángulo  $ABC$ , y realizamos su reflexión respecto de la recta  $BC$ .

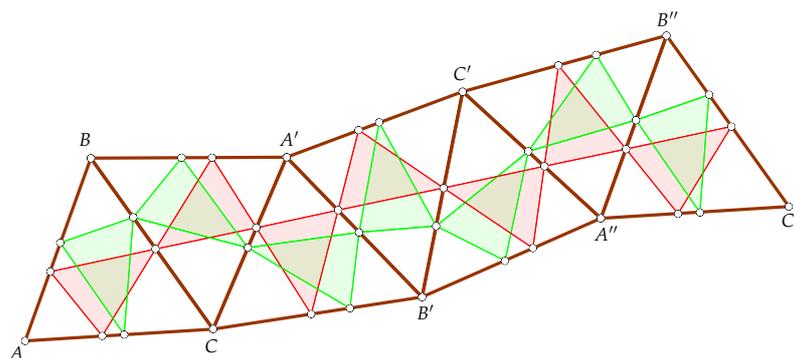


Figura 31. Realizamos seis simetrías consecutivas del triángulo  $ABC$ .

El triángulo reflejado  $A'BC$  lo reflejamos en su lado  $CA'$ . Luego en  $C'A''$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $A''B''C''$  en un total de seis reflexiones. Primeramente demostraremos el hecho evidente de que la posición final  $A''B''C''$  es la misma posición inicial  $ABC$ , trasladada paralelamente a sí misma sin girar. Las dos primeras reflexiones llevan  $ABC$  a la tercera posición  $A'B'C'$ . Este movimiento podría haberse efectuado sin reflejar el triángulo y sin levantarlo de su

plano, simplemente haciéndolo girar en un ángulo  $2C$  alrededor del punto  $C$  en el sentido de las agujas del reloj. De la misma forma, el movimiento de la tercera a la quinta posición podría haberse efectuado por un giro en sentido de las agujas del reloj de ángulo  $2B$ , alrededor del punto  $B'$ . Finalmente, el giro en la misma dirección de un ángulo  $2A$  alrededor de  $A''$  proporcionaría la séptima o última posición. En total, el triángulo ha efectuado una rotación completa de un ángulo

$$2A + 2B + 2C = 2(A + B + C) = 2\pi$$

puesto que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano. Por tanto la posición final del triángulo que es reflejado el último tiene la misma orientación que el inicial, ha sido simplemente movido, pero queda paralelo a sí mismo. En consecuencia,  $BC$  es paralelo a  $B''C''$ .

Observemos ahora las distintas posiciones que asumen el triángulo órtico  $EFG$  (en rojo en el dibujo) y un triángulo inscrito cualquiera de vértices  $PQR$  (en verde en el dibujo). Esto se muestra en la figura 32. Según nuestro postulado sobre el triángulo órtico, observamos de inmediato que la segunda posición de  $EG$  forma una línea recta con la primera posición de  $FE$ . De la misma manera, un lado del triángulo órtico quedará siempre a continuación de esta línea en sucesivas posiciones. Luego la recta  $EE'$  está formada por seis segmentos 2 iguales a  $FG$ , 2 a  $GE$  y 2 a  $EF$ ; esto quiere decir que es igual al doble del perímetro del triángulo órtico.

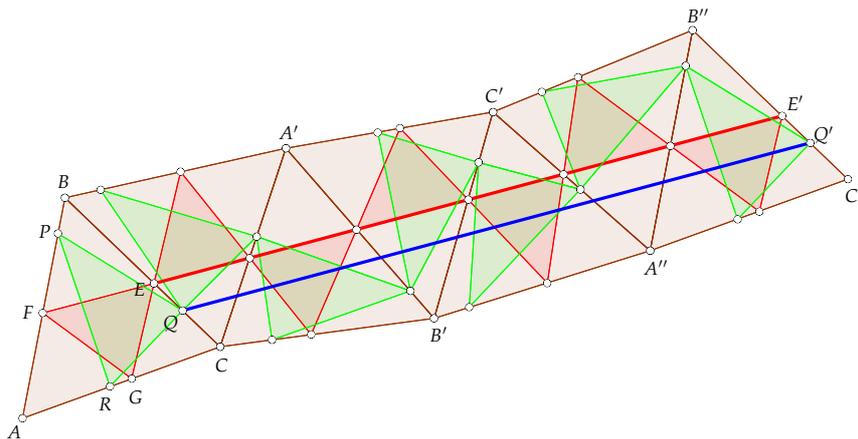


Figura 32. La línea roja  $EE'$  mide exactamente dos veces el perímetro del triángulo órtico  $EFG$ .

Trazando las posiciones asumidas por el triángulo arbitrario  $PQR$  de la misma forma, encontramos una línea poligonal (en verde en el dibujo) que une  $Q$  con  $Q'$ , y por tanto también será igual al doble del perímetro del triángulo  $PQR$ . Los segmentos  $EQ$  y  $E'Q'$  son paralelos por estar sobre  $BC$  y  $B''C''$ . Son también iguales por ser segmentos correspondientes en dos posiciones del triángulo  $ABC$ . Entonces por un teorema de geometría plana  $EE'QQ'$  es un paralelogramo, y consecuentemente sus otros dos lados son iguales, esto es,

$$EE' = QQ'$$

Por consiguiente  $QQ'$  es también igual al doble del perímetro del triángulo órtico. La línea recta que une estos puntos es más corta que la línea en zig-zag, (en verde en el dibujo) que une los mismos puntos, siendo esta poligonal el doble del perímetro del triángulo arbitrario  $PQR$ . Por tanto, el perímetro del triángulo órtico es menor que el perímetro de  $PQR$ , exactamente lo que queríamos demostrar.

Esta demostración es de este tipo de demostraciones matemáticas en las que la idea esencial de la prueba puede reconocerse en una ojeada. Sencillamente genial.

### 2.3. La prueba de Féjer

La demostración realizada previamente, depende básicamente del hecho de ser la línea recta la distancia más corta entre dos puntos, y emplea la idea de reflexión (simetría axial) de una figura respecto de una recta. Estos dos principios son también la base de una segunda demostración, quizás más conocida, y que muestra la elegancia de los razonamientos geométricos. La prueba que ofrecemos a continuación fue formulada por L. Féjer, que la descubrió siendo estudiante y ganó por ello una consideración especial por parte de H.A.Schwarz.

Consideremos un triángulo acutángulo  $ABC$  y un triángulo arbitrario  $PQR$  inscrito. Supongamos que  $P$  se encuentra sobre el lado  $BC$  (figura 33). Reflejamos este punto respecto de los otros dos lados del triángulo,  $AC$  y  $AB$ , y denominemos  $P'$  y  $P''$  a las dos imágenes. Por simetría los segmentos  $PQ$  y  $QP'$  son iguales, y del mismo modo  $PR$  y  $RP''$ . El perímetro del triángulo  $PQR$  es por tanto igual a la longitud de la trayectoria  $P'QRP''$ .

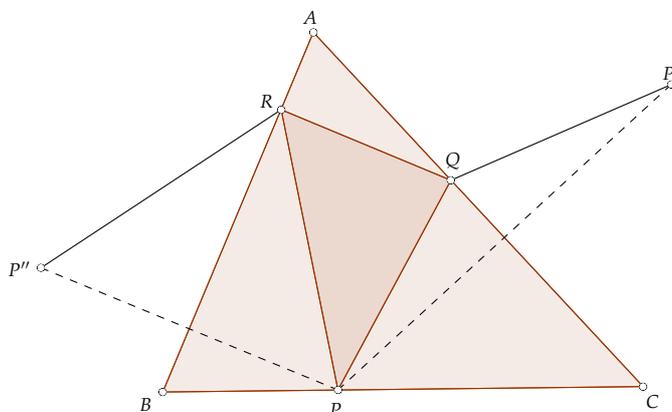


Figura 33. El perímetro del triángulo  $PQR$  es igual a la longitud de la trayectoria  $P'QRP''$ .

Si fijamos un punto  $P$  y movemos los otros dos puntos  $Q$  y  $R$ , los puntos reflejados de  $P$  tampoco varían de posición. La longitud de la línea poligonal  $P'QRP''$  es siempre igual al perímetro del triángulo inscrito. El camino más corto entre  $P'$  y  $P''$  es la línea recta. Por tanto, el segmento de recta  $P'P''$  es el menor perímetro posible para un triángulo inscrito con un vértice fijo en  $P$ . Este triángulo mínimo lo llamaremos  $T$ , tal y como se muestra en la figura 34.

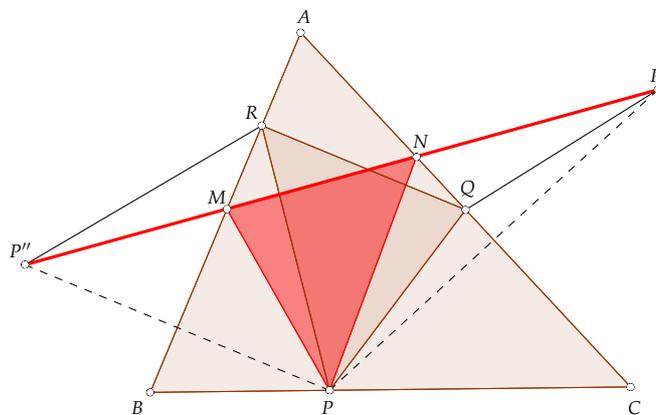


Figura 34. El triángulo  $T$  es un triángulo de perímetro mínimo.

Una vez hallado el triángulo  $T$  de mínimo perímetro, con vértice en  $P$ , necesitamos comparar

los distintos triángulos mínimos que se obtienen al mover el punto  $P$  sobre el segmento  $BC$ , y tomar aquel como solución a nuestro problema. Determinaremos la posición de  $P$  para que el segmento  $P'P''$  sea lo más pequeño posible. Para ello primero observamos que el triángulo  $AP'P''$  es isósceles, con  $AP' = AP''$ .

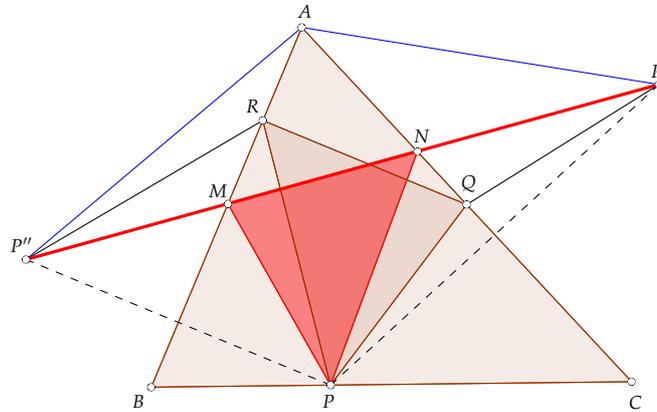


Figura 35. El triángulo  $AP'P''$  es isósceles y  $AP = AP' = AP''$ .

De hecho estos segmentos son imágenes simétricas del mismo segmento  $AP$  y por tanto son iguales a éste. Aunque la longitud de estos lados depende de la posición de  $P$  sobre el segmento  $BC$ , el valor del ángulo  $P''AP'$  no depende de la posición de  $P$ . Este ángulo está completamente determinado por el triángulo original  $ABC$ , y nada más ya que, debido a las simetrías, tenemos las siguientes relaciones para los ángulos de la figura:

$$PAB = P''AB, PAC = P'AC$$

De donde se sigue que

$$P''AP = 2PAB, P'AP = 2PAC$$

Por tanto

$$P''AP' = P''AP + P'AP = 2(PAB + PAC) = 2BAC$$

lo cual demuestra nuestra afirmación en relación al ángulo  $P''AP'$ . En el triángulo isósceles  $AP'P''$  queremos hacer la base  $P'P''$  lo menor posible. Puesto que el ángulo en  $A$  no depende de  $P$ , todos estos triángulos, para diferentes posiciones de  $P$ , tienen el mismo ángulo en el vértice. De todos ellos el que tenga la base menor también tendrá menores lados, y menor perímetro. O de igual modo los que tengan los menores lados, tendrán menor perímetro. Sabemos que los lados  $AP' = AP'' = AP$ , por consiguiente debemos buscar  $P$  para que la distancia  $AP$  sea la menor posible. Sabemos que esto sucede cuando  $P$  es el pie de la perpendicular al segmento trazado desde  $A$ , donde se alcanza la menor distancia de un punto a una recta. Consecuentemente debemos disponer el punto  $P$  de manera que  $AP$  sea la altura del triángulo  $ABC$  trazado desde  $A$ .

Construyamos ahora el triángulo  $EFG$  de menor perímetro (figura 36). Sea  $E$  el pie de la perpendicular trazada desde  $A$  sobre el lado  $BC$ . Si  $E'$  y  $E''$  son las imágenes simétricas de  $E$  respecto de los lados  $AC$  y  $AB$ , entonces  $E'E''$  es la longitud del perímetro menor de un triángulo inscrito. Los puntos  $F$  y  $G$ , puntos de corte de esta línea con los lados  $AC$  y  $AB$ , son los otros dos vértices de este triángulo mínimo.

Si reflexionamos un poco sobre lo que hemos hecho, vemos que todo triángulo inscrito  $PQR$ , distinto de  $EFG$ , debe tener un perímetro mayor. Por que si  $P$  es distinto de  $E$ , el segmento  $P'P''$  es mayor que  $E'E''$ , y el perímetro de  $PQR$  es mayor o igual a  $E'E''$ . Si  $P$  y  $E$  coinciden, en tal caso o bien sólo el punto  $Q$ , o éste y el punto  $R$  difieren de los puntos  $F$  y  $G$ , y la trayectoria

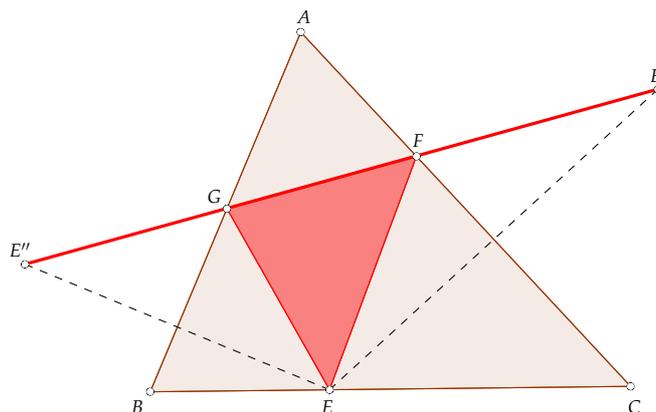


Figura 36. El triángulo  $EFG$  es el triángulo de perímetro mínimo.

$E'QRE''$  diferirá de la recta  $E'FGE''$ . En ambos casos, entonces, el perímetro de  $PQR$  será mayor que el perímetro de  $EFG$ .

Estas consideraciones prueban que el problema de encontrar un triángulo inscrito con el menor perímetro posible tiene una sola solución. Nos serviremos del carácter único de esta solución. Al construir un triángulo mínimo no aplicamos el mismo método a los tres vértices. El vértice  $E$  es el pie de la altura trazada desde  $A$ , pero obtuvimos los otros dos por medios que nada tienen que ver con las alturas relativas a los otros dos puntos. De hecho podríamos haber llevado nuestro razonamiento comenzando con el vértice  $B$  en lugar de  $A$ . Habríamos obtenido en tal caso un triángulo mínimo cuyo vértice  $F$  sería el pie de la altura trazada desde  $B$ . Análogo tratamiento podríamos argumentar con el punto  $C$ . Considerando que sólo hay un triángulo mínimo, estas construcciones, comenzadas a partir de cualquier otro vértice tiene que coincidir exactamente con el mismo triángulo  $EFG$  obtenido. Y por tanto los tres vértices de nuestro triángulo minimal son precisamente los pies de las perpendiculares trazadas desde el vértice opuesto. Esto es, se trata del triángulo órtico.

La demostración proporcionada por Schwarz necesitaba utilizar la propiedad de ángulos del triángulo órtico, junto con otras consideraciones, mientras que en este caso solo hemos utilizado ciertos teoremas relacionados con el círculo. La ventaja de la demostración de Fejér frente a la de Schwarz es que no emplea otros principios que los relacionados con la distancia más corta y la reflexión. Además esta demostración se caracteriza por no utilizar más que dos reflexiones, mientras que la de Schwarz emplea seis.

Vamos a finalizar esta sección con un ejemplo más que ilustra la estrecha relación entre un problemas de óptimos y las simetrías. Es una especie de recíproco del teorema de Fagnano, que dice así:

*En todo triángulo acutángulo hay un único punto en que la suma de distancias a los tres vértices es un mínimo. Este punto está situado de forma que las líneas que lo unen a los tres vértices forman entre sí ángulos de  $120^\circ$ .*

Este teorema fue demostrado por L. Schruttka por un método que fue sugerido por analogía con la demostración de Schwarz sobre el triángulo órtico. Nosotros veremos una demostración mucho más breve, debida a Bückner.

Sea  $P$  un punto arbitrario tomado en el triángulo acutángulo  $ABC$ . Hacemos girar el triángulo  $ACP$   $60^\circ$  alrededor del punto  $A$  hasta tomar la posición  $AC'P'$ . Este giro debe realizarse de forma que  $AC$  gire fuera del triángulo de manera que quede finalmente la línea  $AC$  entre  $AB$  y  $AC'$  (figura 38).

Tenemos entonces que  $C'P' = CP$  y  $PP' = AP$ , porque el triángulo  $APP'$  no sólo es isósceles

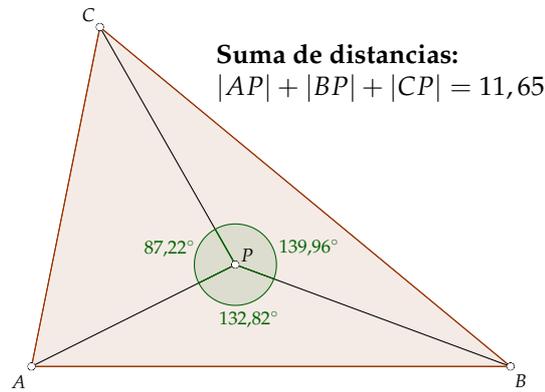


Figura 37. En este ejemplo la suma de distancias del punto P a los vértices no es un mínimo.

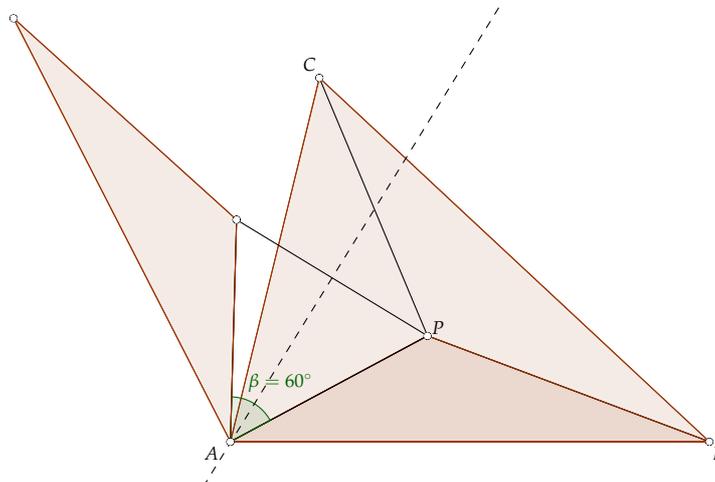


Figura 38. El triángulo APP' es equilátero.

sino equilátero. Por consiguiente la trayectoria  $BPP'C$  representa la suma de distancias desde P a los tres vértices A,B,C. El punto  $C'$  es independiente de la posición de P. Todas las trayectorias correspondientes a las varias posiciones de P unen los puntos B y  $C'$ . La más corta de éstas es una vez más la línea recta que une a estos puntos (figura 39). Por tanto para que el camino sea mínimo el punto  $P_0$  debe estar en la línea  $BC'$ , y su posición queda totalmente determinada por el hecho de ser el ángulo  $AP_0C'$  de  $60^\circ$ .

El ángulo suplementario  $AP_0B$  es por esta razón de  $120^\circ$ . La construcción demuestra que puede existir un único punto de mínimo en  $P_0$ . Consecuentemente, la misma construcción, sustituyendo A por cualquiera de los otros dos vértices conducirá al mismo punto  $P_0$ , y por consiguiente los ángulos  $BP_0C, CP_0A$ , serán también de  $120^\circ$ .

### 3. Consideraciones finales

Los resultados anteriores dan muestra fiel que los problemas geométricos de determinar máximos o mínimos utilizan frecuentemente dos postulados básicos en geometría: la existencia de la línea recta como distancia más corta entre dos puntos, y la noción de simetría axial. Observar que cualquier rotación es producto de simetrías. Incluso el problema isoperimétrico,

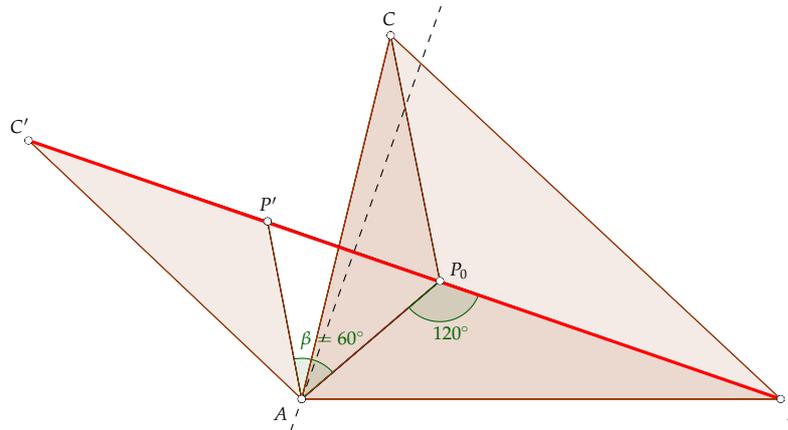


Figura 39. El punto  $P_0$  buscado esta en la línea  $BC'$ .

que no hemos abordado aquí en toda su extensión, requiere en su demostración propiedades ciertamente relacionadas con la simetría de figuras convexas.

Un análisis más profundo de estos problemas, nos permite reflexionar sobre cómo es el comportamiento de los fenómenos naturales. En Física, existe el principio de mínima acción, según el cual, los sistemas evolucionan siempre hacia un estado de máxima estabilidad o mínima energía. Esto explica muchísimos fenómenos físicos. En cambio, llegando un poco más allá, nos preguntamos si realmente el *principio de mínima acción*, no sea sino una consecuencia de otro principio, si cabe más natural, y de naturaleza puramente geométrica. De este modo podríamos aventurarnos a establecer el siguiente principio, que llamaremos ***principio de simetría natural***

*De todas las configuraciones posibles de un sistema físico, la Naturaleza escoge aquella que encierra mayor número de simetrías.*

Bajo los principios de homogeneidad e isotropía del espacio, resulta claro que, si no hay direcciones privilegiadas, la configuración evoluciona del modo más simétrico. De ahí que la forma que adopta una estrella, un planeta, o un sistema de partículas libre, sea aquel que encierre el mayor número de simetrías. La figura plana con mayor simetrías es el círculo, en el espacio la esfera y en dimensiones superiores esferas n-dimensionales, cuyas propiedades son bien conocidas por los matemáticos.



Figura 40. El principio cosmológico del Universo dota a sus puntos de homogeneidad e isotropía.

## Referencias

- [1] RADEMACHER, H. y OTTO, T. *Números y figuras*, Alianza Editorial S.A, Madrid 1970.

### **Sobre el autor:**

*Nombre:* Federico Ruiz López

*Correo electrónico:* federico.ruiz2011@gmail.com

*Institución:* Instituto de Educación Secundaria Jaime II, Alicante (España).

