

EXPERIENCIAS DOCENTES

APRENDIENDO DE AL TIEMPO QUE ENSEÑANDO A
ALUMNOS DE ALTAS CAPACIDADES

VISUALIZAR EL CONOCIMIENTO

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

EULER Y EL PROBLEMA DE BASILEA

JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

JULIUS CORENTIN ACQUEFACQUES, PRISIONERO DE LOS
SUEÑOS

CRÍTICAS Y RESEÑAS

AULA TALLER MUSEO DE LAS MATEMÁTICAS "π-ENSA"

INVESTIGACIÓN

SUCESOS RAROS EN INGENIERÍA DE TRÁFICO

¿QUÉ FUE DE LA HISTORIA DE AMOR DE ADÁN Y EVA?

AN APPLICATION OF THE MATHEMATICS TO THE STUDY
OF A VIDEO LOTTERY MACHINE

CUENTOS MATEMÁTICOS

EL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

ENTREVISTA A:

VICENTE LIERN:
"EL ARPA Y LA LUZ"



Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen V, Número 1, Abril 2015

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC

Foto de portada / Escultura basada en el tesseracto o hipercubo realizada en acero corten. Avenida de la Universidad, Campus Universitario, Cáceres, España.

Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil
Universidad Politécnica de Madrid



Volumen V, Número 1, ISSN 2174-0410

Coordinación Comité Editorial

Mariló López González
Sagrario Lantarón Sánchez
Javier Rodrigo Hitos
José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Ascensión Moratalla de la Hoz,
Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Rosa María Herrera, Fernando Chamizo Lorente,
Luis Garmendia Salvador, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador,
Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla

1 de abril de 2015

Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Vol. V)	1
---------------------------------------	---

Experiencias Docentes

Aprendiendo de al tiempo que enseñando a alumnos de altas capacidades	7
<i>Irene Araujo Guijo, María Teresa Fernández Reyes, Juan Núñez Valdés y Francisco Javier Sanz Gil</i>	
Visualizar el Conocimiento	17
<i>Ascensión Moratalla, Juana María Sánchez y M^a Agripina Sanz</i>	

Historias de Matemáticas

Euler y El Problema de Basilea	27
<i>José Manuel Sánchez Muñoz</i>	

Cuentos Matemáticos

El Observatorio Astronómico	57
<i>Alejandro López, Sergio Rodríguez y Ramón Sost</i>	

Investigación

Sucesos raros en Ingeniería de Tráfico	63
<i>Francisco Soler Flores, José Ángel Olivas Varela y María Dolores López González</i>	
¿Qué fue de la historia de amor de Adán y Eva?	75
<i>José Manuel Rey Simó</i>	
An application of the mathematics to the study of a video lottery machine	83
<i>Raquel Caro Carretero y Javier Rodrigo Hitos</i>	

Juegos y Rarezas Matemáticas

Julius Corentin Acquefacques, prisionero de los sueños	93
<i>Marta Macho Stadler</i>	

Críticas y Reseñas

Aula Taller Museo de las Matemáticas “ π -ensa”	101
<i>Equipo Editorial</i>	

Entrevistas

Vicente Liern: “El arpa y la luz”	107
<i>Rosa María Herrera</i>	

Editorial del Número 2 (Vol. IV)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 001-006, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Ene'15; Aceptación: 9 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

Este número de la Revista “Pensamiento Matemático”, como el anterior, repasa algunos de los trabajos más relevantes presentados en las Jornadas Internacionales “Matemáticas Everywhere”, en este caso, en su tercera edición, celebrado en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) que tiene su sede en Castro Urdiales, Cantabria (España).

Abstract

This number of “Mathematical Thinking” Journal, as the last one, is about the more relevant articles presented on the 3rd “Matemáticas Everywhere” International Meeting, celebrated once again in the International Center for Mathematical Meetings (in spanish CIEM) which is based in Castro Urdiales, Cantabria (Spain).

Introducción

En este número como en el anterior se hace un repaso de parte de los trabajos presentados durante las Jornadas Internacionales Matemáticas Everywhere celebrado en mayo de 2014 en Castro Urdiales.

El Grupo de Innovación Educativa “Pensamiento Matemático” de la Universidad Politécnica de Madrid, quiere aprovechar este número para llevar a cabo una presentación “formal” ante la comunidad docente y científica, de el Aula-Taller-Museo de las Matemáticas que tan orgullosamente hemos inaugurado en septiembre del año anterior

A continuación presentamos brevemente los artículos que componen el presente número en sus diferentes secciones.

Experiencias Docentes

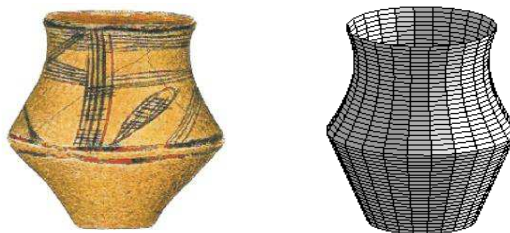
En el artículo *“Aprendiendo de al tiempo que enseñando a alumnos de altas capacidades”* los autores presentan un breve contenido teórico sobre la enseñanza de alumnos con altas capacidades e indican sus reflexiones sobre la enseñanza de cualquier disciplina, en general, y de las Matemáticas en particular, que se puede llevar a cabo con estos alumnos en cualquiera de los niveles educativos. Para ello, se sirven de experiencias realizadas por ellos mismos en un centro dedicado especialmente a la enseñanza de este tipo de alumnos. aprendizaje sino una herramienta de desarrollo matemático.



Utilizando el triángulo de Sierpinski para disfrazarse.

En “*Visualizar el conocimiento*” se muestra como a la hora de enseñar Matemáticas a nuestros alumnos de Ingeniería y Arquitectura de la UPM, las herramientas informáticas son de gran ayuda, entre otras razones, porque nos permiten obtener multitud de imágenes, de una manera sencilla y rápida. Pero ¿Por qué esa necesidad de dar forma a las fórmulas? ¿Nos lo demandan los alumnos? En este artículo se hace un análisis del aprendizaje de las matemáticas en base a la visualización del Conocimiento, siguiendo los siguientes puntos:

1. El tipo de alumnos a los que se dirige nuestra enseñanza. Alumnos que han nacido en una época cultural en la que prima la componente visual sobre cualquier otra forma de comunicación.
2. La importancia de visualizar el conocimiento matemático.
3. La conexión del concepto matemático con una realidad cercana al alumno.
4. Las matemáticas como medio de comunicación entre la idea y la forma.



Vasija Neolítico 3000 A.C. y modelización.

Historias de Matemáticas

“*Euler y el Problema de Basilea*” pone de manifiesto la importancia de uno de los primeros resultados “históricos” en las ciencias matemáticas. Normalmente la demostración de un problema matemático abierto no supone metafóricamente hablando el cierre de una puerta, sino el nacimiento de nuevas teorías y campos en los que investigar. El problema de Basilea significó no sólo un trampolín en la carrera de un joven Leonhard Euler, sino el germen de una de las herramientas fundamentales en Teoría de Números como es la Función Zeta.



Leonhard Euler y Bernhard Riemann.

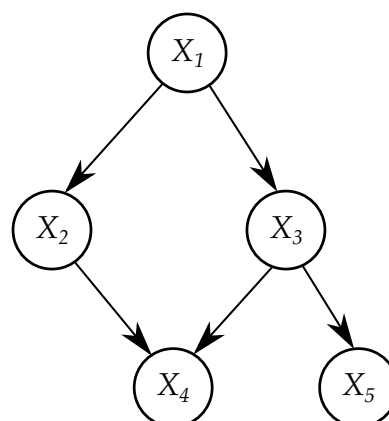
Cuentos Matemáticos

“El Observatorio Astronómico” es un relato fruto de una experiencia llevada a cabo en la UPM con alumnos de primer curso en la asignatura de Cálculo. Una historia que tiene como protagonista al inspector de policía Barreda que con ayuda de las Matemáticas conseguirá atrapar al asesino.

Investigación

El artículo *“Sucesos raros en Ingeniería de Tráfico”* pone de manifiesto cómo la Ingeniería de Tráfico, como rama de la ingeniería del transporte y de la ingeniería civil trata la planificación, diseño y operación de tráfico en las calles, carreteras y autopistas, sus redes, infraestructuras, tierras colindantes y su relación con los diferentes medios de transporte para conseguir una movilidad segura, eficiente y conveniente tanto de personas como de mercancías.

La ingeniería de tráfico estudia los accidentes de tráfico, éstos por ser sucesos de muy baja probabilidad, pueden ser considerados sucesos raros. Así, este trabajo recoge un resumen de resultados de la aplicación del modelo Naive-Poisson a la Ingeniería de Tráfico enfocado a, mediante la estimación de accidentes de tráfico, propuestas de mejora en el diseño de algunas carreteras españolas.



Ejemplo de Red Bayesiana

“¿Qué fue de la historia de amor de Adán y Eva?” muestra la historia de Adán y Eva desde un punto de vista muy original con la ayuda de teorías matemáticas. Esta historia ha servido

durante milenios en la cultura occidental como el modelo canónico de unión amorosa a largo plazo. Su influencia en el diseño y las expectativas de los individuos sobre el amor duradero es enorme. Inadvertidamente o no, las parejas han intentado reproducir en sus relaciones las líneas maestras del patrón de los primeros padres de la Biblia. Sin embargo, las actuales estadísticas sobre rupturas de pareja apuntan a un fracaso masivo de ese modelo. Un porcentaje alarmante de parejas se rompen sin que se comprendan bien las causas, lo que plantea un problema sustancial en la sociedad y en las ciencias sociales. Un reciente modelo matemático ha obtenido un mecanismo que explica la dificultad para mantener una relación amorosa proyectada a largo plazo. En esta contribución se exploran algunas ideas del modelo matemático y sus implicaciones. Eso permite conjeturar cuál es el desenlace probable en el modelo de amor de Adán y Eva.

El artículo *“Una aplicación de las matemáticas al estudio de una máquina electrónica de Bingo”* muestra un estudio del comportamiento de las máquinas “tragaperras” tipo Bingo, en las que el jugador apuesta dinero buscando obtener más dinero, hay dos aspectos que deben ser controlados para satisfacer tanto al jugador como al propietario de la máquina: 1) Tener al jugador en la máquina una cantidad razonable de tiempo para que las partidas no sean ni demasiado cortas ni demasiado largas, desanimando al jugador y 2) Tener un porcentaje de retorno en premios en torno al 90-95 % para que la máquina dé beneficios. Es relativamente fácil mantener estos dos conceptos controlados en el ciclo estadístico, es decir, para tiempos grandes, pero es más difícil tenerlos en los números deseados para intervalos cortos de tiempo. El objetivo de este trabajo es examinar cómo el porcentaje de retorno en premios en intervalos cortos de tiempo, para una máquina de juego tipo Bingo, se puede controlar perturbando el precio de las bolas extra que la máquina ofrece.

Juegos y Rarezas Matemáticas

El artículo *“Julius Corentin Acquefacques, prisionero de los sueños”* pone de manifiesto cómo a través de una colección de tebeos del guionista y dibujante Marc Antoine Mathieu, vamos a descubrir cómo las matemáticas también pueden divulgarse a través del mundo del cómic. De hecho, sus componentes visual y lúdica, hacen del tebeo un medio excepcional para explicar matemáticas a toda clase de público.



Acquefacques atraído por el vórtice hacia un mundo en 3D (izqda). Fotografía del cómic; Marc Antoine Mathieu incorpora una auténtica espiral que se despliega (drcha).

Críticas y Reseñas

“Aula Taller Museo de las Matemáticas π -ensa” sirve para presentar el recientemente inaugurado centro nacido como proyecto educativo que el Grupo de Innovación Educativa “Pensamiento Matemático” propuso a la Universidad Politécnica de Madrid, cuyo objetivo principal consiste en acercar las Matemáticas al público general. Abrió sus puertas la última semana de septiembre de 2014 con motivo de la Feria de Aprendiz de Ingenieros que organiza la UPM. Desde dicha fecha ofrece un espacio para disfrutar con las Matemáticas.



Algunas instantáneas de las instalaciones del Aula Taller Museo.

Entrevistas

En *“Vicente Liern: El arpa y la luz”* nos acercamos a este compañero que transmite alegría de vivir contagiosa. Vicente es científico tanto como músico, conocedor de los aspectos matemáticos de la afinación, estudioso de las técnicas físicas de la construcción de instrumentos y conocedor de su historia, creador de grupos científico-musicales. Estas líneas sólo son un boceto aproximativo.



Vicente Liern (2013).



Nos gusta siempre finalizar esta pequeña introducción con alguna que otra cita que defina en cierto modo el estado de ánimo o nuestro día a día como docentes de todos los que forma-

mos de esta pequeña “familia” que comienza a ser “Pensamiento Matemático”. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número y os invitamos a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

“Los símbolos algebraicos se usan cuando no sabes de qué estás hablando.”

Philippe Schnoebelen

“ $1+1=3$ ”

Lejeune Dirichlet (en telegrama a su suegro comunicando el nacimiento de su hijo).

“Al salir de la escuela, todas las madres judías de Brooklin preguntaban a sus hijos: ¿Qué has aprendido hoy en la escuela? En cambio mi madre me decía: Izzy, ¿te has planteado hoy alguna buena pregunta?”

Isidore Rabí

El Comité Editorial

Experiencias Docentes

Aprendiendo de al tiempo que enseñando a alumnos de altas capacidades

Learning from while teaching gifted students

Irene Araujo, María Teresa Fernández, Juan Núñez y Francisco Javier Sanz

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 007-016, ISSN 2174-0410

Recepción: 14 Mar'14; Aceptación: 21 Ene'14

1 de abril de 2015

Resumen

En esta comunicación, los autores presentan un breve contenido teórico sobre la enseñanza de alumnos con altas capacidades e indican sus reflexiones sobre la enseñanza de cualquier disciplina, en general, y de las Matemáticas en particular, que se puede llevar a cabo con estos alumnos en cualquiera de los niveles educativos. Para ello, se sirven de experiencias realizadas por ellos mismos en un centro dedicado especialmente a la enseñanza de este tipo de alumnos.

Palabras Clave: Alumnos de altas capacidades, Enseñanza de las Matemáticas a alumnos superdotados.

Abstract

In this paper, the authors present a brief theoretical content on the teaching of students with high abilities and indicate their reflections on the teaching of any discipline in general, and mathematics in particular, that can be done with these students in any educational levels. To do this, they use experience gained by themselves in a private school devoted to teaching these students.

Keywords: Mathematics Teaching, Students with high abilities.

1. Introducción

Tal como si de cualquier asignatura científica se tratara, esta comunicación tiene dos partes bien diferenciadas: una primera, teórica, en la que se indican los fundamentos básicos de la enseñanza dirigida a alumnos de altas capacidades (vulgo superdotados, en general y no solo en lo referente a las Matemáticas) y una segunda más práctica, experimental podría decirse incluso en este caso, en la que los autores muestran el desarrollo y resultados de algunas actividades llevadas a cabo por ellos mismos con algunos de estos alumnos.

Así, esa experiencia, centrada en las Matemáticas, ha sido realizada por los autores con alumnos de altas capacidades de varias edades, en razón de que dos de ellos son graduados en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (por cierto, miembros de la primera promoción del Grado de Matemáticas en esa Universidad, 2009-2013), actualmente cursando el “Máster Universitario de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas”, otro de los autores es el Tutor Universitario de los dos anteriores, doctor en Matemáticas por la misma Universidad y también profesor de la asignatura “Aprendizaje y enseñanza de las materias de Matemáticas” del citado Máster y la autora restante es licenciada en Psicología y directora de un centro privado de esa ciudad, dedicado especialmente a estimular el progreso y desarrollo de las capacidades de jóvenes de altas capacidades, en el que los dos graduados primeramente citados desarrollan su trabajo como profesores.

El objetivo principal de la misma es entonces doble. Por una parte, mostrar algunos de los fundamentos teóricos modernos en los que se basa la enseñanza dirigida a alumnos de altas capacidades. El otro objetivo, ya de tipo práctico, puede considerarse a su vez dividido en varios subobjetivos, todos de igual importancia. El primero de ellos, describir una serie de experiencias programadas y vividas, aunque desde diferentes formas, por los autores con estos alumnos. Otro, posibilitar que el profesorado de centros similares al que nos ocupa puedan tener conocimiento de las mismas, a fin de emplearlas o programar otras parecidas en sus centros y finalmente, mostrar algunas de nuestras reflexiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de alumnos con altas capacidades ante una parte de las Matemáticas desconocida para ellos, deducidas a partir de nuestras propias experiencias con ellos.

Las experiencias personales de los autores con estos alumnos de altas capacidades que se indicarán provienen de la realización de un taller de matemáticas de tres meses de duración con los alumnos del centro que dirige una de ellos, así como también de la realización durante un fin de semana de un campamento familiar llevado a cabo en un espacio natural de Cazalla de la Sierra. De ambas actividades se han obtenido una serie de reflexiones de las que nos ocuparemos más adelante y que constituyen parte del contenido de esta comunicación.

2. La atención al alumnado de altas capacidades

La atención al alumnado con altas capacidades intelectuales es desde hace unos años una prioridad para los diferentes sistemas educativos, tanto en nuestro país como en el resto del mundo. En concreto en la Comunidad Autónoma de Andalucía (a la que pertenecen los autores), desde el año 2011 se está llevando a cabo la implantación de un plan específico que tiene como objetivo aprovechar el talento y las capacidades de todos los niños y niñas de Andalucía.

Uno de los saltos cualitativos que hemos tenido en las altas capacidades intelectuales es el concepto y la forma de denominar a los diferentes perfiles de desarrollo cognitivo. Se ha pasado de un concepto monolítico, basado en un único dato, el Cociente Intelectual (CI), el cual debía ser superior a 130, combinado con aspectos como la motivación o la creatividad (este concepto se basa en la Teoría de la Sobredotación de Joseph Renzulli de los tres anillos (Renzulli, 1978), a otro en el que predomina la importancia de conocer las diferentes habilidades cognitivas del alumnado.

Esta teoría y las investigaciones realizadas en torno a ella han demostrado que en el concepto de superdotación no existe un criterio único que se pueda utilizar para determinar y reconocer a las personas superdotadas, ya que éstas poseen tres grupos de características que se entremezclan unas con otras. Estas características serían las siguientes:

- a. Habilidad general y/o habilidad específica por encima de lo normal (en este caso, habilidad intelectual por encima de la media).

- b. Altos niveles de compromiso con la tarea.
- c. Altos niveles de creatividad.

Las investigaciones realizadas han concluido que ninguno de estos tres grupos por separado conlleva necesariamente a la sobredotación intelectual, y que existen muchos más conceptos relacionados con el desarrollo de las altas habilidades cognitivas que no es necesariamente la superdotación. Así, podemos hablar de talentos académicos, niños precoces, genios, talentos matemáticos, creativos ...

En la actualidad existen muchas y diversas teorías relacionadas con el concepto de alta capacidad intelectual, siendo el objetivo fundamental de las tendencias actuales dotar al alumnado de situaciones y oportunidades en las que puedan desarrollar plenamente su potencial.

En Andalucía, el 14 de febrero de 2011, se presentó el nuevo "Plan de actuación para la atención educativa al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades intelectuales" (véase DOC2). En él se plantean unas nuevas definiciones para hacer referencia a estos conceptos. Así, se considera que *un/a alumno/a presenta altas capacidades intelectuales cuando maneja y relaciona múltiples recursos cognitivos de tipo lógico, numérico, espacial, de memoria, verbal y creativo, o bien destaca especialmente y de manera excepcional en el manejo de uno o varios de ellos.*

Se define al alumnado con sobredotación intelectual como *aquel cuyas características personales superan el percentil 75 en capacidades cognitivas y aptitudes intelectuales como razonamiento lógico, gestión perceptual, gestión de memoria, razonamiento verbal, razonamiento matemático y aptitud espacial, debiendo ir acompañado este perfil con un nivel alto de creatividad situado de igual modo por encima de un percentil 75.*

Pero una de las grandes aportaciones de este plan a la valoración de las altas capacidades ha sido la introducción del *concepto de talento*, aplicado ya en otras comunidades autónomas como Canarias. En concreto se habla de dos tipos de talento, el simple y el complejo.

Se hace referencia al talento simple cuando el/la alumno/a destaca con percentiles por encima de 95 en un área concreta o específica, es el caso del talentos simple matemático, verbal, lógico o creativo. Cuando se habla del talento complejo se hace referencia a que los percentiles obtenidos se sitúan por encima de 80. Por ejemplo, tenemos en Andalucía reconocidos dos tipos de talentos complejos, el académico, cuando los percentiles se sitúan por encima de 80 en las áreas verbal, razonamiento lógico y memoria; y el artístico cuando los percentiles por encima de 80 se encuentran en las áreas de creatividad, percepción y espacial. Esta actuación ha beneficiado directamente a un número de alumnos bastante más elevado que los que se evaluaban con este tipo de necesidades con anterioridad. Los alumnos con altas capacidades intelectuales se consideran "alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades intelectuales" y como tal requieren un tipo de respuesta educativa específica.

El aumento exponencial de este número de alumnos se debe sobre todo a que se incluye en el protocolo de actuación un cuestionario de "screening" que se aplica al final del primer ciclo de educación infantil y al final del último ciclo de educación primaria. En él se preguntan por una serie de cuestiones relacionadas con características de este alumnado a los tutores y a los padres de todos los niños y niñas de estos cursos. Si coinciden las puntuaciones de ambos, el/la alumno/a pasará a un siguiente paso en el que se realizará una evaluación más específica y si de nuevo vuelve a superar esta fase se aplicará una valoración individual para determinar el tipo de alta capacidad intelectual. Este proceso se diferencia bastante del que se realizaba con anterioridad ya que se limitaba exclusivamente a atender la demanda del tutor/a al departamento de orientación. Con esta nueva actuación encontramos que de forma sistemática se evalúan una cantidad de alumnos que posiblemente antes, si no es por una demanda directa del tutor/a no se evaluarían; y otro dato muy significativo es que se intenta acabar con la "invisibilidad de género", ya que existe un perfil muy diferentes en los niños y las niñas, ya que

estas últimas prefieren pasar desapercibidas e incluso sacrificar su desarrollo cognitivo con tal de ser aceptadas por el grupo, por lo que no eran detectadas.

Las respuestas educativas que se suelen aplicar con este alumnado en los centros educativos se centran en tres: adaptación curricular, actividades de enriquecimiento y/o ampliación, y flexibilización (o salto de curso).

Al hablar de adaptación curricular hacemos referencia al conjunto de ajustes o modificaciones que se realizan en los elementos curriculares (objetivos, contenidos, metodología o criterios de evaluación) del currículum que corresponde a un alumno por su edad.

Cuando se habla de actividades de enriquecimiento y/o ampliación hablamos de alumnos que cuando ya dominan los contenidos de una unidad didáctica que se va a desarrollar en un proceso de grupo, sustituyen ese tiempo que le va a dedicar a ese contenido por otra actividad de enriquecimiento o profundización que le aporte una información diferente.

Y en el caso de la flexibilización, esta medida conlleva la posibilidad de cursar la enseñanza obligatoria en un número de cursos menor al establecido con carácter oficial para la generalidad del alumnado. Es decir alumnos que una vez que tienen adquiridos los contenidos del curso en el que se encuentran y el siguiente, adelantan un año su periodo de escolarización (Fernández y Sánchez, 2011).

Pero además de estas respuestas puramente académicas o curriculares, existen una serie de medidas que se pueden aplicar fuera del contexto educativo.

Una vez que se evalúa, este alumnado debe ser atendido en su centro educativo, en el cual se puede aplicar cualquiera de las respuestas mencionadas con anterioridad, pero también es importante que ese enriquecimiento se realice fuera del ámbito escolar y las opciones que nos encontramos normalmente son relacionadas con los idiomas o alguna enseñanza musical, reglada o no.

Una opción en la que se empezó a trabajar hace unos años en nuestro país son los programas de enriquecimiento extraescolares. Y en esta línea es en la que se realizó la experiencia que se presenta, que tuvo lugar en nuestro centro, en el que desde hace 15 años aproximadamente se realizan programas de enriquecimiento cognitivo, emocional y social. Estos programas tienen como base el agrupamiento del que hablaremos más adelante, es decir, reunir a un grupo de alumnos todos con altas capacidades para trabajar un programa diseñado específicamente para ellos.

Los programas de enriquecimiento surgieron hace muchos años con el objetivo de trabajar con alumnos con dificultades en el desarrollo cognitivo, pero se comprobó que podían beneficiarse de ellos alumnos que no sólo no tuvieran dificultades sino que fueran de alta capacidad.

Estos programas permiten al alumno profundizar en procesos como el conocimiento meta-cognitivo, organizar, seleccionar, almacenar y resolver problemas ... haciendo que cada alumno/a utilice al máximo sus recursos.

Uno de tales programas que más han influido en el desarrollo los posteriores ha sido el de Inteligencia de Harvard (PHI, (2000), creado en Venezuela y en el que colaboró la Universidad de Harvard o el proyecto CAS, desarrollado en México en 2011, basado en el modelo de los talentos múltiples de Calvin Taylor, así como el programa de enriquecimiento instrumental de Feuerstein (véanse, respectivamente, DOC1, Megía 2000 y Feuerstein, 1976). Pero uno de los modelos que más ha influido ha sido el "Modelo Triádico de Enriquecimiento" de Joseph Renzulli (Renzulli, 1994).

En este último modelo se basa el programa que se realiza en nuestro centro. Es un programa de enriquecimiento cognitivo, emocional y social en el que se realizan actividades clasificadas de la siguiente manera:

- Actividades tipo 1: Se ofrecen actividades y experiencias que normalmente no se encuentran dentro del currículum que los niños tienen en su centro educativo.
- Actividades tipo 2: dirigidas a realizar actividades de pensamiento y procesos afectivos.
- Actividades tipo 3: habilidades de estudio utilizando procedimientos sistemáticos que permiten al alumno profundizar en temas que sean de su interés, ayudarles a ser resolutivos y trabajar las producciones creativas.

El centro en el que desarrollamos nuestras experiencias se dedica desde hace 15 años a la atención de este alumnado de alta capacidad intelectual. Estos tipos de actividades, que surgieron como una necesidad ya que cada vez había más niños evaluados pero que no eran atendidos, sobre todo fuera de su ámbito educativo, supusieron un reto de información y formación en esta respuesta extraescolar y se pusieron en marcha estos talleres de enriquecimiento. Actualmente al centro acuden alrededor de 200 alumnos para recibir diferentes talleres relacionados con distintos ámbitos, ciencias, artes, matemáticas, robótica, etc. Los alumnos acuden de varias provincias, no sólo de Sevilla, para lo que se les da la oportunidad de acudir los sábados por la mañana. Normalmente la actividad se realiza una vez por semana en sesiones de una hora y media.

Uno de los talleres específicos, entre muchos otros, que se oferta es el de Matemáticas, que es el que se expone en este trabajo. La base metodológica parte de la respuesta del agrupamiento, que consiste en realizar pequeños grupos de alumnos y alumnas con características y capacidades similares para los que se diseñan unos programas específicos. Suele resultar muy motivador para el alumno ya que se reúne con compañeros que tienen en común una serie de intereses y esto ayuda a que se relacionen de forma más positiva.

En muchos centros educativos puede ser normal realizar agrupamientos para el alumnado con algún tipo de dificultad, pero parece que no está muy extendida la aplicación de esta medida educativa cuando hablamos de altas capacidades intelectuales. Y no sólo podemos plantearlo como medida positiva para las altas capacidades generales, sino para aquellos/as alumnos/as que tengan el perfil de Talento Simple Matemático. Cada vez son más los centros educativos que se plantean como una buena opción esta medida ya que cuenta con una serie de ventajas, aunque también se mencionan los inconvenientes según estos autores.

Como ventajas, de acuerdo con (Acereda et al., 1998) pueden comentarse:

1. La situación de los alumnos superdotados es similar a la de los niños con necesidades educativas especiales. Si a los sujetos con disminuciones intelectuales se les proporcionan programas especializados, ¿por qué no hacerlo con los propios superdotados?
2. Tanto los sujetos excepcionales por defecto como los excepcionales por exceso precisan de una enseñanza y de una intervención especial, incluso cuando ésta se orienta hacia una integración correcta.

Entre los inconvenientes nos encontramos con los siguientes:

1. Agrupar a los “superdotados” constituye una forma de “elitismo”, pudiendo provocar desajustes en su autoconcepto.
2. Todos los niños deben educarse y aprender integrados con los demás niños. Si al superdotado lo agrupamos, la socialización (basada en la colaboración y la cooperación entre todos los niños) difícilmente se podría dar en él.

En la actualidad ya no hablamos de “superdotados”, sino de alumnos de altas capacidades, por lo que no estaríamos clasificando ni etiquetando, sino estableciendo agrupamientos en base

a sus intereses, lo cual facilitaría mucho el desarrollo individual al mismo tiempo que grupal. Por otro lado, si no lo reducimos sólo al concepto de alta capacidad es un tipo de actividad del que se puede beneficiar todo el alumnado que tenga interés por las matemáticas.

Pasamos a continuación a comentar las actividades realizadas por nosotros mismos con alumnos de altas capacidades.

3. Nuestras actividades con alumnos de altas capacidades

El trabajo de dos de los autores en el centro que dirige otra de ellos ha consistido en la realización de un taller de matemáticas, de tres meses de duración, con distintos contenidos según las edades de los alumnos (todos de altas capacidades), así como también la realización durante un fin de semana de un campamento familiar llevado a cabo en un espacio natural de Cazalla de la Sierra (localidad de la Sierra Norte de Sevilla). De ambas actividades se han obtenido una serie de reflexiones, que se mostrarán a lo largo de esta comunicación.

Vamos en primer lugar a explicar todo lo relativo al taller llevado a cabo en el propio centro y, posteriormente pasaremos a comentar la experiencia docente llevada a cabo en el campamento con los alumnos y sus familias.

Respecto al taller, debido a que los alumnos del centro se encuentran divididos en pequeños grupos, que pueden variar entre los 3 y los 9 alumnos, de edades comprendidas entre los 4 y los 15 años, se han desarrollado tres tipos de talleres con contenidos distintos. Cada uno de esos grupos ha recibido 2 sesiones de 1,5 horas de duración por sesión, repartidas en 2 semanas consecutivas.

Para los alumnos de edades entre 4 y 7 años se llevó a cabo una actividad basada en el libro "La Rebelión de los Números", de Antonio de la Fuente Arjona, que cuenta la historia de un profesor de matemáticas secuestrado por los números, que se encuentran enfadados ante el rechazo de los alumnos hacia las matemáticas. Para el rescate del profesor será necesaria la superación de una serie de retos propuestos a lo largo de la historia.

Las pruebas que se les propusieron a los alumnos estuvieron orientadas a relacionar las matemáticas con distintos ámbitos culturales, como pueden ser el arte o el teatro y los temas tratados abarcaban los números romanos, las formas geométricas (ayudándonos para ello del tangram, dibujos con formas geométricas, objetos reales en la Naturaleza), fractales y banda de Möbius.

Para los alumnos de edades entre 8 y 10 años el tema principal del taller era destacar la importancia de las matemáticas en otras culturas. Para ello, se comentaron los distintos tipos de multiplicaciones en diferentes culturas: maya, egipcia, musulmana, turca y rusa y algunos trucos para las tablas de multiplicar. También se dieron nociones de fractales y unas breves pinceladas de criptografía en algunos casos.

Por último, para los alumnos mayores del centro, cuyas edades varían desde los 11 hasta los 15 años, el taller se basó en el tratamiento de códigos y criptografía, siendo en este caso los fractales la breve pincelada introducida.

Referente al desarrollo de estos talleres, vamos a mostrar a continuación algunas observaciones y anécdotas ocurridas durante el transcurso de las actividades.

En cuanto a los alumnos más pequeños, decir que la inmensa mayoría ya conocía los números romanos, los cuales habían aprendido de la gran aliada que debiera ser de los profesores en la educación: la familia. Lo que más dificultad les supuso fue el tangram, pues muchos conocían su existencia pero les era más complicado formar figuras con todas las piezas, aún así, algunos construyeron figuras muy logradas como se puede ver a continuación:

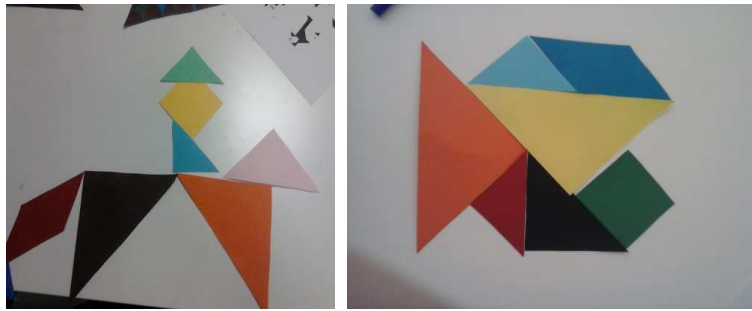


Figura 1. Piezas construidas con Tangram.

Los fractales fueron la estrella del taller. Ha sido la parte que más ha gustado tanto a pequeños como a mayores. Los fractales que se vieron fueron la curva de Koch, el copo de nieve de Koch y el triángulo de Sierpinski. A los más pequeños, el triángulo de Sierpinski se le presentó en forma de careta, dejándolos así desarrollar toda su originalidad, como puede apreciarse en la siguiente imagen.



Figura 2. Utilizando el triángulo de Sierpinski para disfrazarse.

Los mayores realizaron el triángulo de Sierpinski con latas de refresco como puede verse a continuación.



Figura 3. Construyendo el triángulo de Sierpinski con latas.

De hecho, este tema interesó tanto que uno de los alumnos llevó a la segunda sesión un fractal inventado por él, al que llamó “la cruz de A”, pues dicho fractal estaba compuesto por

cruces.

La banda de Möbius también les impactó mucho y en cuanto a las multiplicaciones en otras culturas, fue la maya la que más dificultad les supuso y la musulmana la que menos.

Respecto a criptografía, se les enseñó a cifrar con el método César, César generalizado y Vigenère. Como instrumento complementario para el cifrado de textos, cada alumno construyó un disco cifrador, basado en dos círculos concéntricos de cartulinas de distinto color, con las letras del abecedario, cuyo funcionamiento consistía en desplazar el disco interior sobre el exterior tantas posiciones como requiera el método usado. De códigos, se les explicó el método para hallar la letra del DNI, cuentas bancarias y códigos de barras (EAN-13 y EAN-8), para lo que practicamos con distintos productos con sus respectivos códigos de barras. Sin duda, lo que más les costó entender fueron las cuentas bancarias.

Finalizamos esta descripción con unos breves comentarios sobre las actividades realizadas en el campamento de Cazalla, al que asistieron doce familias y alumnos de edades entre 6 y 11 años. Las actividades matemáticas desarrolladas se dividieron en las destinadas únicamente para alumnos y en los proyectos de padres vs alumnos.

Con los alumnos se experimentó con la cicloide y la recta (para visualizar las propiedades braquistócrona e isócrona de la primera), con el teorema de los cuatro colores (para lo que se disponía de una maqueta construida al efecto) y se trabajó con algunos de los contenidos de "El libro de las matemáticas" de Clifford A. Pickover. También se trataron algunos problemas sobre grafos: los puentes de Königsberg y el problema de los tres vecinos que desean caminos separados para cada uno de ellos.

Referente a las actividades para padres vs alumnos, se organizó una competición con la torre de Hanoi y la elaboración de un mosaico formado por rombos de distintos colores.

4. Reflexiones personales y conclusiones

De las observaciones hechas de los alumnos en el centro al que nos hemos referido ya en bastantes ocasiones en esta comunicación, podemos deducir que la mayoría de los alumnos de altas capacidades tienen muy presentes en su vida diaria juegos electrónicos y usan bastante las nuevas tecnologías, teniendo un gran dominio sobre ellas. Asimismo, estudian música y tocan algún instrumento, alguno de ellos desde edades muy tempranas: 4 años.

Algunos dominan varios idiomas, incluso se encuentran estudiando en centros plurilingües donde se imparten varios de ellos, según la capacidad lingüística del alumno, como inglés, francés, alemán y portugués.

A uno de los grupos de alumnos de entre 5 y 6 años, se les preguntó que qué pensaban que eran las matemáticas, a lo que ellos respondieron:

- P. (5 años): Las mates sirven para el espacio, para ver si hay otro sitio que también tenga vida.
- R. (6 años): las mates son sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Las mates sirven para muchas cosas, por ejemplo para repartir caramelos, así es como mi madre me enseñó a dividir. Es la asignatura que más me gusta.
- A. y V. (5 años): las mates son ciencia, y la ciencia es experimento.

A la inmensa mayoría les interesan temas que no comparten con el resto de niños de su edad. Hemos de mencionar aquí el caso de un niño que, viendo los fractales planteó la ya conocida

sucesión de Fibonacci con conejos, partiendo de una pareja de crías y sabiendo que tardan un mes en convertirse en adultos y otro mes en tener una pareja de bebés.

En el campamento pudimos observar que todas las actividades les parecieron interesantes a los alumnos participantes y que todos se involucraron en cada una de ellas. Son de destacar la originalidad y creatividad desarrollada por todos ellos en la elaboración de un cuadernillo matemático que se les pidió, usando los elementos de la naturaleza para plasmar conceptos matemáticos como la simetría, los fractales, operaciones matemáticas, figuras geométricas, fracciones, etc. A uno de los cuadernillos le pusieron el título de “Maturaleza” (Matemáticas + Naturaleza).

Como conclusiones, aunque muy generales deducidas a partir de nuestra observación, podemos indicar que los alumnos de altas capacidades son muy observadores, quieren entenderlo todo y tienen una gran motivación intrínseca. No son conformistas, siempre buscan saber más y conocer más en todos los ámbitos, principalmente el científico. Debido a esta inconformidad, hemos observado que son muy perfeccionistas, buscan tener el mejor trabajo y ser los primeros en la resolución de los problemas propuestos, y, en el caso de no haber sido los primeros, no lo dejan pasar, insisten y preguntan hasta que logran realizarlo. No se quedan satisfechos con el contenido académico, quieren ir más allá. Mientras que para los demás niños estudiar les supone un trabajo pesado, para ellos la sed de conocimiento que tienen hace que quieran investigar y saber más sobre infinidad de temas, les gusta el reto y quizá por esta razón sea por lo que les apasionan las matemáticas pues los problemas a resolver son para ellos un reto de superación en el que desarrollan su capacidad de razonamiento y agilidad mental, es una de las ciencias en las que se deja más lugar a la investigación y libertad de resolución desarrollando la creatividad, una característica muy marcada en estos niños, es decir, ante un mismo problema encuentran múltiples y variadas respuestas, originales y poco frecuentes. Por todo ello, no debemos limitarlos y sí ayudarlos a desarrollar sus habilidades.

Referencias

- [1] ACEREDA, A. et al., (1998). La superdotación. Editorial Síntesis. Madrid.
- [2] FERNÁNDEZ REYES, M.T. y SÁNCHEZ CHAPELA, M.T. (2011). Cómo intervenir educativa-mente con los alumnos de altas capacidades intelectuales. Guía para profesores y orienta-dores. Sevilla: Editorial MAD. Serie Psicoeduca. Colección Inteligencia y Talento.
- [3] FEUERSTEIN, R. (1976). Programa de Enriquecimiento Instrumental. Editorial Bruño. Ma-drid.
- [4] MEGÍA FERNÁNDEZ, M. (coord.) (2000). Proyecto de Inteligencia “Harvard”. CEPE. Madrid
- [5] RENZULLI, J.S. (1978). Whats Makes Giftened: Reexamining a Definition. Phi Delta Kappan.
- [6] RENZULLI, J.S. (1994). “El concepto de los tres anillos de la superdotación: un modelo de desarrollo para una productividad creativa” en Benito Y. (coord.): Intervención e investiga-ciones psicoeducativas en alumnos superdotados. Amarú Ediciones. Salamanca.
- [7] [DOC1] DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN ESPECIAL. Administración Federal de Servicios Edu-cativos en el D.F. Dirección General de Operación de Servicios Educativos. 90 años. 1921-2011. Estrategia de Atención para Alumnos y Alumnas con Capacidades y Aptitudes So-bresalientes. En la Educación Básica del D.F. (2011). México D.F.: Secretaría de Educación Pública.
- [8] [DOC2] “PLAN DE ACTUACIÓN PARA LA ATENCIÓN EDUCATIVA AL ALUMNADO CON NE-CESIDADES ESPECÍFICAS DE APOYO EDUCATIVO POR PRESENTAR ALTAS CAPACIDADES IN-TELECTUALES EN ANDALUCÍA” (2011). BOJA número 203 del 17 de octubre de 2011.

Sobre los autores:

Nombre: Irene Araujo Guijo

Correo Electrónico: irene_7-91@hotmail.com

Institución: Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

Nombre: María Teresa Fernández Reyes

Correo Electrónico: centrocadis@hotmail.com

Institución: Centro CADIS. Sevilla, España.

Nombre: Juan Núñez Valdés

Correo Electrónico: jnvaldes@us.es

Institución: Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

Nombre: Francisco Javier Sanz Gil

Correo Electrónico: javi4_8@hotmail.com

Institución: Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla., España.

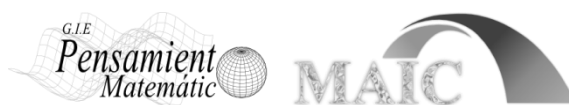
Experiencias Docentes

Visualizar el Conocimiento

Knowledge Visualization

Ascensión Moratalla, Juana María Sánchez y M^a Agripina Sanz

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 017–026, ISSN 2174-0410

Recepción: 25 Mar'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

A la hora de enseñar Matemáticas a nuestros alumnos de Ingeniería y Arquitectura de la UPM, las herramientas informáticas son de gran ayuda, entre otras razones, porque nos permiten obtener multitud de imágenes, de una manera sencilla y rápida. Pero ¿Por qué esa necesidad de dar forma a las fórmulas? ¿Nos lo demandan los alumnos?

En este artículo se hace un análisis del aprendizaje de las matemáticas en base a la visualización del Conocimiento, siguiendo los siguientes puntos:

1. El tipo de alumnos a los que se dirige nuestra enseñanza. Alumnos que han nacido en una época cultural en la que prima la componente visual sobre cualquier otra forma de comunicación.
2. La importancia de visualizar el conocimiento matemático.
3. La conexión del concepto matemático con una realidad cercana al alumno.
4. Las matemáticas como medio de comunicación entre la idea y la forma.

Palabras Clave: Matemáticas, Arquitectura, Ingeniería, Herramientas informáticas.

Abstract

Its tools are immensely helpful when teaching mathematics to UPM engineering and architecture students because of the convenience and speed with which a wide variety of images can be obtained. But, wherefore this need to depict formulas? Is it a student demand?

The analysis of knowledge visualization-based learning discussed in this article addresses the following items:

1. the type of students concerned, born in a cultural age in which the visual component prevails over any other form of communication
2. the importance of visualizing mathematical knowledge

3. the connection between mathematical concept and students' immediate realities
4. Mathematics as a language for communication between idea and form

Keywords: Mathematics, Architecture, Engineering, It.

1. Introducción

*"Una noche de verano.
El tren hacia el puerto va,
devorando aire marino.
Aun no se ve el mar.
Cuando lleguemos al puerto,
niña, verás
un abanico de nácar
que brilla sobre la mar."*

(Nuevas canciones. Hacia tierras bajas. Antonio Machado.)

Antonio Machado, en esta bella estrofa, nos describe con un lenguaje sencillo y claro, un paisaje, una situación. Las palabras se utilizan para que nuestra mente haga una representación gráfica de la escena: un viaje en tren desde las tierras del interior a la costa, una noche de verano en la que se puede ver el reflejo de la luz de la Luna en el mar, ...

En nuestra comunicación diaria utilizamos descripciones, más o menos detalladas, para hacer llegar a nuestro interlocutor una imagen aproximada de aquello a lo que nos estamos refiriendo. En el discurso, puesto que es más lento que la imagen, las palabras actúan de freno, moderando el curso de nuestros pensamientos y propiciando el análisis de las imágenes que se van sucediendo en nuestra mente.

La forma y la función de la componente visual en la comunicación han cambiado radicalmente en la era tecnológica. Hoy, la imagen es una herramienta fundamental en nuestro trabajo y en nuestras vidas, cuya importancia se ve potenciada con el fácil acceso a la red. Para visualizar las palabras de Machado (si es que nunca se ha visto el mar), sólo hay que acceder a Google y teclear mar-luna-imágenes y una lluvia de cientos de reflejos de la Luna en el agua acompañará dichas palabras.

El conocimiento del hombre comienza en la experiencia sensible, buscamos un apoyo visual del mismo, entre otras razones por el carácter directo de la información y por su proximidad a la experiencia real.

2. Contexto

Nuestros jóvenes viven intensamente esta cultura de la imagen. El teléfono móvil, con cámara fotográfica incorporada, es fundamental para no perder ni un detalle de aquellos momentos que más les interesan. i-pods, tablets, ordenadores, i-phones, ..., les permiten tomar

fotos que más tarde cuelgan en las redes sociales y comparten con su grupo de amigos. Los publicistas, grandes expertos en imagen, saben que el impacto visual de un anuncio asegura unas mayores ventas.

¿Cómo entonces pensar que las Matemáticas que enseñamos a nuestros alumnos deben quedar en el nivel de lo abstracto y rehuir de la forma, de la imagen?

La mente humana conoce a través de la abstracción, una función que desmaterializa los objetos mediante el entendimiento. Y a la vez, los conceptos abstractos que se manejan en matemáticas, necesitan de un apoyo visual que los materialice. No nos cabe duda que la inmensa mayoría de los profesores de Matemáticas, tiene clara la necesidad de aportar imágenes a todos y cada uno de los conceptos que enseñan a sus alumnos. Y si bien es cierto que algunos conceptos son más complicados de visualizar, siempre podemos asociarlos a una situación o experiencia real cercana al alumno. Para las fórmulas que representan un objeto físico perfectamente concreto, la explicación es más sencilla que en el caso de un concepto abstracto. Cuando nos encontramos con un concepto nuevo para nosotros, tratamos de traducirlo a una imagen visual, aunque no exista imagen física para las cosas abstractas. Pero lo principal siempre va acompañado de lo secundario, en este caso, las impresiones ligadas al pensamiento que nos ayudan a entender lo abstracto.

En este contexto, nos hemos formulado preguntas del tipo: ¿El concepto de coordenadas polares es más entendible con la arquitectura de Frank Wryght. (Fig. 1a, 1b)?

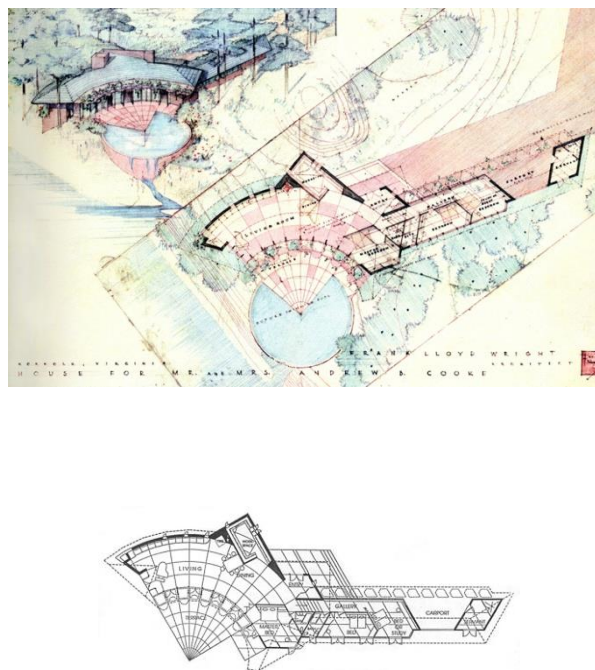


Figura 1a. y 1b. *The Cooke House* (Virginia, EEUU). Frank Wryght (1959)

¿O tal vez el coseno hiperbólico se hace más atractivo desentrañando la geometría oculta del Gateway de Saarinen (Fig. 2)?



Figura 2. Gateway (Lousiana. EEUU). Saarinen (1965).

3. Descripción

Comparemos los siguientes enunciados y analicemos si existe alguna ventaja, para el aprendizaje de las matemáticas, entre proponer a estudiantes de Arquitectura una versión u otra:

1. Inspirándonos en la arquitectura de Sanaa (Fig. 3) hemos diseñado un volumen sobre un recinto (Fig. 4) del plano $z=0$, cuya ecuación en coordenadas polares es $r = 4 + \cos 5\alpha$ y lo hemos rodeado de un muro vertical (Fig. 5)



Figura 3, Casa Flor. Sanaa (2006)

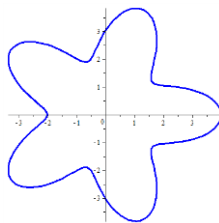


Figura 4,

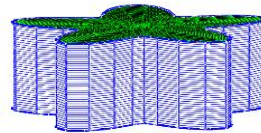


Figura 5

Calcular el volumen si el muro tiene una altura de 3 unidades.

2. Sobre un recinto del plano $z=0$, cuya ecuación en coordenadas polares es $r=4+\cos 5\alpha$, hemos levantado un muro vertical de altura 3 unidades. Calcular su volumen.

Tanto la versión 1 como la versión 2 de este problema, trata de una aplicación del concepto de integral. Pero la versión 1, relaciona directamente ese concepto con los estudios de Arquitectura, al hacer referencia a una obra arquitectónica perteneciente al grupo Sanaa, que existe en la realidad.

Por otro lado, al alumno se la ha proporcionado la representación gráfica del modelo en estudio y de la obra arquitectónica en la que está inspirado. El pensamiento se hace visible, se establece una conexión entre los conceptos estudiados y la esencia de la idea que subyace en toda obra arquitectónica. El alumno comprende entonces que está estudiando una materia que le aporta una herramienta útil en su formación.

¿Qué mejor fuente de conocimiento para un estudiante de Arquitectura que la obra de otros arquitectos?

Kazuyo Sejima (Ibaraki, Japón, 1956) y Ryue Nishizawa (Kanagawa, Japón, 1966) forman el estudio de arquitectura conocido como SANAA.

Su arquitectura, aparentemente simple, es de una gran complejidad. Observando sus dibujos (Fig. 6), siempre podemos destacar un alto grado de sencillez; son al mismo tiempo esquemas y diagramas, porque no necesitan dar más información.

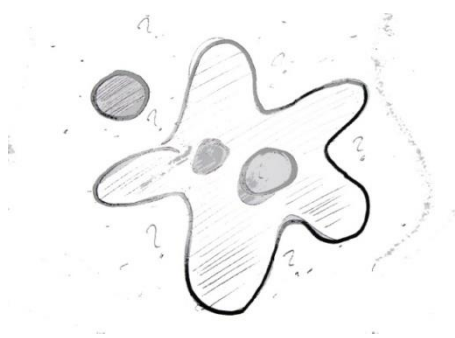


Figura 6. Esquema casa flor. Sanaa.

Toda la información del proyecto está contenida en el dibujo, que presenta un alto grado de abstracción, el mismo grado de abstracción que tiene su arquitectura. Lo fundamental de la obra, es lo cercano que se encuentra el diagrama a la obra construida. Para estos arquitectos, la utilización de recursos digitales se convierte en una herramienta de proyecto que se ve reflejada en sus obras. Sejima y Nishizawa [1] reconocen la eficiencia que estos medios informáticos tienen de generar mayor número de modelos y dibujos diferentes en menor cantidad de tiempo, y así lograr una mayor disponibilidad de recursos durante el proceso de diseño.

Parece pues, que el diseño arquitectónico no es casual, que detrás de toda obra hay un planteamiento geométrico y una forma de pensamiento y el lenguaje de las Matemáticas resulta apropiado para interpretarlo.

Profundizando en el análisis del aprendizaje, el ejemplo anterior nos permite ir un poco más allá. Si hemos encontrado una función matemática detrás de un diseño, tal vez, las funciones matemáticas nos ayuden en el diseño de formas. En este sentido proponemos el siguiente enunciado:

Los diseños que se muestran en la imagen (Fig.7) corresponden a la arquitectura de Sanaa.



Figura 7. Flower chair. Sanaa (2001)

Con ayuda de la función $r = a \cos b\alpha$ decide los valores de a y b para realizar tu propio diseño de asiento.

En este punto, la herramienta informática se hace esencial para el diseño de formas que están escritas en un lenguaje matemático. Necesitamos, pues, un programa de representación de funciones para elegir los valores de a y b y obtener el modelo más adecuado para nuestros asientos. Si tenemos definida una forma que depende de los valores a y b , con sólo cambiar esos parámetros, cambiará la forma.

Elegimos los valores $b = 3$, $a = 3$ y representamos la función (Fig. 8)

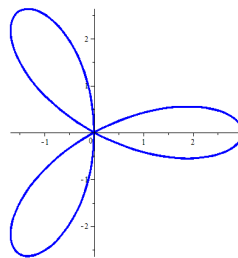


Figura 8

Si generamos un volumen con la sección anterior (Fig. 9), definiendo una superficie reglada, la imagen nos queda



Figura 9.

Obteniendo así nuestro propio diseño a partir de una propuesta concreta.

En una línea diametralmente opuesta a la arquitectura de Sanaa, en la que las ecuaciones matemáticas y las herramientas informáticas tienen un importante papel, podemos fijarnos en la pieza de cerámica de la figura 10. Es una vasija neolítica de cerámica policromada, procedente de Cucuteni (Rumanía) y su antigüedad se remonta al año 2500 a.C. La cultura Cucuteni se extendió por Ucrania occidental y parte de Transilvania [2].



Figura 10. Vasija Neolítica. 2500 a.C. Rumanía.

Esta pieza, que fue construida sin que su creador tuviera conocimiento alguno de matemáticas, puede ser hoy en día analizada desde un punto de vista geométrico y modelizada a través de unas ecuaciones.

Siguiendo el esquema:

IDEA $\Rightarrow$ ECUACIÓN $\Rightarrow$ MODELO MATEMÁTICO

podríamos proponer el siguiente modelo compuesto por una combinación de superficies conocidas como cuádricas. En este caso la combinación de un hiperboloide de una hoja con una esfera nos aproxima a la forma anterior

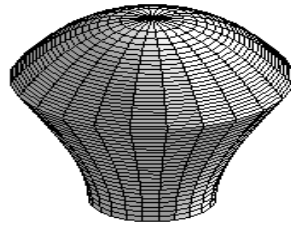


Figura 11. Modelización de la Fig. 10.

El mismo tipo de cuádricas con otra orientación (Fig. 13) nos permite describir la vasija decorada de la figura 12, también perteneciente al Neolítico (4500-3200 A.C.) y encontrada en la cueva de Alepotrypa (Diros, Laconia).

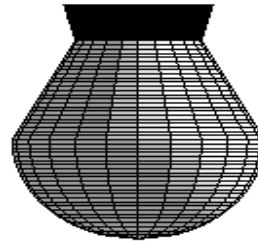


Figura 12. Vasija del Neolítico (4500-3200 A.C.)
(Diros Neolithic Museum. Hellenic Ministry of Culture/ARF)

Figura 13. Modelización Fig. 12

Estas superficies nos permiten hacer propuestas en objetos distantes en el espacio y en el tiempo.

El vaso de la figura 14 es una pieza procedente de el Salvador cuya antigüedad se remonta al periodo del 900-1050 A.C. Una vez más la combinación de un hiperboloide de una hoja con una esfera, es nuestra propuesta (Fig. 15) para esta bella pieza, aunque el resultado no sea idéntico, se trata de una propuesta personal.

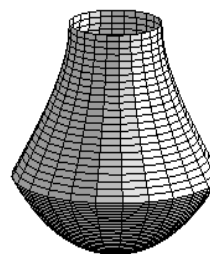
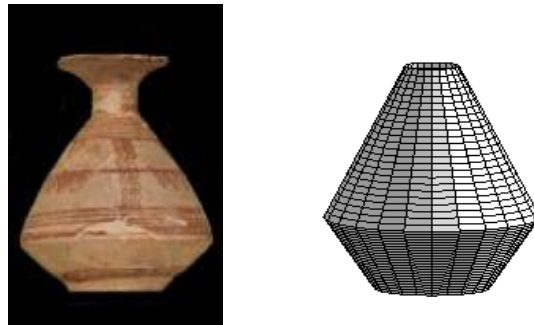


Figura 14. Vaso policromado procedente de El Salvador.

Figura 15. Modelización fig. 14

La siguiente vasija (Fig. 16), que se encuentra en el Museo de Arte Ibérico de El Cigarralejo (Murcia), fue encontrada en el yacimiento de El Cigarralejo, el cual abarca un periodo cronológico que va del siglo IV al I a.C. Su forma nos sugiere la fusión de dos conos (Fig.17)



Figuras 16 y 17

De ecuaciones:

$$16(x^2 + y^2) = 1,8^2(z - 3)^2$$

$$x^2 + y^2 = (z + 0,5)^2 0,6^2$$

O bien para la figura 18, un hiperboloide y un cono (Fig. 19)

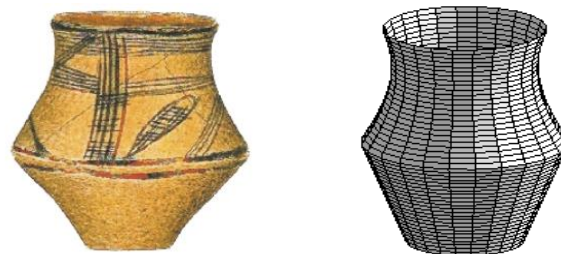


Figura 18. Vasija Neolítico 3000 A.C.

Figura 19. Modelización fig. 19

de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 0,64(1 + (z - 4)^2)$$

$$9x^2 + 9y^2 = 1,28z^2$$

respectivamente, nos acercarán al modelo en cuestión.

Para las representaciones gráficas incluidas en este trabajo, se ha utilizado el programa de cálculo simbólico Maple, compatible con el programa de diseño gráfico Rhinoceros. Se puede, así, establecer una vía de comunicación entre las fórmulas matemáticas y el diseño gráfico.

4. Conclusiones

Tras reflexionar sobre cómo la componente visual influye en el aprendizaje de las Matemáticas, hemos llegado a una serie de conclusiones que queremos elevar al foro en el que nos encontramos:

La interacción entre los alumnos y el ordenador a través de las matemáticas, aumenta su creatividad.

Es importante hacer llegar a nuestros alumnos la potencia de generar diseño, que les proporcionan las matemáticas.

La reforma que se está desarrollando en nuestras universidades va en detrimento del conocimiento matemático. En los últimos planes de estudio, su base matemática ha sido relegada en exceso y ello repercute en multitud de áreas de conocimiento.

Referencias

- [1] ZAERA, A. *Una conversación con Kazuyo Sejima y Ryue Nishizawa.1995-2000: trazando los límites de la Obra*, El croquis. Nº 99. Pp. 6-19, Madrid, 2001.
- [2] BRONCEATLANTICO. *El Neolítico en Escandinavia II:El TRBK*. <http://lacomunidad.elpais.com>, Enero 2013.

Sobre las autoras:

Nombre: Ascensión Moratalla

Correo Electrónico: ascension.moratalla.delahoz@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Juana María Sánchez

Correo Electrónico: juanamaria.sanchez@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: M^a Agripina Sanz

Correo Electrónico: mariaagripina.sanz@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas

Euler y El Problema de Basilea

Euler and The Basel Problem

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 027–056, ISSN 2174-0410
Recepción: 31 Mar'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

Normalmente la demostración de un problema matemático abierto no supone metafóricamente hablando el cierre de una puerta, sino el nacimiento de nuevas teorías y campos en los que investigar. El problema de Basilea significó no sólo un trampolín en la carrera de un joven Leonhard Euler, sino el germen de una de las herramientas fundamentales en Teoría de Números como es la Función Zeta.

Palabras Clave: Euler, Basilea, Función Zeta.

Abstract

Usually, the proving of an open mathematical problem does not mean metaphorically the closing of a door, but the birth of new theories and fields to research. The Basel Problem meant not only a springboard in the career of a young Leonhard Euler, but the germ of one of the fundamental tools in Number Theory such as the Zeta Function.

Keywords: Euler, Basel, Zeta Function.

1. El origen histórico del problema

El nombre del problema proviene de la ciudad natal de Leonhard Euler (1707–1783) y de quizás una de las familias de matemáticos más notables de la historia, Los Bernoulli, y consiste básicamente en hallar la suma infinita de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales, esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

Con anterioridad al propio Euler, el problema había sido planteado por primera vez en 1644 en la obra “*Novae Quadraturae Arithmeticae*” de Pietro Mengoli (1625–1686), alumno aventajado de Bonaventura Cavalieri (1598–1647), prior de la iglesia de Santa María Magdalena de Bolonia

y sustituto de su maestro como profesor en la Universidad de Bolonia. La obra anteriormente descrita está formada por tres libros, y en el primero Mengoli demostró la convergencia e incluso calculó la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

que desde entonces es conocida como *serie de Mengoli*¹. La serie de Mengoli constituye un ejemplo clásico de la serie telescópica.



Figura 1. Pietro Mengoli y portada de “*Novae Quadraturae Arithmeticae Seu de Additione Fractionum*”.

Planteado el reto por Mengoli, muchos fueron los matemáticos que posteriormente intentarían sin éxito encontrar la solución a dicho problema. Uno de los primeros que lo abordó fue el británico John Wallis (1616-1703), que en su obra “*Arithmetica Infinitorum*” (1655) aproximó el valor de dicha serie a 1,645 cometiendo un error menor que una milésima, lo que con la notación moderna supondría tener que evaluar 1.071 términos de dicha serie. Wallis llegó a dicho resultado a través de lo que hoy se denomina *producto de Wallis*, un producto de infinitos términos que se expresa

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots} = \frac{\pi}{2}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots$$

Por aquellos años, las series se encontraban en su punto más álgido en cuanto a desarrollo y estudio se refiere. De hecho el gran salto cualitativo en cuanto a la obtención de un valor truncado de π cada vez más preciso, se produjo en cuanto los métodos geométricos “arqui-medianos” fueron abandonados en favor de la utilización de las series infinitas. Gottfried W. Leibniz (1646-1716) siguiendo indicaciones de su mentor Christiaan Huygens (1629-1695), resolvía el problema de la suma de los recíprocos de los números triangulares, números cuya expresión es de la forma:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

¹ Se demuestra que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1} \rightarrow 1, \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Como curiosidad Mengoli denominó a los números de la forma $n(n+1)$ con $n \in \mathbb{N}$, *números planos*, para diferenciarlos de los números de la forma $n(n+1)(n+2)$ que estudia en el 2º libro de dicha obra y que denomina *números sólidos*.

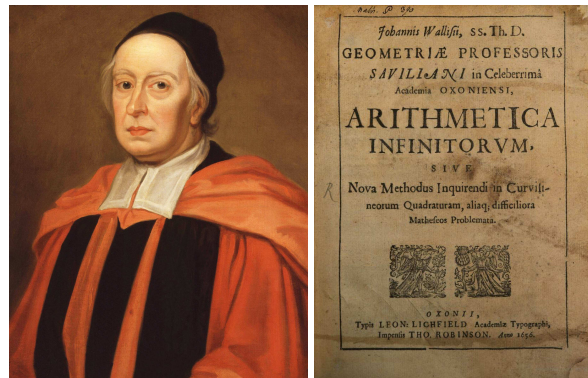


Figura 2. John Wallis y portada de "Arithmetica Infinitorum".

El problema resuelto por Leibniz consistía en calcular por lo tanto la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Siguiendo el mismo proceso que en la serie de Mengoli, se puede descomponer en fracciones simples, de modo que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

donde se puede observar que todos los términos se anulan salvo el primero.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right) = 2$$

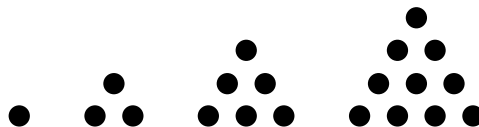


Figura 3. Los cuatro primeros números triangulares.

Leibniz conoció el Problema de Basilea en 1673, cuando el por entonces primer secretario de la Royal Society of London, Henry Oldenburg (1616-1716) se lo propuso en una de sus comunicaciones por carta. Una vez Leibniz se familiarizó con el problema, no era de extrañar que los Bernoulli también lo conocieran (Leibniz era mentor de varios miembros de dicha familia). En 1689, Jakob Bernoulli (1654-1705), hermano del maestro y mentor de Euler, Johann Bernoulli (1667-1748), a pesar de no hallar la anhelada suma, consiguió revelar y publicar dos resultados sobre dicha serie a todas luces fundamentales². El primero es que se trataba de una serie convergente (aunque muy lentamente) ya que todas las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

con $k \geq 2$ cumplen que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$$

² Parece ser muy probable que Euler conociera el problema a través de Jakob.

además como el n -ésimo número triangular es menor que el n -ésimo recíproco cuadrado, si se invierten se tendrá que

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{T_n}$$

y por lo tanto se puede concluir que la serie está acotada por 2. El criterio de convergencia que hoy día resulta fundamental y es lo primero que se busca en una serie, no era por entonces tenido demasiado en cuenta con el mismo rigor con el que ahora se busca, ya que durante aquellos años los matemáticos lejos de proporcionar una demostración impecable, estaban mucho más interesados en demostrar resultados.

La Serie Armónica



Figura 4. Nicolás Oresme.

El nombre de dicha serie deriva del concepto de armónico musical, ya que las longitudes de onda de los armónicos de una cuerda vibrante son proporcionales a su longitud según la serie de fracciones unitarias: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

La divergencia de dicha serie fue demostrada por Nicolás Oresme (1323-1382) en torno al año 1350, y aunque significó un avance importante en las matemáticas del medievo, pronto quedó en el olvido. Dicha divergencia se produce muy lentamente, de hecho los primeros 10^{43} términos de la serie no llegan a sumar siquiera 100, lo cual parece ir en contra de toda intuición de cualquier principiante matemático. La demostración resulta a todas luces bastante accesible y puede consultarse en multitud de bibliografía. Para ello partimos de la serie general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Se agrupan todos los términos del siguiente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

que resulta mayor término a término que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\log_2 k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

que claramente diverge, y por lo tanto también lo hace la serie armónica. $\square$

Los estudios de Jakob Bernoulli para encontrar la solución analítica del problema desembocaron en un segundo resultado detallado a continuación. Partiendo de la serie original

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

multiplicó ambos miembros por 2^{-2} obteniendo

$$\frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)$$

es decir la suma de los términos pares de dicha serie. Restando estos a la serie original resulta que la suma de los términos impares será por lo tanto:

$$\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2^2 - 1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



Figura 5. Gottfried W. Leibniz, Henry Oldenburg y Jakob Bernoulli.

Previa a la irrupción de la figura de Euler, el problema experimenta varios intentos infructuosos de ser demostrado. Sin embargo comienza una carrera vertiginosa por alzarse con el honor de dar el mayor número de cifras exactas. Ha de considerarse que la convergencia de la serie es bastante lenta, recuerde el lector que se necesitarían 1.071 términos para dar una precisión de tres cifras decimales. En 1721, en una carta de Johann a su hijo Daniel Bernoulli (1700-1782), éste especifica que el resultado de la suma se encuentra en torno al valor $\frac{8}{5}$. En 1729 Christian Goldbach (1690-1764), con el que el propio Euler mantuvo durante toda su vida un intercambio de una muy productiva correspondencia, acotó la solución entre $\frac{41}{35}$ y $\frac{5}{3}$, y en 1730 James Stirling (1692-1770) en su libro "*Methodus Differentialis*", da la cifra 1,644934066, correcta hasta la novena cifra decimal.

2. Los primeros intentos de Euler

En 1731, irrumpe en el contexto del problema la figura de un jovencísimo Euler. En su artículo "*De summatione innumerabilium progressionum*", publicado en 1738, utiliza un método completamente vanguardista para aproximar la serie. Euler parte de la serie de potencias

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \quad (2)$$

Dividiendo la expresión (2) por $-x$ e integrando entre 0 y $\frac{1}{2}$, resultando

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{4} + \dots + \frac{\frac{1}{2^n}}{n^2} + \dots \quad (3)$$

En el lado izquierdo de esta expresión hace la sustitución $y = 1 - x$ obteniendo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\log(1-x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log(y)}{1-y} dy$$

y dado que se conoce la suma de una serie geométrica de término inicial a y razón r ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \Rightarrow \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

La serie de Gregory-Leibniz y π

Desde los comienzos de las primeras civilizaciones, definir un valor de π cada vez más preciso se convirtió en una tarea primordial para los geómetras. El verdadero avance se produjo cuando los engorrosos métodos heredados de la época de Arquímedes basados en la utilización de polígonos regulares cada vez con un mayor número de caras, dieron paso a la utilización de las series infinitas.

Uno de los primeros que se percató de la capacidad de estas series para la definición de π fue el joven matemático escocés James Gregory (1638-1675). Familiarizado con el desarrollo en serie de las funciones $\tan x$, $\sec x$, $\arctan x$, $\operatorname{arcsec} x$ y las series logarítmicas, su principal logro consistió en encontrar una relación entre el desarrollo de la función $\arctan x$ y π . Gregory pudo identificar que el área bajo la curva $\frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $(0, x)$ era precisamente la función $\arctan x$, lo que en notación moderna se puede expresar:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (4)$$

Mediante un proceso de larga división en el integrando y la utilización de la fórmula de Cavalieri³, pudo identificar la siguiente expresión:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (5)$$

Si se sustituye $x = 1$ en la expresión (4), se obtiene que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, por lo tanto:

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \quad (6)$$

lo cual significaba haber encontrado el primer desarrollo de la historia en serie infinita del valor de π .

Gregory envió una carta a Leibniz el 15 de Febrero de 1671, poniendo de manifiesto el logro obtenido con la serie de la expresión (5). Posteriormente Leibniz se percató del caso especial de la expresión (6) en 1674 y publicó sus resultados en 1682.

La convergencia de esta serie es muy lenta, sin embargo mostró el camino de una nueva vía de investigación en la historia de π .

se obtiene

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sum_{n=0}^{\infty} y^n \log(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy$$

Se puede integrar por partes cada uno de los sumandos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y^{n+1}}{n+1} \log(y) - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

³ En 1653, el matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) publicaba su obra póstuma "*Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*", considerada como uno de los principales tratados del pre-Cálculo, donde aparecía el siguiente resultado conocido como *fórmula de Cavalieri*:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad n \geq 0$$

Agrupando nuevamente, se llega a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy = \left(\log(y) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} \right] - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

Pudiendo sustituir la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = -\log(1-y)$$

resultando

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n \log(y) dy &= \left(\log(y)(-\log(1-y)) - \left[y + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \dots \right] \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= \log(1) \log(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \log^2\left(\frac{1}{2}\right) - \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{4} + \dots + \frac{\frac{1}{2^n}}{n^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Euler iguala los términos de la derecha de las expresiones (3) y (7) despreciando el producto $\log(1) \log(0)$. De este modo llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \log^2(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}} \quad (8)$$

El procedimiento utilizado por Euler, aunque poco riguroso (utiliza la integración de la serie término a término, no considera el producto $\log(1) \log(0)$, etc), solventa de forma eficiente la baja velocidad de convergencia de la serie (1). Gracias a las potencias cuadráticas del numerador, los términos de la nueva serie que ha obtenido decaen mucho más rápido, y en consecuencia la convergencia de la misma mejora ostensiblemente. Además, Euler conocía el valor de $\log(2)$ con una gran cantidad de cifras decimales, consiguiendo de este modo una aproximación de la serie al valor 1,644934, que es correcta en las seis cifras decimales únicamente con la suma de catorce términos de la nueva serie, lo que obliga a valorar la importancia del resultado obtenido por Euler puesto que de otro modo se necesitarían la friolera de 3.352.001 términos de la serie para obtener la misma precisión



Figura 6. Leonhard Euler.

3. La demostración de Euler

A pesar de que Euler había conseguido con la expresión (8) un método bastante rápido de realizar una estimación muy buena de (1), sin embargo se desconocía su valor real que era el principal objetivo. No obstante en 1734 sucedió el desenlace esperado y Euler anunciaba la demostración del resultado definitivo, presentándolo primero en la Academia de San Petesburgo y varios años después publicado. Se trataba de una demostración que ponía de manifiesto la gran intuición del joven Euler, aunque sin resultar demasiado rigurosa para los estándares de nuestros días. Gracias a la aparición y al desarrollo del estudio de la teoría de las funciones analíticas en variable compleja en el siglo XIX, fundamentalmente gracias a los trabajos del francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y el alemán Karl Weierstrass (1815-1897) sobre factorización infinita de dichas funciones, esta demostración puede combinarse perfectamente con dichos logros y considerarse por lo tanto completamente válida y rigurosa. El lector debe tener presente

que Euler no pudo contar todavía con multitud de herramientas analíticas posteriores. Sin embargo su gran intuición mostraba por primera vez la íntima relación entre un concepto analítico como eran las series, con un concepto puramente geométrico como era la aparición de π .

La ingeniosa solución a la que Euler acaba por llegar hacía uso fundamental de las propiedades de la función trigonométrica seno. Dicha función admite una interpretación geométrica como muestra la figura 7. Como puede observarse, dado un número real x , se representa el punto P situado sobre la circunferencia de radio unitario a un ángulo x (medido en radianes), y se traza el triángulo rectángulo que se obtiene proyectando al punto P sobre el eje de abscisas. Resulta en este caso que $\sin x$ es la longitud del cateto opuesto al ángulo, (con signo negativo si se encuentra en el semiplano inferior). Como los catetos son siempre más cortos que la hipotenusa, el seno de un ángulo está siempre acotado entre -1 y 1 .

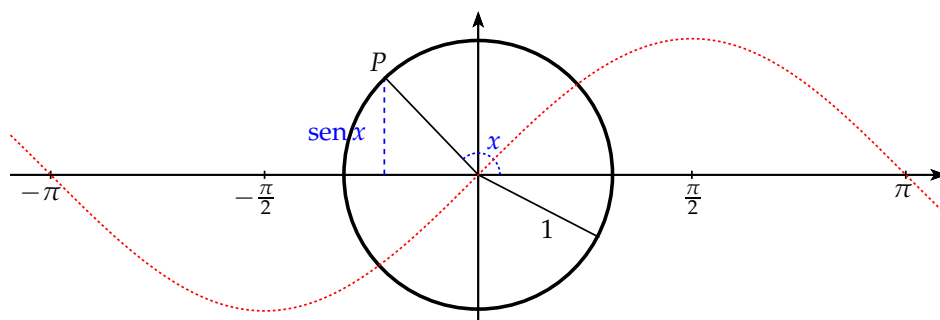


Figura 7. Interpretación geométrica de la función seno.

Gracias a la interpretación geométrica de la figura 7, puede observarse que la función seno es periódica, puesto que un ángulo de 2π radianes (o bien 360°) corresponde a un giro completo en la circunferencia unitaria, por lo tanto el valor de la función seno no sufre variación si le sumamos o restamos múltiplos de 2π , y además el valor absoluto del seno coincide si sumamos o restamos múltiplos de π , por lo que se puede afirmar que:

$$\sin x = |\sin(x + \pi)| = |\sin(x - \pi)| = \sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \dots$$

Para deducir los valores para los que la función seno se anula, se puede suponer que x está comprendido entre 0 y π , ya que en ese caso el punto P se encuentra en el eje de abscisas. Por lo tanto por la propiedad de la periodicidad de la función seno, los ceros de la misma son los múltiplos de π , es decir, los puntos de la forma $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

En el caso particular de la función seno, ésta toma infinitas veces el mismo valor, por lo tanto no puede considerarse un polinomio en el sentido estricto de la palabra. Sin embargo el método ingenioso de Euler consiste en imaginar dicha función como un “polinomio infinito”, del que conocía su desarrollo en serie según la fórmula de Taylor:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (9)$$

En general si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son las raíces de un polinomio $Q(x)$ cuyo término independiente vale 1 (es decir, $Q(0) = 1$), entonces Q se puede factorizar como

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

Además, si todas las raíces son distintas de cero, multiplicando y dividiendo por

$$Q(0) = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$$

se puede reescribir dicha igualdad como

$$Q(x) = Q(0) \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

Euler extendió dicho razonamiento imaginando un “polinomio infinito” con “infinitas” raíces. Sin embargo como cero es precisamente una de las raíces de la función $\sin x$, Euler dividió la expresión (9) por x obteniendo:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (10)$$

que como puede comprobarse no se anula en cero (de hecho, vale 1), pero que, exceptuando dicho valor, tiene las mismas raíces que la función seno (todos los múltiplos no nulos de π). Euler expresó (10) como producto infinito, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{x^2}{3^2\pi^2} + \frac{x^4}{2^2\pi^4} + \frac{x^4}{3^2\pi^4} + \frac{x^4}{2^2 3^2 \pi^4} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} \end{aligned} \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ b_2 &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{1 \leq n_1 < n_2}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 n_2^2} \\ &\dots \\ b_k &= \left(\frac{-1}{\pi^2}\right)^k \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \cdots n_k^2} \\ &\dots \end{aligned}$$

En este punto, Euler recibió bastantes críticas por la falta de rigor que para muchos existía en su metodología expuesta hasta este punto. Precisamente uno de los más críticos fue Johann Bernoulli, quien le recomendaba que por lo menos demostrase que las raíces especificadas en el producto infinito anteriormente expuesto eran las únicas raíces del seno. Como contraejemplo al razonamiento de Euler, la función

$$e^x \frac{\sin x}{x}$$

tiene las mismas raíces y sin embargo la expresión como producto infinito es diferente. A esta críticas Euler respondió afirmando que los valores aproximados que él obtenía eran parecidos a $\frac{\pi^2}{6}$.

Llegado hasta aquí, Euler disponía de dos expresiones diferentes para la misma función, por lo que podía desarrollar el producto e igualar los coeficientes de los términos del mismo grado. Fijándose en el coeficiente de x^2 , para su cálculo el único modo de obtener un múltiplo de x^2 al deshacer el paréntesis es elegir el término $\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ en uno de los factores y 1 en todos los demás. Por lo tanto, el valor del coeficiente resulta:

$$c_1 = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right)$$

Este coeficiente debía coincidir con el coeficiente de la serie original, es decir $c_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. El lector podrá imaginar la euforia que debió sentir Euler en este momento que lo único que debía hacer era igualar dichos coeficientes y obtener el esquivo resultado durante más de 80 años:

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right)$$

la solución al Problema de Basilea resultaba:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

Aunque el resultado obtenido es completamente correcto, Euler recibió numerosas críticas por la falta de rigor en su exposición. En el trabajo de Euler no se justificaba que se pudiera tratar la función seno como un polinomio. De hecho, no es cierto que cualquier serie de potencias admita una factorización de este tipo. Sin embargo, gracias a investigaciones del francés Jacques Hadamard (1865-1963), se sabe que se necesita una hipótesis relativa al crecimiento de la función cuando x tiende a infinito. En este sentido Euler tuvo mucha suerte o quizás gozaba de una clarividencia que le permitió dar un paso hacia delante en su demostración ya que en el caso de la función $\frac{\sin x}{x}$ el condicionante descrito se cumple. Uno de los campos en los que Hadamard trabajó se centró en las funciones analíticas que tienen singularidades en el plano finito. Trabajó en el campo de las funciones enteras⁴, como por ejemplo las funciones expresadas en series de potencias que convergen en todos los valores de x .

Cualquier polinomio $P(x)$ es obviamente una función entera. Si es mónico ($P(0) \neq 0$), el polinomio puede ser expresado de la forma

$$P(x) = P(0) \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son las raíces del polinomio $P(x)$. Por analogía, el problema de la factorización de las funciones enteras consiste fundamentalmente en su reconstrucción a partir de sus raíces. Puede ocurrir que una función entera no tenga raíces o ceros (p.ej. e^x), o un número finito (p.ej. $P(x)e^x$), o un número infinito.

El alemán Karl Weierstrass, a la sazón, una de las fuentes en las que bebió Hadamard, había demostrado años antes un resultado crucial con su *Teorema de Factorización*. Dicho teorema (denominado en ocasiones *Teorema del producto/factor*) establece que toda función entera $\varphi(z)$ (analítica en todo el plano complejo) posee una factorización infinita de la forma

$$\varphi(z) = z^m e^{g(z)} \prod_w \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{p_w(z)}$$

siendo dicha factorización no única, y donde $m \geq 0$ es la multiplicidad de la raíz 0, mientras que w varía sobre las demás raíces de φ (incluyendo multiplicidad), las funciones $p_w(z)$, una para cada raíz w , son ciertos polinomios (aproximaciones de Taylor a la función $-\log(1 - z/w)$), y $g(z)$ es también entera. Hadamard estudió las funciones de género⁵ finito k , que se pueden caracterizar como aquellas para las cuales g y todos los polinomios p_w tienen grado $\leq k$. En el

⁴ Las funciones holomorfas se definen sobre un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, que además son complejo-diferenciables en cada punto. Esta condición es mucho más fuerte que la diferenciabilidad en caso real e implica que la función es infinitamente diferenciable y que puede ser descrita mediante su serie de Taylor. El término función analítica se usa a menudo en vez del de "función holomorfa", especialmente para cuando se trata de la restricción a los números reales de una función holomorfa. Una función que sea holomorfa sobre todo el plano complejo se denomina *función entera*. Cuando se dice que una función es "holomorfa en un punto a " significa que no sólo es diferenciable en a , sino que es diferenciable en todo un disco abierto centrado en a , en el plano complejo.

⁵ El concepto de *género* fue introducido por el francés Edmond Laguerre (1834-1886) en sus estudios de la distribución de raíces de funciones enteras y sus derivadas (1882).

caso particular de $f(\zeta) = \frac{\sin \zeta}{\zeta}$ se cumple que es entera y par (además sin raíz en 0, por lo que $m = 0$), se tiene $\varphi(z) = f(\sqrt{z})$ es entera con raíces $(\pi n)^2$ para $n \geq 1$.

Algunos pudieran pensar que Euler tuvo mucha suerte en su demostración, otros que la intuición de este genio se adelantó a su tiempo, siendo capaz de vislumbrar un resultado fundamental en la historia de la matemática. La enorme "fortuna" de Euler consistió en que φ es una función de género cero, un hecho desde luego nada trivial a priori, por lo que g y los p_w son polinomios de grado cero, así que p_w es idénticamente cero para cada $w = (\pi n)^2$, $n \geq 1$, mientras que el factor constante $e^{g(z)}$ satisface $1 = \varphi(0) = e^{g(0)} = e^{g(z)}$, de forma que en el producto de Weierstrass todo factor es 1 a excepción de $(1 - z/w)$ para cada $w = (\pi n)^2$, $n \geq 1$.



Figura 8. Jacques Hadamard y Karl Weierstrass.

4. Extensiones al problema

El resultado de Euler consideraba el coeficiente que multiplica a x^2 en el producto infinito, pero se puede hacer lo mismo para el resto de potencias. En particular el problema de Basilea se resuelve como la identidad $c_1 = b_1$, coeficientes definidos en las ecuaciones (10) y (11), pero del mismo modo se pueden obtener identidades generalizadas $c_n = b_n$, para todo $n \geq 1$. Si se considera el cálculo del término en x^4 equivale a elegir dos factores (distintos) de la forma $\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ y tomar el resto igual a 1. Se obtiene en ese caso

$$\frac{1}{2\pi^4} \sum \frac{1}{m^2 n^2}$$

donde la suma se realiza sobre los pares de números naturales $(m, n) \geq 1$ con $m \neq n$. Otra manera de expresar dicha suma se basa en considerar en primer lugar todos los pares de números naturales y restar a continuación aquellos en los cuales $m = n$. De este modo se puede utilizar la solución al Problema de Basilea para simplificar la expresión:

$$\sum_{\substack{m, n \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{m^2 n^2} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Si se divide por $2\pi^4$ y se iguala el coeficiente $c_2 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ del desarrollo en serie, se ve que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

En general, dado $k \geq 2$, con $k \in \mathbb{Z}$ se designa por $\zeta(k)$ a la suma de los recíprocos de orden k de los números naturales, que siempre resulta convergente:

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad (12)$$

Para cuando Euler había resuelto el problema de Basilea, Jakob Bernoulli había fallecido hacía 29 años. De hecho su hermano Johan, que sabía que Jakob había sido el que más en profundidad había trabajado en este problema, manifestaba en una comunicación a Euler:

“De este modo el deseo más ferviente de mi hermano se ha cumplido ... ¡Si estuviera aquí!”

En contraposición a las acusaciones sufridas por su falta de rigurosidad, la seguridad, clarividencia e intuición con la que Euler contaba estaban al alcance de muy pocos elegidos y confiaba con fe ciega en que el resultado al que había llegado era el correcto. Por ello continuó trabajando en nuevas demostraciones que hicieran de su demostración una verdad incuestionable.

Entre 1734 y 1748 Euler trabajó de forma incansable intentando depurar los resultados a los que había llegado. Fruto de sus investigaciones y siguiendo la notación utilizada en (12), Euler fue capaz de calcular todos los valores de $\zeta(2n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, obteniendo los desarrollos siguientes:

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}$$

$$\pi \cot \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

donde B_{2n} son los denominados *números de Bernoulli*⁶ que resultan ser números racionales definidos por la *función generatriz* $G(x)$:

$$G(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{B_n}{n!} x^n + \dots, \text{ si } |x| < 2\pi$$

Se puede ver que

$$\frac{2x^2}{x^2 - n^2} = -\frac{2x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = -\frac{2x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2}\right)^k$$

por lo que identificando coeficientes, se obtiene la siguiente identidad

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}$$

Por ejemplo

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}; \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}; \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93.555}; \quad \dots^7$$

⁶ Sabiendo que $B_0 = 1$, el resto de números se calcula de forma recursiva mediante la siguiente expresión:

$$B_k = - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{B_i}{k+1-i}$$

Todos los estudios sobre el Problema de Basilea realizados por Euler culminan en su obra “*Introductio In Analysin Infinitorum*” en 1748. En la Proposición 168 del Capítulo X del Tomo Primero de dicha obra, un pletórico Euler expresa de forma particular su más que justificado gozo:

“He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie que depende de la cuadratura del círculo ... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 1. Se hace patente así que de todas las series infinitas contenidas en la forma general

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

que, cada vez que n fuere número par, se podrían expresar mediante la periferia del círculo π ; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con π . Para que se perciba más claramente su valor, adjunto aquí varias sumas de tales series expresadas de manera más cómoda.”

En general $\zeta(2n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ es un múltiplo racional de π^{2n} . Una consecuencia que se deduce de este resultado es que, todos los números de la forma $\zeta(2n)$ son *trascendentes*, ya que si alguno verificase una ecuación polinomial con coeficientes enteros, entonces deduciríamos que π también satisface una ecuación de este tipo, lo cual es imposible puesto que Joseph Liouville (1809-1882) demostró en 1844 que π es trascendente.

Tabla 1. Valores de $\zeta(2) = 1,64493406684822 \dots$

n	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	Error $ \epsilon $
203	1,64002007182253	0,00491399502569
1.071	1,64400079580071	0,00093327104751
29.354	1,64490000052109	0,00003406632713
245.891	1,64493000001389	0,00000406683433
3.352.001	1,64493400000005	0,00000006684817
4.195.876	1,64493406000005	0,00000000684817
4.304.236	1,64493406600003	0,00000000084819
4.319.108	1,64493406680001	0,00000000004821
4.319.854	1,64493406684000	0,00000000000822
4.320.004	1,64493406684804	0,00000000000018

Otro modo de obtener los valores de $\zeta(2n)$ es mediante las series de Fourier a través de la igualdad de Bessel,

$$\int_0^1 \|f(x)\|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(x)\|^2$$

aplicada a las funciones $f(x) = x^k$, $0 \leq x < 1$, siendo $\hat{f}(x)$ la transformada de Fourier de la

⁷ Existen muchos soportes de software con los que poder obtener cualquier valor de la función zeta de Riemann. Por ejemplo en *Maxima* (<http://andrejv.github.io/wxmaxima/>), introduciendo la instrucción *bzfeta(s,n)*, el programa retorna el valor de la función zeta de Riemann para el argumento s con n dígitos de exactitud. Otra posibilidad es utilizar la página de *Wolfram Alpha*® (<https://www.wolframalpha.com/>), donde la instrucción *Zeta(n)* retorna tanto el valor exacto de dicha función (en el caso de que n sea par) como su aproximación decimal con todos los dígitos exactos que se desee. Cabe destacar que entre 1740 y 1744, Euler encontró “a mano” todos los inversos de las potencias pares de los números naturales hasta el orden 26.

función $f(x)$, es decir:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x \gamma} dx$$

5. ...¡Y por fin una demostración definitiva!

La esperada demostración *rigurosa* del Problema de Basilea necesitaba tres premisas fundamentales:

A. Demostrar la igualdad

$$\frac{1}{2}(\arcsen x)^2 = \int_0^x \frac{\arcsen t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

la cual se resuelve mediante el cambio de variable $u = \arcsen t$.

B. Realizar el desarrollo en serie de la función $\arcsen x$. Para ello

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

sustituyendo el integrando por su serie binomial e integrando término a término se obtiene

$$\begin{aligned} \arcsen x &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} t^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!} t^8 + \dots \right) dt = \\ &= t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{t^9}{9} + \dots \Big|_0^x = \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \dots \end{aligned}$$

C. Demostrar la relación

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{n+1}{n+2} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ para } n \geq 1$$

El término de la izquierda de la igualdad anterior $J = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$, se resuelve mediante integración por partes haciendo $u = t^{n+1}$ y

$$dv = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt, \text{ para obtener}$$

$$\begin{aligned} J &= (-t^{n+1} \sqrt{1-t^2}) \Big|_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt = \\ &= 0 + (n+1) \int_0^1 \frac{t^n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} dt = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt - (n+1)J \end{aligned}$$

Resultando

$$(n+2)J = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

obteniendo el resultado que se buscaba.

La irracionalidad de π

Aunque ya había sido conjeturada por Aristóteles, fue el suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777) el que demostraba la irracionalidad de π en 1761. Para su demostración utilizó la expresión de este número mediante una fracción continua infinita. Lambert utilizó la propiedad biunívoca de que cada función continua finita se puede expresar mediante un número racional y viceversa, si π fuera racional, debería existir tal fracción continua, y por reducción al absurdo o contradicción llegó al resultado esperado. Veamos su razonamiento, si x es un número racional, entonces, la función $\arctan x$ puede expresarse mediante una función continua del siguiente modo:

$$\arctan x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \frac{16x^2}{9 + \ddots}}}}}$$

Considerando $x = 1$, se obtiene que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, y por lo tanto:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \ddots}}}}}$$

En este punto, si $\pi = \frac{a}{b}$, entonces $\frac{\pi}{4} = \frac{a}{4b}$, y la fracción continua tendría un número finito n de términos. En virtud de que dicha fracción tiene una estructura ordenada, se puede comprobar de un modo sencillo que contiene infinitos términos, lo que contradice la hipótesis de partida, y por lo tanto se concluye que π es irracional.⁸ $\square$

Con todos estos mimbres, Euler comenzó a elaborar la demostración definitiva. Inicialmente hizo $x = 1$ en la premisa A., obteniendo:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}(\arcsen 1)^2 = \int_0^1 \frac{\arcsen t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

A continuación sustituyó $\arcsen t$ por su desarrollo en serie obtenido en la premisa B., e integró término a término:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}} dt + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \int_0^1 \frac{t^7}{\sqrt{1-t^2}} dt + \dots \end{aligned}$$

⁸ Para profundizar en el tema, se recomienda leer NIVEN, I. "A simple proof that π is irrational", Bulletin American Mathematics Society, 56(6), p.509, 1947, donde aparece una demostración de la irracionalidad de π y π^2 mediante la utilización del cálculo.

Sabiendo que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 1$, Euler calculó las otras integrales utilizando la premisa C.:

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left[\frac{2}{3} \right] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right] + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \right] + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\end{aligned}$$

expresión en la que únicamente aparecen la suma de la serie de los recíprocos de los cuadrados de los números impares.

Para llegar al resultado esperado, Euler separó por un lado la suma de los términos impares y por otro la de los pares, resultando

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)\end{aligned}$$

Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Euler despejó y llegó al resultado esperado:

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

Esta segunda demostración no por ser más rigurosa deja de ser igualmente tan genial como la primera. Euler aplicó este resultado en campos muy dispares. Llegó a afirmar, que su “principal uso” era “el cálculo de los logaritmos”. Euler encontró un método eficaz de calcular logaritmos de senos, y declaraba:

“...con estas fórmulas, podemos encontrar tanto el logaritmo natural como el neperiano del seno y del coseno de cualquier ángulo, incluso sin conocer los senos y cosenos.”

6. El nacimiento de la Función Zeta



Figura 9. Bernhard Riemann.

Si juzgásemos la importancia de un resultado o de una demostración por la cantidad de literatura que se ha escrito en torno a ella o la cantidad de obras derivadas posteriores que se han publicado, sin duda el Problema de Basilea debe ser uno de los problemas con mayúsculas de la historia de las matemáticas.

Todas las investigaciones de Euler desembocaron un siglo más tarde en los trabajos del alemán Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann publicó en la Academia de Berlín en noviembre de 1859 su genial artículo “Über die Anzahl der Primzahlen untereiner gegebenen Grösse” (puede traducirse como “Sobre la cuantía de números primos menores que una cantidad dada”), significando un antes y un después en el desarrollo de las matemáticas. A pesar de lo escueto de dicha publicación la cual alcanzaba tan sólo la

cantidad de seis páginas, nunca una relación calidad de resultados frente a cantidad de páginas publicadas pudo haber sido más notable en la historia de las matemáticas y las ciencias. Riemann presenta y estudia las propiedades de lo que pronto pasaría a denominarse *Función Zeta de Riemann*.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

A diferencia de (12), s no tiene por qué ser un número natural, sino que puede tomar cualquier valor complejo cuya parte real sea estrictamente mayor que 1 (condición necesaria para que la serie converja). De forma paradójica, el hecho de que la variable pueda tomar cualquier valor complejo permite usar la función zeta de Riemann con la finalidad de predecir fenómenos relacionados con la distribución de los números primos, hecho este un tanto sorprendente puesto que en la definición de $\zeta(s)$ intervienen todos los números naturales.

La irracionalidad de π^2 implica la existencia de infinitos números primos

Como curiosidad, se puede comprobar que la irracionalidad de π^2 , y por lo tanto la irracionalidad de $\zeta(2)$, implica que existen infinitos números primos⁹. Partiendo de la siguiente expresión

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{p^2}{p^2 - 1} \quad (13)$$

si se supone que existe una cantidad finita de números primos, entonces el producto de la derecha de la igualdad (13) es finito, por lo que el miembro derecho de dicha expresión es un producto finito de números racionales ... y por lo tanto $\frac{\pi^2}{6}$ es racional, lo cual resulta contradictorio con la hipótesis de partida, ya que π^2 es irracional, por lo tanto no puede haber una cantidad finita de números primos. $\square$

Los trabajos de Euler ponen precisamente de manifiesto el origen de la relación de la función zeta con los números primos a través de la llamada *fórmula de Euler*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (14)$$

donde se puede identificar $\zeta(s)$ con un producto infinito indexado por los números primos. Para demostrar (14), si z es un número complejo de módulo estrictamente menor que 1, entonces la serie geométrica de razón z es convergente y su suma vale

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

De este modo, cada factor del producto de (14) se puede expresar por su desarrollo

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

⁹ Originalmente dicho resultado fue demostrado por el matemático francés Adrien Marie Legendre (1752-1833) en su obra "*Éléments de Géométrie*" (1794), junto con una prueba más rigurosa de la irracionalidad de π que la de Lambert, además de conjeturar su trascendencia.

y expresar igualmente el término de la derecha en la fórmula de Euler como

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) \\ \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \cdots\right) \cdots$$

Desarrollando los paréntesis, se obtienen los inversos de todos los posibles productos finitos de números primos. Como la descomposición en factores primos de cualquier número natural es única, cada sumando $\frac{1}{n^s}$ aparece una única vez. Por ejemplo como $20 = 2^2 \times 5$, el término $\frac{1}{20^s}$ se obtiene eligiendo $\frac{1}{2^{2s}}$ en el primer paréntesis, $\frac{1}{5^s}$ en el segundo y 1 en todos los demás. De este modo puede observarse que ambos lados de la igualdad coinciden para cualquier valor de s .



Figura 10. Jeffrey Lagarias.

La aparición de la Función Zeta de Riemann significó una revolución en teoría de números, de hecho es la clave fundamental de la denominada “hipótesis de Riemann”, quizás uno de los problemas matemáticos abiertos más importantes de toda la historia de las matemáticas. Dicha hipótesis afirma que todos los ceros no triviales $s \in \mathbb{C}$ de la función zeta satisfacen que $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$. La función zeta se anula en todos los enteros negativos, que se llaman “ceros triviales”. Recientemente, Jeffrey Lagarias (1949-) sorprendió a la comunidad matemática demostrando que la hipótesis de Riemann es equivalente a la siguiente afirmación elemental: Para todo $n \geq 1$,

$$\sigma(n) \leq H_n + e^{H_n} \log(H_n)$$

con igualdad estricta cuando $n = 1$, donde $\sigma(n)$ es la función suma de divisores¹⁰, y H_n es el n -ésimo número armónico, es decir

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

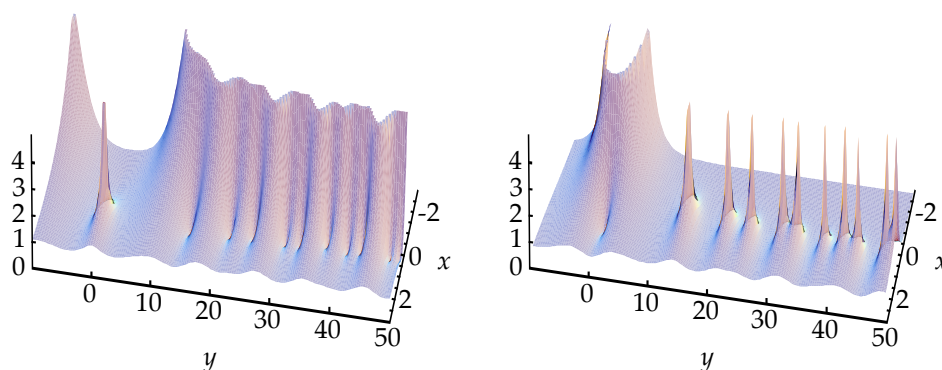


Figura 11. Representación tridimensional de las funciones $|\zeta(x + iy)|$ y $|\zeta(x + iy)|^{-1}$.

¹⁰ En general la suma de funciones divisor positivas $\sigma_x(n)$ está definida como la suma de las x^k potencias de los divisores positivos de n , o

$$\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$$

Las notaciones $d(n)$ y $\tau(n)$ son utilizadas para denotar $\sigma_0(n)$, o el número de divisores de n . Cuando $x = 1$, la función es denominada *función sigma* o *función suma de divisores*, y la variable subscrita es omitida, luego $\sigma(n)$ es equivalente a $\sigma_1(n)$. Por ejemplo, $\sigma_1(12) = \sigma(12) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 6^1 + 12^1 = 28$.

En el presente documento, se ha expuesto hasta el momento un estudio de valores de las sumas de las series infinitas de los recíprocos de los números naturales con potencias pares. ¿Pero qué ocurre con las potencias impares? Por extraño que pudiera resultar ni siquiera se conoce una expresión cerrada para la suma de los recíprocos de los cubos, aunque su irracionalidad fue demostrada por Roger Apéry (1916-1994) en junio de 1978, durante las *Journées Arithmétiques de Luminy* [2]. Desgraciadamente y aunque en su momento la demostración de Apéry fue considerada una auténtica proeza por la comunidad matemática, no se puede hacer extensible a otros valores impares. De hecho existen muchos resultados pendientes de demostrar todavía en este campo como son la trascendencia o no de $\zeta(3)$, o la irracionalidad de multitud de valores impares de la función zeta, aunque en este último caso caben destacar estudios como los del francés Tanguy Rivoal (1981-) [11] en el año 2000 que demostró la existencia de infinidad de valores irracionales de la función zeta para valores enteros impares de ésta o como los del ruso Wadim Zudilin [15] en el año 2001, que demostró que al menos uno de los cuatro valores $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ o $\zeta(11)$ es irracional, resultado este último que le valdría el distinguido premio de la Sociedad Hardy-Ramanujan ese mismo año. Respecto a la expresión cerrada de valores de la función zeta para enteros impares, cabe destacar los estudios del francés Simon Plouffe [10] en el año 2006, donde pone de manifiesto expresiones, desde luego nada triviales, para algunos de dichos enteros.



Figura 12. Roger Apéry, Wadim Zudilin y Simon Plouffe.

Cabe comentar que el resultado obtenido por Apéry sobre la irracionalidad de $\zeta(3)$, inspiró a muchos otros autores que construyeron nuevos métodos vanguardistas basados fundamentalmente en posteriores investigaciones de dicho autor sobre las sucesiones de aproximantes racionales¹¹, cuyo objetivo fundamental es buscar una explicación más profunda de dicha irracionalidad. Parece ser que todos estos métodos coinciden, teniendo como origen común, un problema de aproximación simultánea, hecho denominado *fenómeno de Apéry*. Por poner un ejemplo de dichos métodos, uno de ellos se basa en la integral doble, denominada *integral de Beukers*, que involucra los polinomios de Legendre, de manera que

$$\begin{aligned} r_n^{(0,0)} &= q_n^{(0,0)} \zeta(3) - p_n^{(0,0)} = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz(1-x)(1-y)(1-z))^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz \end{aligned}$$

¹¹ Para profundizar en el tema se recomienda leer SORIA LORENTE, A. Tesis Doctoral: “Aproximaciones simultáneas e irracionalidad de los valores de la función Zeta de Riemann”, Universidad Carlos III de Madrid, noviembre, 2012.

donde

$$q_n^{(0,0)} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2, \text{ y } p_n^{(0,0)} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \gamma_{n,k}$$

$$\gamma_{n,k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^3} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3} \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n}{j}^{-1}$$

son los denominados aproximantes racionales de Apéry, y

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n (1-z)^n = \sum_{k=0}^n l_k^{(n)} z^k, \quad l_k^{(n)} = (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{n}{k}$$

corresponden a los polinomios de Legendre, ortogonales con respecto a la medida de Lebesgue en $(0,1)$.

7. Otras demostraciones

La estrecha conexión entre el problema de Basilea y la Teoría de Números a través de la función Zeta, ha provocado siempre un interés creciente por encontrar nuevas vías que lograran llegar al genial resultado final conseguido por Euler. Como se ha podido comprobar, el problema de Basilea está íntimamente relacionado con el número π , por lo que la carrera por definir de manera más exacta dicho número, se traducía en una definición más exacta del resultado del problema planteado. Multitud de autores han trabajado con varios objetivos claros como facilitar los cálculos de la suma infinita o aumentar la velocidad de convergencia de dicha serie. Se presentan aquí de manera prácticamente literal a como sus autores concibieron, algunas vías novedosas de afrontar el problema y conseguir la solución final esperada.

7.1. LeVeque (1956)

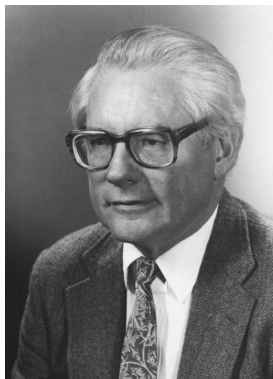


Figura 13. William J. LeVeque.

William Judson LeVeque (1923-2007) trabajó fundamentalmente en Teoría de Números, especialmente en números trascendentes, distribución uniforme discreta (teoría de la probabilidad) y aproximaciones diofánticas. Destaca su trayectoria como director ejecutivo de la Sociedad Matemática Americana desde 1977 hasta su jubilación en 1988, coincidiendo con una época de frenético crecimiento en la utilización de ordenadores en publicaciones académicas de la misma. A lo largo de su vida escribió un nutrido número de libros de texto que sirvieron de referencia prácticamente obligada y cuya aparición ayudó en gran medida a que la teoría de números experimentase un gran desarrollo en los EE.UU. La demostración que aquí presentamos aparece en su libro *“Topics in Number Theory”* (*“Asuntos sobre Teoría de Números”*) (1956) en el que afirmaba:

“No tengo ni la menor idea sobre el origen del problema, pero estoy bastante convencido de que no lo encontré yo.”

Su planteamiento inicial consiste en la obtención de la integral doble (15) mediante dos caminos bien diferenciados.

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy \quad (15)$$

El primer camino consiste en considerar el término $\frac{1}{1-xy}$ como la suma de una serie geométrica, y por lo tanto equivalente a su desarrollo. Descomponiendo los sumandos como productos e integrando resulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (xy)^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \left(\int_0^1 y^n dy \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) \end{aligned}$$

Esta evaluación también demuestra que esta integral doble (de una función positiva con un polo en $x = y = 1$) es finita. Del mismo modo, obsérvese que dicha evaluación puede realizarse en sentido opuesto, de forma que la obtención de $\zeta(2)$ conduce a la integral doble I .

El segundo camino para evaluar la integral I consiste en realizar un cambio de coordenadas, de modo que las nuevas queden definidas como

$$u := \frac{y+x}{2} \quad \text{y} \quad v := \frac{y-x}{2}$$

de modo que el dominio de integración con este cambio es un cuadrado de arista $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, obtenido a partir del dominio original, rotando 45° y después aplicando una homotecia reductora según el factor de escala de $\sqrt{2}$. Sustituyendo $x = u - v$ e $y = u + v$ resulta

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-u^2+v^2}$$

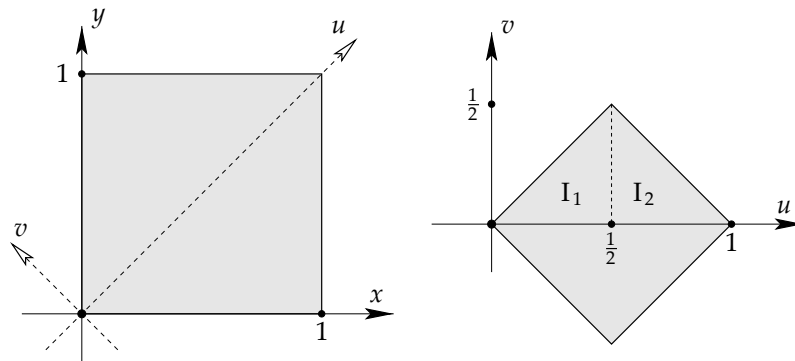


Figura 14. Representación gráfica del cambio de variables y nuevo dominio de integración.

Para transformar la integral se debe reemplazar $dx dy$ por $2 du dv$, ya que la nueva transformación de coordenadas realizada reduce el área según el factor constante 2 (el jacobiano de la transformación). Puede observarse que tanto el dominio de integración como la función a integrar son simétricos respecto del eje u (figura 14), por lo tanto únicamente se necesita calcular la integral sobre la mitad superior del nuevo dominio, y tener en cuenta un factor adicional de 2. Se descompone por lo tanto la integral en dos partes de manera más natural:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du$$

Sabiendo que $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$, se obtiene:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du$$

Se puede evaluar dichas integrales mediante los cambios $u = \sin \theta$ y $du = \cos \theta$ respectivamente. Sin embargo si se procede de un modo más directo, utilizando las derivadas de $g(x)$ y $h(x)$:

$$g(x) = \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$h(x) = \arctan \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) = \arctan \left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \right) \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

Considerando que

$$\int_a^b f'(x) f(x) dx = \left[\frac{1}{2} f(x)^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} f(b)^2 - \frac{1}{2} f(a)^2$$

resulta

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} g'(u) g(u) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 -2 h'(u) h(u) du = \\ &= 2 \left[g(u)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - 4 \left[h(u)^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= 2 g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 g(0)^2 - 4 h(1)^2 + 4 h\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad \square \end{aligned}$$

7.2. Beukers, Kolk, Calabi (1993)

Frits Beukers (1953-) presentó su tesis doctoral en la Universidad de Leiden (Holanda) bajo la dirección de Robert Tijdeman, con un trabajo sobre la Ecuación General de Ramanujan-Nagell. Se convirtió en profesor de Leiden y más tarde de la Universidad de Utrecht donde imparte actualmente docencia. Trabaja en teoría de números, fundamentalmente en cuestiones de trascendencia e irracionalidad, y funciones hipergeométricas.

Johan A.C. Kolk (1947-) es profesor en el Instituto Matemático de la Universidad de Utrecht (Holanda). Sus directores de tesis fueron J.J. Duistermaat (Universidad de Utrech) y V.S. Varadarajan (Universidad de California en los Ángeles). Ha publicado trabajos en campos como el Análisis Armónico en Grupos Semisimples de Lie, Teoría de Distribuciones y Análisis Clásico.

Eugenio Calabi (1923-) de origen judío e italiano y nacionalizado estadounidense, es profesor emérito desde 1994 en la Universidad de Pensilvania donde ingresó en su facultad de matemáticas en 1964. Sus campos de investigación se centran fundamentalmente en geometría diferencial y ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones. En 1953 estableció la llamada *Conjetura de Calabi*, demostrada posteriormente por Shing-Tung Yau en 1977 y convertida por lo tanto en teorema, que postulaba la existencia de ciertas estructuras geométricas específicas (espacios hexadimensionales) bajo ciertas condiciones topológicas. Estas investigaciones están relacionadas con la Teoría de las Supercuerdas.



Figura 15. Frits Beukers, Johan A.C. Kolk y Eugenio Calabi.

La demostración presentada aquí proviene del artículo “Sums of generalized harmonic series and volumes” (“Sumas de series armónicas generalizadas y volúmenes”) (1993). El punto de partida de dicha demostración consiste en separar la suma de dicha serie en sus términos pares e impares del mismo modo que tanto Jakob Bernoulli (éste sin éxito) y Leonhard Euler (al inicio de sus investigaciones) procedieron en el pasado. De este modo, tal y como se demuestra en la página 31 de este documento, los términos pares suman claramente $\frac{1}{4} \zeta(2)$ (basta con tomar factor común 2^{-2}), y por lo tanto los términos impares suman $\frac{3}{4} \zeta(2)$. Con estas premisas, es necesario demostrar entonces la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Al igual que en la demostración de LeVeque, se puede expresar dicha suma como una integral doble, de forma que

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Con el fin de calcular la integral J , los autores propusieron realizar el siguiente desde luego nada trivial cambio de coordenadas:

$$u := \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}} \quad y \quad v := \arccos \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$$

Para realizar el cálculo, se puede ignorar la frontera del dominio y considerar las variables x e y en los intervalos $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$. En ese caso las variables u y v estarán en el triángulo $u > 0, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}$. La transformación de coordenadas anteriormente realizada es invertible de forma explícita mediante la substitución

$$x = \frac{\sin u}{\cos v} \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}$$

Se puede comprobar de manera sencilla que dichas fórmulas definen una transformación biyectiva entre el interior del cuadrado unidad $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ y el interior del triángulo $T = \{(u, v) : u, v \geq 0, u + v \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Para completar el cambio de coordenadas de dicha transformación, hay que calcular el jacobiano de la misma, lo cual de forma sorprendente resulta ser:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2 y^2$$

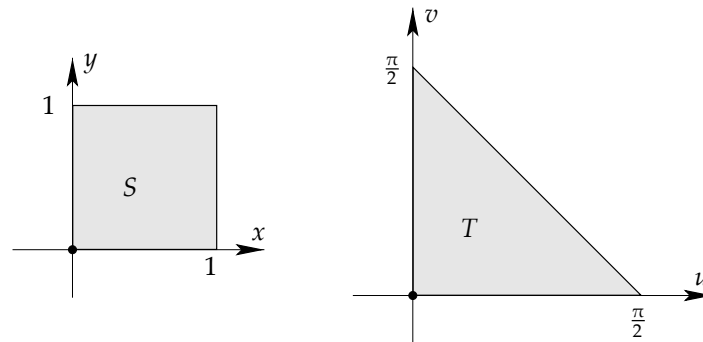


Figura 16. Representación gráfica del cambio de variables y nuevo dominio de integración.

Luego la integral J buscada se transforma en:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-u} 1 \, du \, dv$$

lo cual es precisamente el área del triángulo T , es decir

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

□

7.3. Yaglom (1954)

Isaac Moiseevich Yaglom (1921-1988) destacó por su prolífica carrera como matemático y sobre todo como divulgador de ciencia, muchos de sus trabajos publicados junto a su hermano gemelo Akiva. Durante toda su trayectoria profesional mantuvo una actitud poco ortodoxa con respecto a la ideología imperante en la Unión Soviética de la época de la guerra fría. Creó una escuela científica, y trabajó como docente inculcando el amor por las matemáticas a multitud de estudiantes. Trabajó intensamente en el campo de la geometría no euclidiana. Estuvo interesado en los números complejos en espacios con métricas degeneradas, de hecho este fue el tema de su tesis doctoral que defendió en 1964, y tras la cual accedió a la universidad como profesor titular. Además se interesó por la teoría de las métricas proyectivas y su interpretación utilizando números complejos, escribiendo una serie de artículos al respecto sobre geometría diferencial y la geometría simpléctica del espacio. En 1968, junto a otros científicos firmaría un manifiesto en favor del disidente Alexander Esenin-Volpin lo que le valió su expulsión del Instituto Pedagógico Estatal de Moscú, tras lo cual trabajó en horarios vespertinos en el Instituto Metalúrgico. Tras varios años un tanto errantes por su particular visión crítica hacia el régimen comunista, encontró refugio en la Universidad Estatal de Yaroslavl, donde enseñó durante muchos años. Al inicio de la perestroika, ingresó en la Academia de Ciencias Pedagógicas donde trabajó hasta su muerte.

Akiva Moiseevich Yaglom (1921-2007) fue un destacado científico, matemático y geofísico. Al igual que su hermano gemelo, trabajó intensamente en la divulgación y popularización de las matemáticas, destacando su intensa colaboración junto a matemáticos de la talla de Andréi Kolmogórov, convirtiéndose en su principal discípulo. Son particularmente conocidas sus contribuciones a la teoría estadística de la turbulencia y la teoría de procesos aleatorios. Trabajó en varias instituciones en Rusia como el Instituto de Geofísica Teórica, y desde 1992 hasta su muerte trabajó en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT).

La siguiente demostración apareció en la versión rusa del libro *“Elementary Presentations of Nonelementary Problems”* (*“Problemas no elementales expuestos de forma elemental”*) (1954) de los hermanos Yaglom. Más tarde apareció en otras publicaciones como la revista *Eureka* en 1982,

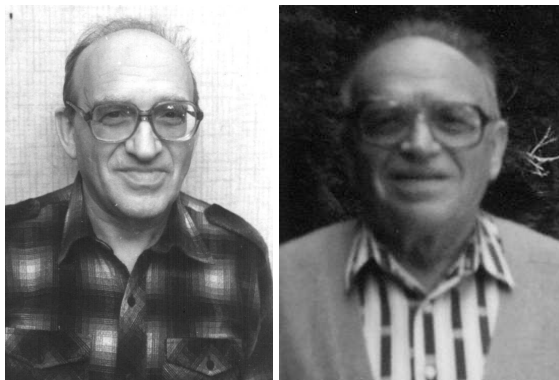


Figura 17. Los gemelos Isaac y Akiva Moiseevich Yaglom.

expuesta por John Scholes, aunque éste declaró que había aprendido la demostración de Peter Swinnerton-Dyer, y que dicha prueba era “de conocimiento general en Cambridge a finales de la década de 1960”.

El punto de partida consiste en establecer una relación de valores de la función “cotangente al cuadrado”. Para todo $m \geq 1$, se tiene¹²:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6} \quad (16)$$

Veamos como se obtiene la expresión (16). Si x es un número real que pertenece al intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, entonces por la *fórmula de Moivre* se establece que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Si se considera la n -ésima potencia se tiene que $e^{inx} = (e^{ix})^n$, resultando:

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$$

La parte compleja resulta:

$$\sin nx = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots \quad (17)$$

Se toma n como un entero positivo impar, esto es $n = 2m + 1$, y para x se consideran los m valores diferentes $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ para $r = 1, 2, \dots, m$. Para cada uno de los valores anteriores, se tiene que $nx = r\pi$, y por lo tanto $\sin nx = 0$, en tanto en cuanto que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ implica que para $\sin x$ se tienen m valores positivos distintos.

En particular dividiendo (17) por $\sin^n x$, se obtiene

$$0 = \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \pm \dots$$

esto es,

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \dots$$

para cada uno de los m valores distintos de x . Del polinomio de grado m

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

¹² Para $m = 1, 2, 3$, esto resulta en $\cot^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$; $\cot^2 \frac{\pi}{5} + \cot^2 \frac{2\pi}{5} = 2$; $\cot^2 \frac{\pi}{7} + \cot^2 \frac{2\pi}{7} + \cot^2 \frac{3\pi}{7} = 5$.

se conocen m raíces distintas

$$a_r = \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, m$$

Por lo tanto, el polinomio coincide con

$$p(t) = \binom{2m+1}{1} \left(t - \cot^2 \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) \right) \cdots \left(t - \cot^2 \left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) \right)$$

Por la fórmula de Vieta se puede calcular la suma de las raíces directamente examinando los coeficientes de t^{m-1} en $p(t)$ se deduce que la suma de las raíces es¹³:

$$a_1 + \dots + a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

lo cual demuestra (16).

Si se sustituye la identidad $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ y se suma m en ambos lados de la igualdad de (16) se tiene:

$$\csc^2 \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) + \csc^2 \left(\frac{2\pi}{2m+1} \right) + \dots + \csc^2 \left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m-1)}{6} + m = \frac{2m(2m+2)}{6} \quad (18)$$

En este momento se tienen todas las herramientas a mano para poder encajar las piezas de la demostración. Si se utiliza que para $0 < y < \frac{\pi}{2}$, se cumple¹⁴:

$$0 < \sen y < y < \tan y$$

y por lo tanto

$$0 < \cot y < \frac{1}{y} < \csc y$$

lo cual implica que

$$\cot^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$$

Ahora se aplica la desigualdad doble a cada uno de los m distintos valores de x , y se suman los resultados. Empleando (16) para el término a la izquierda y (18) para el término de la derecha, se obtiene:

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\frac{2m+1}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi} \right)^2 < \left(\frac{2m(2m+2)}{6} \right)^2$$

esto es,

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-1}{2m+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m+2}{2m+1}$$

Tanto el término de la derecha como el de la izquierda convergen a $\frac{\pi^2}{6}$ cuando $m \rightarrow \infty$ por lo que se obtiene el resultado por el *teorema del emparedado*¹⁵. $\square$

¹³ Comparación de coeficientes, si $p(t) = c(t - a_1) \cdots (t - a_m)$, entonces el coeficiente de t^{m-1} es $-c(a_1 + \dots + a_m)$.

¹⁴ $0 < a < b < c$, implica que $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

¹⁵ Sea I un intervalo que contiene al punto a y sean f, g y h funciones definidas en I , exceptuando quizás el mismo

7.4. Demostración utilizando Series de Fourier

La demostración mostrada en la presente sección puede encontrarse en bibliografía diversa acerca del tema. Previa a dicha presentación vamos a ofrecer al lector algunas nociones básicas sobre el análisis de Fourier.

El análisis de Fourier aparece aplicado en multitud de fenómenos físicos, como por ejemplo el estudio de vibración de una cuerda, cómo se reparte el calor en un cuerpo, o para el cálculo dinámico de estructuras. La fundamentación teórica de dicha materia consiste en demostrar la posibilidad de obtener una función discontinua a partir de la suma de funciones continuas.

El matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) se dio a conocer por sus trabajos sobre descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes denominadas *Serie de Fourier* en su honor, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La clave fundamental de sus investigaciones giran en torno a una idea que ya había sido intuita previamente por Daniel Bernoulli (1700-1782), y que consistía básicamente en que cualquier función $y = f(x) \in L^2[-l, l]$, se puede representar por una serie de la forma¹⁶:



Figura 18. Joseph Fourier.

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi/l}, \quad y \in L^2[-l, l], \quad (19)$$

resultando los coeficientes c_k :

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ik\pi/l} dx,$$

para poder asegurar la igualdad puntual se han de realizar hipótesis adicionales sobre la regularidad de y . Si una serie de la forma descrita en (19) converge, representa una función periódica de periodo $2l$ y por lo tanto es suficiente estudiar su restricción al intervalo $[-l, l]$, o de forma equivalente a $[0, 2l]$.

Las representaciones mediante este tipo de series permiten una mayor generalización en cuanto a la clase de funciones a desarrollar si se compara con los desarrollos en serie de Taylor, ya que existen muchas funciones que no admiten una representación en serie de potencias a pesar de presentar una gran regularidad. La condición necesaria y suficiente para que exista desarrollo en serie de potencias se define en el siguiente teorema:

TEOREMA: Si una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, admite derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto $(-R, R)$, entonces la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{para todo } x \in (-R, R)$$

punto a . Supongamos que para todo x en I diferente de a tenemos:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

y supongamos también que:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

¹⁶ En las demostraciones se utilizará $L^2[0, 1]$, así como series de Fourier en su forma real.

es válida si y sólo si existe algún valor $0 < c < x$ de modo que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange } R_n(x)} \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

para todo $x \in (-R, R)$.

Cabe recordar en este caso el contraejemplo que Augustin Louis Cauchy propuso para rebatir la afirmación realizada por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) de que toda función admitía una representación mediante serie de potencias:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función, a pesar de ser C^∞ (clase infinita), no admite serie de potencias en torno al cero. Por el contrario a pesar de que una función tenga multitud de puntos en los que la derivada no existe, o en los que es discontinua, sí que admite un desarrollo en serie de Fourier.

Veamos la demostración de (1). Considérese el espacio

$$L^2[0, 1] = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 \|f\|^2 < +\infty \right\}$$

con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot \bar{g}$$

Se trata éste de un *espacio de Hilbert*, o lo que es lo mismo un espacio euclídeo donde toda sucesión de Cauchy converge, es decir es completo con la métrica inducida por el producto interno.

Considérese el conjunto de funciones

$$\mathcal{S} = \{e_n(x) := e^{2\pi i n x} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Se demuestra que $\mathcal{S}$ es una base ortonormal del espacio $L^2[0, 1]$, esto es

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Veamos:

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i m x} \cdot \overline{e^{2\pi i n x}} dx$$

como $\cos 2\pi n x - i \sin 2\pi n x = \cos(-2\pi n x) + i \sin(-2\pi n x)$ entonces

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x} dx = \frac{(1+0) - 1}{2\pi i(m-n)} = 0$$

a menos que $m = n$, en cuyo caso

$$\int_0^1 e^0 dx = 1$$

□

TEOREMA DE PARSEVAL: Sea una función cualquiera f del espacio $L^2[0, 1]$ tal que

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\langle f, e_n \rangle\|^2,$$

se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \|\hat{f}(\gamma)\|^2 d\gamma$$

donde $\hat{f}(\gamma)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$ y γ su frecuencia.

Considérese la función $f(x) = x$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_0^1 x \cdot \bar{x} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\ \langle f, e_0 \rangle &= \int_0^1 x \cdot \bar{e^0} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \langle f, e_n \rangle &= \int_0^1 x \cdot e^{-2\pi i n x} dx \quad \text{para } n \neq 0 \\ &= -\frac{1}{2\pi i n} \left(x \cdot e^{-2\pi i n x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-2\pi i n x} dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi i n} \left((1-0) + \frac{1}{2\pi i n} \cdot e^{-2\pi i n x} \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{2\pi i n} \end{aligned}$$

Si se aplica el Teorema de Parseval, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} = \langle f, f \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\langle f, e_n \rangle\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \left| -\frac{1}{2\pi i n} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \square \end{aligned}$$

Referencias

- [1] AIGNER, M. and ZIEGLER, G.M., *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, 4th Ed., pp. 43–50, Berlin, 2010.
- [2] APÉRY, R., “Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ”, *Astérisque*, 61, pp. 11–13, 1979.
- [3] BECKMANN, P., *A History of Pi*, St. Martin’s Press, pp. 132–133, New York, 1971.
- [4] CÓRDOBA, A., “Disquisitio Numerorum”, *La Gaceta de la RSME*, 4, pp. 249–260, Madrid, 2001.
- [5] DUNHAM, W., *Euler, El Maestro de todos los Matemáticos*, Colección: La matemática en sus personajes, pp. 95–121, Ed. Nívola, Madrid, 2004.
- [6] FRESÁN, J. y RUÉ, J.J., *Los Números Transcendentes*, Colección: ¿Qué sabemos de...?, núm. 42, pp. 112–121, Consejo Superior de Investigaciones Científicas; Los libros de la Catarata, Madrid, 2013.
- [7] GRANERO BELINCHÓN, R., “El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones”, *La Gaceta de la RSME*, Vol. 12, núm. 4, pp. 721–727, Madrid, 2009.

- [8] KNOPP, K., *Weierstrass's Factor-Theorem*, §1 in *Theory of Functions Parts I and II*, Two Volumes Bound as One, Part II. New York: Dover, pp. 1-7, 1996.
- [9] KRANTZ, S. G., *The Weierstrass Factorization Theorem*, §8.2 in *Handbook of Complex Variables*. Boston, MA: Birkhäuser, pp. 109-110, 1999.
- [10] PLOUFFE, S., "*Identities Inspired from Ramanujan Notebooks (Part 2)*", Apr. 2006.
- [11] RIVOAL, T., "*La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*", arXiv:math/0008051, 7 Aug., 2000.
- [12] PÉREZ SANZ, A., "*El Problema de Basilea. El año de Euler: 1707-2007*", *Revista SUMA*, núm. 55, pp.95–102, Madrid, junio, 2007.
- [13] MAZ'YA, V. and SHAPOSHNIKOVA, T. *Jacques Hadamard, A Universal Mathematician*, History of Mathematics, num. 14, American and London Mathematical Society, pp. 315–316, Ed. Board, Providence, 1998.
- [14] SÁNCHEZ MUÑOZ, J. M., "*Riemann y los Números Primos*", *Historias de Matemáticas, Revista Pensamiento Matemático*, Universidad Politécnica de Madrid, núm. 1, octubre, 2011.
- [15] ZUDILIN, W., "*One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational*", *Russian Mathematical Surveys*, 56 (4): pp. 774–776, 2001.

Sobre el autor:

Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz

Correo electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es

Institución: Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Profesor de Enseñanza Secundaria. Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático", Universidad Politécnica de Madrid, España.

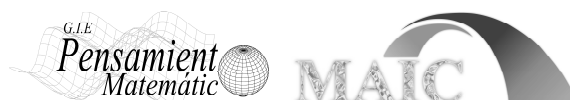
Cuentos Matemáticos

El Observatorio Astronómico

Astronomical Observatory

Alejandro López, Sergio Rodríguez y Ramón Sost

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 057–062, ISSN 2174-0410

Recepción: 7 Sep'14; Aceptación: 21 Ene'14

1 de abril de 2015

Resumen

Este relato es fruto de una experiencia llevada a cabo en la UPM con alumnos de primer curso en la asignatura de Cálculo. Una historia que tiene como protagonista al inspector de policía Barreda que con ayuda de las Matemáticas conseguirá atrapar al asesino.

Palabras Clave: Matemáticas, Literatura, Experiencia en el aula, Innovación.

Abstract

This story is the result of an innovative experience carried out with first year students of Polytechnic University of Madrid (UPM) who were attending the course of Calculus. The story is starring a Police Inspector, Mr. Barreda, who will be able to discover and catch the murderer of an investigated crime with the help of Mathematics.

Keywords: Mathematics, Literature, Innovation.

1. Introducción

Los estudiantes de primer curso del grado de Fundamentos de la Arquitectura de la UPM, del curso 2012/13, participaron en una experiencia, dentro de la asignatura de Cálculo y enmarcada en el proyecto de Innovación Educativa del GIE Didáctica de las Matemáticas: “Experimentación de un nuevo enfoque de la enseñanza de las Matemáticas en la UPM”, que consistió en escribir un relato policíaco.

Partiendo de un homicidio, los alumnos debían elaborar una trama para cuyo desenlace fuera imprescindible resolver ciertos problemas matemáticos relacionados con el contenido de la asignatura. El relato que viene a continuación es una muestra de aquella experiencia.

Ascensión Moratalla. Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S. de Arquitectura. U.P.M.

2. El crimen

El inspector Barreda no tenía ese día cara de buenos amigos. La fiesta de la noche anterior se había alargado demasiado, y las nueve de la mañana le parecía una hora demasiado temprana para pensar con nitidez.

- Buenos días inspector.

- Buenos días agente. ¿Qué tenemos?

- Homicidio de un hombre blanco, 45 años, su nombre Enrique Gala, arquitecto, acababa de llegar a Madrid procedente de la República Democrática del Congo.

- ¿Han hablado con los familiares?

- Sí, hemos localizado a su hermana. Ha sido ella quien nos ha contado lo que conocemos hasta ahora.

- ¿Y bien? ¿Qué más sabemos?

- Al parecer se había presentado a un concurso de Arquitectura. Por eso estaba en Madrid.

- ¿El forense?

- Está allí, junto al cadáver.

El inspector se dirigió hacia el forense, que examinaba con atención el cuerpo de la víctima.

- Buenos días inspector.

- Buenos días. Qué, ¿alguna pista sobra la causa de la muerte?

- A primera vista, salvo estos puntos rojos en el cuello, parece que fue por un fuerte golpe en la cabeza. Hasta que no hagamos la autopsia no sabremos más.

- Muy bien, manténgame informado.

Mientras Barreda inspeccionaba la escena del crimen se le acercó la teniente Castro.

- No tiene buena cara inspector. ¿Ha pasado mala noche?

- No, en absoluto. En realidad ha sido una noche inolvidable. Estuve en una fiesta y me acosté tarde.

- ¿Está al corriente del caso?

- Sí. ¿Se ha encontrado el arma homicida?

- No. Aún no.

Lo rojo es igual que en el otro cuento, habría que cambiarlo ó elegir sólo uno.

3. El concurso

Eran las once de la mañana y las calles de Madrid estaban a rebosar de gente. El inspector Barreda recorría apresuradamente la Gran Vía con el temor de llegar tarde a la cita que tenía concertada. Pero no fue así. La imponente fachada blanca del hotel Atlántico apareció de inmediato.

Una vez dentro se dirigió a la sala de reuniones donde un hombre cano y de mirada avispada e inteligente le esperaba.

- ¡Inspector! –exclamó con alegría a la par que le extendía enérgicamente la mano.

Barreda le correspondió con un apretón de manos.

- Señor Galiano, cuanto gusto. Si le parece nos sentamos para que pueda interrogarle más cómodamente.

- Como guste.

Después de un carraspeo y de encender la grabadora, Barreda empezó a lanzar su gruesa batería de preguntas.

- Si no me equivoco usted es íntimo amigo del señor Gala, ¿no es así?

- Así es inspector.

- Cuando fue la última vez que le vio con vida.

- Será cosa de dos días. Me había invitado a su casa. Quería enseñarme el proyecto que iba a presentar aquí mismo, en esta sala. Yo también soy arquitecto, dirijo una revista de arquitectura e iba a estar en el acto cubriendo la noticia.

- ¿Entonces usted no participaba?

- No, que va. Nuestra cita de hace dos días, más que una cita de amigos, fue una cita de trabajo.

- Explíqueme eso.

El señor Galiano parecía algo incómodo. Aquella pregunta encerraba algo que le avergonzaba.

- Verá, espero que esto no salga de aquí.

- No se preocupe. Tiene mi palabra.

- Aquella tarde mi amigo me pidió que le ayudara a ganar el concurso. Tras la ponencia de ayer, el jurado se retiró a deliberar y quería que ensalzara su proyecto en mi revista.

- Entiendo... ¿Tenía enemigos el señor Gala?

- Todo el mundo tiene enemigos. Y más en esta profesión.

La pausa del señor Barreda invitaba a su interlocutor a continuar.

- Ya sabe, envidias, competitividad...

- Ya, pero ¿alguno de esos enemigos se presentaba al concurso o estaba de jurado?

- ¿Qué insinúa?

- Conteste por favor.

- Pues, no sé, la verdad... Siempre ha sido receloso de hablar de esos temas. No sabría decirle.

- Bueno... Hábleme ahora del concurso de ayer. ¿Cómo fue el acto? ¿Cómo vio a Gala?

- El acto de lo más normal. Pero sí es verdad que vi a Enrique más alterado de lo habitual. Sudaba como un cerdo. Nunca le había visto así.

- ¿Qué pasó después?

- Se fue apresuradamente. Sin decir nada a nadie. Supongo que a su casa. No volví a saber de él. Barreda paró la grabadora y se levantó de su asiento.

- Gracias por su tiempo. Encontraremos al asesino.

- ¿Asesino?

- Sí, eso creemos. Hasta la vista.

El viaje a casa fue de lo más confuso. La conversación que había tenido con Galiano se repetía en su cabeza una y otra vez. Cada vez tenía más claro que era fundamental para el caso saber cuánto tiempo llevaba muerta la víctima. Estaba de enhorabuena porque cuando llegó a su casa encontró en su buzón el informe del forense. “Nada más llegar tomé la temperatura del cuerpo y estaba a 24°C. Una hora después su temperatura cae hasta los 12°C. Teniendo en cuenta que la temperatura de la habitación es de 23,6°C y que la temperatura lógica inicial del cuerpo en el momento de la muerte es de 36°C, puedo concluir que llevaba dieciséis horas muerto.”

¡Dieciséis horas! A ver, el concurso era por la mañana y muere a las cinco de la tarde porque los datos se toman a las nueve... ¿Qué raro? Se me hace urgente ir de nuevo a la casa de Gala.

4. Dientes de marfil

- ¡Teniente Castro!, ¿qué hace en el lugar del crimen? –preguntó Barreda con tono de burla.

- No se preocupe inspector, no voy a tocar nada. He venido por órdenes del forense.

- ¿Forense? Pero si acabo de ver su informe.

- Debe tratarse de un error. Si me disculpa.

Se fue apresuradamente. Barreda se quedó un tiempo cavilando.

- ¿Qué extraño? –se dijo.

Sacudió la cabeza y se puso a otra cosa. Entró en el despacho de Gala y se detuvo en su escritorio. Estaba muy desordenado. Los papeles se arremolinaban en sus esquinas. Entre tanto barullo consiguió rescatar una carpeta. En su portada rezaba “Nuevo observatorio astronómico de Tenerife”.

- Así que este era el proyecto del concurso –se dijo triunfante.

Abrió la carpeta y empezó a buscar. Planos, planos y más planos. Nada que comprendiese. La cerró desanimado y empezó a buscar por otro sitio. Cerca de aquella mesa había otra con fotos. En una de ellas pudo reconocer a Galiano, que posaba sonriente junto con su amigo, y en otra...

- No es posible –masculló.

Era Dani. Dani García. Había estado con él en la fiesta de anoche. Pero... ¿de qué conocía a Gala? Rebuscó de nuevo por el escritorio hasta que dio con una nota sospechosa. “El proyecto dientes de marfil ha fracasado, tu proyecto es inestable para contener el uranio necesario. Retírate del concurso o caeremos los dos” Fdo.: Dani García.

- Dios mío. Cómo he sido tan estúpido –de repente una luz se encendió en su interior-. ¡Castro!

Recogió sus cosas y salió corriendo de allí. Puso en marcha el coche con gran velocidad. Sólo esperaba no llegar demasiado tarde. Cuando llegó a su destino bajo del coche, forzó la puerta del edificio y subió hasta el tercer piso.

- Dani, sé que estás ahí, ábreme –gritó el inspector, fuera de sí.

Al no obtener respuesta tiró la puerta abajo y se encontró con una escena que no habría esperado ni en un millón de años. La teniente Castro se encontraba de rodillas, blandiendo un gran cuchillo ensangrentado, y su marido, Dani García yacía muerto en el suelo, con un profundo corte en el pecho.

- Pero qué...

- Yo no quería... -gimió Castro-. No pretendía... Me atacó y yo...

- Tranquila, ven aquí. Creo que el caso está cerrado.

5. Vuelta a empezar

Pasaban veinte minutos de las doce. El inspector Barreda empezaba a impacientarse.

- Disculpe mi retraso. Había problemas de tráfico.

- No se preocupe señor comisario.

- ¿Ha traído su informe para que se lo entregue al juez?

- Sí señor, aquí está.

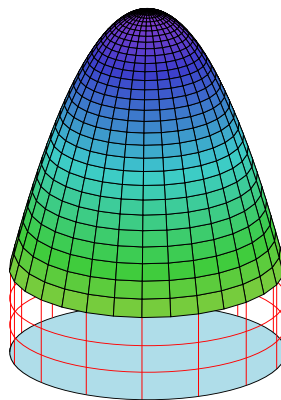
- Puede hacerme un breve resumen.

- Cómo no. El señor Gala tenía vínculos con terroristas según hemos podido averiguar tras un tercer registro de su casa. El proyecto con el que se iba a presentar era en realidad una tapadera. No era un observatorio astronómico, sino un gran almacén nuclear que llamaba dientes de marfil. Para poder asegurarse el éxito se alió con un ingeniero químico, el profesor Daniel García, y convenció a su amigo Galiano para que le ayudara a ganar el concurso. Pero algo salió mal a las puertas del gran día del concurso. Daniel se dio cuenta de que el proyecto que iba a presentar Gala estaba mal diseñado y que si ganaba podía exponer a medio planeta a una terrible hecatombe nuclear. Gala no iba a dar su brazo a torcer, por lo que Daniel intentó borrarlo del mapa. Le inoculó una droga en el cuello, pero no dio los resultados que quería. Tardó en matarlo más tiempo del que hubiera deseado, por lo que no evitó que se presentara al concurso. Murió horas después en su casa. Dani entonces quiso borrar todas las huellas de su colaboración con Gala y utilizó a su esposa, que era policía, pero la descubrió y su marido debió recriminárselo porque se enzarzó en una disputa con ella que acabó mal. Como yo le conocía, intentó dar muestras de normalidad acudiendo a una fiesta en la que yo estaba presente. Ya ve, no le sirvió de mucho.

- Vaya, estoy impresionado por su trabajo. Deme esos informes y ya hablaremos. Tengo una reunión importante.

- Gracias, señor.

Tan pronto se fue recibió un mensaje en el móvil. Era su compañero. Le mandaba los datos, corroborados por un científico experto, del volumen del depósito necesario para que el uranio se mantuviera estable y del proyecto de Gala.



$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (29 - r^2) \cdot r \, dr \, d\alpha$$

- Así que el volumen necesario es $825\pi \text{ m}^3$ y el de su proyecto 534 m^3 . Mmmm... creo que se abre un nuevo caso.

FIN

Sobre los autores:

Nombre: Alejandro López
Correo Electrónico: alejandrolopezortiz18@gmail.com
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Sergio Rodríguez
Correo Electrónico: srodriguezhernandez@hotmail.com
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Ramón Sost
Correo Electrónico: romansost@msn.com
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Ascensión Moratalla
Correo Electrónico: ascension.moratalla.delahoz@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático". Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Juana María Sánchez
Correo Electrónico: juanamaria.sanchez@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático". Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: M^a Agripina Sanz
Correo Electrónico: mariaagripina.sanz@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático". Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: M^a Carmen Ferreiro
Correo Electrónico: mariacarmen.ferreiro@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático". Universidad Politécnica de Madrid, España.

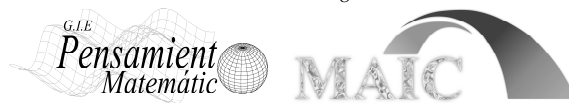
Investigación

Sucesos raros en Ingeniería de Tráfico

Rare events in Traffic Engineering

Francisco Soler Flores, J. Angel Olivas Varela y María Dolores López González

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 063-074, ISSN 2174-0410
Recepción: 31 Mar'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

La Ingeniería de Tráfico, como rama de la ingeniería del transporte y de la ingeniería civil trata la planificación, diseño y operación de tráfico en las calles, carreteras y autopistas, sus redes, infraestructuras, tierras colindantes y su relación con los diferentes medios de transporte para conseguir una movilidad segura, eficiente y conveniente tanto de personas como de mercancías.

La ingeniería de tráfico estudia los accidentes de tráfico, éstos por ser sucesos de muy baja probabilidad, pueden ser considerados sucesos raros. Así, este trabajo recoge un resumen de resultados de la aplicación del modelo Naive-Poisson a la Ingeniería de Tráfico enfocado a, mediante la estimación de accidentes de tráfico, propuestas de mejora en el diseño de algunas carreteras españolas.

Palabras Clave: Naive-Poisson, Redes Bayesianas, Ingeniería de Tráfico, accidentes de tráfico.

Abstract

Traffic Engineering is a part of transportation engineering and civil engineering and it is the planning, design and operation of traffic on the streets, roads and highways, their networks, infrastructure, adjoining land and its relationship with the different modes of transport to get thi safe, efficient and convenient for people and goods.

Traffic engineering studies the traffic accidents, these are very low probability events and can be considered rare events. Thus, this paper presents a summary of results from the application of Naive-Poisson model to the Traffic Engineering focused, by estimating traffic accidents, suggestions for improvements in the design of some Spanish roads.

Keywords: Naive-Poisson, Bayesian Networks, Traffic Engineering, road accidents.

1. Introducción

Un evento E_t ([1]) es una observación que ocurre en un instante t y es descrita por un conjunto de valores. De la misma forma, una secuencia de eventos es una secuencia de eventos ordenada temporalmente, $S = \{E_{t_1}, E_{t_2}, \dots, E_{t_n}\}$ que incluye todos los eventos de intervalo de

tiempo $t_1 \leq t \leq t_n$. Los eventos están asociados a un dominio objeto D , el cual es la fuente o generador de los eventos. El *Evento objetivo* es el evento a predecir y especificado por un conjunto de variables.

En este siglo, la teoría y aplicaciones de sucesos extremos y eventos raros han recibido un enorme aumento de interés. Esto es debido a su relevancia práctica en diferentes campos, como los seguros, las finanzas, la ingeniería, las ciencias del medio ambiente o la hidrología.

El tratamiento de sucesos raros, sucesos que ocurren con una probabilidad baja, es un problema complejo y amplio cuyo tratamiento se enmarca en el ámbito de la modelización de la incertidumbre, teoría de la decisión y donde el estudio del riesgo, definido en términos de teoría de decisiones como las pérdidas promedio o las pérdidas que se pronostican cuando algo malo sucede, es importante. La 'Ley de Eventos Raros', demostrada por Poisson, fundamenta matemáticamente el concepto de suceso raro. Esta ley que lleva su nombre es denominada también 'ley de los sucesos raros' [2] o también denominada 'ley de los pequeños números' [3].

En las últimas décadas se han desarrollado numerosas técnicas de análisis y modelización de datos en distintas áreas de la estadística ([4],[5]) y la Inteligencia Artificial ([6]) que se han aplicado al estudio de sucesos raros. La Minería de Datos (MD) ([7]) es un área moderna interdisciplinar que engloba a aquellas técnicas que operan de forma automática (requieren de la mínima intervención humana) y, además, son eficientes para trabajar con las grandes cantidades de información disponibles en las bases de datos de numerosos problemas prácticos. Estas técnicas permiten extraer conocimiento útil (asociaciones entre variables, reglas, patrones, etc.) a partir de la información cruda almacenada, permitiendo así un mejor análisis y comprensión del problema. En algunos casos, este conocimiento puede ser también post-procesado de forma automática permitiendo obtener conclusiones, e incluso tomar decisiones de forma casi automática, en situaciones prácticas concretas (sistemas inteligentes). La aplicación práctica de estas disciplinas se extiende a numerosos ámbitos comerciales y de investigación en problemas de predicción, clasificación o diagnóstico.

Los autores, desarrollan en [8] y [9] el modelo y una propuesta de aplicación a la predicción de accidentes de tráfico en base a los trabajos realizados para el desarrollo de la tesis doctoral "Estimación de sucesos poco probables mediante Redes Bayesianas".

2. Redes Bayesianas

Entre las diferentes técnicas disponibles en minería de datos, las redes probabilísticas o redes bayesianas permiten modelizar de forma conjunta toda la información relevante para un problema dado y utilizando posteriormente mecanismos de inferencia probabilística para obtener conclusiones en base a la evidencia disponible. Las redes bayesianas han sido utilizados en el contexto de la estimación de sucesos raros en algunos trabajos ([10] y [11]) sin llegar a señalar un método de estimación general.

Las redes bayesianas ([12], [13]) son una representación compacta de una distribución de probabilidad multivariante. Formalmente, una red bayesiana es un grafo dirigido acíclico donde cada nodo representa una variable aleatoria y las dependencias entre las variables quedan codificadas en la propia estructura del grafo (figura 1) según el criterio de d-separación ([14]). Asociada a cada nodo de la red hay una distribución de probabilidad condicionada a los padres de ese nodo, de manera que la distribución conjunta factorizada como el producto de las distribuciones condicionadas asociadas a los nodos de la red. Es decir, para una red con n variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ (ecuación 1).

$$\prod_{i=1}^n p(x_i | pa(x_i)) \quad (1)$$

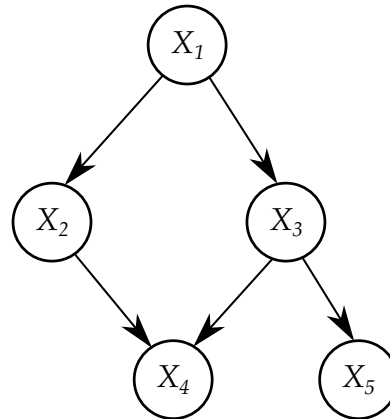


Figura 1. Ejemplo de Red Bayesiana

Normalmente las redes bayesianas consideran variables discretas o nominales, por lo que si no lo son, hay que discretizarlas antes de construir el modelo. Aunque existen modelos de redes bayesianas con variables continuas, éstos están limitados a variables gaussianas y relaciones lineales. Los métodos de discretización se dividen en dos tipos principales: no supervisados y supervisados ([15]).

El concepto de causalidad ([16]) en una red bayesiana se traduce en un caso particular de estas denominado red causal ([17]). Las redes bayesianas pueden tener una interpretación causal y aunque se utilizan a menudo para representar relaciones causales, el modelo no tiene por que representarlas de esta forma, Naive-Bayes es un ejemplo de esto, sus relaciones no son causales.

Las redes probabilísticas automatizan el proceso de modelización probabilística ([18]) utilizando la expresividad de los grafos. Los modelos resultantes combinan resultados de la teoría de grafos (para representar las relaciones de dependencia e independencia del conjunto de variables) y de la probabilidad (para cuantificar estas relaciones). Esta unión permite realizar de forma eficiente tanto el aprendizaje automático del modelo, a través del cálculo de parámetros ([19]) que para el caso de variables binarias se modela con una distribución Beta y para variables multivaluadas mediante su extensión, que es la distribución Dirichlet (tabla 1), como la inferencia a partir de la evidencia disponible. La base de conocimiento de estos sistemas es una estimación de la función de probabilidad conjunta de todas las variables del modelo, mientras que el módulo de razonamiento es donde se hace el cálculo de probabilidades condicionadas. El estudio de esta técnica proporciona una buena perspectiva global del problema del aprendizaje estadístico y la minería de datos.

Tabla 1. Estimación paramétrica

Estimador	Expresión
Máxima verosimilitud. Multinomial	$\theta_k^* = \frac{N_k}{N}$
Estimación bayesiana. Dirichlet	$\theta_k^* = \frac{N_k + a_k}{N + \sum_{i=1}^r a_i}$

2.1. Naive Bayes

Una de las formas más sencillas que se pueden idear al considerar la estructura de una red Bayesiana con objetivos clasificatorios, es el denominado *Naive-Bayes* o *Bayes ingenuo* ([20]). Su denominación proviene de la hipótesis ingenua sobre la que se construye, que consiste en

considerar que todas las variables predictoras son condicionalmente independientes dada la variable a clasificar (figura 2)

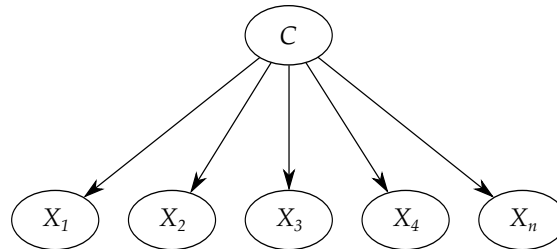


Figura 2. Naive Bayes

El modelo Naive Bayes es muy utilizado debido a que presentan, entre otras, ciertas ventajas ([7]):

- Generalmente, es sencillo de construir y de entender.
- El proceso de inducción es rápido
- Es muy robusto considerando atributos irrelevantes.
- Toma evidencia de muchos atributos para realizar la predicción final.

En el sentido de que su capacidad predictiva es competitiva con el resto de clasificadores existentes, el llamado *Naive-Bayes*, descrito, por ejemplo, por [20] y por [21] es uno de los más efectivos clasificadores. Este clasificador aprende de un conjunto de entrenamiento la probabilidad condicional de cada atributo X_i dada la clase C . La clasificación se hace entonces aplicando la regla de Bayes para calcular la probabilidad de C dadas las instancias de $X_1, X_2, \dots, X_n$ tomando como clase predicha la de mayor probabilidad a posteriori. Estos cálculos se basan en una fuerte suposición de independencia: todos los atributos X_i son condicionalmente independientes dado el valor de la clase C .

La probabilidad de que el j -ésimo ejemplo pertenezca a la clase i -ésima de la variable C , puede aplicarse sin más que aplicar el teorema de Bayes, de la siguiente manera (ecuación 2)

$$P(C = \theta_i | X_1 = x_{1j}, \dots, X_n = x_{nj}) \propto P(C = \theta_i) \cdot P(X_1 = x_{1j}, \dots, X_n = x_{nj} | C = \theta_i) \quad (2)$$

Dado que suponemos que las variables predictoras son condicionalmente independientes dada la variable C , se obtiene que (ecuación 3)

$$P(C = \theta_i | X_1 = x_{1j}, \dots, X_n = x_{nj}) \propto P(C = \theta_i) \cdot \prod_{r=1}^n P(X_r = x_{rj} | C = \theta_i) \quad (3)$$

El modelo Naive-Bayes combinado con la distribución de Poisson es utilizado para la clasificación de texto en el trabajo de [22] con buenos resultados. En este trabajo se propone el añadido de la minería de datos utilizando redes bayesianas y aplicando la distribución de probabilidad conocida para el estudio de sucesos raros. De esta forma y conocidos los valores de las variables que se utilizan como predictoras se pueden estudiar las diferentes situaciones posibles y observar cuándo es más probable la ocurrencia de un suceso raro.

3. Naive-Poisson para tratamiento de sucesos raros

Las fases en las que se divide el modelo son las siguientes:

- Preprocesamiento de los datos
 1. Selección de variables y obtención de sus valores.
 2. Discretización de las variables
- Construcción de la red bayesiana, estructura Naive-Bayes
- Aplicación modelo Naive-Poisson

3.1. Preprocesamiento de los datos

Normalmente las redes bayesianas consideran variables discretas o nominales, por lo que si no lo son, hay que discretizarlas antes de construir el modelo. Aunque existen modelos de redes bayesianas con variables continuas, éstos están limitados a variables gaussianas y relaciones lineales. Los métodos de discretización se dividen en dos tipos principales: no supervisados y supervisados ([15]).

En este apartado de preparación de los datos, éstos son formateados de forma que las herramientas informáticas que se utilicen puedan manipularlos. A su vez, este apartado consiste también en la selección de variables y discretización de los datos en el caso de variables continuas. En este paso se identifica también la variable de la cual se quieren estimar los sucesos raros.

3.2. Construcción de la red bayesiana

A partir de la fase anterior, la construcción de la red consta de los siguientes puntos:

- Identificación de la Estructura: identificar las relaciones causales; analizar las variables en cuanto a dependencias e independencias
- Cálculo de Parámetros (probabilidades): cuantificar relaciones e interacciones

En este caso se propone un modelo concreto, el Naive-Bayes, adecuado para el proceso de clasificación y para el que la variable de la cual se quieren estimar los sucesos raros será la variable denominada padre de la red([14]).

Se va a optar para el desarrollo de la metodología por el modelo Naive Bayes. El modelo Naive Bayes es muy utilizado debido a que presentan, entre otras, ciertas ventajas:

- Generalmente, es sencillo de construir y de entender.
- Las inducciones de son extremadamente rápidas, requiriendo sólo un paso para hacerlo.
- Es muy robusto considerando atributos irrelevantes.
- Toma evidencia de muchos atributos para realizar la predicción final.

Una vez determinada la estructura de la red se calculan las tablas de probabilidades que permiten realizar la descomposición de la distribución de probabilidad y posteriormente realizar inferencia basándose en las evidencias obtenidas y la distribución de probabilidad asociada a la red.

Esta información que proporciona la red construida se completa aplicando el modelo Naive-Poisson descrito a continuación.

3.3. Modelo Naive-Poisson

El modelo o procedimiento por el que, a partir de la red bayesiana construida mediante el modelo Naive-Bayes, obtenemos la distribución de probabilidad asociada que permite estimar la probabilidad de ocurrencia de un suceso raro es denominado Naive-Poisson ([8]).

El procedimiento de asignación de la distribución de probabilidad consta de los siguientes apartados:

- Suposición Poisson
- Construcción de la distribución de probabilidad

Es admitido en la comunidad científica que la distribución de la frecuencia de sucesos raros se ajusta a una distribución de Poisson ([2]). Así, se supondrá para el modelo a construir, la frecuencia de de sucesos raros sigue una distribución de Poisson. Una vez obtenidos los valores de la distribución real se ajustarán los datos por este tipo de distribución ([8],[9]). La distribución de probabilidad que proporciona la red bayesiana construida permite estimar los diferentes valores de probabilidad para cada uno de los valores de las variables que proporciona la discretización. A partir de los resultados obtenidos, la red se ajusta con una distribución de Poisson, que como es sabido viene determinada por su media (ecuación 4).

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (4)$$

Para el cálculo del parámetro que determina la distribución e Poisson, la media, tomaremos su estimador máximo verosímil que viene dado por la ecuación 5, donde x_i son los valores discretos de la accidentalidad y $p(x_i)$ los valores de probabilidad que proporciona la red construida mediante el algoritmo Naive-Bayes, siendo la variable discreta a clasificar C , la variable de la que queremos estudiar los valores que consideramos sucesos raros y el resto, las variables utilizadas para tal fin el resto de las variables.

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) \quad (5)$$

Para cada uno de los valores de los estratos $a_1, a_2, \dots, a_n$ que proporciona la discretización de la variable a estudiar los sucesos raros, se tomarán los valores reales de la frecuencia del suceso raro a estimar excepto para el a_n para el que se asigna un valor dado por la media de los valores x_i superiores al mayor estrato a_{n-1} (ecuación 6).

$$a_n = \bar{x}_i \text{ con } x_i > a_{n-1} \quad (6)$$

De esta forma descrita obtenemos las distribución de poisson asociada a cualquiera de las situaciones ($j = 1 \dots, m$) que estudiemos (ecuación 7) con cualquier conjunto de valores de las diferentes variables seleccionadas, con lo cual es posible determinar en que situación es más alta la probabilidad de ocurrencia de los sucesos de baja probabilidad una vez detectado cuales son los valores de la variable estudiada que dada su distribución, los sucesos raros son de probabilidad más baja.

$$P_j(X = x) = e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^x}{x!} \quad (7)$$

4. Resultados

A partir de datos públicos de carreteras españolas, para un periodo de cinco años, con una selección de tramos de 500m y de la selección de variables dada en la tabla 2 en la que se describen las mismas, a continuación se discretizan dichas variables atendiendo a los estratos dados en la tabla 3 y aplicando el modelo Naive-Poisson se obtienen las distribuciones de probabilidad de la frecuencia de accidentes para cada tramo y cada variable.

Los sucesos raros a observar lo representa el caso de más de 10 accidentes en un tramo en el periodo de tiempo de estudio, dado que los accidentes de tráfico en ingeniería de tráfico suponen un suceso raro o infrecuente, es decir un suceso que ocurre con una probabilidad muy pequeña.

Tabla 2. Descripción de variables

Variable	Descripción
IMD	Intensidad media diaria (veh/día)
ACC	Número total de accidentes con víctimas
DACIN	Densidad de accesos e intersecciones (accesos/km)
IVISI	Índice de visibilidad
RMIN	radio mínimo de curvatura en el tramo
LIMV	Valor mínimo del límite de velocidad señalado (km/h)
INCM	Valor máximo de la inclinación en el tramo de (%)
r4ve	Disminución de velocidad específica respecto de los tramos de 1 km contiguos (km/h)

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \begin{cases} 1 & \text{si} & x \leq a_0 \\ 2 & \text{si} & a_0 < x \leq a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ n & \text{si} & a_{n-1} < x \leq a_n \\ n+1 & \text{si} & x > a_n \end{cases}$$

Tabla 3. Discretización de las variables

Variable	Discretización
IMD	[2000,3000,4000,5000,6000,7000,8000,9000,10000,15000,20000,25000]
ACC	[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
DACIN	[0]
IVISI	Variable discreta
RMIN	[150,300,600,99998]
LIMV	[40,60,80,100]
INCM	[2,3,4,5,6,7]
r4ve	[0,10,20,30,40]

Para un tramo-ejemplo seleccionado, se describe la situación para cada una de las variables. En este tramo ejemplo seleccionado se observa, en cada una de las figuras, la distribución de accidentes de tráfico para cada uno de los estratos de cada variable y en color negro el de la situación actual de estudio.

4.1. Análisis IMD

Se observa (figura 3) que la distribución de accidentes para el caso 13 hace más probable el caso de más de 10 accidentes pero las diferencias entre los otros casos no son significativas, es decir sólo IMD en el estrato 13 presenta una probabilidad alta con respecto a las demás de tener sucesos raros.

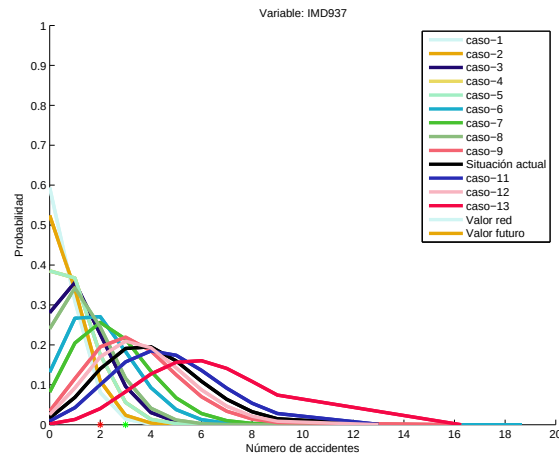


Figura 3. IMD

4.2. Análisis DACIN

En este caso (figura 4) se observa que modificando la *densidad de accesos* en el tramo al estrato 1 habría menos probabilidad de ocurrencia de sucesos raros.

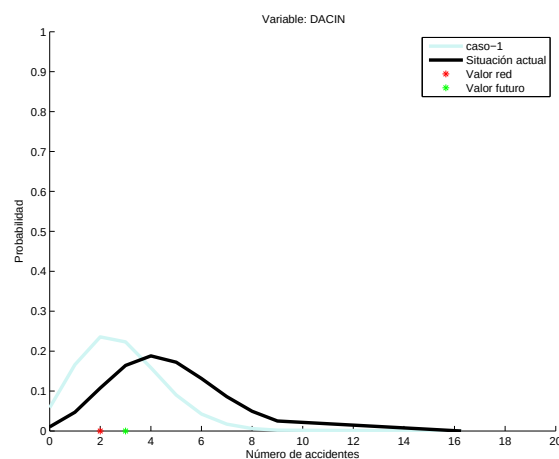


Figura 4. DACIN

4.3. Análisis IVISI

La variable IVISI en el estrato en el que se encuentra (figura 5) para el tramo ejemplo podría ser modificada para mejorar la situación ante eventos raros.

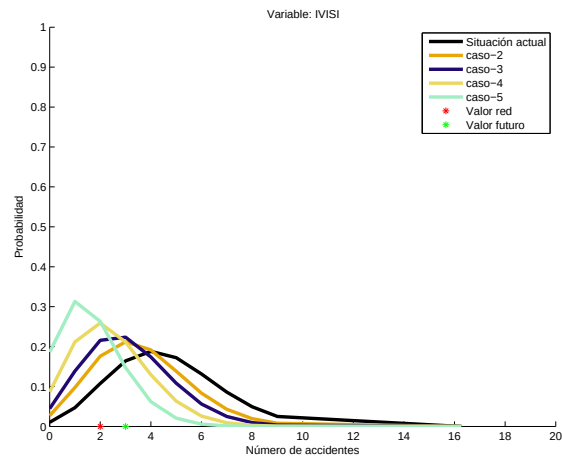


Figura 5. IVISI

4.4. Análisis RMIN

En este tramo concreto la variable RMIN (figura 6) no proporciona diferencias significativas en sus diferentes estratos.

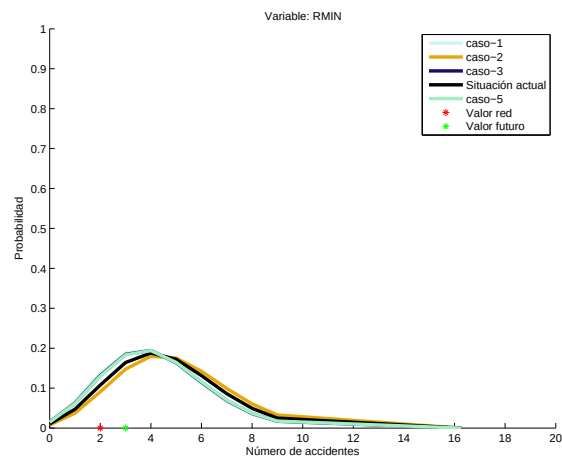


Figura 6. RMIN

4.5. Análisis INCM

El estrato 6 proporciona para la variable INCM (figura 7) una probabilidad menor para la ocurrencia de sucesos raros.

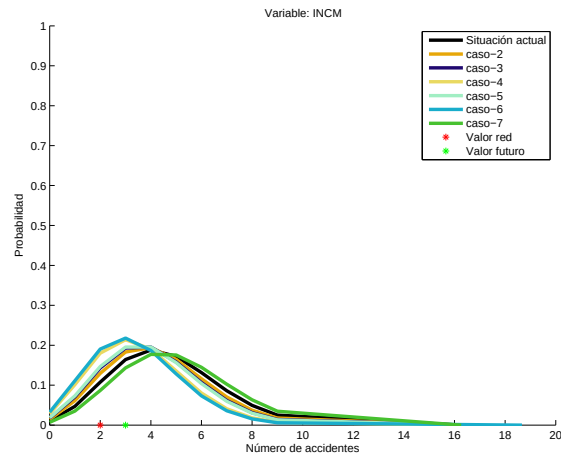


Figura 7. INCM

4.6. Análisis R4VE

Para este caso concreto, la variable R4VE en su estrato número 4 proporciona una distribución de probabilidad en la que los sucesos raros son menos probables.

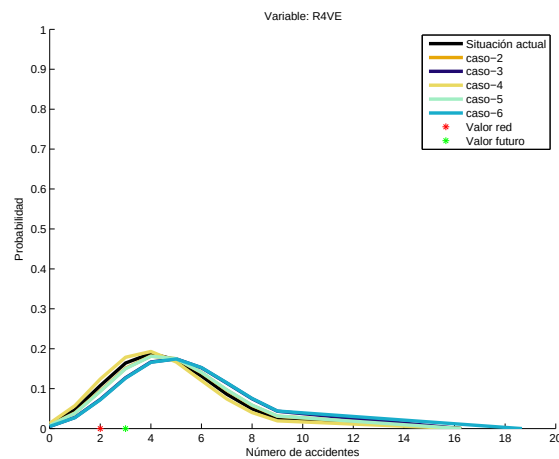


Figura 8. R4VE

5. Conclusiones

Los accidentes de tráfico se han convertido en uno de los problemas de salud pública mas graves. Factores de naturaleza física, técnica, metereológica, deficiencia de la calidad de la red

viaria, aspectos de comportamiento, cognitivos y de formación cívica/vial se ha visto que representan algunas de las posibles causas de accidentes que se registran en la actualidad. Ante esta situación los países han ido diseñando estrategias de tipo preventivo y de investigación donde se intenta detectar qué tipo de variables pueden incidir en el grado de accidentalidad. De esta manera se intenta disminuir el gran coste material que se deriva de este hecho. El modelo Naive-Poisson permite el estudio y análisis de las diferentes alternativas para la disminución de la probabilidad de la frecuencia de accidentes.

Referencias

- [1] Gary M. Weiss and Haym Hirsh. Learning to predict rare events in event sequences. In *KDD*, pages 359–363, 1998.
- [2] Simon Denis Poisson. *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*. Bachelier, 1837.
- [3] Ladislaus Bortkiewicz. Das gesetz der kleinen zahlen (the law of small numbers.). *Leipzig, Germany: Teubner*, 1898.
- [4] Micahael Tomz, Gary King, and Langche Zeng. Relogit: Rare events logistic regression. *Journal of statistical software*, 8(i02), 2003.
- [5] F. Soler-Flores, J. M. Pardillo Mayora, and R. Jurado Piña. Tratamiento de outliers en los modelos de predicción de accidentes de tráfico. *VIII Congreso de Ingeniería del Transporte*, 02/07/2008-04/07/2008, La Coruña, España., 2008.
- [6] Chris Seiffert, Taghi M. Khoshgoftaar, Jason Van Hulse, and Amri Napolitano. Mining data with rare events: a case study. In *Tools with Artificial Intelligence, 2007. ICTAI 2007. 19th IEEE International Conference on*, volume 2, pages 132–139. IEEE, 2007.
- [7] D. E. Holmes, J. Tweedale, and L. C. Jain. Data mining techniques in clustering, association and classification. *Data Mining: Foundations and Intelligent Paradigms*, pages 1–6, 2012.
- [8] F. Soler-Flores. Naive-poisson, a mathematical model for road accidents frequency estimation. *Conference of Informatics and Management Sciences*, pages 384–391, 2013.
- [9] F. Soler-Flores. Expert system for road accidents frequency estimation based in naive-poisson. *Global Virtual Conference*, page 646, 2013.
- [10] Seong-Pyo Cheon, Sungshin Kim, So-Young Lee, and Chong-Bum Lee. Bayesian networks based rare event prediction with sensor data. *Knowledge-Based Systems*, 22(5):336–343, 2009.
- [11] A. Ebrahimi and T. Daemi. Considering the rare events in construction of the bayesian network associated with power systems. In *Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS), 2010 IEEE 11th International Conference on*, pages 659–663. IEEE, 2010.
- [12] J. H. Kim and J. Pearl. A computational model for causal and diagnostic reasoning in inference systems. In *Proceedings of the 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 190–193. Citeseer, 1983.
- [13] J. Pearl. *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*. Morgan Kaufmann, 1988.
- [14] E. Castillo, J. M. Gutierrez, and A. S. Hadi. *Expert systems and probabilistic network models*. Springer Verlag, 1997.

- [15] James Dougherty, Ron Kohavi, and Mehran Sahami. Supervised and unsupervised discretization of continuous features. In *ICML*, pages 194–202, 1995.
- [16] Cristina Puente Agueda. Causality in science. *Pensamiento Matemático*, (1):12, 2011.
- [17] Judea Pearl. *Causality: models, reasoning and inference*, volume 29. Cambridge Univ Press, 2000.
- [18] Laura Uusitalo. Advantages and challenges of bayesian networks in environmental modelling. *Ecological Modelling*, 203(3):312–318, 2007.
- [19] Luis Enrique Sucar. Redes bayesianas.
- [20] R. O. Duda, P. E. Hart, and D. G. Stork. Pattern classification. 2000. NY Wiley, 2000. ID: 129.
- [21] P. Langley, W. Iba, and K. Thompson. An analysis of bayesian classifiers. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, pages 223–223. JOHN WILEY and SONS LTD, 1992.
- [22] Sang-Bum Kim, Hee-Cheol Seo, and Hae-Chang Rim. Poisson naive bayes for text classification with feature weighting. In *Proceedings of the sixth international workshop on Information retrieval with Asian languages-Volume 11*, pages 33–40. Association for Computational Linguistics, 2003.

Sobre los autores:

Nombre: Francisco Soler Flores

Correo Electrónico: f.soler@upm.es

Institución: Departamento de Ingeniería Civil: Ordenación del Territorio, Urbanismo y Medio Ambiente. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: José Ángel Olivas Varela

Correo Electrónico: joseangel.olivas@uclm.es

Institución: Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información. Universidad de Castilla La Mancha, España.

Nombre: María Dolores López González

Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es

Institución: Departamento de Matemáticas e Informática Aplicada. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación

¿Qué fue de la historia de amor de Adán y Eva?

Whatever happened to Adam and Eve's relationship?

José-Manuel Rey Simó

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 075–082, ISSN 2174-0410

Recepción: 25 Mar'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

La historia de Adán y Eva ha servido durante milenios en la cultura occidental como el modelo canónico de unión amorosa a largo plazo. Su influencia en el diseño y las expectativas de los individuos sobre el amor duradero es enorme. Inadvertidamente o no, las parejas han intentado reproducir en sus relaciones las líneas maestras del patrón de los primeros padres de la Biblia. Sin embargo, las actuales estadísticas sobre rupturas de pareja apuntan a un fracaso masivo de ese modelo. Un porcentaje alarmante de parejas se rompen sin que se comprendan bien las causas, lo que plantea un problema sustancial en la sociedad y en las ciencias sociales. Un reciente modelo matemático ha obtenido un mecanismo que explica la dificultad para mantener una relación amorosa proyectada a largo plazo. En esta contribución se exploran algunas ideas del modelo matemático y sus implicaciones. Eso permite conjeturar cuál es el desenlace probable en el modelo de amor de Adán y Eva.

Palabras Clave: Amor, Matrimonio, Ruptura, Sistemas dinámicos, Control óptimo.

Abstract

The story of Adam and Eve has served for millennia as the canonical model of a long-term love relationship in the Western culture. Its influence on the design and expectations of individuals about lasting love has been tremendous. Inadvertently or not, romantic couples have tried to follow the pattern of the early fathers of the Bible. However, current data on couple breakup tells a massive failure of the model, which it is not well understood and it poses a substantial problem for society and also for the social sciences. A recent mathematical model has unveiled a mechanism that may explain the intrinsic difficulty to sustain a relationship projected to endure. In this note some ideas of the mathematical model and its implications are explored, in particular, to predict the final outcome of the couple in the model of love of Adam and Eve.

Keywords: Love, Marriage, Divorce, Dynamical systems, Optimal control.

1. Introducción

Algunos detalles de su historia de amor son bien conocidos. Adán y Eva se conocieron en algún lugar del Paraíso, se enamoraron irremediabilmente -claro-, formaron un matrimonio destinado a durar, vivieron un tiempo en aquel hogar delicioso, pero después tuvieron algunos problemas con el casero y finalmente tuvieron que marcharse. Así resumida, la historia no difiere de la de muchas parejas de hoy día. Según la Biblia Adán vivió más de 900 años. Si pasó tan sólo una pequeña fracción de ese tiempo con Eva, su relación de amor duradero fue un auténtico éxito, si se compara con las de muchas de esas parejas del hoy día. Las desastrosas estadísticas sobre las rupturas de pareja en Occidente -en España, por ejemplo, por cada 3 matrimonios que se forman se rompen 2 [1]- cuentan la historia de un fracaso repetido: el de un proyecto que se diseña para el largo plazo pero que no funciona.

En la historia de Occidente, el modelo de amor que representan Adán y Eva ha sido el prototipo de referencia para las parejas comprometidas a largo plazo. Entender su funcionamiento y, sobre todo, sus expectativas de éxito o las razones de su frustración, es una cuestión fundamental, que tiene implicaciones de trascendencia para el bienestar de los individuos y la sociedad.

La evidencia sociológica actual propone además una sorprendente contradicción. Por una parte, está la epidemia de rupturas, como ponen de manifiesto muchas encuestas y estudios, e.g. [2,3]. Por otro lado, está la evidencia de que la mayoría de las personas consideran una relación sentimental de largo plazo un ingrediente esencial de su felicidad [4] y, aún más, la mayoría considera que su propia relación será estable y no se romperá. [5]. Ambos datos plantean juntos una *paradoja del fracaso*: ¿cómo es posible que la mayoría de las parejas que desean y proyectan una relación duradera y feliz acaben fracasando?

Las estadísticas actuales pueden servir para inferir el probable destino de las parejas que se están formando ahora. Pero para intentar comprender por qué algunas parejas son felices para siempre mientras tantas otras fracasan es necesario un modelo -matemático- que haga abstracción plausible de las características de la relación de Adán y Eva. Un modelo matemático reciente ha formulado el proyecto de largo plazo de una relación sentimental como un problema de control óptimo [6]. En la sección 2 se explican los supuestos del modelo en [6] y se formula cómo es el problema de control de una pareja, que se corresponde con la de Adán y Eva. En la sección 3 se presentan los principales resultados del análisis del modelo, que sugieren cómo es el futuro de ese tipo de parejas y porqué, y a la sazón qué pudo haber sido de la relación de Adán y Eva en la ficción bíblica. El modelo, además, proporciona una explicación de la paradoja del fracaso.

2. El modelo de Adán y Eva

El modelo para el proyecto de una relación sentimental en [6] hace tres simples hipótesis. Se argumentará debajo que se deberían verificar en el caso de la historia de Adán y Eva del Génesis.

La primera hipótesis es la *homogamia*: la propia pareja es la unidad planificadora del modelo. En particular, no se considera ninguna dinámica de interacción dentro de la pareja. Los dos miembros de la pareja comparten, por tanto, el mismo sentimiento o sensación sobre

su relación. Alternativamente, se puede entender que teniendo sentimientos distintos, tienen la misma sensación sobre el estado de la pareja.

La homogamia se puede interpretar como que la pareja está formada por dos miembros idénticos o muy similares, en términos culturales, sociales, económicos, etc. Aunque puede parecer una condición muy restrictiva, resulta ser es aproximadamente válida en el mundo occidental, donde las personas eligen a sus parejas de largo plazo entre otras personas que son semejantes a ellas (ver e.g. [7]). En realidad, el modelo requiere una forma más débil de homogamia: los dos compañeros deben compartir los mismos parámetros y estructura funcional para sus sensaciones de amor y de esfuerzo, tal como se detallan más abajo.

En el caso de Adán y Eva, la homogamia parece casi una tautología. Después de todo, Eva fue creada a partir de la costilla de Adán (Gn 2, 18-22).

La segunda hipótesis es crucial y se refiere al modo en que evoluciona la sensación sobre la relación amorosa en el tiempo, que llamaremos *feeling*. La *segunda ley de la termodinámica de las relaciones sentimentales* afirma que la sensación amorosa -el feeling- decae en el tiempo espontáneamente y que ese deterioro debe contrarrestarse con esfuerzo. Este hecho está admitido en general por psicólogos y terapeutas y fue formulado en forma de ley en [8].

Asumiendo un decaimiento exponencial del feeling, que es la hipótesis más sencilla y natural, la segunda ley se puede escribir como una ecuación diferencial lineal con un término independiente de refuerzo, que corresponde al nivel de esfuerzo inyectado en la relación. En concreto, si el feeling y el esfuerzo en cada instante $t \geq 0$ se representan mediante las variables reales $x(t) \geq 0$ y $c(t) \geq 0$ respectivamente, la segunda ley se escribe:

$$\frac{dx}{dt} = -rx + ac, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde el parámetro $r > 0$ indica la intensidad del deterioro del feeling y $a > 0$ representa la eficiencia de cada unidad del esfuerzo invertido en la relación.

Aunque esa forma exponencial para la segunda ley no se ha comprobado en la práctica, es un patrón plausible con el que operan otras conocidas leyes de desgaste presentes en la naturaleza, desde el enfriamiento de los cuerpos a la descomposición radiactiva. Esta es pues una hipótesis ajena a la propia condición de la pareja y que ésta debe afrontar en cualquier escenario o representación de la realidad.

La tercera y última hipótesis se refiere a la *valoración del bienestar* de la pareja. Se asume que la pareja evalúa -o siente una valoración de- su relación mediante un balance de tipo coste-beneficio.

El feeling se percibe como algo bueno que siempre produce satisfacción, pero lo hace a una tasa decreciente. Así, la satisfacción con el nivel de feeling se describe mediante una función $U(x)$ estrictamente creciente pero cóncava y que se aplanan cuando el feeling es muy grande, es decir $dU/dx > 0$, $d^2U/dx^2 \leq 0$ y $dU/dx \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Las cosas negativas, sin embargo, escalan cuando su nivel aumenta [9]. Como un nivel alto de esfuerzo se considera negativo, el malestar debido al esfuerzo está representado por una función $D(c)$ que debe ser estrictamente creciente y convexa más allá de cierto nivel de esfuerzo $c^* \geq 0$. Sin embargo, niveles de esfuerzo por debajo de c^* , pueden tener un efecto

positivo en términos de bienestar. De ese modo, se contempla el caso de que la pareja disfruta esforzándose por cuidar la relación siempre que el nivel de esfuerzo no sea excesivo. Por tanto, se asume que $d^2D/dc^2 > 0$, $D'(c^*) = 0$, y $D'(c) \rightarrow +\infty$ cuando $c \rightarrow +\infty$.

La hipótesis anterior concierne a la naturaleza humana y por tanto a cualquier representación de la misma, como es el caso de Adán y Eva. En realidad, no pretende que las parejas se comporten como “contables sentimentales”, sino más bien comprender cómo se forma la valoración final que perciben -una sensación, a la postre -a partir de los elementos básicos de la segunda ley -sensación amorosa o de apego y nivel de actividad de refuerzo-. La estructura específica de valoración del feeling y el esfuerzo sí es propia de cada pareja y en general diferirá de unas a otras. Así, para niveles objetivos de feeling y esfuerzo iguales, las percepciones correspondientes de dos parejas distintas puede variar, y eso es lo que recogen sus funciones de bienestar y malestar, que serán distintas. Lo que se asume arriba, en todo caso, es que todas tienen las mismas propiedades cualitativas especificadas arriba.

A partir de las hipótesis anteriores, el proyecto de la pareja a largo plazo se puede formular como un problema de control óptimo con horizonte infinito. Se trata de determinar la senda de esfuerzo requerida para mantener el nivel de feeling siempre satisfactorio, que cada pareja establecerá por encima de un valor umbral $x_{\min} > 0$, posiblemente alto. El objetivo de la pareja es -cuál si no- ser lo más feliz que sea posible durante toda la vida. La felicidad F se expresa como el bienestar neto agregado durante la vida de la relación -un intervalo de tiempo que no está limitado y que comienza en el momento del compromiso $t=0$ - es decir,

$$F = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (U(x) - D(c)) dt.$$

La satisfacción neta instantánea está descontada con el término exponencial que representa la preferencia temporal por el bienestar, en el sentido estándar. Así, la misma configuración de feeling y esfuerzo se valora más si se experimenta ahora que dentro de un tiempo futuro t , y el valor de cambio lo cuantifica el factor $\exp(-\rho t)$.

La formulación del problema de control se completa con el valor inicial del feeling x_0 que se asume muy alto, $x_0 \gg 1$. Así, al comienzo del compromiso de largo plazo, la pareja está tan enamorada como se quiera suponer. La pareja formada por Adán y Eva satisface esta condición de manera obvia, a fin de cuentas estaban hechos el uno para el otro, como se dice en el Génesis (Gn 2,23-24).

3. El análisis de Adán y Eva

La teoría del control óptimo (ver, por ejemplo [10]) proporciona la ecuación fundamental para la dinámica óptima del esfuerzo:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{D''(c)} ((\rho + r)D'(c) - aU'(x)). \quad (2)$$

De las propiedades formuladas en la sección 2 se sigue que el nivel favorito de esfuerzo $c(t) = c^*$ nunca es solución del problema de control de la pareja. Este es un resultado significativo: el nivel requerido para mantener una relación duradera no será nunca el nivel que se considera preferido a priori.

La teoría: el análisis en el laboratorio

El análisis del sistema dinámico acoplado del feeling y esfuerzo arroja varias propiedades dinámicas significativas.

En primer lugar, existe un único equilibrio sentimental $E=(x_{\heartsuit}, c_{\heartsuit})$, que es admisible sólo si $x_{\heartsuit} > x_{\min}$, donde $x_{\min}$ es el umbral mínimo del feeling para que la relación se perciba en buena condición.

Un resultado clave del análisis es que, en general, el nivel de esfuerzo requerido en el equilibrio $c_{\heartsuit}$ es siempre superior al nivel de esfuerzo preferido por la pareja a priori, c^* . La existencia de este *gap de esfuerzo* representa una dificultad inesperada para la viabilidad de la relación en equilibrio. Incluso cuando el sentimiento es suficientemente gratificante, la relación puede no ser viable porque el tamaño del gap es importante y mantener la relación en equilibrio supone un sobreesfuerzo que no se considera soportable.

La dinámica global del sistema determina la evolución de la dinámica sentimental, que comienza típicamente en un elevado nivel de feeling $x_0 \gg x_{\min}$. Se demuestra además que el espacio de fases es una silla no lineal. En particular la dinámica de feeling-esfuerzo es inestable. Por tanto, una dinámica sentimental sostenible en el largo plazo es posible sólo si el esfuerzo inicial $c(0)$ se calibra afinadamente para situarse sobre la variedad estable W , que es la única posibilidad de que la dinámica del feeling-esfuerzo conduzca al equilibrio E . La única situación viable (y deseable) a largo plazo es el equilibrio del sistema. Otras trayectorias o no son admisibles porque suponen niveles de esfuerzo cada vez más importantes, o conducen a la extinción del feeling en tiempo finito y, por tanto, a la ruptura de la pareja en el medio plazo. De nuevo, existe también un gap de esfuerzo a lo largo de la trayectoria de éxito, que lleva al equilibrio sobre la variedad estable.

Por tanto, las relaciones duraderas y muy satisfactorias -se realiza el máximo de la felicidad agregada- son posibles. Es necesario que el equilibrio E sea satisfactorio, el gap de esfuerzo durante la transición al equilibrio sea llevadero y que se resista la inestabilidad de la dinámica del feeling-esfuerzo a lo largo de la senda que lleva al equilibrio.

La práctica: el análisis en el mostrador

Las cosas parecen algo diferentes desde el mostrador del analista, que se asoma a las relaciones de pareja que tienen lugar en un escenario real, en lugar del laboratorio.

Mientras que las relaciones duraderas son posibles, en realidad parecen muy excepcionales. Por muy alto que sea el nivel de feeling inicial, una historia de amor encuentra muchas dificultades para no terminar antes de tiempo.

En efecto, el éxito del proyecto parece requerir demasiadas condiciones: se debe hallar la (única) trayectoria que viaja sobre la variedad estable hasta el equilibrio obedeciendo el sistema (1)-(2), el equilibrio E debe intuirse y ser satisfactorio, i.e. $x_{\heartsuit} > x_{\min}$, el estrés de esfuerzo debe ser soportable durante toda la transición al equilibrio -mientras el nivel de feeling va disminuyendo-, se debe resistir la inercia a abandonar la senda sostenible debida a la inestabilidad intrínseca a la dinámica; y el esfuerzo requerido debe vigilarse también después de alcanzar el equilibrio, en que la inestabilidad sigue actuando.

Por tanto, las relaciones duraderas son posibles pero en la práctica las condiciones para que se produzcan parecen excesivas, incluso si las configuraciones de los parámetros son favorables (e.g. con valores pequeños para el deterioro $r > 0$ y para el gap de esfuerzo -que está siempre presente). Las noticias que se deben transmitir desde el mostrador acerca de la duración de las relaciones no son optimistas.

4. Conclusiones

La teoría del control óptimo permite formular de modo natural el proyecto de una relación de largo plazo de una pareja y descubrir algunas claves sobre las fuentes de inestabilidad que ponen en peligro el futuro de la relación.

El análisis revela un robusto mecanismo que actúa en general y puede ser la causa de ruptura de muchas parejas en escenarios reales. Se trata de la combinación de dos efectos, la presencia de un gap de esfuerzo y de una dinámica inestable. Por una parte la pareja sufre la incomodidad de tener que esforzarse más allá del nivel que preferiría. En segundo lugar, lejos de haber un efecto recuperador si se relaja el esfuerzo, la inercia natural lleva a disminuir el esfuerzo requerido y a abandonar la senda que conduce a la única solución duradera -un equilibrio. Las disminuciones del esfuerzo adecuado sitúan la relación en otras trayectorias sentimentales que conducen a niveles de feeling inadmisibles. Quizá tras un tiempo de malestar, se producirá la ruptura de la relación.

La teoría también ofrece una explicación a otro misterio en el área de la terapia marital, el hecho de que las parejas que han pasado por terapia recaen tras cierto tiempo [8]. Si la terapia consigue restaurar las cosas al estado saludable de la senda estable o el equilibrio, el mecanismo dual de desestabilización formado por el gap de esfuerzo más la inestabilidad dinámica vuelve a actuar para desviar de nuevo la relación y devolverla a niveles de riesgo de ruptura.

El modelo además proporciona una explicación mecanística de la paradoja del fracaso, como una consecuencia del plan optimizador de la pareja y la segunda ley. Según los resultados, bajo la segunda ley, es compatible el diseño del proyecto de una relación de largo plazo para ser felices con la facilidad de fracasar en el intento. Se puede plantear una relación y esperar que dure para siempre y que acabe frustrándose al cabo de un tiempo. Está en la propia naturaleza de las cosas.

Es fácil pensar que las parejas, sin saberlo, se enfrentan a un problema de control óptimo sofisticado, como el que se describe arriba. En cambio, parece difícil imaginar que pretendan resolverlo conscientemente. De algún modo inconsciente o intuitivo, sin embargo, muchas parejas consiguen resolver correctamente las ecuaciones sentimentales, al modo en que algunos jugadores de billar parecen dominar las leyes de la mecánica para conseguir sus carambolas, sin haber abierto nunca un libro de física. Así se podrían explicar las historias de éxito de amor duradero. Quizá además esas historias suceden con una combinación favorable de los parámetros naturales en la dinámica sentimental, lo que las convierte en el caso menos usual.

Sobre el desenlace de la historia de nuestros Adán y Eva, es posible que fueran capaces de plantearse el problema de control óptimo descrito aquí, ¡a fin de cuentas ambos comieron del árbol de la ciencia (del bien y del mal)! Sin embargo, aún formulando el modelo y

comprendiendo su solución correctamente, les quedaría la difícil tarea de implementarla. En el caso de una pareja tan humana como la de Adán y Eva (Gn 3), la conjetura más lógica es que el destino de su relación no sería diferente del de esas dos parejas que se están rompiendo por cada tres que se forman últimamente en España.

Referencias

- [1] IPF (2010). Informe de evolución de la familia en España, Instituto de Política Familiar, disponible en <http://www.ipfe.org/España/Documento/17>.
- [2] MARTIN, Teresa C. and BUMPASS, Larry L. Recent trends in marital disruption, *Demography*, **26**: 37-51, 1989.
- [3] BRAMLETT, Matthew D. and MOSHER, William D. Cohabitation, marriage, divorce, and remarriage in the United States, *National Center for Health Statistics, Vital Health Stat* **23**(22), 2002.
- [4] PETTIJOHN, Terry F. II and PETTIJOHN, Terry F. Perceived happiness of college students measured by Maslow's hierarchy of needs. *Psychological Reports*, **79**: 759-62, 1996.
- [5] SWEET, James A. and BUMPASS, Larry L. The National Survey of Families and Households -Waves 1,2, and 3: Data Description and Documentation. Center for Demography and Ecology, University of Wisconsin-Madison, 2002.
- [6] REY, José-Manuel. A Mathematical Model of Sentimental Dynamics Accounting for Marital Dissolution. *PLoS ONE* **5**(3): e9881, 2010. doi:10.1371/journal.pone.0009881
- [7] BUSTON, Peter M. and EMLEN, Stephen T. Cognitive processes underlying human mate choice: the relationship between self-perception and mate preference in Western society, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **100**(15): 8805-8810, 2003.
- [8] GOTTMAN, John M., MURRAY, James D., SWANSON, Catherine C., TYSON, Rebecca, and SWANSON, Kristin R. *The mathematics of marriage-Dynamic nonlinear models*, The M.I.T. Press, 2002.
- [9] COOMBS, Clyde H. and AVRUNIN, George S. *The structure of conflict*. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 1988.
- [10] SEIERSTAD, Atle and SYDSAETER, Knut. *Optimal Control Theory with Economic Applications*, (2nd reprint), North-Holland, 1999.

Sobre el autor:

Nombre: José-Manuel Rey Simó

Correo Electrónico: j-man@ccee.ucm.es

Institución: Departamento de Análisis Económico. Universidad Complutense de Madrid, España.

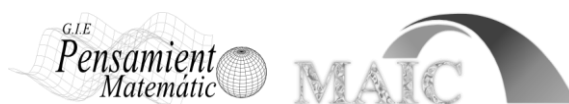
Investigación

Una aplicación de las matemáticas al estudio de una máquina electrónica de Bingo

An application of the mathematics to the study of a video lottery machine

Raquel Caro Carretero y Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 083–092, ISSN 2174-0410

Recepción: 21 Mar'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

En las máquinas "tragaperras" tipo Bingo, en las que el jugador apuesta dinero buscando obtener más dinero, hay dos aspectos que deben ser controlados para satisfacer tanto al jugador como al propietario de la máquina: 1) Tener al jugador en la máquina una cantidad razonable de tiempo para que las partidas no sean ni demasiado cortas ni demasiado largas, desanimando al jugador y 2) Tener un porcentaje de retorno en premios en torno al 90-95% para que la máquina dé beneficios. Es relativamente fácil mantener estos dos conceptos controlados en el ciclo estadístico, es decir, para tiempos grandes, pero es más difícil tenerlos en los números deseados para intervalos cortos de tiempo. El objetivo de este trabajo es examinar cómo el porcentaje de retorno en premios en intervalos cortos de tiempo, para una máquina de juego tipo Bingo, se puede controlar perturbando el precio de las bolas extra que la máquina ofrece.

Palabras Clave: Control estadístico, probabilidad, máquinas de bingo, pseudo aleatoriedad

Abstract

In the slot machines type Bingo, in which the player bets some money trying to obtain more, there are two problems that must be controlled to satisfy both the trader and player: 1) Having the player on the machine a reasonable amount of time so that the games are neither too short nor too long, discouraging the player and 2) Having a percentage of return around 90-95% for the machine to give benefits. It is desirable to maintain these two items in reasonable figures in the statistical pay cycle, i.e. for a long time interval. But it is more difficult to have these two items under control for short time intervals. The aim of this work is to examine how the percentage of return of the money that a Bingo type machine gives to the players can be controlled by perturbing the price of the extra balls the machine offers.

Keywords: Statistical control, probability, slot machines, pseudo-randomness

1. Introduction

Slot machines and other electronic gambling machines (EGMs) are gambling devices that offer a variety of games. They are inexpensive to run, compared to roulette or blackjack games, which makes it possible to offer low-stakes betting to a large number of players. As a result, they have become the most profitable form of gambling [7].

Slot machines and other EGMs also seem to attract a lot of myths. This is partly because of a lack of accurate information on how the machines work and partly due to the design of the machines [6].

The purpose of this paper is to examine how the percentage of return of the money that a Bingo type machine gives to the players can be controlled by perturbing the price of the extra balls the machine offers. We can get a percentage of return or played percentage for a player around 95.

We will use the following notation and expressions along the paper:

$\%J$ stands for the percentage of return for the gambler.

SJ stands for the played out (money in prizes that the machine has given the player)

EJ stands for the played entry (total money the player has played, including the money of the prizes that he has replayed).

It is satisfied that $\%J = \frac{SJ}{EJ} 100$. This way, $\%J$ can be seen as the percentage of the played money that is returned to the player.

If P games are played, the cost of the game i is C_i , there were m_{ij} prizes in the absence of a number in the game i at the time of giving the extra ball j , $PB_{i,j}$ is the price of the j th extra ball drawn in the game i and the number of extra balls that the machine gave in the game i is n_i , we have that:

$$(1) EJ = \sum_{i=1}^P C_i + \sum_{i=1}^P \left(\sum_{j=1}^{n_i} PB_{i,j} \right)$$

The expression for the played out is (2) $SJ = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{z=1}^{m_{ij}} \Pr_z V_z \right)$, being $\Pr_z$ the probability of extraction of the ball that gives the prize z , V_z the value of the prize z (in this expression we assume that the expected winning in prizes obtained before acquiring extra balls is negligible, so we do not include the corresponding term. It will be included in the examples).

The outline of the rest of the paper is the following: In section 2 we make an analysis of the mathematical structure of the slots machines. Section 3 presents a technical description of how the video lottery machine DStadium works and section 4 gives a statistical control of the return in prizes for the DStadium machine. This control can be considered as the main objective of the paper.

2. The pseudo-randomness

The payout of the slot machines is determined by the mathematical structure of the game, not by how recently the machine has paid out. Game structures are very complex and, as a result, the odds against winning on most EGMs are hidden from the player [4, 7]. The basis of all random-like events is a combination of complex or nonlinear relationships and initial uncertainty. Technically, a machine cannot be random. Slot machines in fact are "pseudo"-random [2]. Slot machines use a random number generator (henceforth RNG) to create an erratic sequence of numbers. If the right values are selected for the RNG, the sequence will be virtually unpredictable [7]. The RNG in slots uses Lehmer's congruential iteration [1, 4]. This makes the outcome of an EGM completely unpredictable [7].

3. The bingo type machine DStadium. Technical details

3.1 Overview

We try to explain how a particular video lottery machine (DStadium) works. DStadium is a machine based on the game of Bingo, which is built on a touch platform so that the user will interact with the machine by touching on the screen, while also has mechanical buttons. Either of these two options can be used interchangeably, according to the comfort of each player. For the development of the game 60 balls are used, of which 30 are extracted. As the balls are drawn, the corresponding numbers are automatically labeled in the card and the system will display for the player the prizes that he/she has won.

3.2 How to play

The game is similar to the Bingo game. By introducing the money in the slot, the user creates a "Game Session", which ends when he wants to leave the machine. Before the user starts playing, he has to set the parameters of the game by a previous screen configuration regarding credit value, speed of play and betting board. These parameters can also be changed thereafter at any time of the "Game Session." Once the initial setup is established, the machine goes to the main screen and bets are made, the user can play up to four cards at the same time and at least one.

Each card must have a bet of at least one credit and all the cards must have the same bet (the total bet must be an integer multiple of the cards that are in play at the time). There cannot be two cards that have some common number, so that the four cards have 60 numbers from 1 to 90, ordering each card numbers from lowest to highest from top to bottom and left to right.

In the case of obtaining a prize, the machine puts the numbers corresponding to the prize in red and increases the player's credit automatically.

Once the 30 balls that make up the draw are extracted, the machine eventually raffles ten extra balls, chosen at random from among the 30 not extracted numbers. These extra balls have an additional cost (they may also be free) and the user is the one who decides whether to buy or not. When the user decides not to buy more extra balls, the current game will end.

3.3 Description Award Chart

To get a prize, the player must match the drawn numbers marked on the card and form any of the figures presented in the pay table. Prizes are shown in Figure 1 and detailed below.

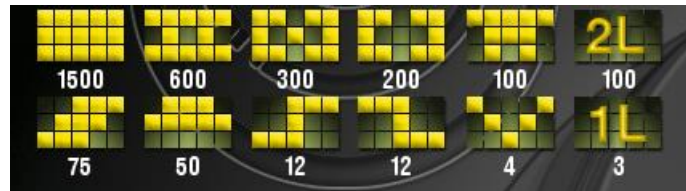


Figure 1. Pay Table

BINGO (P_1): Match all numbers on the card. The prize you get is 1500 times the bet of the awarded card.

ANVIL (P_2): Match all numbers except the ends and center of the centerline. The prize you get is 600 multiplied by the bet of the awarded card.

FLOWER (P_3): Match all numbers except those that make up the central cross, the center of the cross included. The prize you get is 300 multiplied by the bet of the awarded card.

CROSS (P_4): Hit all numbers except those which are in the central cross. The prize you get is 200 multiplied by the bet of the awarded card.

TABLE (P_5): Match all numbers except the ends of the center line and the ends and center of the bottom line. The prize you get is 100 multiplied by the bet of the awarded card.

DOUBLE LINE (P_6, P_7 and P_8): Match the numbers that make up 2 lines. The prize you get is 100 multiplied by the bet of the awarded card.

LADDER (P_9): Match all numbers except the 3 in the upper left corner and the 3 of the bottom right corner. The prize you get is 75 times the bet of the awarded card.

HAT (P_{10}): Match the numbers that make the center line and three central numbers in the top row. The prize you get is 50 times the bet of the awarded card.

REVERSED Z (P_{11}): Match the numbers that make up an inverted Z. The prize you get is 12 times the bet of the awarded card.

Z (P_{12}): Match the numbers that make up the letter Z. The prize you get is 12 times the bet of the awarded card.

V (P_{13}): Match the numbers that form the letter V. The prize you get is 4 times the bet of the awarded card.

LINE (P_{14}, P_{15} and P_{16}): Match the numbers that form a horizontal line. The prize you get is 3 times the bet of the awarded card.

4. Statistical control of the prizes in a short time frame

4.1. Statement of the Problem

In the Bingo type game machines, in which the player bets an amount of money in order to obtain more money, there are two aspects that must be controlled to satisfy both the trader and the player's claims:

- to have a percentage return in prizes around 95%, so that the machine gives benefits to the owner.

- to have the player on the machine a reasonable amount of time, so that the games are not too short or too long. Ideally, for each coin inserted the player gets five games. This concept will be called replayed. If we consider the D Stadium machine as an infinitely-reach adversary, then in order to get a suitable replayed we have to ensure that the probability of ruin of the gambler is not high [3].

For random type machines, you can have these two items in the desired figures in the statistical cycle, that is to say, for a long time interval, but it is a more difficult problem to get a rate of return close to 95% and around 5 replayed in short time intervals, which is necessary in order to provide the trader with a greater sense of control of the machine because it gives an almost cyclical aspect to the machine.

In order to achieve the desired control of the bingo machine in short periods of time, one input that the machine has will be considered (see the introduction): the price of the extra balls. The goal is to perturb this item so as to get the percentage of return and replayed in the desired numbers and that the machine passes the mandatory test of randomness based on the chi squared algorithm [5].

4.2. Control of the percentage of return by perturbing the price of extra balls

If we set the price of extra balls in the game $P+1$ to get a percentage of return after $P+1$ games ($\%J(P+1)$) of 95%, depending on the percentage of return after we split P games ($\%J(P)$) and the played entry in the first P games ($EJ(P)$), we consider the following expression derived from (1), (2):

$$0.95 = \frac{\%J(P+1)}{100} = \frac{SJ(P+1)}{EJ(P+1)} = \frac{SJ(P) + \sum_{j=1}^{n_{P+1}} \sum_{z=1}^{m_{P+1,j}} Pr_z V_z}{EJ(P) + C_{P+1} + \sum_{j=1}^{n_{P+1}} PB_{P+1,j}} = \frac{\frac{\%J(P)}{100} EJ(P) + \sum_{j=1}^{n_{P+1}} \sum_{z=1}^{m_{P+1,j}} Pr_z V_z}{EJ(P) + C_{P+1} + \sum_{j=1}^{n_{P+1}} PB_{P+1,j}} \quad (3)$$

Then, by manipulating (3):

$$\sum_{j=1}^{n_{P+1}} PB_{P+1,j} = \frac{\left(\frac{\%J(P)}{100} - 0.95 \right) EJ(P) + \sum_{j=1}^{n_{P+1}} \sum_{z=1}^{m_{P+1,j}} Pr_z V_z - 0.95 C_{P+1}}{0.95} \quad (4)$$

Interpretation: If the percentage of return until game P is high (greater than 95%), the first term of the numerator of (4) is positive, which increases the price of the extra balls and

refrains the player from buying extra balls in order to decrease the percentage of return. If the percentage of return until game P is low (less than 95%), the first term of the numerator of (4) is negative, which decreases the price of the extra ball and encourages the player to buy extra balls to raise the percentage of return. If the percentage is just 95%, the price of the extra ball will not depend on what happened in the previous games but only on the prizes the player can get if the right extra ball is drawn at the time of giving this extra ball.

If there are high prizes in the absence of a number, then the second term of the numerator of (4) is large and so the price of the extra balls is high (the player has an incentive to buy them despite their high price). If prizes in the absence of a number are low, then the second term of the numerator is smaller and so the price of the extra balls is low (so the player has an incentive to buy them despite the small reward in prizes). If the total price of extra balls becomes negative because the percentage of return until game P is very low with a high played entry, then the price of the extra balls is set to 0, that is to say, they would be given for free to encourage the user to continue playing.

As the right side of the equation (4) depends on n_{P+1} , the total price of the extra balls the player buys in the game $P+1$ depends on the number of such extra balls purchased, number not known a priori. We then can take two options to avoid this problem:

Option 1. Assuming that the player buys the 10 balls that are offered and they all are offered at the same price (so we can put PB_{P+1} instead of $PB_{P+1,j}$ and $n_{P+1} = 10$) and taking into account that the probability of hitting a ball that gives a prize in the absence of one number is $\frac{1}{30}$ when the first extra ball is offered, $\frac{1}{29}$ when the second extra ball is offered and in general $\frac{1}{30-(j-1)}$ when the extra ball number j is offered, to get the price of each extra ball we consider the following:

$$\sum_{j=1}^{10} PB_{P+1,j} = 10 PB_{P+1} = \frac{\left(\frac{\%J(P)}{100} - 0.95\right) EJ(P) + \sum_{j=1}^{10} \sum_{z=1}^{m_{P+1,j}} \frac{1}{31-j} V_z - 0.95 C_{P+1}}{0.95}$$

Thus the price of each extra ball would be:

$$PB_{P+1} = \frac{\left(\frac{\%J(P)}{100} - 0.95\right) EJ(P) + \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{31-j} \left(\sum_{z=1}^{m_{P+1,j}} V_z\right) - 0.95 C_{P+1}}{9.5} \quad (5)$$

Example 1. We assume that the player has introduced 1 credit with which he has played 5 games, because he has won prizes that has been replaying at the rate of 1 credit per game, so we have that $EJ(P) = 5$, $\%J(P) = 80$ and in the sixth game, in which the player also has bet one credit, he does not get any prizes with the first 30 balls but he is at a number of the first and the third prizes, and there are no more awards in the absence of a number as he plays the extra balls in that game. Then the price of each extra ball, taking (5) into account, would be:

$$PB_{P+1} = \frac{(0.8-0.95)5 + \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{31-j} (1500+300) - 0.95}{9.5} = 75.089 \text{ credits. Assuming that the}$$

player has set the value of each credit at 0.05 €, this gives the following price for each extra ball in Euros: $75.089 \times 0.05 \approx 3.75$

Option 2. We assume now that the extra ball number i that is offered to the player in the game $P+1$ has a price $PB_{P+1,i}$ which depends on the percentage of return and played entry that the machine had at the time of giving the previous extra ball or at the time of playing the 30 first balls if it is the first extra ball ($\%J(P+1, i-1)$, $EJ(P+1, i-1)$). We note the following:

$$\begin{aligned} 0.95 &= \frac{\%J(P+1, i)}{100} = \frac{SJ(P+1, i)}{EJ(P+1, i)} = \frac{SJ(P+1, i-1) + \sum_{z=1}^{m_{P+1,i}} \Pr_z V_z}{EJ(P+1, i-1) + PB_{P+1, i}} = \\ &= \frac{\frac{\%J(P+1, i-1)}{100} EJ(P+1, i-1) + \sum_{z=1}^{m_{P+1,i}} \Pr_z V_z}{EJ(P+1, i-1) + PB_{P+1, i}} \quad \text{thus,} \\ PB_{P+1, i} &= \frac{\left(\frac{\%J(P+1, i-1)}{100} - 0.95 \right) EJ(P+1, i-1) + \sum_{z=1}^{m_{P+1,i}} \frac{1}{31-i} V_z}{0.95} \quad (6) \end{aligned}$$

Example 2. We see an example for this case obtained by computer simulation: The user plays four cards and he makes a bet of 1 credit for each one, setting the value of the credit at €0.05. In the first two games he has not won prizes and has not bought extra balls, so $SJ(2)=0$, $\%J(2)=0$, $EJ(2)=8$. In the third game he plays with cards 3-4-20-22-30-32-33-34-49-52-53-57-60-83-85, 13-15-21-24-28-29-40-42-47-54-68-69-81-88-89, 8-9-10-17-19-26-37-38-61-65-71-72-76-79-87, 1-2-5-39-44-48-55-63-70-75-77-78-80-84-90 and the first 30 balls drawn are 75-49-87-42-79-13-8-33-37-70-32-60-61-20-63-88-17-1-68-28-5-48-80-90-89-39-55-29-40-52.

Then with the fourth card he gets the prizes P_{11} (12 credits) and P_{14} (3 credits) and he has been in the absence of a number for the following prizes: P_{11} (12 credits) in the first card, P_{15} (3 credits) in the second card and P_7 (100 credits), P_{12} (12 credits), P_{16} (3 credits) in the fourth card. We then have,

$$SJ(3,0)=15, EJ(3,0)=12, \frac{\%J(3,0)}{100} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Then the price of the first extra ball, taking (6) into account, is:

$$PB_{3,1} = \frac{\left(\frac{5}{4} - 0.95 \right) 12 + \frac{1}{30} (12 + 3 + 100 + 12 + 3)}{0.95} = 8.35 \text{ credits, which gives the}$$

following price of the first extra ball in Euros: $8.35 \times 0.05 = 0.42$

This first extra ball is 78, which gives prizes P_7 , P_{12} , P_{16} and does not leave any other prize in the absence of a number.

For the price of the second extra ball, we must then consider:

$$EJ_{3,1} = 12 + 8.35 = 20.35, SJ_{3,1} = 3 + 12 + 115 = 130,$$

$$\frac{\%J_{3,1}}{100} = \frac{130}{20.35} \approx 6.38821$$

So that the price of the said ball, according to (6), is:

$$PB_{3,2} = \frac{(6.38821 - 0.95)20.35 + \frac{1}{29}(12 + 3)}{0.95} \approx 117.037 \text{ credits, which gives the}$$

following price of the second extra ball in Euros:

$$117.037 \times 0.05 \approx 5.85$$

Note that the price of this ball has increased with respect the previous one because the percentage of return has increased since the player has won prizes with the first extra ball, which increases the first term of the numerator. The slight decrease of the second term, due to the less number of possible prizes, does not offset this.

5. Conclusions

As it can be seen from the examples, the control we have performed acts in a dynamic manner by adjusting the control parameter to the machine outputs up to the present time. So we have obtained the desired percentage of return in short time intervals, providing both the owner and the player with a greater sense of security.

Acknowledgements

The authors thank freelancer Francisco Ortiz for suggesting the work hypothesis and providing data for this paper.

References

- [1] BRYSSBAERT, Marc. *Algorithms for randomness in the behavioral sciences: A tutorial*, pp. 45-60, Behavior Research Methods, Instruments, & Computers, USA, 1991.
- [2] GLEICK, James. *Chaos: Making a New Science*, Viking Penguin Inc., New York, USA, 1987.
- [3] KATRIEL, Guy. *Gambler's ruin probability-A general formula*, pp. 2205-2210, Statist. Probab. Lett., North Holland, 2013.
- [4] ONGHENA, Patrick. *A theoretical and empirical comparison of mainframe, microcomputer, and pocket calculator pseudorandom number generators*, pp. 384-395, Behavior Research Methods & Instrumentation, USA, 1993.
- [5] SHARMA, Subhash. *Applied Multivariate Techniques*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1996.
- [6] TURNER, Nigel, FRITZ, Barry and MACKENZIE, Bronwyn. *How to gamble: Information and*

misinformation in books and other media on gambling, The Electronic Journal of Gambling Issues, Ontario, Canada, 2003. Available at <http://jgi.camh.net/doi/full/10.4309/jgi.2003.9.13>

- [7] TURNER, Nigel and HORBAY, Roger. *How do slot machines and other electronic gambling machines actually work?*, The Electronic Journal of Gambling Issues, Ontario, Canada, 2004. Available at <http://jgi.camh.net/doi/full/10.4309/jgi.2004.11.21>

Sobre los autores:

Nombre: Raquel Caro Carretero

Correo Electrónico: rcaro@upcomillas.es

Institución: Universidad Pontificia Comillas, España.

Nombre: Javier Rodrigo Hitos

Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es

Institución: Universidad Pontificia Comillas, España.

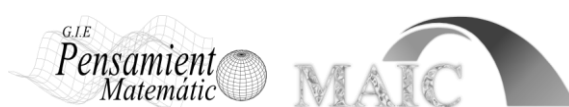
Juegos y Rarezas Matemáticas

Julius Corentin Acquefacques, prisionero de los
sueños

Julius Corentin Acquefacques, prisoner of dreams

Marta Macho Stadler

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 093–100, ISSN 2174-0410

Recepción: 25 Ago'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

A través de una colección de tebeos del guionista y dibujante Marc Antoine Mathieu, vamos a descubrir cómo las matemáticas también pueden divulgarse a través del mundo del cómic. De hecho, sus componentes visual y lúdica, hacen del tebeo un medio excepcional para explicar matemáticas a toda clase de público.

Palabras Clave: tebeo, paradoja, dimensión, medida, espiral, banda de Möbius, simetría, perspectiva, combinatoria.

Abstract

Through a collection of comic books of the writer and cartoonist Marc Antoine Mathieu, we will discover how mathematics can also be disseminated through the comic. In fact, the visual and playful component of a comic book, make it an exceptional tool to explain mathematics to all kinds of audiences.

Keywords: comic book, paradox, dimension, measure, spiral, Möbius strip, symmetry, perspective, combinatorics.

Marc Antoine Mathieu es guionista y dibujante de cómics. Su serie *Julius Corentin Acquefacques, prisionero de los sueños* consta –de momento– de seis tomos, todos ellos con guiños matemáticos –paradojas temporales, dimensión, medidas del espacio, espirales, simetrías, perspectiva, etc.–. Los títulos de los fascículos de la serie son los siguientes:

1. *L'Origine* (El Origen, 1990),
2. *La Qu...* (1991),
3. *Le Processus* (El Proceso, 1993),
4. *Le Début de la fin* (El Principio del fin, 1995),
5. *La 2,333ème dimension* (La dimensión 2,333, 2004),
6. *Le décalage* (El desajuste, 2013).

El personaje central es Julius Corentin Acquefacques. Nunca se sabe a ciencia cierta si sueña o está despierto pero, durante sus alucinaciones, descubre imperfecciones en su mundo de dimensión dos –o en las del relato– y, con la intención de restablecer el equilibrio, se enfrenta a diversas paradojas.

Las matemáticas están presentes en la serie, sobre todo el concepto de dimensión, que obsesiona al personaje: en el primero de los tomos de la serie, descubre que vive en dimensión dos, gobernado por alguien desde la dimensión tres. En varias ocasiones sale de su mundo plano para intentar arreglar los ‘desperfectos’ ocasionados en su universo, con desiguales consecuencias.

Aunque varios de los cómics de Marc Antoine Mathieu se han traducido al castellano, lamentablemente, éste sólo se encuentra en francés e inglés.

En este escrito, se da un rápido repaso de algunas de las nociones matemáticas incorporadas en la trama de esta serie, contando muy poco del argumento. En la referencia [7] pueden encontrarse amplias reseñas: de ser posible, se recomienda la lectura de los tebeos.

1. El origen



Julius Corentin Acquefacques descubre que vive en un universo de dimensión dos, contenido en otro de dimensión tres, en el que habita su creador –el dibujante–.

Todos los protagonistas del mundo de Acquefacques forman parte de un ‘proyecto’ concebido en ese mundo de tres dimensiones, al que se encuentran sometidos.

En esta aventura se alude a los viajes temporales, y se explican mediante un eficaz truco: en la página 37 del cómic un agujero ocupa el lugar de la viñeta central; desde ese lugar se lee, en efecto, la viñeta central de la página 43 –el futuro–. La viñeta central de la página 42 tiene en su lugar un agujero, desde el que se puede leer la correspondiente casilla de la página 40 –el regreso al pasado–. Estos agujeros son las *anti-viñetas*: superponiendo una *viñeta* y una *anti-viñeta*, se obtiene una *viñeta extraña*, es decir, una ilustración desplazada en el tiempo.



Figura 1. La viñeta y anti-viñeta como forma de viajar del pasado al futuro.

Figura 2. El descubrimiento de la fórmula de la anti-viñeta.

2. La Qu...

Debido a la falta de espacio en el mundo en el que vive nuestro héroe, los *inspectores del espacio vital* le visitan: su misión es vigilar que nadie desperdicie el tan anhelado espacio. Acquefacques ha dejado un cajón abierto, por lo que merece una sanción...

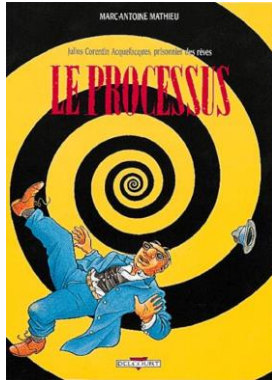
La obsesión por medir es la que introduce un ingrediente matemático en esta historia, la que tiene menor contenido 'científico' de la serie.

Al final de la aventura se descubrirá el motivo del título: todas las peripecias de Julius Corentin Acquefacques suceden en blanco y negro, pero en ésta, el protagonista descubre el color, la cuatricromía –*quadrichromie* en el lenguaje original, la *qu...* que se revela finalmente–.



Figura 3. Los inspectores miden el espacio vital en casa de Acquefacques.

3. El proceso



El reloj de pared de Julius Corentin Acquefacques ha sufrido una pequeña alteración y comienza a adelantar. Esto provoca la duplicación de su personaje, que convive en una misma viñeta en tiempos diferentes.

En su intento de solucionar este problema, camina –¿sueña o es la realidad?– aparentemente sobre el techo de la habitación, y un *vórtice* le atrae irremediabilmente, haciéndole llegar a un mundo de dimensión tres –el lugar en el que habita su dibujante, su creador–.

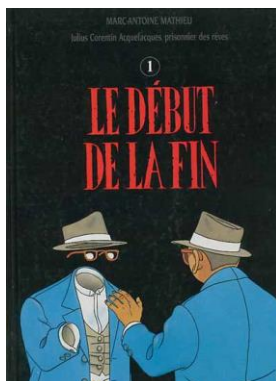
Acquefacques consigue regresar desde el mundo 3D hasta el suyo en 2D, pero el *proceso* iniciado ya no se puede parar: el protagonista está condenado a revivir eternamente las mismas acciones, cambiándose a través del sueño en su doble reiteradamente. Todo viene gobernado por esta terrible *espiral*...



Figura 4. Acquefacques atraído por el vórtice hacia un mundo en 3D.

Figura 5. Fotografía del cómic; Marc Antoine Mathieu incorpora una auténtica espiral que se despliega.

4. El principio del fin



En este tomo de la serie, el concepto de simetría es el protagonista, y se manifiesta de diferentes maneras.

Acquefacques –de nuevo prisionero de sus sueños– despierta y percibe que todo lo está haciendo al revés: se *desafeita* de espaldas al espejo, se pone el pijama para salir a la calle, etc.

Cuando sale de su casa para acudir a una cita, este mundo ‘invertido’ se manifiesta a través de un accidentado viaje en taxi que

utiliza el denominado *desvío de Möbius*: la banda de Möbius aparece como símbolo del cambio de orientación.

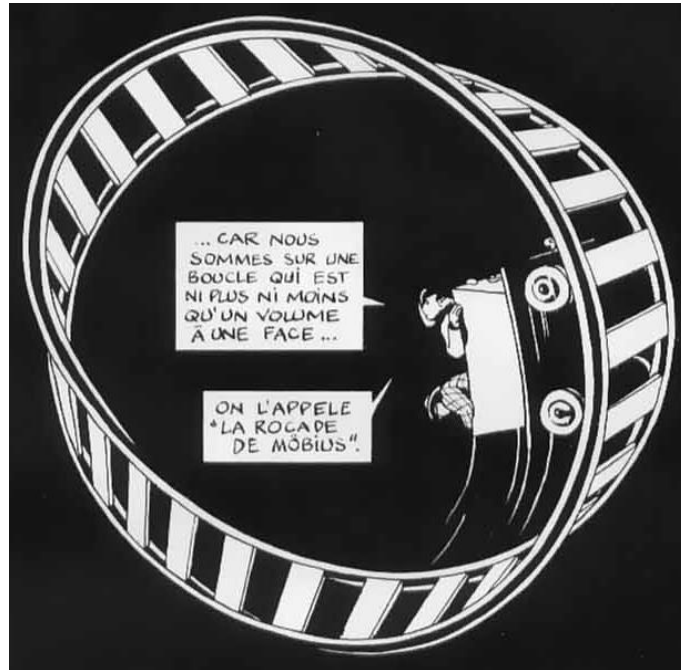


Figura 6. "... Ya que estamos en un bucle que no es ni más ni menos que un volumen con una cara... Se le llama "el desvío de Möbius"."

En su complicada aventura para recuperar el sentido, Acquefacques atraviesa el eje de simetría del cómic –es la página central–, y a partir de entonces la historia se vuelve la simétrica a la ya vivida...



Figura 7. Pasando a través del espejo.

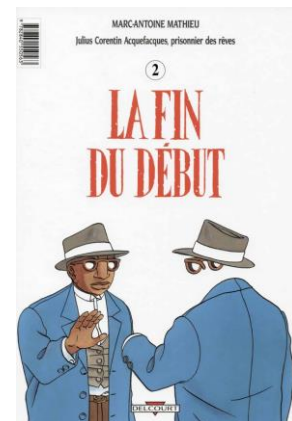
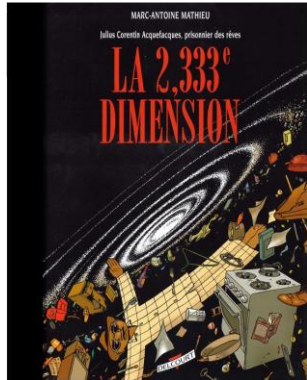


Figura 8. Contraportada del cómic, simétrica a la portada.

Se ha creado una banda de Möbius en un momento de la aventura, y sobre ella Julius evoluciona, cambiando la orientación al reflejarse, pasando de la realidad al sueño y viceversa, en un ciclo sin fin.

5. La dimensión 2,333



La perspectiva es el concepto matemático central en este tomo de las aventuras de nuestro héroe.

Acquefacques sueña que sueña, y camina por extrañas viñetas sin rumbo fijo. Tropieza y pierde el equilibrio, llevándose en su caída un punto de fuga, provocando una transformación de su mundo: entra en un espacio de dimensión 2,333.

Un científico explica con gran rigor lo que ha sucedido:

Vea: normalmente el volumen se crea por medio de dos puntos de fuga (aquí A y B) que están situados sobre el horizonte.

Nos falta uno.

Resultado: no hay ya espesor. .. ¡es la planaridad!

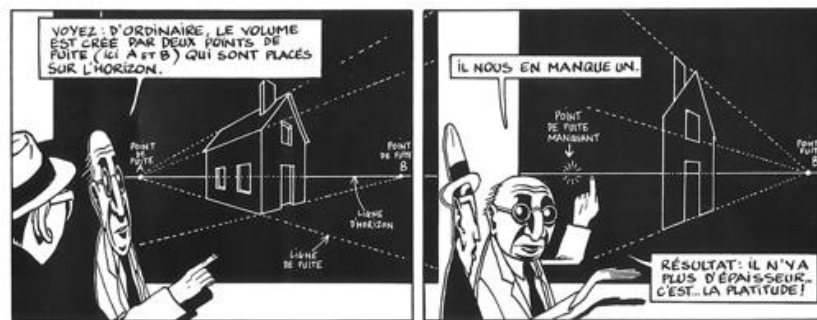


Figura9. Explicando los puntos de fuga.

Una auténtica lección de matemáticas explica el motivo de ese cambio de dimensión: aunque sueños y realidad son entidades muy diferentes, esta ley deja de funcionar cuando se produce una rara singularidad: la del “sueño del sueño”.

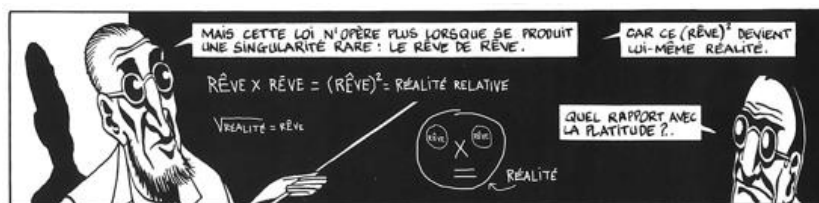


Figura 10. En la pizarra: sueño x sueño = (sueño)² = realidad relativa.

Acquefacques debe viajar al inframundo para recuperar el punto de fuga: allí descubre que existen universos paralelos. Tras entrar en un “agujero gris”, las viñetas se tiñen de color rojo y verde, y la lectura puede continuar con ayuda de unas gafas 3D –que vienen incorporadas al cómic–. ¿Conseguirá el protagonista recuperar el punto de fuga perdido?

6. El desajuste

Esta historia comienza en el capítulo 2 –la portada del tebeo se ha desplazado de lugar–: se ha producido un ‘desajuste’.

El resto de los personajes del cómic salen a buscar al protagonista, que ha desaparecido, no está en su casa: vagan perdidos por un desierto aparentemente infinito.

Acquefacques –que es transparente– se convierte en el narrador de la historia y observa ‘desde lejos’ el escenario por el que se mueven los personajes secundarios. Ellos no saben por dónde caminan –sólo ven ‘lo local’–, pero Julius observa ‘lo global’, lo que le permite percibir detalles que para los primeros pasan inadvertidos.

Descubren que la arena que pisan no lo es en realidad, se trata de cadenas de 26 letras:



La nada está formada de TODAS las combinaciones posibles de nuestro alfabeto. ¡Es maravilloso! 26! ¿Comprendéis? ¡Esto nos indica la dimensión de la nada!



Figura 11. Calculando la dimensión de la nada.

La razón de este desajuste se encuentra al final de la historia, que en realidad es el principio, debido a este desajuste espacio-temporal.

Referencias

- [1] MATHIEU, Marc Antoine. *Julius Corentin Acquefacques, prisonnier des rêves. L'origine*, Delcourt, Bélgica, 1990.
- [2] MATHIEU, Marc Antoine. *Julius Corentin Acquefacques, prisonnier des rêves. La Qu...*, Delcourt, Bélgica, 1991.
- [3] MATHIEU, Marc Antoine. *Julius Corentin Acquefacques, prisonnier des rêves. Le Processus*, Delcourt, Bélgica, 1993.
- [4] MATHIEU, Marc Antoine. *Julius Corentin Acquefacques, prisonnier des rêves. La 2.333^e dimension*, Delcourt, Bélgica, 1995.
- [5] MATHIEU, Marc Antoine. *Julius Corentin Acquefacques, prisonnier des rêves. Le debut de la fin*, Delcourt, Bélgica, 2004.
- [6] MATHIEU, Marc Antoine. *Julius Corentin Acquefacques, prisonnier des rêves. Le décalage*, Delcourt, Bélgica, 2013.
- [7] MACHO STADLER, Marta. Reseña de estos seis tebeos en la sección de 'Teatro y Matemáticas' del portal DivulgaMAT de los meses marzo, abril, mayo, junio y julio de 2011 y de junio de 2013: <http://www.divulgamat.net>

Sobre la autora:

Nombre: Marta Macho Stadler

Correo Electrónico: marta.macho@ehu.es

Institución: Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, España.

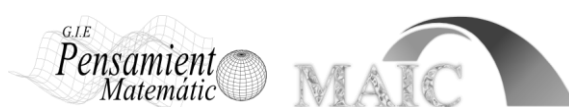
Críticas y Reseñas

Aula Taller Museo de las Matemáticas “ π -ensa”

Museum Workshop Classroom Mathematics “ π -ensa”

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 101–106, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Oct'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

El Aula Taller Museo de las Matemáticas “ π -ensa” nació como proyecto educativo que el Grupo de Innovación Educativa “Pensamiento Matemático” propuso a la Universidad Politécnica de Madrid con el objetivo principal de acercar las Matemáticas al público general. Abrió sus puertas la última semana de septiembre de 2014 con motivo de la Feria de Aprendiz de Ingenieros que organiza la UPM. Desde dicha fecha ofrece un espacio para disfrutar con las Matemáticas.

Palabras Clave: Museo de Matemáticas, Exposiciones Matemáticas, Matemáticas divulgativas.

Abstract

The Museum Workshop Classroom Mathematics “ π -ensa” was born as an educative project that the Educative Innovation Group “Pensamiento Matemático” proposed to the Polytechnic University of Madrid (UPM in spanish) with the main objective to approach mathematics to general public. It was opened the last week of September 2014 to mark the Apprentice Engineers Fair organized by UPM. From that date provides a space to enjoy mathematics.

Keywords: Mathematics Museum, Mathematical Exhibitions, informative mathematics.

1. Presentación

El Aula Taller-Museo de las Matemáticas π -ensa del Grupo de Innovación Educativa (GIE) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) abrió sus puertas la última semana de septiembre de 2014. Su sede se encuentra en la ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.



Figura 1. Póster del Aula Taller Museo de las Matemáticas.

La creación de un Aula Taller Museo de las Matemáticas surge con la intención de convertir este espacio en un centro cultural dirigido tanto a la comunidad educativa como al público en general, y en el cual se desarrollen diferentes actividades, por ejemplo:

- Exposiciones relacionadas con las Matemáticas
- Talleres matemáticos dirigidos a público de todas las edades con especial atención a los niños.
- Conferencias y eventos relacionados con las Matemáticas.
- Apoyo a actividades de educación matemática.
- Estimulo para el desarrollo de actitudes, habilidades y conocimientos matemáticos.
- Divulgación y acercamiento de las Matemáticas a la población en general.

En resumen, se trata de un proyecto de carácter cultural cuyos objetivos son fomentar la cultura matemática, facilitar al público la comprensión de los conceptos de esta ciencia, contribuir a la difusión de la misma y potenciar el desarrollo de la didáctica de las Matemáticas y el intercambio de experiencias en este campo.

Toda la información del Aula puede consultarse en la página Web:

<http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/>

El Grupo de Innovación Educativa (GIE) "PENSAMIENTO MATEMÁTICO" es un grupo reconocido y consolidado de la UPM. Está formado por profesores de universidad y profesores de educación secundaria. Tiene como propósitos principales, por un lado, ayudar a revertir el disgusto y malestar ante las Matemáticas que tienen gran número de estudiantes de

todas las edades, así como mejorar el rendimiento de los mismos en esta materia que es fundamental para la formación intelectual y para el progreso personal; por otro, el acercamiento de los estudiantes a la universidad.

La información más relevante del GIE se halla en la página:

<http://www.caminos.upm.es/matematicas/WEBGIE/>



Figura 2. Portadas de las páginas web del museo y del G.I.E.

Para hacerse una idea del Aula Taller-Museo de las Matemáticas lo más recomendable es darse una vuelta por sus instalaciones y adentrarse en la experiencia en vivo.

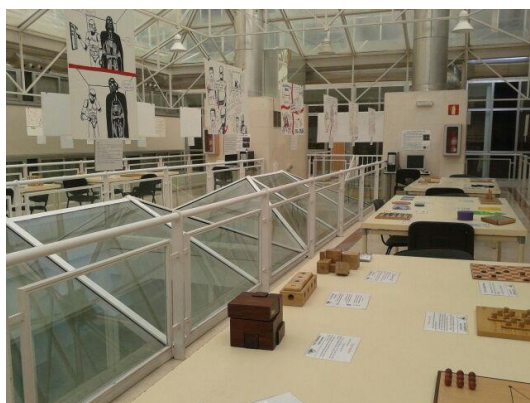


Figura 3. Algunas instantáneas de las instalaciones del Aula Taller Museo.

1.1 ¿Qué encontraréis en π -ensa?

- Exposiciones y talleres temporales: El Aula Taller-Museo ofrece exposiciones cuatrimestrales temáticas que marcarán las actividades de la misma. De esta forma, en cada uno de los periodos, se trabaja una determinada parte de la Matemática y sus aplicaciones. Se ofrece una exposición dedicada a cada uno de esos temas y se realizan talleres y actividades en consonancia con la temática tratada.
- Talleres continuos: El Aula Taller-Museo ofrece talleres diversos a lo largo de todo el año con temática matemática e informática orientados a alumnado de centros de educación primaria, secundaria y bachillerato.

2. Primera exposición del Aula

La inauguración del museo se realizó con la exposición “Matemáticas recreativas”. De esta forma el primer cuatrimestre de apertura estuvo dedicado a la visión lúdica de las Matemáticas. Esta exposición se mantuvo de octubre de 2014 a diciembre de 2014. Estaba formada por:

- 1.- Las exposiciones:
 - Viñetas cómicas matemáticas
 - Juegos con contenido matemático
- 2.- Los talleres:
 - Juegos geométricos, para niños entre 5 y 8 años
 - No es magia, son matemáticas. Conviértete en un matemago gracias a las matemáticas, para niños entre 12 y 17 años
- 3.- Concurso relativo a la exposición “Ríete con las Mates”. Viñetas Cómicas Matemáticas: a los visitantes del museo se les proponía, tras la visita a la exposición, participar en el concurso asociado a la exposición “Ríete con las Mates”.

Dicha exposición consiste en contestar, en un formulario, a una serie de preguntas relacionadas con la exposición y con las matemáticas que en ella aparecen. El último día de la exposición se extrajo uno de los formularios de la urna y, al contener más de un 80% de respuestas acertadas, se designó el ganador del concurso. El premio consistía en un lote de libros de divulgación matemática.

En otro caso se procederá a extraer otra solicitud y así sucesivamente hasta obtener el ganador de la competición.



Figura 4. Póster asociado a la primera exposición de π -ensa.

3. Finalidad del proyecto

En la sociedad actual donde, miremos donde miremos, las Matemáticas están presentes, resulta especialmente importante generar cultura matemática. Este es el objetivo primordial de la propuesta Aula Taller-Museo de las Matemáticas π -ensa. Además somos conscientes de que el aspecto lúdico de esta ciencia no se cultiva suficientemente, lo que hace que los no especialistas en esta materia, no conozcan su belleza ni sientan inclinación por esta disciplina.

Se pretende que a este espacio no se venga a aprender Matemáticas de una manera tradicional, sino a “ver Matemáticas”, “jugar con las Matemáticas”, “apreciar la belleza de las Matemáticas”,... No queremos demostrar teoremas, sino interpretar conceptos y desmitificar el horror a esta ciencia que en otras épocas históricas fue contemplada con más naturalidad y que quizá por muchos condicionantes ajenos a su propia naturaleza han venido a convertirla en el ogro, que antes eran disciplinas como el latín, u otras de las llamadas lenguas clásicas. Y ello pretendemos conseguirlo simplemente a través de una presentación atractiva y con un mínimo aparato técnico.

La misión principal del Aula Taller-Museo consiste en realizar diversas acciones encaminadas a difundir entre los distintos públicos la importancia de las Matemáticas y del progreso científico y técnico.

El Museo dedicará especial atención a los más jóvenes, procurando estimular en etapas tempranas de su formación la curiosidad por el mundo del que formamos parte, su relación con la ciencia y buscar colaboraciones e implicaciones activas de estos en sus objetivos a través de programas como los talleres del Museo.

La colaboración con otras instituciones educativas como colegios e institutos de educación secundaria tiene un espacio importante en el Aula, concretamente, en los talleres en los que los alumnos, tutelados por los profesores, aprenden y crean, y en el propio Museo donde puedan exponer sus proyectos científicos y realizar visitas guiadas a través del programa de visitas. Por su parte, los cursos, seminarios y grupos de trabajo son foros de discusión dirigidos por científicos y expertos en los que puede participar cualquier persona interesada en conocer los últimos avances de esta ciencia y su divulgación y enseñanza.

En este Aula se pretende enseñar y educar, pero sorprendiendo y deleitando, a un público general, no necesariamente limitado a estudiantes. Se trata de comunicar, mejorar la percepción que el público tiene de la ciencia, concretamente de las Matemáticas, divulgarla, difundirla y popularizarla y hacerla más asequible, objetivos todos ellos que se engloban dentro de la idea de divulgación. Para conseguir estos propósitos se emplearán diversos medios entre los que se pueden destacar la interactividad y la experimentación, llevadas a cabo en entornos multidisciplinares que potencian los aspectos lúdicos y de percepción y análisis de la realidad, con objetos reales pero también con herramientas multimedia.

En resumen señalar, que el proyecto va dirigido a estudiantes de enseñanza infantil, primaria, secundaria y bachillerato, alumnos de universidad, grado y postgrado, y todas aquellas personas que se interesan por las matemáticas y su aplicación y presencia en todas las facetas, por los juegos de ingenio y por la historia de la ciencia.

4. Nuestro proyecto en el mundo

Nuestro proyecto se enmarca en las tendencias más avanzadas de la docencia de las Matemáticas no solo en España sino en los países de nuestro entorno. La consideramos como una experiencia de calidad que puede enmarcarse con otras en la misma línea desarrolladas en Europa o en América, la experiencia de algún miembro del equipo fuera del país así lo atestigua. Pensamos que este hecho sitúa al proyecto, a nuestro equipo y por ende al centro que nos acoge en un centro de referencia en Innovación docente.

Referencias

- [1] EQUIPO DIRECTIVO DEL AULA TALLER-MUSEO DE LAS MATEMÁTICAS "Π-ENSA". Página web del Aula Taller-Museo de las Matemáticas "Π-ENSA".
<http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/>
- [2] GRUPO DE INNOVACIÓN EDUCATIVA PENSAMIENTO MATEMÁTICO. Página web del GIE Pensamiento matemático. <http://www.caminos.upm.es/matematicas/WEBGIE/>

Sobre los autores:

Nombre: Equipo Editorial de Pensamiento Matemático.

Correo Electrónico: ma08@caminos.upm.es

Institución: Revista Pensamiento Matemático. UPM, España.

Entrevista

Vicente Liern: “El arpa y la luz”

Vicente Liern: “The Harp and The Light”

Rosa María Herrera

Revista de Investigación



Volumen V, Número 1, pp. 107–112, ISSN 2174-0410
Recepción: 20 Oct'14; Aceptación: 2 Ene'15

1 de abril de 2015

Resumen

Alegría de vivir contagiosa, evoco a Vicente, científico tanto como músico. Conocedor de los aspectos matemáticos de la afinación, estudioso de las técnicas físicas de la construcción de instrumentos y conocedor de su historia, creador de grupos científico-musicales. Estas líneas sólo son un boceto aproximativo.

Palabras Clave: Afinación, Matemática, Música, Física de partículas, Academia.

Abstract

Contagious joy of living, I evoke Vicente, a scientist as a musician. Knower of the mathematical aspects of tuning, a studious of the physical techniques of building tools and of their history. Creator of scientific and musical groups. These lines are only an approximative sketch.

Keywords: Tuning, Mathematics, Music, Particle Physics, Academy.

1. Introducción

Vicente Liern, catedrático en la facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Valencia, doctor en física de partículas, matemático, músico y quien sabe pronto que más (bueno yo algo sé) ... he aquí el enunciado de la ficha técnica de valores. Pero es la sombra.

Vicente hace buena una idea que mimo entrañablemente sobre la fortaleza de los lazos sutiles (al decir de algunos) entre amigos que charlan con alegría y desenfado de temas leves y extraños (un poco) como la matemática de la afinación, la física que los constructores finos de instrumentos nos pueden hacer ver a todos, las coreografías y las partículas o las coreografías de las partículas ..., pero los que le queremos sabemos que sus méritos, con ser mucho, no son nada comparados con quien es él.

Quizá no hay mayor placer que el de ver, y me gustaría que los lectores se sirviesen de estas notas para mirar un poco de cerca a Vicente.



Figura 1. Vicente Liern (2013).

Es de obligado cumplimiento (casi) que se cite a Pitágoras para comenzar una conversación sobre matemática y música; ya está, nombrado queda, ahora pasemos a conversar sobre música y matemática hoy.

Busco en esta charla entre belleza y estructuras, las relaciones entre las cosas de la naturaleza, que en realidad es lo que siempre me mueve.

El arpa y la sombra es una bella novela escrita por Alejo Carpentier, me gusta como metáfora, aunque, al tomarla prestada del maestro cubano, me alejo notablemente del sentido y juego con él, la novela consta de tres partes el arpa, la mano y la sombra, empecemos.

2. El “arpa”

- *Vicente haznos descubrir el encanto de estudiar los secretos matemáticos de la afinación.*

Yo creo que en el tema de la afinación, las matemáticas juegan el papel de detective, de medio para desvelar secretos. Imagina una cultura en la época que sea, la gente está oyendo sonidos que proceden del mundo que les rodea y de todos ellos, solo unos pocos se consideran bellos: los elegidos, las notas musicales. Bien, ya se sabe que “contra gustos ...”, pero cuando uno se da cuenta de que precisamente los que se han elegido eran los que verifican determinadas propiedades matemáticas, el tema empieza a ser más atractivo. Si a esto se le añade que el fenómeno ocurre en cualquier cultura y en cualquier época, la idea se convierte ya en algo más que una feliz coincidencia. Pues esto es lo que ocurre con la afinación, que sin pretenderlo, la forma de elegir la belleza pasaba por las matemáticas.

- *En tu experiencia de trabajo investigador sobre la afinación, qué estrategias matemáticas usas, cuéntanos algo sobre la evolución de tu trabajo, de qué manera crees que se puede mejorar su conocimiento para trasladarlo a la práctica artesanal de los luthiers.*

La verdad es que cuando era un crío y estaba estudiando en el Conservatorio, me di cuenta de que aquello de las fracciones (a las que el profesor siempre llamó “números quebrados”) también servían en música. Luego, cuando ya estaba estudiando en la Facultad, comprendí que las sucesiones y las construcciones con regla y compás eran importantes tanto en música como en matemáticas. Claro, para los luthiers de hace siglos, que los métodos se basasen en la geometría clásica y el uso de la regla y el compás, resultaba fundamental. Pero no olvidemos que la labor del luthier, muchas veces es la de mediador. Tiene que llegar a soluciones aproximadas para que los instrumentos suenen bien en conjunto. En esto, y en la posibilidad de analizar con precisión los sonidos, más allá del oído, la computación resulta muy útil.

- *Creas que los instrumentos simulados computacionalmente, algunos de los cuales son imposibles físicos (por ejemplo, pianos con cuerdas de 10 m de longitud ...), pero que producen sensaciones auditivas que parecen tener origen en instrumentos reales aportan ideas interesantes para los estudios teóricos, pero también de construcción de instrumentos.*

Vamos a ver, yo creo que en el arte casi todo vale. Por supuesto que los instrumentos obtenidos computacionalmente son válidos, pero esto no nos permite olvidar que la esencia pura de la música está en los sentimientos. Si estas iniciativas son válidas para transmitir y provocar sentimientos, bienvenidas sean. Si por el contrario se trata de una cuestión de “obsesión por la originalidad”, que no hace más que tapar la falta de imaginación, entonces estas iniciativas pierden su valor.

No hace mucho, un compositor bastante famoso me decía que en su última obra se le había ido la mano, que sonaba demasiado *tonal*. En mi opinión, cuando a la música se le quita su componente de “transmisor de emociones” y de belleza, se le está quitando una parte fundamental de su esencia.

3. La "sombra"

La luz y la sombra son la una a la otra como "el aquel que fui ya no soy, por eso vamos juntos los dos" del poeta, cuando la una es la otra deja de ser, por eso no hay quizá mejor opción que querer a ambas y cuidarlas nunca una en detrimento de la otra.

- Vicente, ¿qué hace un físico de partículas, o pongamos un matemático, metido a economista?, intuyo que la afinación te salva, ¿qué me cuentas de eso?

A mí, lo que realmente me gusta son las Matemáticas como lenguaje. Un lenguaje poderoso que te permite explicar de forma breve y precisa la Física, la Economía o la Música, por ejemplo. Pero no solo son una herramienta para transmitir. Permiten manejar la lógica y la síntesis como pocas cosas... Vamos, que quien se empeña en mostrar una realidad dividida en compartimentos separados creo que se equivoca: la realidad es la que es. Si nosotros no somos capaces de explicarla sin hacer pequeñas parcelitas de ella, eso ya es problema nuestro.

- Cómo compaginas tu investigación en matemática aplicada a la economía, con las obligaciones inherentes a tu posición en la universidad y a tu rica y profusa vida particular (con dos hijas adolescentes incluidas).

Pues la verdad es que yo también me lo planteo a veces. Para empezar, duermo poco, y no porque tenga problemas de insomnio, sino porque hay que dedicarle muchas horas. También es verdad que ayuda tener la suerte de concentrarme bastante bien... A veces mis hijas me reprochan que estoy viendo la televisión, pero completamente concentrado en otra cosa.

4. La "luz"

4.1. La plataforma *ConCiencia Musical*

Nos conocimos Vicente y yo gracias a su idea transformada en propósito de crear un grupo interdisciplinar de personas con intereses científico musicales, ello le llevó a organizar unas jornadas en Madrid, por las que yo caí; llegué, miré y me quedé enganchada en su magnética personalidad, en su entusiasmo contagioso, en su bonhomía, y en su jovial, divertida e inteligente conversación; este grupo que ahí se creó me puso en contacto con personas que se instalaron de una u otra forma en mi vida, y a estas alturas no importa las distancias que nos separen, la disolución o no del grupo, el caso es que las personas siempre estamos cerca.

Vicente, mereció la pena, gracias, lo sabes ¿verdad?

- Y ahora, cuenta a los lectores, por favor, cómo se gestó la plataforma, en qué consiste y qué perseguía.

La plataforma perseguía poner en contacto a personas que trabajábamos en distintas facetas de arte y ciencia y la verdad es que de alguna forma se consiguió. No daré nombres de sus participantes, porque sé que me dejaré muchos y quedaré fatal, pero lo cierto es que surgieron relaciones que van más allá de las publicaciones o las conferencias.

4.2. El científico que estudia música a través de la matemática

Recuerdo la lectura de algunos de los artículos de Vicente y además de interesantes me parece que abordan temas relativos a la matemática de la afinación de manera original, no en vano es un estudioso y pensador del tema, sino que presenta su investigación y sus resultados de una manera que hace amena la lectura, ese estilo al que se mantiene fiel, desde los trabajos divulgativos más sencillos hasta algunos más técnicos que han venido a parar a mis manos.

- Explícanos, por favor Vicente, a grandes rasgos los aspectos matemáticos de los sistemas de afinación y su compatibilidad en la construcción musical.

Un sistema de afinación no es más que una forma ostentosa de llamar al conjunto de las notas musicales. Claro, la cuestión es que la música es tan antigua como el hombre y determinar con qué criterio unos sonidos valen para hacer música y otros no resulta sencillo. Los sistemas que han perdurado desde los pitagóricos hasta nuestros días son los que se obtenían de forma matemática. Estoy hablando de conjuntos obtenidos por multiplicaciones y divisiones sucesivas de potencias de 2 y de 3. Más tarde se incorporó también el 5 con la Justa Entonación. Pero la evolución de la música hacia la polifonía hizo que con el uso de fracciones no fuese suficiente y hubo que recurrir a los números irracionales y con ellos se obtuvieron los temperamentos que usamos hoy en día.

Por supuesto, la evolución de los sistemas de afinación se dio en paralelo (y no sé quién empujó a quién) con la evolución de las Matemáticas y, por lo tanto, de las técnicas de construcción de instrumentos, que siempre ha sido una labor en la que se contaba con cálculos, en muchas ocasiones guardados como auténticos secretos.

- ¿Qué me cuentas de la incertidumbre (de esto ya hemos hablado y se que te gusta introducir este tema físico matemático en la conversación matemática sobre la afinación, hago trampas), los números borrosos?

En general, las Matemáticas o la Física se ven como disciplinas capaces de dar algunas explicaciones teóricas del mundo que nos rodea. Sin embargo, se acepta que el mundo real es otra cosa, sigue sus propias leyes (parecidas a las que describe la física) que siempre tienen desajustes. Pues ahí es donde entra la incertidumbre, la lógica borrosa (Fuzzy Logic, en inglés). Cuando te estás comiendo una manzana, ¿en qué momento deja de ser manzana? ¿cuándo te has comido la mitad?, ¿cuándo te la comes entera? Lo cierto, es que para la lógica borrosa (o para cualquiera de nosotros) la manzana pasa de ser manzana a no serlo de forma progresiva. Pasa del 1 al 0 de forma continua, del blanco al negro pasando por todas las gamas de gris... Esta es la lógica que en mi opinión sigue la música y la mayoría de actividades en las que participan las decisiones humanas.

- Hay una idea muy valiosa y simpática que te he leído alguna vez sobre las notas interpretadas (o explicadas no recuerdo) como conjuntos números borrosos, creo que será bonita para nuestros lectores.

Como te decía antes, lo que ocurre es que las notas musicales no son una frecuencia y ya está. Las notas son algo más que eso. Por ejemplo, una nota que se diferencia de otra en muy poco (pongamos 10 cents, para los más expertos), se perciben en la práctica como casi la misma nota. Esto significa que las notas no debería expresarse como una frecuencia sino como un intervalo (un segmento) en el que la nota afinada ocuparía el punto medio y los extremos se obtendrían aumentando y disminuyendo una cierta tolerancia que estamos dispuestos a aceptar.

En mi opinión, este salto de un punto -la frecuencia- a un conjunto hace que se puedan elegir otras posibilidades para aumentar la consonancia sonora de la agrupación. Pero además, pueden contribuir a aumentar la calidad y la belleza de la Música en conjunto y, al fin y al cabo, de esto es de lo que estamos tratando: De que Ciencia y Arte se complementen.

5. Para finalizar

Las palabras de despedida y agradecimiento son naturales llegados a este punto. Desde que empezamos esta conversación han tenido lugar algunos acontecimientos interesantes que no quiero dejar de señalar, por ejemplo que Vicente, el doctor Liern, ha sido elegido Académico de la "Reial Acadèmia de Doctors" de Cataluña, hecho, me consta, que le costó comunicar incluso a los amigos, por puro pudor y por su naturaleza cercana y amistosa tan poco dada a la pompa,

la solemnidad y el boato. Pero Vicente lo vale y estamos orgullosos de él.

Antes de cerrar, quiero resaltar una cualidad personal por la que le admiro, su capacidad de estar a la altura de las circunstancias en las distancias cortas, pero también en las situaciones públicas; esto no es imposible, pero es una cualidad infrecuente. Como profesor tiene experiencia larga con jóvenes, como antiguo director de departamento la tiene con toda suerte de problemas de la gestión universitaria, siempre persona de consenso, hay mucho que aprender de él en este terreno, y en algunos otros también.

Hasta pronto Vicente, cualquier día nos tomamos un café, en Madrid, Valencia o en la localidad que nos toque.

Referencias

- [1] CONDE, L. A., FIGUERAS, O., LIERN, V. y PLUVINAGE, F. C. B. "El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza", SUMA (68), pp. 109–116, 2011.
- [2] DEL CORRAL, A., LEÓN, T. y LIERN, V. "Compatibility of the different tuning systems in an orchestra", Communications in Computer and Information Science (38), pp. 93–103, 2009.
- [3] GODOFREDO, J. L., LEÓN, T. y LIERN, V. "Música e informática en las clases de matemáticas", SUMA (64), pp. 113–118, 2010.
- [4] LEÓN, T. y LIERN, V. "Fuzzy logic helps to integrate music theory and practice", 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence, WCCI 2010, art. no. 5584652, 2012.
- [5] LIERN, V. "Música y Matemáticas en educación primaria", SUMA (66), pp. 107–112, 2011.
- [6] LIERN, V. "Algoritmos matemáticos y afinación musical", Educación Matemática (6), pp. 45–55, 1994.
- [7] LIERN, V. *El eco de la música de las esferas*. Las Matemáticas de las consonancias, ISBN: 978-84-616-9929-2. Ed. Reial Acadèmia de Doctors y ESERP, Barcelona, 2014.
- [8] LIERN, V. "Euler y su interés por la música", SUMA (70), pp. 93–98, 2012.
- [9] LIERN, V. "Fuzzy tuning systems: The mathematics of musicians", Fuzzy Sets and Systems 150 (1), pp. 35–52, 2012.
- [10] LIERN, V. "La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida", SUMA (58), pp. 137–143, 2008.
- [11] LIERN, V. "La música y sus materiales: una ayuda para las clases de matemáticas", SUMA (14–15), pp. 60–64, 1994.
- [12] LIERN, V. "Las fracciones de la Música", SUMA (59), pp. 129–134, 2008.

Sobre la autora:

Nombre: Rosa María Herrera

Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com

Institución: European Society For Astronomy (Consortium).

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

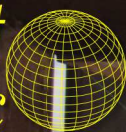
Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.



Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

G.I.E

*Pensamient
Matemàtic*



MAIC

