

# Experiencias Docentes

## Un trabajo con espirales

### An assignment with spirals

D. Cano-Lasso, M.C. Escribano, J.C. Garro, J. Rojo, J. Tarrés y S. Victoria

Revista de Investigación



Volumen VI, Número 2, pp. 047-062, ISSN 2174-0410

Recepción: 23 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de octubre de 2016

#### Resumen

Se plantea a estudiantes de Arquitectura la construcción de una espiral logarítmica desde una espiral discreta, y a partir de ella, una loxodroma sobre la esfera unidad, en un trabajo integrado en el marco de un curso de geometría de curvas y superficies. Se busca motivar al alumno mediante relaciones entre cada uno de los objetos geométricos que aparecen en el trabajo con su interés más obvio (la Arquitectura) y otros campos como el arte, la historia...

**Palabras Clave:** Espiral, hélice, loxodroma, Arquitectura.

#### Abstract

From a discrete spiral, a development of a logarithmic spiral is proposed to students of Architecture and from this one, the goal is to get a loxodrome on the unit sphere, in an assignment included in a course of 'Geometry of Curves and Surfaces'. The aim would be to motivate the student by means of relationships between each of the curves that appears in the assignment and Architecture (his main interest) and another fields like Art, History...

**Keywords:** Spiral, helix, loxodrome, Architecture.

## 1. Presentación

En el entorno de una escuela de Arquitectura conviven disciplinas que buscan la integración en un proyecto arquitectónico de aspectos no sólo científicos y técnicos sino también estéticos y funcionales. Algunos alumnos tienen la percepción errónea de estudiar asignaturas diversas en compartimentos estancos. De hecho, asignaturas no estrictamente "arquitectónicas" (matemáticas, física...) son, a veces, catalogadas por alguno de ellos como "prescindibles". De modo que cualquier sugerencia que permita abordar un tema bajo puntos de vista diferentes, interrelacionándolos, influye muy positivamente en la visión global del alumno sobre su formación.

Partiendo de una serie de puntos en el plano construidos a partir de una sucesión de triángulos, que sugerían una espiral discreta, se planteará un trabajo para los alumnos del segundo año del grado en Arquitectura. En la asignatura de matemáticas de este curso se introduce el estudio de la geometría diferencial de curvas y superficies.

Este artículo pretende ser una “guía de trabajo metodológica” para el alumno. Su tarea consistiría en un pequeño estudio sobre la relación entre espirales, hélices y loxodromas (objetos estudiados en el curso) con la Arquitectura, añadiendo un problema de obtención de una espiral logarítmica a partir de una espiral discreta. Una vez obtenida esta espiral, completaría el trabajo la obtención de una loxodroma sobre la esfera unidad relacionada con la espiral anterior.

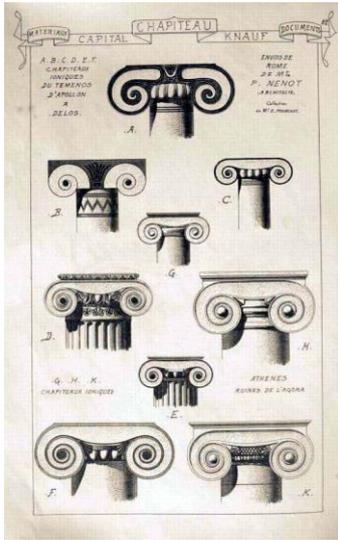
## 2. Trabajando con una espiral

Las espirales forman parte del imaginario humano desde tiempos inmemoriales. Puede que su belleza y su estética sean responsables, al menos en parte, de la insistente utilización de estos objetos, cualquiera que sea su definición formal, como motivos decorativos o soluciones arquitectónicas. Pero también es cierto que aparecen como protagonistas en la solución de multitud de problemas científicos: problemas geométricos, problemas de mecánica celeste... Así pues no parece descabellado pensar en las espirales como nexo entre el arte, la artesanía, la arquitectura, el diseño industrial, la ciencia...



Figura 1. Formas espirales.

Desde las volutas de una columna jónica hasta innovadores proyectos de hoy en día, pasando por las clásicas escaleras de caracol, tanto la arquitectura como el urbanismo y el paisajismo han encontrado en las espirales una inagotable fuente de inspiración.



A)



B)

Figura 2. A) volutas jónicas. B) escalera del Museo Vaticano (Bramante) .



Figura 3. The Garden of cosmic speculation (Escocia). Arqu.: Charles Jencks.

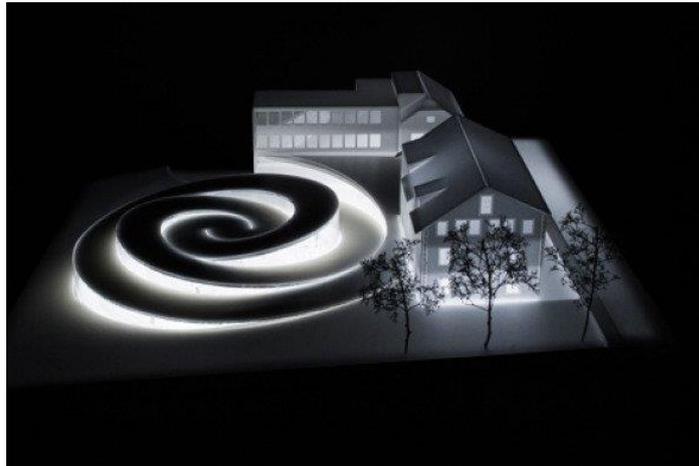


Figura 4. Proyecto "Maison de fondateurs" marca relojera Audemars Piguet (Le Brassus, Suiza). Arquitectos: equipo BIG.



Figura 5. Mapa de Jericó del siglo XIV en la Biblia Farhi de Elisha ben Avraham Crescas.

El punto de partida de este trabajo es una "curiosidad" geométrica planteada por el profesor y arquitecto Diego Cano. Su idea de una serie de puntos en el plano construidos a partir de una sucesión de triángulos, que sugerían una espiral discreta, es la base para el trabajo planteado a los alumnos.

La espiral sugerida, que llamaremos "espiral canophi", está inspirada en el bien conocido número áureo,  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , en particular, usa el término  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Para su construcción se parte de un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 1 y 2 y cuya hipotenusa es  $\sqrt{5}$ . El cateto de mayor longitud y la hipotenusa se cortan en el vértice  $V$ .

Se construye un triángulo rectángulo adyacente que tiene como cateto mayor la hipotenusa del triángulo inicial, y cuyo segundo cateto mide la mitad del primero. El proceso iterativo de construcción de los consecutivos triángulos rectángulos adyacentes será el mismo.

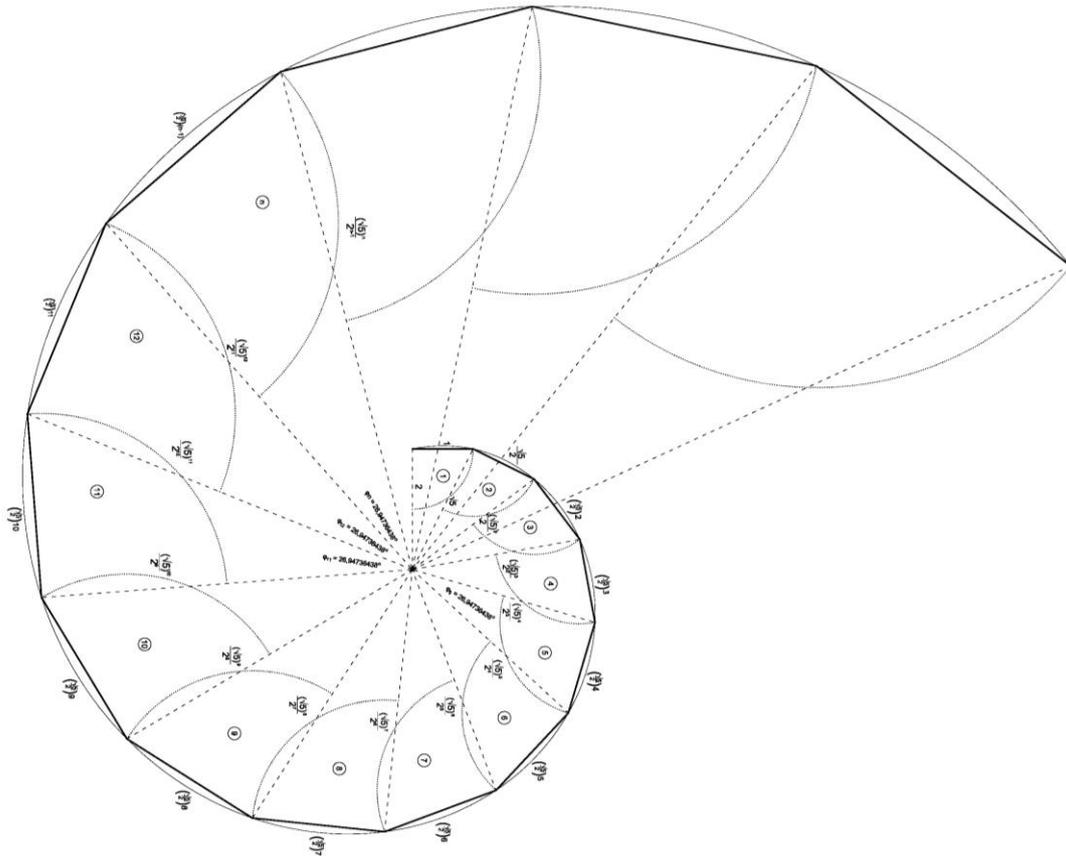


Figura 6. Espiral canphi.

La espiral discreta así obtenida, sigue el mismo principio de construcción de la tan estudiada Espiral de Teodoro (figura 7), en la que partiendo de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitudes 1, se van formando triángulos rectángulos que tienen como cateto mayor la hipotenusa del triángulo precedente, y el otro cateto siempre de longitud 1. Así, las longitudes de las hipotenusas van resultando la progresión de todas las raíces cuadradas de los números naturales ( $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{17}, \dots$ ).

El problema de la obtención de una espiral continua que pase por todos estos vértices es un problema complejo [3], aunque inicialmente se pensó que podía ser resuelto con una espiral de Arquímedes (espiral continua definida como curva trazada por una partícula que se mueve con velocidad constante a lo largo de una semirrecta que gira uniformemente en torno a uno de sus extremos).

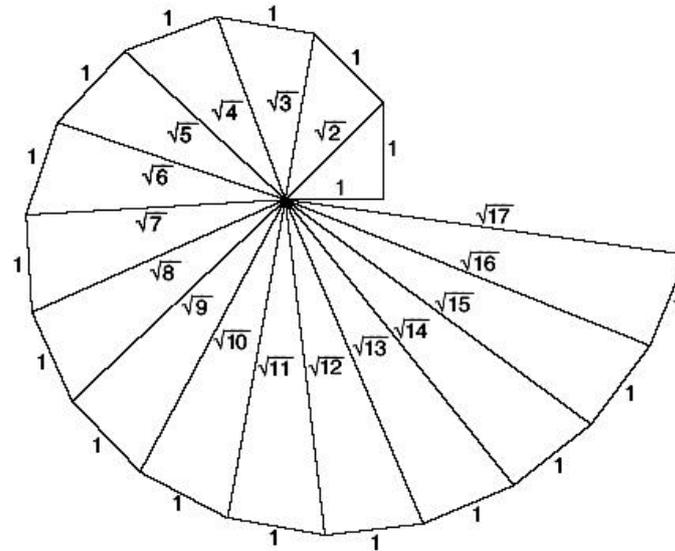


Figura 7. Espiral de Teodoro

Volviendo a la *espiral canophi*, en la sucesión de triángulos cuyos catetos están en razón de 2 a 1, las medidas de los catetos y de las hipotenusas de cada nuevo triángulo rectángulo son las del triángulo que le precede multiplicadas por la constante  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Es decir, la sucesión de longitudes de los catetos mayores es  $2, \sqrt{5}, \frac{(\sqrt{5})^2}{2}, \frac{(\sqrt{5})^3}{2^2}, \dots, \frac{(\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-2}}, \dots$ , la de los catetos menores resulta  $1, \frac{\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \dots$  y la de las longitudes de las hipotenusas es  $\sqrt{5}, \frac{(\sqrt{5})^2}{2}, \frac{(\sqrt{5})^3}{2^2}, \dots, \frac{(\sqrt{5})^n}{2^{n-1}}, \dots$

Por otra parte el ángulo en el vértice  $V$  de las rectas que contienen a las hipotenusas de dos triángulos adyacentes es constante e igual a  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26^\circ 33' 54''$ . Los nuevos vértices que constituyen esta espiral discreta pueden ser interpolados por una espiral continua de tipo logarítmico.

Intentemos buscar la ecuación de una curva espiral de polo  $V$  de la que formen parte los sucesivos vértices de la construcción  $(z_0, z_1, z_2, \dots)$ .

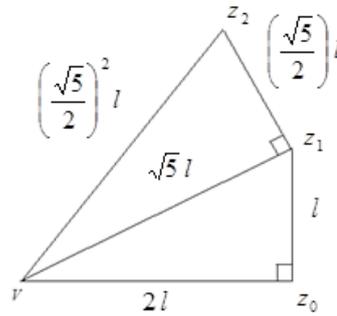


Figura 8. Triángulos de la espiral canófica.

Observamos que cada uno de los vértices es el resultado de aplicar una semejanza sobre el anterior de razón  $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$  y ángulo  $\theta = \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$ , es decir, se puede considerar la sucesión de vértices como la órbita de un sistema dinámico discreto asociado a la aplicación en el plano complejo

$$F(z) = Az \quad \text{con} \quad A = a e^{i\theta}$$

de manera que la órbita de condición inicial  $z_0$  viene dada por

$$z_k = F^k(z_0) = A^k z_0 = a^k e^{ik\theta} z_0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Este sistema dinámico tiene dos puntos fijos,  $V$  y  $\infty$ , uno de ellos repulsor y el otro atractor.

La órbita del sistema dinámico continuo asociado a la misma aplicación, interpola los puntos de la órbita anterior y su ecuación es

$$z(t) = F^t(z_0) = a^t e^{it\theta} z_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta que

$$z'(t) = a^t \log a e^{it\theta} z_0 + i\theta a^t e^{it\theta} z_0 = z(t)[\log a + i\theta], \quad t \in \mathbb{R}$$

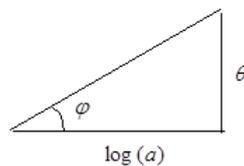


Figura 9

el ángulo  $\varphi$  que forman sus tangentes con las correspondientes semirrectas polares es independiente de  $t$  e igual a  $\text{arccotg} \frac{\log(a)}{\theta}$ . Esta propiedad geométrica es característica de las espirales logarítmicas o equiangulares.

En el caso de la *espiral canophi* este ángulo  $\varphi$  es igual a

$$\operatorname{arccot} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)} \approx \operatorname{arccotg}(0.24) \approx 76^{\circ}28'$$

Las espirales logarítmicas (exponenciales, equiángulares), tratadas matemáticamente en primera instancia por Descartes (1596-1650) y Torricelli (1608-1647), fueron estudiadas en profundidad por Jacob Bernoulli (1654-1705), el cual descubrió algunas de sus propiedades más celebradas. Entre ellas, una espiral logarítmica es la única curva cuyas evoluta, involuta, podaria y cáustica [1] son de nuevo una espiral logarítmica. De modo que estas curvas presentan condiciones de “auto semejanza” (“Eadem mutata resurgo”).

El tipo de crecimiento de multitud de organismos naturales que presuponen a la vez dilataciones y rotaciones responde a un modelo regido por estas curvas.

Una espiral logarítmica muy especial es la denominada “espiral áurea”, en la cual, la razón de la semejanza  $a$  es el número de oro  $\phi$  y el ángulo  $\theta$  es  $\frac{\pi}{2}$ .

Su relación con la “divina proporción” y con la serie de Fibonacci ha hecho que, históricamente, se haya utilizado en innumerables ocasiones como ejemplo de armonía y belleza. Hay múltiples estudios sobre su uso, o al menos su aparente presencia, en diversos ejemplos en arquitectura, arte, naturaleza, astronomía, estructuras fractales...



Figura 10. Espiral áurea.

Un artista ampliamente estudiado bajo el prisma de las matemáticas es M.C. Escher (1898-1972). En sus trabajos destaca el uso de propiedades geométricas como simetrías y embaldosados, geometrías “imposibles” o geometrías no euclídeas, en especial la hiperbólica. El arte de Escher ha sido investigado también por sus propiedades conformes o propiedades que conservan su diseño cuando se aplica al mismo una transformación que conserva ángulos. En algunos de sus grabados juegan un papel importante las espirales logarítmicas.

En la xilografía “Paths of life III” de 1966, H. Burgiel y M. Salomone [2] muestran cómo el resultado final puede obtenerse a partir de una teselación plana de celdas congruentes tras aplicar a la misma una transformación conforme. En la obra aparece un total de doce espirales logarítmicas que marcan las trayectorias de vida a las que se refiere el título (figura 11).

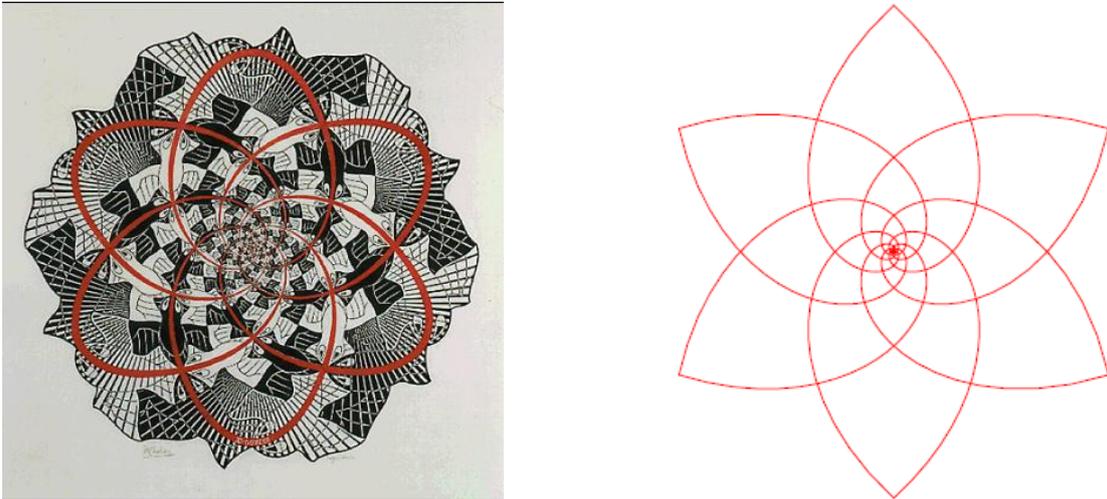


Figura 11. Xilografía “Paths of life III” M.C.Escher.

El esquema inicial de la obra sigue la pauta de un embaldosado de formas congruentes en el que actúan dos traslaciones de direcciones perpendiculares entre sí (figura 12).

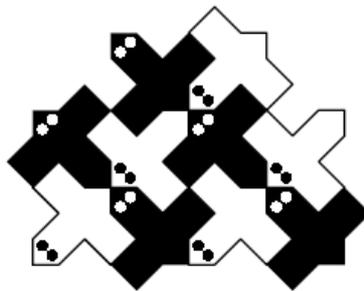


Figura 12. Embaldosado origen de “Paths of life III”.

Escher introduce un factor de distorsión en su grabado: las figuras aumentan de tamaño al aproximarse al límite exterior de la obra y se desplazan siguiendo las espirales a la vez que se crea una “simetría” cuyos ejes son estas curvas.

H. Burgiel y M. Salomone en su trabajo [2] observan cómo, mediante una transformación exponencial en el plano complejo, se pasa del embaldosado inicial a la imagen de la xilografía (figura 13).

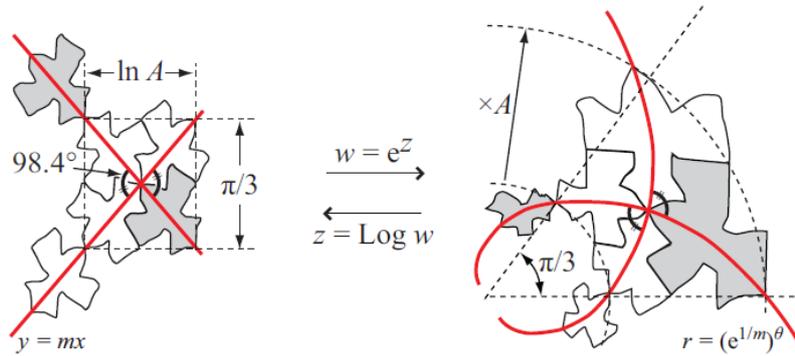


Figura 13. Transformaciones que relacionan la xilografía y el embaldosado.

Una extensión natural al espacio tridimensional de las características geométricas de una espiral logarítmica conduce a las hélices y a las loxodromas.

Una hélice cilíndrica es una curva tal que sus tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija. Una loxodroma de una superficie de revolución es una curva cuyas tangentes forman un ángulo constante con los meridianos a los que va cortando.

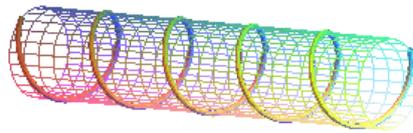


Figura 14. Hélice cilíndrica circular.

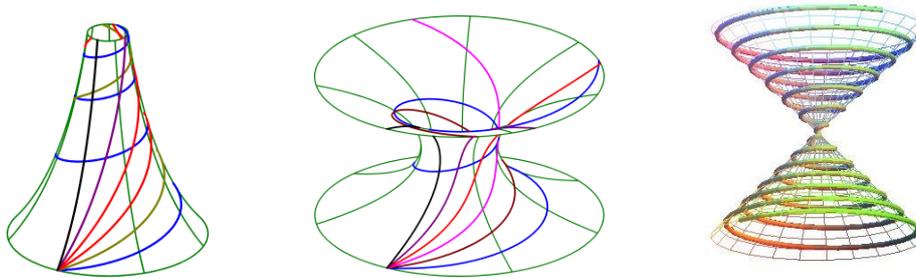


Figura 15. Loxodromas en una pseudo-esfera, en un catenoide y en un cono.

Las hélices cilíndricas más “sencillas” son hélices circulares (que a su vez son loxodromas de un cilindro circular recto). Sus tangentes forman un ángulo constante con las generatrices.

Las loxodromas más conocidas son las de una esfera. En 1546 el marino portugués Pedro Nuno, en el “Tratado de la navegación”, interesado en navegar siguiendo líneas en la “esfera” terrestre que cortaran a los meridianos bajo ángulo constante, estudió estas curvas. Pocos años después, en 1569, se observó al estudiar la proyección de Mercator, que ésta cartografía las

loxodromas de una esfera como rectas del plano, hecho que daba cierta importancia a estos mapas. Son, por tanto, las líneas de rumbo fijo en navegación.

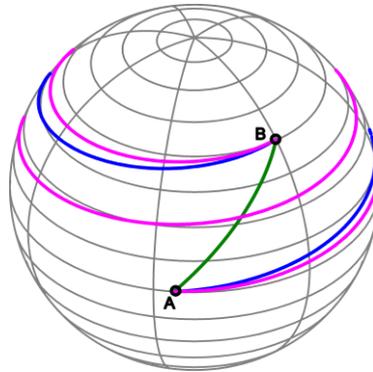


Figura 16. Loxodromas de una esfera pasando por dos puntos.

En la figura 16 se ilustra cómo existen distintas loxodromas que pasan por dos puntos de la esfera. Según la dirección que tomemos al movernos desde el punto inicial, podemos seguir una u otra de las loxodromas que pasan por ambos puntos.

Si retomamos la cuestión del uso de este tipo de curvas en campos como la Arquitectura o el diseño industrial, y se piensa en hélices, el primer ejemplo que probablemente tendremos en mente será el de las escaleras de caracol, si bien es cierto que su utilización se ha extendido a todo tipo de trabajos y a los proyectos arquitectónicos más modernos.

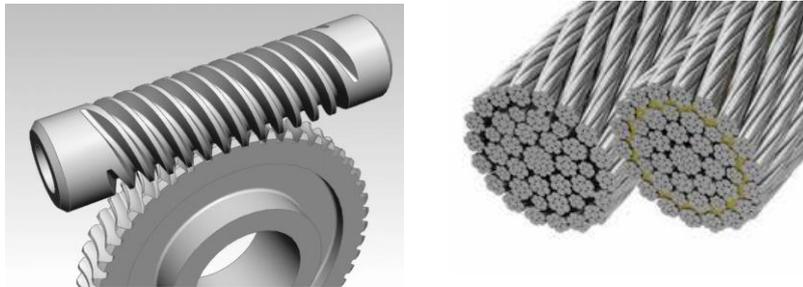


Figura 17. Hélices cilíndricas en diseños industriales.



A)



B)



C)



D)



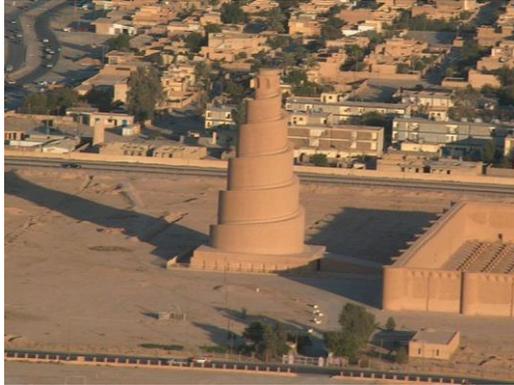
E)



F)

Figura 18. A) Catedral de Sta.María la Real (Pamplona) B) Palacio Contarini del Bovolo (Venecia)  
C) Catedral de Monreale (Sicilia) D) Puente de Arganzuela. Arqu.: D.Perrault  
E) Centro Niemeyer (Avilés) F) Agora Garden (Taipei). Arqu.: Vincent Cabellaut.

En cuanto a loxodromas, encontramos muestras de este tipo de curvas formando parte, por ejemplo, de la “piel” de estructuras y bóvedas esféricas, en construcciones cónicas,....



A)



B)



C)



D)



E)

Figura 19. A) Mezquita Samarra (Iraq, año 852) B) Museo marítimo de Osaka (Japón) Arqu.: P. Andreu  
C) Reichstag (Berlín) Arqu.: Norman Foster D) Museo Guggenheim (Nueva York) Arqu.: Frank Lloyd Wrigh E) Propuesta para parque ciclista en Chongming (China) Arqu.: Estudio JDS



Figura 20. Ribbon Chapel (Hiroshima, Japón) Arqu.: H.Nakamura & NAP.

Una de las propiedades más características de las loxodromas de la esfera es que la imagen mediante una proyección estereográfica de cualquiera de ellas, resulta una espiral logarítmica.

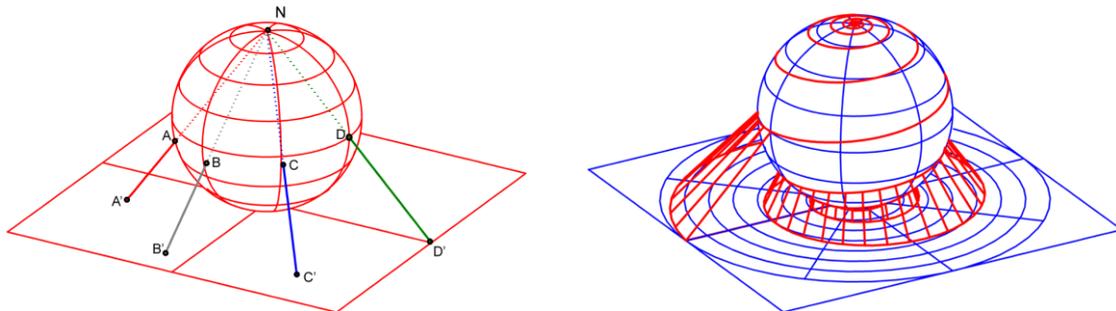


Figura 21. Proyección estereográfica. Imagen de una loxodroma.

Esta propiedad es resultado del hecho de que una proyección estereográfica es una aplicación conforme y, puesto que conserva ángulos, una curva sobre la esfera que mantiene ángulo constante con los meridianos (loxodroma), se transforma en una curva en el plano (espiral) que mantiene el mismo ángulo constante con las rectas que pasan por el origen.

En base a esta propiedad, el problema que completaría el trabajo de los alumnos sería el de la obtención de la loxodroma sobre la esfera relacionada con una espiral logarítmica dada (por ejemplo la que interpola la espiral *canophi*) mediante la inversa de la proyección estereográfica.

Este tipo de relación entre espirales y loxodromas está reflejada, como no podía ser de otra forma, en algunos trabajos de Escher. J.Marcotte y M.Salomone [4] han estudiado cómo la xilografía "*Sphere Surface*" (1958) es el resultado de aplicar a un embaldosado regular del plano diversas transformaciones conformes (figura 22). El resultado final de estas aplicaciones dibuja un teselado sobre la esfera con un patrón loxodrómico, pasando por la utilización de

una proyección estereográfica en una fase intermedia en la que aparecen espirales logarítmicas (figura 23).



Figura 22. "Sphere Surface" (M.C. Escher) y embaldosado plano asociado.

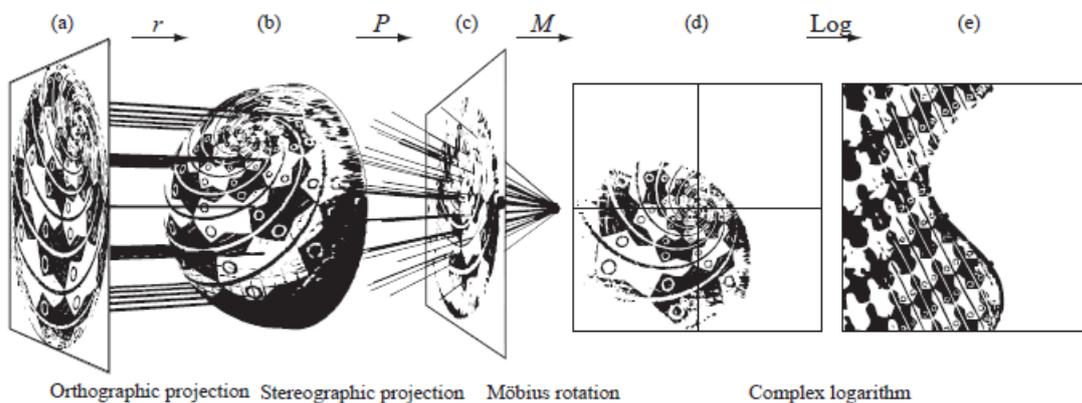


Figura 23. Figura de [4], pg. 41.

### 3. Conclusiones

Nuestra pretensión con este trabajo es estimular la curiosidad en los alumnos sobre cuestiones elementales de la asignatura de Matemáticas, tratando de buscar enlaces entre su más obvio objeto de interés, la Arquitectura en sí misma, y campos como el arte, la historia, las matemáticas...

Los alumnos suelen responder muy positivamente a cualquier iniciativa que resalte los aspectos más visuales, aunque quizás menos formales de los temas que se tratan.

¡Qué mejor ambiente que el de la Arquitectura para conseguirlo!

### Referencias

- [1] BRUCE, J.W, and GIBLIN, P.J., *Curves and singularities*, Cambridge University Press, 1992.
- [2] BURGIEL, H., SALOMONE, M., *Logarithmic Spirals and Projective Geometry in M.C. Escher's*

“Path of life III”, páginas 22-35. Journal of Humanistic Mathematics, Vol.2 No.1, January 2012.

- [3] DAVIS, J.P., *Spirals from Theodorus to Chaos*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [4] MARCOTTE, J., and SALOMONE, M., *Loxodromic Spirals in M.C.Escher's Sphere Surface*, páginas 25-46. Journal of Humanistic Mathematics, Vol.4 No.2, July 2014.
- [5] PRESSLEY, A., *Elementary differential geometry*. Springer U.M.S, London, 2002.

**Sobre los autores:**

*Nombre:* Diego Cano-Lasso

*Correo Electrónico:* dcanolasso.eps@ceu.es

*Institución:* Universidad San Pablo CEU, España.

*Nombre:* M. Carmen Escribano

*Correo Electrónico:* escrod@ceu.es

*Institución:* Universidad San Pablo CEU, España.

*Nombre:* J. Carlos Garro

*Correo Electrónico:* garro.eps@ceu.es

*Institución:* Universidad San Pablo CEU, España.

*Nombre:* J. Rojo

*Correo Electrónico:* jrojo.eps@ceu.es

*Institución:* Universidad San Pablo CEU, España.

*Nombre:* J. Tarrés

*Correo Electrónico:* jtarres@ucm.es

*Institución:* Universidad Complutense de Madrid, España.

*Nombre:* S. Victoria

*Correo Electrónico:* victoria.eps@ceu.es

*Institución:* Universidad San Pablo CEU, España.