

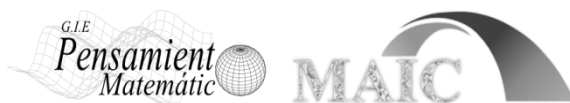
# Investigación

## Matemáticas y competición política

### Mathematics applied to the political competition

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación



Volumen VI, Número 1, pp. 093–106, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Dic'15; Aceptación: 1 Mar'16

1 de abril de 2016

#### Resumen

En este artículo se aplican técnicas de la Geometría Computacional a la resolución de problemas de competición política bipartidista.

**Palabras Clave:** Localización, Teoría de Juegos, Geometría Computacional.

#### Abstract

In this paper techniques of the Computational Geometry are applied in order to solve problems of political competition between two parties.

**Keywords:** Location, Game Theory, Computational Geometry.

## 1. Introducción

Los procesos electorales son un tema relevante en el desarrollo de los países democráticos, ya que los resultados de las elecciones condicionan el devenir de dichos países en periodos de cuatro años, teniendo impacto en las políticas económicas, sociales, culturales, ... que se aplican a los ciudadanos.

Es por ello que el análisis de la competición política se ha realizado desde diversos puntos de vista, no faltando el enfoque matemático en los estudios vigentes.

Se pueden distinguir dos vertientes matemáticas en el acercamiento a la competición política:

La teoría espacial del voto, donde destacan los trabajos de Hinich y Laver (ver [5], [6])

La utilización de la teoría de juegos para modelar la competición política (ver por ejemplo [8])

En los trabajos de Hinich y otros autores se define un espacio de políticas unidimensional ó bidimensional de acuerdo con los datos de encuestas sobre determinados ítems (por ejemplo, Educación y Sanidad), para que el espacio de políticas modele la realidad subyacente.

Los partidos ofrecen políticas en dicho espacio intentando ajustarse a las preferencias de los votantes. La utilidad de la política ofrecida por cada partido se modela según su distancia a las posiciones de los votantes (a menor distancia, más utilidad).

Laver plantea en sus trabajos con otros autores un modelo basado en agentes, multidimensional y con varios partidos. Desecha el modelo geométrico dinámico basado en distancias entre los partidos y los votantes por ser analíticamente intratable y lo sustituye por un modelo computacional basado en simulaciones realizadas con ordenador.

Roemer asume un continuo de ciudadanos y estudia modelos (Downs, Wittman) desde el punto de vista de la teoría de juegos: estrategias de victoria, análisis del equilibrio... en diferentes casos: certidumbre, incertidumbre, una dimensión, varias dimensiones...

La aproximación llevada a cabo en el presente artículo es parecida a la de Roemer, pero suponiendo una población discreta. En concreto, en el artículo se presenta una recopilación de los resultados obtenidos por el autor con varios coautores en el estudio de diferentes modelos de competición política bipartidista, en un espacio de políticas bidimensional. La consideración de un conjunto finito de posibles ganancias de los partidos junto con un espacio de políticas infinito constituye la originalidad del trabajo realizado. Los coautores de los artículos de los que se presentan resultados son Manuel Abellanas, Sagrario Lantarón, Isabel Lillo y María Dolores López.

La organización del artículo es la siguiente: En la sección 2 se presenta un modelo de competición política con restricciones de entorno. En la sección 3 se presenta un modelo de competición sin restricciones en las políticas ofrecidas. Por último, en la sección 4 se presenta un modelo análogo al de la sección 3, pero con ponderaciones en el valor de los votantes. En esta última sección hay algún resultado novedoso, que se presenta con prueba.

## 2. Competición política con restricciones

### 2.1 El modelo

Formalmente, el juego que se plantea en esta sección es el siguiente (ver [1] para mayor detalle): Tenemos dos partidos  $p$  y  $q$  que se posicionan en dos entornos circulares disjuntos del plano de políticas,  $B$  y  $B'$  respectivamente, según las políticas que ofrecen sobre dos determinados ítems como pueden ser Sanidad y Educación.

Existe un conjunto finito de votantes posicionados también en el plano de políticas según sus preferencias sobre esos ítems:  $H = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Suponemos que cada individuo vota al partido que ofrece unas políticas más cercanas a sus preferencias. Por tanto, dado un perfil de estrategias  $t_1 \in B$ ,  $t_2 \in B'$  tenemos que las ganancias de cada partido son:

$$\begin{aligned}\Pi^1(t_1, t_2) &= (\text{número de puntos } p_i \text{ tales que } d(p_i, t_1) \leq d(p_i, t_2)) \\ \Pi^2(t_1, t_2) &= (\text{número de puntos } p_i \text{ tales que } d(p_i, t_1) > d(p_i, t_2)) = \\ &= n - \Pi^1(t_1, t_2)\end{aligned}$$

Obsérvese que las ganancias son enteras, el conjunto de posibles ganancias de cada partido es finito y el juego es de suma constante: el número de votantes. La distancia  $d$  que se utiliza es la euclídea. Los puntos equidistantes se adjudican al primer partido, ya que se supone que es el partido gobernante en el momento de las elecciones.

El objetivo de la siguiente subsección es encontrar posiciones de estabilidad bajo este modelo.

## 2.2 Estudio del equilibrio

Se plantea en esta subsección el estudio de las posiciones de equilibrio de Nash en el juego planteado en la sección 2. La definición de equilibrio de Nash es la siguiente:

**Definición 1:** Un equilibrio de Nash es un par de estrategias para los dos partidos  $(t_1^0, t_2^0)$  tal que  $\Pi^1(t_1, t_2^0) \leq \Pi^1(t_1^0, t_2^0)$ ,  $\Pi^2(t_1^0, t_2) \leq \Pi^2(t_1^0, t_2^0)$  para todos los  $t_1, t_2 \in \mathfrak{R}^2$

Son por tanto estrategias óptimas para cada partido estando el otro donde está situado. A continuación se da una condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrio basada en las condiciones de equilibrio de von Neumann para juegos de suma constante (ver [3]):

**Proposición 1:** Se consideran los números:

$$\begin{aligned}s_1 &= \min_{t \in B} (\text{máxima intersección en } B' \text{ de } C(p_i, d(p_i, t)), i = 1, \dots, n) \\ s_2 &= \min_{t' \in B'} (\text{máxima intersección en } B \text{ de } C(p_i, d(p_i, t')), i = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

Entonces existe equilibrio en el juego planteado si y sólo si  $s_1 + s_2 = n$ . Las posiciones de equilibrio serán los  $(t_1, t_2)$  tales que  $t_1$  es un punto de  $B$  donde se alcanza  $s_1$  y  $t_2$  es un punto de  $B'$  donde se alcanza  $s_2$ .

**Observación:** Según esta proposición y lo establecido en la subsección anterior, se concluye que en las posiciones de equilibrio cada partido minimiza la máxima ganancia de votos que busca el otro.

En [2] se desarrolló un algoritmo para hallar  $s_1, s_2$ , verificar la condición de existencia de equilibrio y hallar zonas en  $B, B'$  donde se podían situar los partidos para estar en equilibrio cuando éste existía. El algoritmo se basa en hacer una partición de los dos entornos con cuadrados y hallar las zonas de máxima intersección en cada entorno de círculos centrados en las posiciones de los votantes y de radios las distancias máxima y mínima a cada cuadrado. Se reduce así un problema infinito, porque el número de posibles posiciones de los partidos en sus entornos es infinito, a un problema finito, porque el número de cuadrados es finito, aprovechando que las posibles ganancias de los partidos son finitas. Una idea gráfica del algoritmo está en la figura 1.

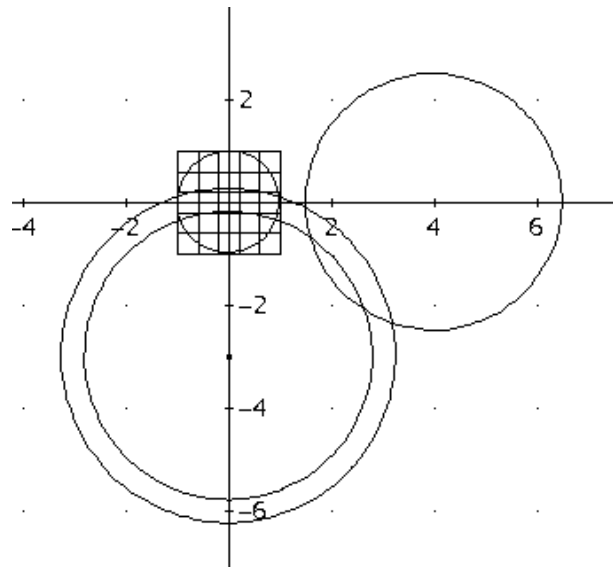


Figura 1. Idea gráfica del algoritmo para encontrar regiones de equilibrio.

### 3. Competición política sin restricciones

El juego que se plantea en esta sección es análogo al de la sección anterior, con la única diferencia de que los partidos políticos  $p$  y  $q$  se pueden situar en cualquier punto del plano, no tienen restringidas sus posiciones a dos entornos disjuntos. Esto puede dar una visión más realista de la competición política, al reflejar el hecho de que los partidos ofrecen a veces políticas muy separadas de sus políticas centrales para adaptarse a sus votantes potenciales, acercándose en muchos casos a las políticas ofrecidas por otros partidos.

Se estudia bajo este modelo estrategias de victoria y posiciones de equilibrio. Los resultados de esta sección están en [4].

#### 3.1 Estrategias de victoria

Vemos que en este modelo los dos partidos tienen posibilidades al menos de empatar para cualquier política que adopte el otro:

Proposición 2: Si  $n$  es par, hay una estrategia para el primer partido  $p$  mediante la cual consigue empatar cualquiera que sea la posición del segundo partido  $q$ , sin ponerse en la posición que elige  $q$ .

Ver la figura 2 para la idea gráfica de la proposición.

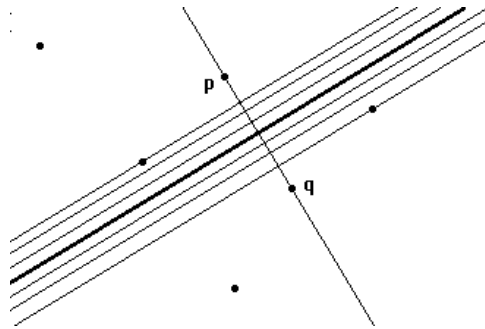


Figura 2. Estrategia para empatar con un número par de votantes.

Observación: Para  $n$  par hay configuraciones muy simétricas de los  $n$  votantes en las que uno de los partidos no puede ganar con ninguna política que ofrezca, si el otro está situado en el centro de la configuración.

Proposición 3: Si  $n$  es impar, hay una estrategia para situar a  $p$  y ganar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  votantes, siendo  $\lceil \cdot \rceil$  la parte entera, y por tanto ganar las elecciones, siempre que  $q$  no se encuentre en la posición de algún votante.

Ver la figura 3 para la idea gráfica de la proposición.

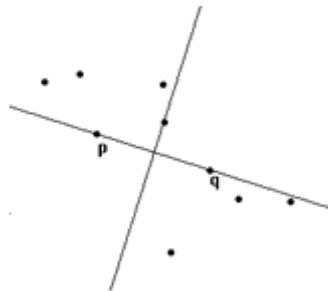


Figura 3. Estrategia para ganar con un número impar de votantes.

### 3.2 Estudio del equilibrio de Nash

Se estudia ahora las situaciones de equilibrio de Nash en el modelo planteado en esta sección. Se necesita una definición previa:

Definición 2:  $C_{n,i}$  es la intersección de los cierres convexos de los subconjuntos de  $H$  de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + i$  puntos (suponemos que  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + i \leq n$ ).

La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente de existencia de equilibrio.

**Proposición 4:** Existen posiciones de equilibrio en el juego presentado si y sólo si  $C_{n,1}$  es no vacío. En este caso, las únicas posiciones de equilibrio son los  $(t_1, t_2)$  con  $t_1$  y  $t_2$  en dicho conjunto.

Se establece ahora que este equilibrio es único cuando existe.

**Proposición 5:**  $C_{n,1}$  es vacío ó un conjunto de un solo punto a no ser que los  $n$  puntos estén alineados y  $n$  es par. Salvo en este caso, el equilibrio es entonces único cuando existe y con los dos partidos situándose en el mismo punto.

Observación: En este modelo las únicas posiciones de equilibrio son en general con los dos partidos eligiendo la misma política. En el único caso en que esto no pasa se pierde una dimensión al estar los votantes alineados, por lo que habrá una correlación en las preferencias de los votantes en los dos ítems, lo que no suele suceder en la práctica. Además, en muchas ocasiones no hay equilibrio. Por ejemplo, si  $n > 1$  es impar y los  $n$  puntos están en posición general (no más de dos puntos alineados), no existe ninguna posición de equilibrio.

En la siguiente subsección se debilita la definición de equilibrio para evitar estas situaciones poco realistas. Pero antes de entrar en dicha subsección, se va a establecer una curiosa relación entre el punto de equilibrio en el juego planteado y el problema clásico en localización de encontrar el punto del plano que minimiza la suma de las distancias a unos puntos dados:

Propiedad 1: Si  $C_{n,1}$  contiene algún punto que no esté en  $H$ , en ese punto se minimiza la suma de las distancias de puntos del plano a los puntos de  $H$

Demostración: Al contener  $C_{n,1}$  algún punto  $p$  que no está en  $H$  sabemos que  $n$  es par y que hay un emparejamiento de los puntos de  $H$ , digamos que  $\{p_1, p_2\}, \dots, \{p_{n-1}, p_n\}$  de tal forma que los segmentos que unen a los puntos emparejados intersecan en  $p$ . Entonces, como el mínimo de la suma de las distancias de un punto del plano a dos puntos fijos se alcanza en el segmento que los une, tenemos que para todo punto  $x$  del plano:

$$\begin{aligned} (d(x, p_1) + d(x, p_2)) + \dots + (d(x, p_{n-1}) + d(x, p_n)) &\geq \\ (d(p, p_1) + d(p, p_2)) + \dots + (d(p, p_{n-1}) + d(p, p_n)) & \end{aligned}$$

Por tanto el mínimo se alcanza en  $p$  como queríamos.

Propiedad 2: Si  $n$  es impar y  $C_{n,1}$  es no vacío, en el punto de  $C_{n,1}$  se minimiza la suma de las distancias de puntos del plano a los puntos de  $H$

Demostración: Al ser  $n$  impar se cumple que el punto de  $C_{n,1}$  es de  $H$ , digamos que es  $p_n$ , y hay un emparejamiento del resto de los puntos de  $H$ , digamos que  $\{p_1, p_2\}, \dots, \{p_{n-2}, p_{n-1}\}$  de tal forma que los segmentos que unen a los puntos emparejados intersecan en  $p_n$ , luego en  $p_n$  se minimiza la suma de las distancias de un punto del plano a los extremos de cada segmento, por lo que para todo punto  $x$  del plano:

$$\begin{aligned} (d(x, p_1) + d(x, p_2)) + \dots + (d(x, p_{n-2}) + d(x, p_{n-1})) + d(x, p_n) &\geq \\ (d(p_n, p_1) + d(p_n, p_2)) + \dots + (d(p_n, p_{n-2}) + d(p_n, p_{n-1})) + d(p_n, p_n) & \end{aligned}$$

Por tanto el mínimo se alcanza en  $p_n$  como queríamos.

Estas propiedades nos indican que, bajo las condiciones de dichas propiedades, el punto de equilibrio en el caso bidimensional se alcanza en la mediana de las posiciones de los votantes, como ocurre en ciertos modelos unidimensionales con un conjunto continuo de votantes (ver [8])

Observación: Cuando  $n$  es par y  $C_{n,1} = \{p\}$  con  $p \in H$ , no siempre se minimiza en  $p$  la suma de las distancias a los puntos de  $H$ . Por ejemplo, si  $H = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  con  $p_1 = (-1, -\sqrt{3})$ ,  $p_2 = (-1, \sqrt{3})$ ,  $p_3 = (2, 0)$ ,  $p_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , entonces  $p_1, p_2, p_3$  forman un triángulo en cuyo interior está  $p_4$ , por lo que  $C_{4,1} = \{p_4\}$ , siendo la suma de las distancias de  $p_4$  a los puntos de  $H$  mayor que 10, mientras que la suma de las distancias del origen a los puntos de  $H$  es 7.

### 3.3 Estudio del equilibrio aproximado

Se propone la siguiente debilitación de equilibrio:

Definición 3: Una posición  $(t_1^0, t_2^0)$  es de equilibrio débil si:

$$\Pi^1(t_1, t_2^0) \leq \Pi^1(t_1^0, t_2^0) + 1, \quad \Pi^2(t_1^0, t_2) \leq \Pi^2(t_1^0, t_2^0) + 1 \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$$

La caracterización de equilibrio débil en el modelo presentado será:

**Proposición 6:** Existen posiciones de equilibrio débil en el juego presentado si y sólo si  $C_{n,2}$  es no vacío ( $n > 2$ ). Las posiciones  $(t_1, t_2)$  con  $t_1$  y  $t_2$  en dicho conjunto y ganancia  $\frac{n}{2}$  para cada uno serán de equilibrio débil. Las otras posiciones de equilibrio débil son con uno de los partidos ganando la mitad menos uno de los votantes y situado en  $C_{n,3}$  y el otro ganando la mitad más uno de los votantes (mayoría absoluta) y situado en  $C_{n,1}$  si  $n$  es par, y la análoga si  $n$  es impar.

Observación:  $C_{n,2}$  es generalmente una región en el plano, por lo que existen usualmente infinitas posiciones de equilibrio débil que dan una situación casi estable para los dos partidos. En la figura 4 se muestra una de estas situaciones ( $C_{n,2}$  es la zona sombreada)

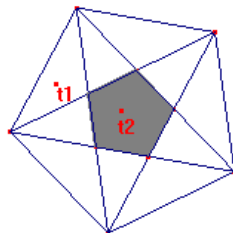


Figura 4. Puntos en posición de equilibrio débil para  $n=5$ .

## 4. El caso ponderado

En esta sección se mantiene el modelo de la sección 3, con la excepción de que se varían las ganancias de los partidos, al asignarse un peso positivo a cada punto de  $H$  de manera que la suma de todos los pesos da  $n$ . El peso de un subconjunto de  $H$  será entonces la suma de los pesos de los puntos del subconjunto y la ganancia de cada partido será el peso del conjunto de los puntos de  $H$  que están en su semiplano, asignándose el peso de los puntos en la mediatriz al primer partido como en la sección anterior. Estas ponderaciones intentar reflejar las

diferentes representaciones que suelen tener en la práctica los diferentes tipos de votantes. Obsérvese que el modelo de la sección anterior es el caso particular de éste en el que todos los votantes tienen peso 1.

Generalizamos entonces los resultados de la sección anterior a este caso. La mayor parte de los resultados de esta sección está en [7].

### 4.1 Equilibrio de Nash ponderado

Para dar la condición necesaria y suficiente de existencia de equilibrio cuando hay ponderaciones se necesitan unas definiciones previas.

Definición 3:  $m_i$  es el  $i$ -ésimo peso mayor que  $\frac{n}{2}$  que hay entre los pesos de subconjuntos de  $H$ . Por ejemplo,  $m_1$  es el menor peso que es mayor que  $\frac{n}{2}$  de un subconjunto de  $H$ ,  $m_2$  es el segundo menor peso que es mayor que  $\frac{n}{2}$  de un subconjunto de  $H$  ...

Definición 4:  $C_\alpha$  es la intersección de los cierres convexos de los subconjuntos de  $H$  de peso mayor que  $\alpha$

**Proposición 7:** Existen posiciones de equilibrio de Nash en el juego ponderado si y sólo si  $C_{\frac{n}{2}}$  es no vacío. En este caso, las únicas posiciones de equilibrio son los  $(t_1, t_2)$  con  $t_1$  y  $t_2$  en dicho conjunto.

Se tiene el mismo caso de unicidad que en la sección anterior:

**Proposición 8:**  $C_{\frac{n}{2}}$  es vacío ó un conjunto de un solo punto salvo en casos en que los  $n$  puntos estén alineados. Salvo en estos casos degenerados, el equilibrio es único cuando existe en el juego con ponderaciones, con los dos partidos situándose en el mismo punto.

La siguiente subsección generaliza el concepto de equilibrio débil al caso ponderado.

### 4.2 Equilibrio débil ponderado

La debilitación de la condición de equilibrio adecuada al modelo de esta sección sería:

Definición 5: Una posición  $(t_1, t_2)$  es de equilibrio débil si:

$$\Pi^1(t_1, t_2^0) \leq K_1, \quad \Pi^2(t_1^0, t_2) \leq K_2 \quad \forall t_1, t_2 \in \mathfrak{R}^2$$

Donde  $K_1$  es el menor de entre los pesos de subconjuntos de  $H$  que son mayores que  $\Pi^1(t_1^0, t_2^0)$ ,  $K_2$  es el menor de entre los pesos de subconjuntos de  $H$  que son mayores que  $\Pi^2(t_1^0, t_2^0)$ .

El resultado análogo a la proposición 6 es ahora:

**Proposición 9:** Si  $m_1 < n$ , existen posiciones de equilibrio débil en el juego con ponderaciones si y sólo si  $C_{m_1} \neq \emptyset$ , siendo las ganancias de los partidos en dichas posiciones al menos como la mayor posible menor que  $\frac{n}{2}$ .



Observación: Los dos partidos están por tanto cercanos a la mayoría absoluta en las posiciones de equilibrio débil. Suelen ser infinitas dichas posiciones, al ser  $C_{m_1}$  generalmente una región como se muestra en la figura 5 ( $C_{m_1}$  es la región sombreada, siendo  $m_1 = \frac{8}{3}$ ).

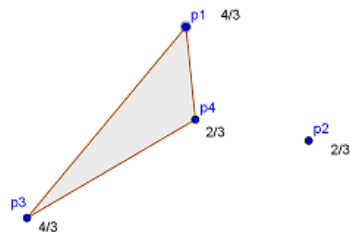


Figura 5. Región de equilibrio débil en un ejemplo ponderado.

Se pueden definir otros equilibrios aproximados debilitando la condición de las ganancias. La condición necesaria y suficiente de existencia de estos equilibrios sería que  $C_{m_k}$  fuera no vacío. Como las regiones  $C_{m_k}$  crecen con  $k$ , habría más posiciones de equilibrio según se debilita la condición, pero con menos estabilidad al haber más holgura en las ganancias.

Se plantea ahora el problema de maximizar el número de puntos de  $H$  en  $C_{m_k}$  sobre todas las configuraciones posibles de  $H$  con puntos en posición general (no hay tres puntos alineados) y todas las posibles ponderaciones de los puntos de  $H$ , suponiendo que  $m_{k+1} < n$  para que no estén todos los puntos de  $H$  en  $C_{m_k}$ . Esta última condición se cumple si y sólo si  $n \geq \log_2(k+2)+1$ . Llamamos a este máximo  $\max_k$ . Dicho máximo es importante porque da el mayor número posible de posiciones de equilibrio aproximado en las que los partidos se ajustan plenamente a las preferencias de algunos de los votantes.

La siguiente proposición da una cota superior de  $\max_k$  que no depende de  $n$ . Se necesita el siguiente resultado previo:

Lema: Si  $n > 2k+1$ , existe un  $p_i$  que está en la frontera del cierre convexo de  $H$  y no en  $C_{m_k}$

Demostración

Si consideramos que los puntos de  $H$  están ordenados de menor a mayor según su abcisa (en caso de igualdad según su ordenada: orden lexicográfico) y  $w(\{p_1, \dots, p_{n-1}\}) > m_k$ , donde  $w$  es el peso del conjunto, entonces  $p_n \notin C_{m_k}$ , estando  $p_n$  en la frontera del cierre convexo de  $H$  al ser el punto de mayor abcisa.

Si  $w(\{p_1, \dots, p_{n-1}\}) \leq m_k$ , entonces:

$$w(\{p_n\}) \geq n - m_k \Rightarrow w(\{p_{n-1}, p_n\}) \geq n - m_{k-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w(\{p_{n-(2k+1)}, \dots, p_n\}) \geq m_{k+1}$$

Por tanto, si  $n > 2k + 2$ ,  $p_1$  no está en el cierre convexo de  $\{p_{n-(2k+1)}, \dots, p_n\}$  al tener menor abcisa que  $p_{n-(2k+1)}$ , por lo que  $p_1 \notin C_{m_k}$ , estando  $p_1$  en la frontera del cierre convexo de  $H$  al ser el punto de menor abcisa.

Si  $n = 2k + 2$  y todo punto de  $H$  en la frontera del cierre convexo de  $H$  está en  $C_{m_k}$ , entonces el resto de puntos de  $H$  tendría peso menor ó igual que  $m_k$  y se tendría que  $k \geq 3$ , teniendo los puntos de  $H$  en la frontera de su cierre convexo peso  $n - m_k$  por el argumento del caso  $n > 2k + 2$ .

Entonces como  $w(\{p_n\}) = n - m_k$ , si no están todos los puntos de  $\{p_2, \dots, p_{n-1}\}$  equiponderados, tomando el de mayor peso, supóngase que sea  $p_{n-1}$ , se tendrá que:

$$w(\{p_{n-1}, p_n\}) > n - m_{k-1}, \dots, w(\{p_2, \dots, p_n\}) > m_k$$

Entonces  $C_{m_k}$  estará contenido en el cierre convexo de  $\{p_2, \dots, p_n\}$ , por lo que  $p_1 \notin C_{m_k}$ , estando  $p_1$  en la frontera del cierre convexo de  $H$ , contradicción.

Entonces  $p_2, \dots, p_{n-1}$  están equiponderados estando alguno de ellos en la frontera del cierre convexo de  $H$ , por lo que los puntos de  $H$  están equiponderados y  $n - m_k = 1$ , lo que implica que  $m_{k+1} = n$ , contradicción. Por tanto, algún punto de  $H$  en la frontera del cierre convexo de  $H$  no está en  $C_{m_k}$  también en este caso.

**Proposición 10:** Se cumple que  $\max_k \leq 2k + 1$

Demostración.

Si  $n \leq 2k + 1$ , el resultado es trivial. Si  $n > 2k + 1$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad por el lema que  $p_n$  está en la frontera del cierre convexo de  $H$  y que  $p_n \notin C_{m_k}$ . Si suponemos ahora que el orden angular desde  $p_n$  de los demás puntos de  $H$  es  $p_1, \dots, p_{n-1}$  y que  $i$  es el menor índice tal que  $\{p_1, \dots, p_i\}$  tiene peso mayor que  $m_{k-1}$ , entonces  $w(\{p_1, \dots, p_i, p_n\}) > m_k$ , siendo  $w(\{p_1, \dots, p_{i-1}\}) \leq m_{k-1}$ . Por tanto  $C_{m_k}$  estará contenido en el cierre convexo de  $\{p_1, \dots, p_i, p_n\}$ , por lo que contendrá a lo más  $i$  puntos de  $H$ , luego si  $i \leq 2k + 1$  ya está demostrado.

Si  $i > 2k + 1$ , la condición  $w(\{p_1, \dots, p_{i-1}\}) \leq m_{k-1}$  implica que:

$$w(\{p_i, \dots, p_n\}) \geq n - m_{k-1}, \dots, w(\{p_{i-2k}, \dots, p_n\}) \geq m_{k+1}$$

Entonces  $C_{m_k}$  estará contenido en la intersección de los cierres convexos de  $\{p_1, \dots, p_i, p_n\}$ ,  $\{p_{i-2k}, \dots, p_n\}$  por lo que contendrá a lo más  $2k + 1$  puntos de  $H$ :  $p_{i-2k}, \dots, p_i$ , como se quería ver.

Observación: Se pueden ver ejemplos en los que se alcanza la cota superior si  $n \geq 2k + 4$ , con puntos equiponderados si  $n$  es par, siendo la frontera de  $H$  un polígono regular cuyos vértices son  $n - (2k + 1)$  puntos de  $H$ , y puntos casi equiponderados si  $n$  es impar:  $n - (2k + 1)$

puntos de peso  $\frac{n}{n+1}$  en los vértices de un polígono regular, un nuevo punto de peso  $\frac{2n}{n+1}$  en  $C_{n-(2k+1),2}$ , y los  $2k$  puntos restantes de peso  $\frac{n}{n+1}$  en  $C_{n-2k,2}$ .

Si  $n = 2k + 2$  también se puede ver un ejemplo en que se alcanza la cota superior, con dos puntos de peso  $\frac{2n}{n+2}$  y uno de peso  $\frac{n}{n+2}$  formando un triángulo, y el resto de puntos, de peso  $\frac{n}{n+2}$ , en el interior de dicho triángulo. Si  $n = 2k + 3$ , un ejemplo en que se alcanza la cota superior sería con un punto de peso  $\frac{2n}{n+1}$  y dos de peso  $\frac{n}{n+1}$  formando un triángulo, y el resto de puntos de peso  $\frac{n}{n+1}$  en el interior de dicho triángulo.

Por tanto  $\max_k = 2k + 1$  si  $n \geq 2k + 2$ .

Obsérvese que esto implica, tomando el valor especial  $k = 0$ , que en el caso de equilibrio de Nash hay como mucho 1 punto de  $H$  en la zona de equilibrio si  $n \geq 4$ , lo que también se deduce de la proposición 8, y en el caso de equilibrio débil hay como mucho 3 puntos de  $H$  en la zona de equilibrio si  $n \geq 4$ . En la figura 6 se muestra un ejemplo en el que se alcanza el máximo para  $n = 5$  ( $C_{m_1}$  es la zona sombreada, siendo  $m_1 = \frac{10}{3}$ )

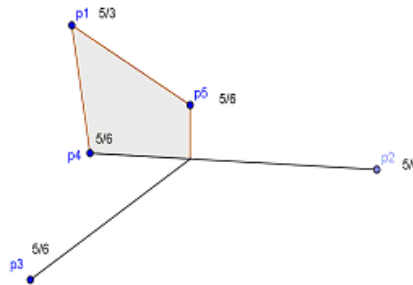


Figura 6. Máximo número de puntos de  $H$  en la región de equilibrio débil.

### 5. Conclusiones y líneas futuras

Se ha desarrollado un modelo geométrico discreto para el estudio de la competición política que se adapta a sus particularidades al haberse tenido en cuenta diferentes consideraciones realistas para los votantes y los partidos.

Como línea de trabajo futura se toma la generalización del modelo a más de dos partidos, ya que aunque en muchos países impera un modelo bipartidista, hay terceros partidos emergentes que pueden condicionar el desarrollo de la competición política.

Se prevén resultados radicalmente distintos a los de los modelos anteriores, con equilibrios en los que los partidos no se acercan a un centro sino que se polarizan para captar a grupos concentrados de votantes.

Otra tarea pendiente más técnica puede ser hallar el valor de  $\max_k$  para  $n$  en el rango  $\log_2(k+2)+1 \leq n \leq 2k+1$ . A este respecto, parece difícil encontrar algo más que resultados parciales. Por ejemplo, tenemos que si  $\frac{k+8}{2} \leq n \leq k+3$ ,  $\max_k = n$ , lo que se puede ver con un conjunto con tres puntos de peso  $\frac{n}{4}$  formando un triángulo y los  $n-3$  restantes de peso  $\frac{n}{4(n-3)}$  en su interior. Se cumple también que si  $k+3 < n \leq 2k+1$ ,  $\max_k \geq n-1$ , lo que se puede ver con un conjunto con dos puntos de peso  $\frac{n(2k+5-n)}{2(2k+3)}$  y uno de peso  $\frac{n}{2k+3}$  formando un triángulo y los  $n-3$  restantes de peso  $\frac{n}{2k+3}$  en su interior si  $n$  es impar y con un conjunto con dos puntos de peso  $\frac{n(2k+6-n)}{2(2k+4)}$  y uno de peso  $\frac{n}{2k+4}$  formando un triángulo y los  $n-3$  restantes de peso  $\frac{n}{2k+4}$  en su interior si  $n$  es par

## Referencias

- [1] ABELLANAS, Manuel, LILLO, Isabel, LÓPEZ, María Dolores, RODRIGO, Javier. *Electoral strategies in a dynamical democratic system. Geometric models*, pp. 870-878, European Journal of Operational Research, Holanda, 2006.
- [2] ABELLANAS, Manuel, LÓPEZ, María Dolores, RODRIGO, Javier. *Búsqueda geométrica del equilibrio en un juego con restricciones de entorno*, pp. 1-9, Actas de los XIII Encuentros de Geometría Computacional, Zaragoza, 2009.
- [3] ABELLANAS, Manuel, LÓPEZ, María Dolores, RODRIGO, Javier. *Searching for equilibrium positions in a game of political competition with restrictions*, pp. 892-896, European Journal of Operational Research, Holanda, 2010.
- [4] ABELLANAS, Manuel, LILLO, Isabel, LÓPEZ, María Dolores, RODRIGO, Javier. *Weak Equilibrium in a Spatial Model*, pp. 449-459, International Journal of Game Theory, USA, 2011.
- [5] HINICH, Melvin, POLLARD, Walker. *A new Approach to the spatial Theory of Electoral Competition*, pp. 323-341, American Journal of Political Science, USA, 1981.
- [6] LAVER, Michael. *Policy and the dynamics of political competition*, pp. 263-281, American Political Science Review, USA, 2005.
- [7] LÓPEZ, María Dolores, RODRIGO, Javier. *Discrete Models of Political Competition*, pp. 161-182, Nova Science Publishers, USA, 2009.
- [8] ROEMER, John. *Political Competition*, Harvard University Press, Boston, 2001.

**Sobre el autor:**

*Nombre:* Javier Rodrigo Hitos

*Correo Electrónico:* jrodrigo@upcomillas.es

*Institución:* Universidad Pontificia Comillas, Madrid, España.

