Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"
Universidad Politécnica de Madrid
ISSN 2174-0410 Volumen VII, Número 2, Octubre 2017

G.I.E Pensamiento Matemático

MAIC

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

LOS MÉTODOS INFINITESIMALES PARA EL CÁLCULO DE TANGENTES

MATEMÁTICAS Y MOVIMIENTO EN EL SIGLO XIV

EXPERIENCIAS DOCENTES

BUSCANDO MEDIDAS DE APOYO PARA SUPERAR EL FRACASO ESCOLAR

PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO Y SCRATCH: EL MÉTODO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

INVESTIGACIÓN

EVALUACIÓN GRÁFICA DE LA SOSTENIBILIDAD PORTUARIA: REDES DE DECISIÓN

ECUACIONES DIOFÁNTICAS EN ENTEROS GAUSSIANOS

JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

LA NO NUMERABILIDAD ES UN JUEGO DE NIÑOS

ENTREVISTA A:

FRANCESCO MUGELLI Y LAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

CUENTOS MATEMÁTICOS

EL LEGADO ABSOLUTO

CRÍTICAS Y RESEÑAS

INFORME SOBRE LA PELÍCULA: FIGURAS OCULTAS

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen VII, Número 2, Octubre 2017

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohibe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid

Volumen VII, Número 2, ISSN 2174-0410

Coordinación Comité Editorial

Mariló López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Javier Rodrigo Hitos

José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Ascensión Moratalla de la Hoz, Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Rosa María Herrera, Fernando Chamizo Lorente, Luis Garmendia Salvador, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador, Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla

1 de octubre de 2017

VEO VEO

Índice de Artículos

Editorial del Número 2 (Vol. VII)

Equipo Editorial
Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 001–004, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Sep'17; Aceptación: 16 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

Este número de la Revista "Pensamiento Matemático", presenta varios artículos sobre diversos temas relacionados con las Matemáticas, tanto desde un punto de vista formal o teórico como aplicadas a distintas áreas como la ingeniería o la física.

Abstract

This number of "Mathematical Thinking" Journal, presents some articles about different aspects related to Mathematics, not only from a formal o theorical point view but Maths applied to different areas such as engineering or physics.

Investigación

Las cuatro patas en las que se sustenta la sostenibilidad portuaria hacen muy ardua la tarea de encontrar una metodología que haga que su aplicación práctica resulte fácil. Es por ello que, conociendo las variables asociadas a la sostenibilidad portuaria, se han obtenido las relaciones entre las mismas a través de la construcción de una red bayesiana (figura 1). En *"Evaluación gráfica de la sostenibilidad portuaria: redes de decisión"* se pone de manifiesto la teoría de la utilidad vinculada a las redes bayesianas proporciona un marco para la toma de decisiones utilizando diagramas de influencia o redes de decisión, los cuales se han empleado en el presente trabajo para conocer las influencias positivas y negativas que se producen entre dichas variables.

"Ecuaciones diofánticas en enteros gaussianos" expone cómo se resuelven en los enteros gaussianos algunas ecuaciones diofánticas conocidas.

Experiencias Docentes

En *"Buscando Medidas de Apoyo para Superar el Fracaso Académico"*, se expone un trabajo que surge de la observación de una situación detectada en los cursos de Matemática de las carreras de la Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT) de la Universidad Católica del Uruguay (UCU). A partir de la experiencia recogida con estudiantes que muestran fracaso académico reiterado, se ha constatado que, repetir los cursos hasta que los aprueben no brinda la oportunidad de superar dificultades a aquellos alumnos que las poseen (figura 2). Entre estas dificultades pueden citarse: insuficiente desarrollo de habilidades en la ejecución de algoritmos o rutinas de cálculo, escasa disponibilidad de estrategias para la búsqueda de solución a ejercicios, ausencia

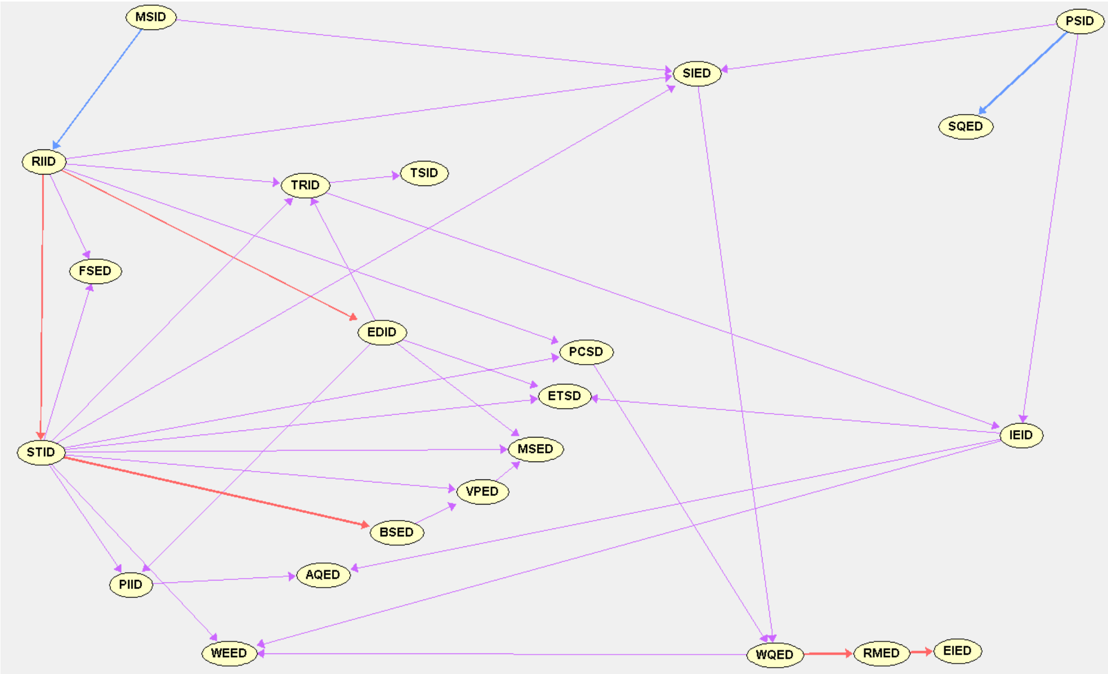


Figura 1. Representación gráfica de la red bayesiana obtenida al aplicar el algoritmo K2 a las variables seleccionadas.

de recursos metacognitivos para abordar tareas no rutinarias. Esta situación ha ido generando una población de alumnos repitientes reincidentes, que acumulan un atraso importante en el desarrollo de sus respectivos programas. Para atender esta situación, se ha propuesto un conjunto de medidas, en un rango que va desde la organización curricular hasta las estrategias de enseñanza utilizadas, tanto en el aula como en tutorías personalizadas. Se presentan algunas de estas medidas y el impacto que las primeras observaciones de su implementación permiten ser apreciadas.

Lista de dudas:
Sección 8.1:

a. ***¿Por qué dos coordenadas polares diferentes pueden representar el mismo punto?***
Leyendo nuevamente el texto y analizando el ejemplo 2, se puede apreciar que dado un punto P de coordenadas (r,θ), cualquier punto con coordenadas $(-r,\ \theta+k\pi)$ (siendo k un número entero impar) o $(r,\ \theta+2n\pi)$ (donde n es cualquier entero) representan el mismo punto. Esto implica que cada punto en el plano tiene un número infinito de representaciones en coordenadas polares.

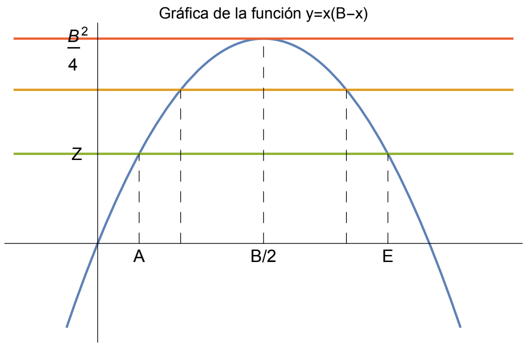
b. ***¿Por qué al convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares, puedo obtener diferentes resultados? ¿Cómo sé cuál es el resultado correcto?***
Desarrollando el ejemplo 4, es apreciable que los resultados obtenidos al convertir coordenadas rectangulares a polares, no determinan de manera única a r y θ. Es por esto que se debe prestar atención al cuadrante donde se encontraba el punto definido en coordenadas rectangulares, para expresar el resultado en coordenadas polares de forma correcta.

Figura 2. Trabajo realizado por un estudiante siguiendo la consigna anterior: lectura orientada sobre número complejo.

En *"Pensamiento Matemático Avanzado y Scratch: El Caso del Máximo Común Divisor"*, se a cabo una propuesta didáctica, con los alumnos del Máster de Formación del Profesorado en Enseñanza Secundaria y Bachillerato de la Universidad Complutense de Madrid, de la especialidad de Matemáticas. Dicha propuesta consiste en la programación en Scratch del Algoritmo de Euclides para el Máximo Común Divisor. Esta metodología de trabajo, que mezcla matemáticas y programación, permitirá trabajar con los alumnos elementos propios del Pensamiento Matemático Avanzado como son la abstracción, la formalización y la generalización, entre otros.

Historias de Matemáticas

En *"Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes"*, se estudian los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes desarrollados por Fermat y Barrow a mediados del siglo XVII, incluyendo algunos ejemplos que ilustrarán al lector sobre su aplicación. Asimismo, se estudia el método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos. En todos los casos se indaga sobre la base teórica de los procedimientos, contrastando las opiniones de diversos autores que han tratado la materia.



En *"Matemáticas y Movimiento en el Siglo XIV "* se realiza una exposición histórica del gran interés que hubo en el siglo XIV por el estudio del movimiento, principalmente en Oxford y París. Analizamos los trabajos de Thomas Bradwardine en Oxford y Nicolás Oresme en París, quienes publicaron sendos libros esenciales acerca de estas cuestiones mediante el estudio de las razones. Además, Bradwardine formuló una *Ley del Movimiento* que tuvo un gran éxito y se utilizó como referencia, hasta el siglo XVI.

Juegos y Rarezas Matemáticas

"La no numerabilidad es un juego de niños", pone de manifiesto que para establecer la no numerabilidad de la recta real no es preciso recurrir a sesudos argumentos adultos, tales como la estrategia diagonal de Cantor. Es tan sencillo como saltar a la comba, un juego de niños.

Cuentos Matemáticos

"El legado absoluto" es un cuento presentado al Primer Concurso de Relatos Cortos Matemáticos "π-ensa" organizado durante el curso 2015-2016 por el Aula Taller de las Matemáticas "π-ensa". Toda la información puede consultarse en la web del Aula: http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/. En este artículo se presenta el relato que recibió la mención de honor del jurado en la 2ª categoría "estudiantes de ESO".

Críticas y Reseñas

Informe sobre la película "Figuras ocultas", presenta una reseña de la película homónima dirigida por Theodore Melfi, año 2016. En ella se narra la vida real de tres mujeres afroamericanas que fueron clave para que el proyecto, protagonizado por el astronauta John Glenn, de realizar la primera órbita completa alrededor de la Tierra, se llevara a cabo con éxito.

Entrevistas

En *"Francesco Mugelli y las Olimpiadas Matemáticas"* se entrevista al matemático de la Universidad de Florencia, que adiestra a jóvenes y a sus maestros en los problemas de matemáticas. Su afición a los problemas y retos de la matemática elemental proviene de la infancia y hay que buscarlo en los libros que se guardaban en el sótano de su casa. Aquí nos mostrará algunos divertidos secretos de su trabajo en el mundo juvenil de las Olimpiadas Matemáticas y su funcionamiento en Italia.

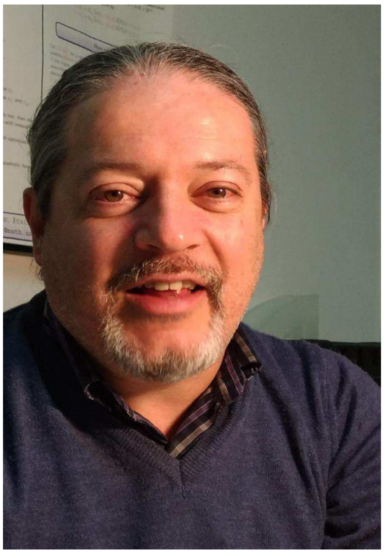


Figura 3. Francesco Mugelli.

Finalizaremos como siempre esta pequeña introducción a nuestro nuevo número con alguna que otra cita motivadora para nuestros lectores. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número, agradecemos enormemente vuestro más que demostrado interés por participar en este gran proyecto y os invitamos una vez más a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

"Todos somos muy ignorantes. Lo que ocurre es que no todos ignoramos las mismas cosas."

Albert Einstein

El Comité Editorial

Investigación

Evaluación gráfica de la sostenibilidad portuaria: redes de decisión

Graphical evaluation of port sustainability: decision networks

Beatriz Molina Serrano, Nicoleta González-Cancelas, Francisco Soler-Flores, Alberto Camarero Orive y Alfonso Camarero Orive

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 005–020, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Jun'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

Las cuatro patas en las que se sustenta la sostenibilidad portuaria hacen muy ardua la tarea de encontrar una metodología que haga que su aplicación práctica resulte fácil. Es por ello que, conociendo las variables asociadas a la sostenibilidad portuaria, se han obtenido las relaciones entre las mismas a través de la construcción de una red bayesiana. La teoría de la utilidad vinculada a las redes bayesianas proporciona un marco para la toma de decisiones utilizando diagramas de influencia o redes de decisión, los cuales se han empleado en el presente trabajo para conocer las influencias positivas y negativas que se producen entre dichas variables.

Palabras Clave: Evaluación gráfica, redes de decisión, diagramas de influencia, redes bayesianas

Abstract

The four legs on which port sustainability is based make it very difficult to find a methodology that makes its practical application easy. For this reason, by knowing variables associated with port sustainability we have obtained the relationship between them through the construction of a Bayesian network. Utility theory linked to Bayesian networks provides a framework for decision making by means of influence diagrams or decision networks, which have been used in the present work to know the positive and negative influences that occur between these variables.

Keywords: Graphical evaluation, decision networks, influence diagrams, Bayesian networks

1. Introducción

El desarrollo sostenible sigue siendo en la actualidad un concepto amplio, abstracto o ambiguo [5], que ha ido evolucionando con el paso de los años. Su incorporación fue en la década de los 70 del siglo pasado en la Conferencia de Estocolmo que se celebró en el año 1972. Allí, se puso de manifiesto la existencia de problemas medioambientales globales como consecuencia del crecimiento de la población y de la escasez de recursos naturales [13].

Posteriormente, en el año 1987, con el Informe Brundtland, el concepto de desarrollo sostenible adopta su definición más conocida, definiéndose como "el desarrollo que asegura las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las futuras generaciones para enfrentarse a sus propias necesidades" [26].

Este hecho supuso un cambio social, ambiental y económico importante al incluir cuestiones medioambientales que nunca antes habían sido debatidas, las cuales se consolidaron en la Cumbre de la Tierra en Río de Janeiro en 1992, donde el desarrollo sostenible era el tema central del debate [2]. El resultado principal de dicha cumbre, además de la creación de una Comisión para el Desarrollo Sostenible, fue un documento titulado Agenda 21, en el que se desarrolló una estrategia general de desarrollo sostenible para todo el mundo.

Posteriormente, esta visión siguió ampliándose a otras dimensiones, de forma que la definición ha evolucionado con el paso del tiempo, pues cada vez que se estudia el tema se involucran más áreas del conocimiento [12]. Es por ello que en la actualidad este concepto posee un carácter integral, multidimensional e interactivo, abarcando la dimensión institucional, dimensión económica, dimensión social y dimensión ambiental, tal y como se refleja en la Figura 1.

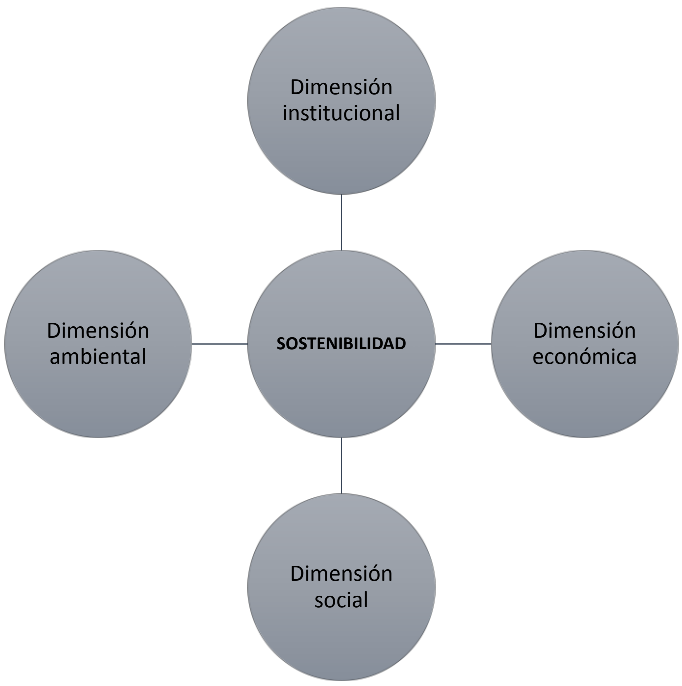


Figura 1. Dimensiones de la sostenibilidad. Fuente: [15]

En el caso del sector transportes el concepto de desarrollo sostenible se está aplicando de forma emergente, impulsado por iniciativas que incorporan la variable ambiental y la responsabilidad social empresarial en la gestión estratégica de las empresas [6]. El objetivo a largo plazo es el mantenimiento equilibrado de su función, buscando un desarrollo equilibrado de la dimensión económica, social, ambiental e institucional [22].

El transporte de mercancías es una operación de gran importancia en la economía general a nivel mundial [19], mereciendo una atención particular el transporte marítimo, al transportar alrededor del 80% de las mercancías a nivel mundial [20].

La sostenibilidad portuaria tiene sus raíces en las propuestas del GRI (Global Reporting Initiative) [8] de las cuales conserva, entre otras cuestiones, los cuatro ejes o dimensiones que conforman un enfoque de desarrollo sostenible, es decir, las reflejadas en la Figura 1. Es por ello que se debe entender la gestión sostenible como "aquella que permite que crezca el volumen de tráfico de contenedores, graneles sólidos y líquidos, mercancía general y número de pasajeros, disminuyendo a su vez el consumo de energía y recursos naturales, el volumen de residuos generados y los impactos negativos a los sistemas sociales y ecosistemas en las áreas de influencia del puertos" [3].

Esta demanda de la sociedad de caminar hacia un desarrollo sostenible, traducido en una exigencia a las organizaciones de una mayor transparencia en la información que suministra ha llevado a los puertos a implementar de forma voluntaria normativas relacionadas con la sostenibilidad, y programas de Responsabilidad Social Empresaria. En algunos casos, la información se facilita a través de Memorias/Informes de Sostenibilidad/Balances Sociales, que más allá de los Estados Financieros convencionales, responden a una triple realidad de la organización: económica, social y medioambiental [21].

En el caso particular del sector portuario español, las memorias de sostenibilidad ofrecen información que va más allá de la económico-financiera [4], por lo que constituye una herramienta de análisis y diagnóstico al describir los resultados mediante el uso de indicadores de calidad que abarcan las cuatro dimensiones anteriormente citadas. Asimismo, estos indicadores también resultan útiles a las Autoridades Portuarias para:

- controlar que su manejo sea sostenible
- evaluar los impactos derivados del programa aplicado
- modificarlos cuando sea necesario
- llevar a cabo una evaluación comparativa de la gestión de los distintos puertos, desde el punto de vista de la sostenibilidad, para poder definir las mejores prácticas y comparar el rendimiento de la Autoridad Portuaria con el de industrias similares.

Por tanto, su aplicación generalizada en un sistema portuario es útil para realizar un benchmarking preciso en sostenibilidad entre los puertos de la misma región o país [9].

A partir de estos indicadores, los objetivos que debe alcanzar una autoridad portuaria o empresa para asegurar un desarrollo y crecimiento sostenible son los que se muestran en la Figura 2, abarcando las cuatro dimensiones. El objetivo final que se persigue es llegar a que los puertos se consideren como elementos de un sistema que se interrelacionan con un entorno físico, social y ambiental, y dejen de ser vistos como entes aislados sujetos a una coyuntura comercial concreta [17].

Objetivos económicos	Incrementar el volumen de negocio
	Aumentar los ingresos por concesiones
	Reducir el endeudamiento con el fin de asegurar la sostenibilidad financiera del puerto
	Optimizar y rentabilizar las inversiones de los activos portuarios
Objetivos ambientales	Accionar con respeto al medio ambiente
	Minimizar los impactos ambientales derivados de la actividad portuaria
	Minimizar los accidentes ambientales
	Mejorar la gestión ambiental en el reciento portuario
Objetivos institucionales	Impulsar cambios legales para modernizar el desarrollo del puerto
	Reorganizar el mercado incorporando competencia
	Desarrollar la comunidad portuaria para incrementar la eficiencia
	Institucionalizar la relación ciudad-puerto
	Expandir la gestión operativa del puerto a la cadena logística
Objetivos sociales	Desarrollar y modernizar sistemas de gestión de los recursos humanos
	Desarrollar un equipo humano motivado y comprometido
	Lograr un respaldo sostenido y activo de la comunidad del entorno

Figura 2. Relación de los principales objetivos que debe alcanzar una autoridad portuaria o empresa para asegurar un desarrollo y crecimiento sostenible. Fuente: (Molina, et. al, 2016)

Sin embargo, la aplicación del concepto de sostenibilidad portuaria se topa con una escasez de metodologías que permitan evaluar el impacto de las actuaciones de las instituciones y empresas en cada una de estas cuatro dimensiones, determinando el valor y las variables que cuantifiquen la verdadera contribución de esa gestión al desarrollo sostenible. No obstante, en las últimas décadas se han desarrollado numerosas técnicas para el análisis y modelización de los datos en diferentes áreas de la estadística y de la inteligencia artificial [18], sobre todo en el caso de redes neuronales, cuyas investigaciones son muy populares [11]. La aplicación de estas disciplinas se extiende también a numerosos ámbitos comerciales y de investigación en problemas de predicción, clasificación o diagnosis [25].

Dentro de las metodologías, las Redes Bayesianas o redes probabilísticas permiten modelizar de forma conjunta toda la información relevante para un problema dado y utilizar posteriormente mecanismos de inferencia probabilística para obtención de conclusiones en base a la evidencia disponible [24]. Es por ello que conforman una de las posibilidades puesto que la lógica bayesiana se basa en las estadísticas y las probabilidades condicionales para predecir el futuro [14], permitiendo obtener de una forma gráfica las relaciones entre las variables de cada una de las cuatro dimensiones y determinar a posteriori los valores que cuantifiquen su contribución a la sostenibilidad.

En la línea de trabajo de comportamiento de redes neuronales, en el campo de la gestión portuaria, se han desarrollado en los últimos años varios estudios, entre los que se encuentra la referencia [19] que usó como herramienta el programa MATLAB. Dicho estudio se desarrollaba en el ámbito de las terminales de contenedores, en concreto, en el estudio de posibles crecimientos de tráfico y de las necesidades de equipos para poder mover los contenedores estimados.

La presente investigación, siguiendo una metodología similar a la expuesta en dicha referencia, avanza un paso más usando el software Elvira, y analiza las relaciones entre las variables que intervienen en la sostenibilidad portuaria, permitiendo llevar a cabo una toma de decisiones, al tiempo que muestra la necesidad de incorporar elementos sostenibles dentro de las herramientas empleadas por las Autoridades Portuarias.

2. Metodología y resultados obtenidos

El aprendizaje es una de las características que definen a los sistemas basados en inteligencia artificial, pues siendo estrictos, se puede afirmar que sin aprendizaje no hay inteligencia. Sin embargo, es difícil definir el término "aprendizaje", pero la mayoría de las autoridades en el campo coinciden en que es una de las características de los sistemas adaptativos que son capaces de mejorar su comportamiento en función de su experiencia pasada, por ejemplo al resolver problemas similares [23].

Los modelos gráficos probabilísticos son gráficos en los que los nodos representan variables aleatorias, y los arcos (o la falta de ellos) representan supuestos de independencia condicional. Por lo tanto, proporcionan una representación compacta de distribuciones de probabilidad conjuntas.

Existen dos tipos de modelos gráficos:

- Los modelos gráficos no dirigidos, también llamados Markov Random Fields (MRF) o redes de Markov, tienen una definición simple de independencia, de modo que dos nodos o conjunto de nodos A y B son condicionalmente independientes dado un tercer conjunto, C, si todos los caminos entre los nodos en A y B están separados por el nodo en C.
  Este tipo de modelo es más popular entre las comunidades de físicos y ópticos.
- Los modelos gráficos dirigidos también llamados redes bayesianas o redes de creencias (BNs), tienen una noción más complicada de la independencia que los modelos gráficos no dirigidos, pues se tiene en cuenta la direccionalidad de los arcos, como explicamos a continuación.
  Estos modelos son más populares entre las comunidades de informáticos y estadísticos.

Aunque, como se ha visto anteriormente, los modelos dirigidos tienen una noción más complicada de independencia que los modelos no dirigidos, estos modelos cuentan con varias ventajas. Lo más importante es que se puede considerar un arco de A a B como indicando que A "causa" B. Esto se puede usar como una guía para construir la estructura del gráfico. Además, los modelos dirigidos pueden codificar relaciones deterministas, y son más fáciles de aprender (ajustar a los datos).

Para profundizar más en modelos gráficos dirigidos y no dirigidos, véanse las referencias [16], [1] y [7].

Además de la estructura gráfica, es necesario especificar los parámetros del modelo. Para un modelo dirigido, es necesario especificar la distribución de probabilidad condicional (CPD) en cada nodo. En el caso de variables discretas, esto se puede presentar como una tabla (CPT), que enumere la probabilidad de que el nodo secundario asuma cada uno de sus valores diferentes para cada combinación de valores de sus padres.

El obtener una red bayesiana a partir de unos datos determinados es un proceso de aprendizaje que se divide en dos etapas: el aprendizaje estructural y el aprendizaje paramétrico, [16]. La primera de ellas consiste en obtener la estructura de la red bayesiana, es decir, las relaciones de dependencia e independencia entre las variables involucradas. La segunda etapa tiene como finalidad obtener las probabilidades a priori y condicionales requeridas a partir de una estructura dada.

Al tratar el tema de aprendizaje en redes bayesianas, es importante tener presente que distintos grafos pueden ser probabilísticamente equivalentes, es decir, pueden representar las mismas relaciones de dependencia e independencia y/o las mismas distribuciones conjuntas para sus variables. Por ello, haciendo uso de la noción de independencia, o equivalencia de distribuciones, se puede obtener una división en clases de equivalencia del conjunto de todos los grafos dirigidos posibles de n variables.

Hay dos métodos principales para construir la red El primero de ellos consiste en realizar, a partir de las frecuencias observadas en la base de datos, una estimación de la distribución de probabilidad que rige el mundo real; las relaciones de dependencia e independencia probabilista de dicha distribución indican cuál debe ser la estructura del grafo. Es decir, se trata de buscar un grafo que sea mapa de independencias de la distribución de probabilidad. Naturalmente, puede haber más de una solución, pues como hemos comentado existen grafos equivalentes en sentido probabilista, es decir, grafos que representan las mismas relaciones de independencias y de (posibles) dependencias.

El otro método de aprendizaje estructural consiste en realizar una búsqueda heurística utilizando alguna medida de calidad: en general, se parte de una red sin enlaces y se van añadiendo enlaces uno a uno hasta que la red representa adecuadamente la distribución de probabilidad obtenida de la base de datos. También en este método hay que tener en cuenta la existencia de grafos equivalentes en sentido probabilista.

Existen varias alternativas para obtener los parámetros necesarios de una red, siendo estas las que se enumeran a continuación:

- Especificación de los parámetros, normalmente contando con la ayuda de expertos. Se trata de un proceso costoso.
- Aprendizaje a partir de las bases de datos, que obviamente depende de la existencia de dicha base de datos. Para ello existen dos opciones:

  a) aprendizaje paramétrico, si se dispone de la estructura

  b) aprendizaje estructural, en el que es posible aprender tanto la estructura como los parámetros.

- Combinar especificación y aprendizaje. Por ejemplo, contar con expertos que ayuden a especificar la estructura, realizar el aprendizaje paramétrico y, por otro lado, disponer de expertos para supervisar el modelo obtenido. Esta última alternativa aúna las ventajas de cada caso.

2.1 Aprendizaje paramétrico

El aprendizaje paramétrico supone que se coloque la estructura (el grafo) de la red bayesiana y, en consecuencia, también la factorización de la probabilidad y qué probabilidades condicionadas forman la red.

El aprendizaje paramétrico consiste en encontrar los parámetros asociados a una estructura dada de una red bayesiana. Dichos parámetros son en las probabilidades a priori de los nodos raíz y las probabilidades condicionales de las demás variables dados sus padres. Si se conocen todas las variables es fácil obtener las probabilidades requeridas ya que las probabilidades previas corresponden a las marginales de los nodos raíz y las condicionales se obtienen de las conjuntas de cada nodo con su(s) padre(s). Para que se actualicen las probabilidades con cada caso observado, éstas se pueden representar como razones enteras y actualizarse con cada observación.

Para definir completamente la red bayesiana y así representar la distribución de probabilidad conjunta, es necesario especificar para cada nodo X la distribución de probabilidad de X condicionada a los padres de X. La distribución de X condicionada a sus padres puede tener cualquier forma. Es usual trabajar con distribuciones discretas o gaussianas por simplicidad en los cálculos, pero a veces sólo se conocen restricciones en una distribución por lo que se puede utilizar el principio de entropía máxima para determinar la mayor entropía, dadas las restricciones. En el caso de las redes bayesianas dinámicas, lo más normal es especificar la distribución condicional de la evolución temporal del estado oculto para maximizar la velocidad de entropía del proceso estocástico implícito.

A menudo, estas distribuciones condicionales incluyen parámetros que son desconocidos y deben estimarse a partir de datos, utilizando el enfoque de máxima verosimilitud. La maximización directa de la probabilidad (o de la probabilidad posterior) suele ser compleja cuando hay variables no observadas. Una aproximación clásica a este problema es el algoritmo de la maximización de la expectativa que alterna el cómputo de los valores esperados de las variables no observadas, condicionadas a los datos observados, con la maximización de la probabilidad completa (o posterior), asumiendo que los valores esperados calculados previamente son correctos. Bajo condiciones de regularidad suave, este proceso converge en valores de máxima verosimilitud (o máximo posterior) para los parámetros.

Sin embargo, un enfoque más bayesiano de los parámetros es tratarlos como variables no observadas y calcular una distribución posterior completa sobre todos los nodos, condicionados a los datos observados, para luego integrar los parámetros. Este enfoque es más complejo y puede conducir a modelos de gran dimensión, por lo que en la práctica los enfoques clásicos de parametrización son más utilizados.

Por lo tanto, dada una estructura y las bases de datos, mediante el aprendizaje paramétrico se obtienen las probabilidades a priori y condicionales requeridas

2.2 Aprendizaje estructural

Mediante el aprendizaje estructural se obtiene la estructura de la red bayesiana a partir de bases de datos, es decir, se obtienen las relaciones de dependencia e independencia entre las variables involucradas. Las técnicas de aprendizaje estructural dependen del tipo de estructura y/o topología de la red (árboles, poliárboles o redes multiconectadas). Otra alternativa posible es la combinación del conocimiento subjetivo de un experto, de forma que, partiendo de una estructura dada por el experto, esta se valida y mejora utilizando los datos estadísticos.

Los primeros algoritmos de aprendizaje estructural de redes bayesianas que surgieron se basan en un análisis de las relaciones de dependencia e independencia presentes en la distribución de probabilidad P: el problema consiste en encontrar un grafo dirigido acíclico (GDA) que sea un mapa de independencias (I-mapa) de P. En realidad, se busca un I-mapa mínimo; es decir, uno en el que hay dos grafos que sólo se diferencian en que hay un enlace que aparece en el primero pero no en el segundo y ambos son I-mapas de P. Es preferible el segundo, por los siguientes motivos:

- Porque muestra más relaciones de independencia que el primero, porque va a necesitar menos espacio de almacenamiento (alguna de las tablas será más pequeña)
- Porque va a ser más preciso (al necesitar menos parámetros podrá estimarlos con mayor fiabilidad, reduciendo además el riesgo de sobreajuste)
- Porque conducirá a una computación más eficiente.

Una vez obtenido el grafo, el aprendizaje paramétrico para hallar las probabilidades condicionadas y completar así la red bayesiana, se encuentra listo para llevarse a cabo.

Para describir una red bayesiana es necesario especificar dos cosas: la topología del gráfico (estructura) y los parámetros de cada distribución de probabilidad condicional (CPD). Es posible aprender de estos datos. Sin embargo, la estructura de aprendizaje es mucho más difícil que los parámetros de aprendizaje. Además, aprender cuando algunos de los nodos están ocultos, o faltan datos, es mucho más difícil que cuando se ha observado todo.

En muchos contextos prácticos la red bayesiana es desconocida y se necesita aprender de los datos. Este problema se conoce como el problema de aprendizaje de la red bayesiana, que se describe informalmente como: dados datos y la información previa (por ejemplo, el conocimiento de un experto o las relaciones casuales), estimar la topología del gráfico (estructura de red) y los parámetros del JPD (parámetros de probabilidad conjunta).

El aprendizaje estructural de la red bayesiana se considera más difícil que el aprendizaje paramétrico de la red. Por otra parte, otro hándicap surge en situaciones de observabilidad parcial cuando algunos nodos están ocultos o cuando faltan datos.

En el caso más simple, el caso más simple es cuando un experto determina la red bayesiana y luego la utiliza para realizar inferencia. En otras aplicaciones la tarea de definir la red es demasiado compleja para los seres humanos, de forma que la estructura de la red y los parámetros de las distribuciones locales deben aprenderse de los datos.

Para la construcción de la red re necesitan las variables que conformarán los nodos. En el presente estudio, las variables seleccionadas para la creación de la red bayesiana son las que se incluyen en la Tabla 1:

Tabla 1. Variables seleccionadas para la creación del modelo

Variable	Dimensión	Definición	Descripción
AQED	Ambiental	Calidad del aire	Principales focos de emisión del puerto que suponen emisiones significativas, evolución del número de quejas o denuncias registradas por la Autoridad Portuaria procedentes de grupos de interés relativas a emisiones de polvo o a la calidad del aire en general, medidas implantadas por la Autoridad Portuaria para controlar las emisiones ligadas a la actividad del conjunto del puerto
BSED	Económica	Negocio y servicios	Entre otros indicadores: ingresos por tasas de ocupación y actividad, uso comercial de la superficie, uso de los muelles, etc.
EDID	Institucional	Papel del sector portuario como dinamizador de la actividad productiva	Principales sectores o actividades relevantes en el desarrollo económico local que se apoyan en el puerto para su desarrollo
EIED	Ambiental	Comunidad portuaria	Condiciones o exigencias sobre aspectos ambientales en los pliegos de prescripciones técnicas particulares de los servicios portuarios, en términos de otorgamiento y en títulos de concesión o autorización
ETSD	Social	Capital humano de la actividad portuaria	Empleo, comunicación interna y participación, formación, estructura de plantilla y equidad, seguridad y salud en el trabajo, etc.
FSED	Económica	Situación económica financiera	Entre otros indicadores: rentabilidad sobre activos, EBIDTA/tonelada, servicio de la deuda, relación gastos de explotación e ingresos de explotación, etc.
IEID	Institucional	Calidad en la prestación de los servicios	Iniciativas promovidas por la Autoridad Portuaria dirigidas a mejorar la eficiencia, la calidad del servicio y el rendimiento de los servicios prestados a la mercancía

Variable	Dimensión	Definición	Descripción
MSED	Ambiental	Gestión ambiental	Grados de implantación de los sistemas de gestión ambiental (EMAS, ISO 14001 y PERLS) y recursos económicos invertidos, gastos, así como inversiones en su caso, asociados a la implantación, certificación y mantenimiento de un sistema de gestión ambiental
MSID	Institucional	Herramientas de apoyo a la gestión	Sistemas de gestión de apoyo a la toma de decisiones: sistemas de gestión de la calidad, cuadros de mando integral, campañas de caracterización de mercados, etc.
PCSD	Social	Empleo y seguridad laboral en la comunidad portuaria	Empleo en la comunidad portuaria, seguridad laboral y formación en servicios y concesiones portuarios, etc.
PIID	Institucional	Presencia de la iniciativa privada	Número de empresas que operan en el puerto, superficie terrestre ocupada, caracterizada como uso comercial concesionado, etc.
PSID	Institucional	Transparencia y libre concurrencia	Iniciativas dirigidas a garantizar que todo operador que desee prestar servicios en el puerto u optar a una concesión pueda conocer de modo transparente las condiciones para operar en el puerto y los mecanismos administrativos que regulan dicho proceso
RIID	Institucional	Generación de infraestructura portuaria	Papel de la Autoridad Portuaria como proveedor de la infraestructura
RMED	Ambiental	Gestión de residuos	Residuos generados por la Autoridad Portuaria que son segregados y valorizados, actividades o fuentes de generación de residuos dentro del puerto, iniciativas promovidas por la Autoridad Portuaria para la mejora de la gestión de residuos de la comunidad portuaria
SIED	Económica	Nivel y estructura de las inversiones	Entre otros indicadores: inversión pública en relación con el cash-flow,

Variable	Dimensión	Definición	Descripción
			inversión ajena frente a la inversión pública, renovación de activos
SQED	Ambiental	Calidad acústica	Principales focos de emisión (puntuales y difusos) del puerto que suponen emisiones acústicas significativas, evolución del número de quejas o denuncias registradas por la Autoridad Portuaria procedentes de grupos de interés, elaboración de mapa de ruido y plan de acción acústica
STID	Institucional	Mercados servidos	Estructura y evolución de los principales tráficos de mercancías
TRID	Institucional	Servicios y concesiones/autorizaciones	Tipos, marco de prestación y regulación
TSID	Institucional	Integración de los puertos en el sistema de transporte	Eficiencias con la que son coordinados los diferentes modos de transporte que confluyen en el puerto
VPED	Económica	Valor generado y productividad	Entre otros indicadores: productividad del trabajo según ingresos, productividad del trabajo según EBIDTA, etc.
WEED	Ambiental	Ecoeficiencia	Eficiencia en el uso del suelo, consumo de agua y energía eléctrica por la Autoridad Portuaria
WQED	Ambiental	Calidad del agua	Principales focos de vertido situados en el puerto que tienen un impacto significativo en la calidad del agua y sedimentos de las dársenas del puerto, medidas implantadas por la Autoridad Portuaria para controlar las emisiones ligadas a la actividad del conjunto del puerto, superficie de la zona de servicio que cuenta con recogida y tratamiento de aguas residuales

Aprender la estructura gráfica de una red bayesiana es un desafío que se persigue dentro del aprendizaje automático. La red obtenida a partir de las variables anteriores como se muestra en la Figura 3, habiéndose obtenido empleando el algoritmo K2.

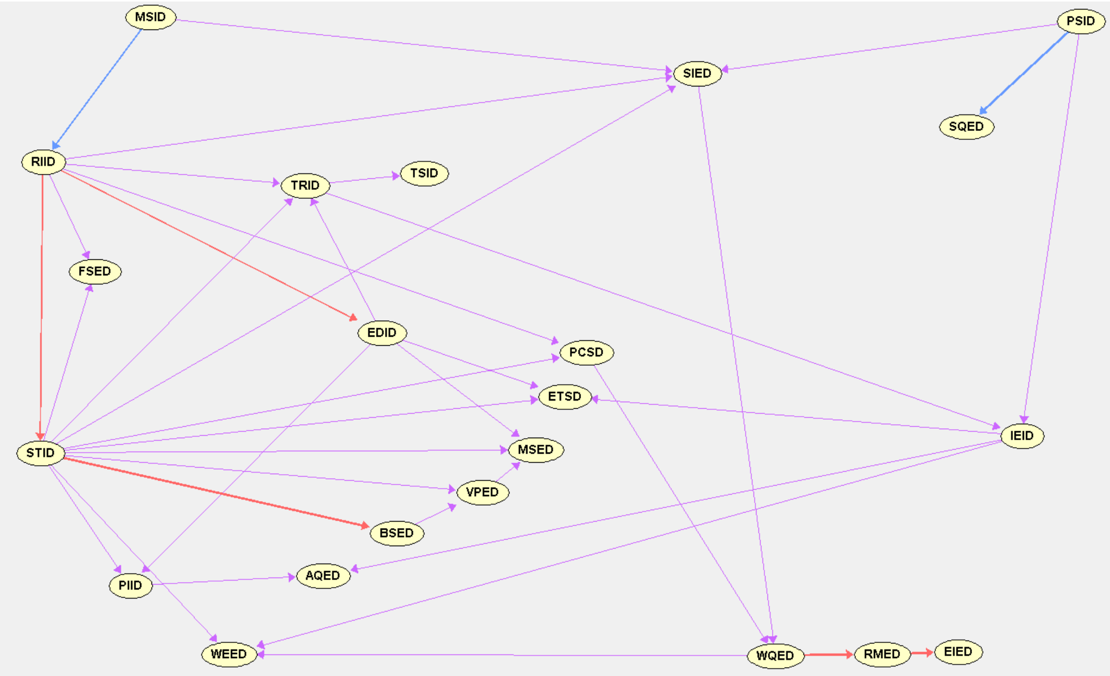


Figura 3. Representación gráfica de la red bayesiana obtenida al aplicar el algoritmo K2 a las variables seleccionadas

2.3 Diagrama de influencia o redes de decisión

Aunque las redes bayesianas se utilizan para tomar decisiones, los conceptos de utilidad y las decisiones no se modelan explícitamente. La teoría de la utilidad vinculada a las redes bayesianas proporciona un marco para la toma de decisiones llamadas diagramas de influencia o redes de decisión [10].

Los diagramas de influencia extienden las redes bayesianas usando dos nuevos tipos de nodos:

- Nodos de utilidad (o valor) que representan la utilidad y cuantifican las preferencias de decisión (generalmente en términos monetarios)
- Nodos de decisión. Los valores de estos nodos contienen acciones que la persona encargada de tomar la decisión puede utilizar (en el presente estudio, dicha persona es el administrador del proyecto).

Además de estos dos tipos, en las redes bayesianas existe el nodo circular u oval que se denomina nodo aleatorio (Figura 3).

La red da una idea aproximada de la información numérica contenida. Esto hace que cada enlace se muestre con su propio color y ancho. En pocas palabras, los enlaces coloreados en rojo indican que hay una influencia positiva, es decir, un aumento del valor del nodo padre aumenta el valor del nodo hijo. Los enlaces azules indican influencia negativa. Los enlaces negros indican que no se transmite información y los enlaces violetas indican que hay influencia ambigua, es decir, hay influencia positiva para ciertos valores paternos e influencia negativa para otros. Cuanto mayor sea la influencia de un nodo en otro, mayor anchura tiene el enlace. Al interpretar los enlaces de red y los colores de cada uno, se deben tener en cuenta los estados de cada variable.

Por lo tanto, de la Figura 3 se desprende que la función de la Autoridad Portuaria como generadora de infraestructuras portuarias tiene una influencia positiva en la estructura y evolución de los principales tráficos y en las actividades relevantes en el desarrollo económico local. Por el ancho de enlace se observa que la influencia es mucho mayor en la estructura y en la evolución de los principales tráficos de mercancías. Es decir, si la Autoridad Portuaria proporciona suelo portuario para operar, el tráfico y las actividades en el entorno aumentarán, de forma que el aumento del tráfico portuario supondrá a la vez un aumento de los ingresos por tasas de ocupación y actividad, uso comercial de la superficie y uso de los muelles.

Las relaciones azules relativos a influencias negativas, de forma que cuanto mayor sean los sistemas de gestión de apoyo a la toma de decisiones, que corresponden a sistemas de gestión de la calidad, cuadros de mando integral, campañas de caracterización de mercados, entre otros, menor deberá ser el papel de la Autoridad Portuaria como proveedor de infraestructura, la cual será provista por privados.

De igual modo, al ser un enlace azul el que une ambos nodos, el número de principales focos de emisión del puerto que suponen emisiones acústicas significativas, así como la evolución del número de quejas o denuncias registradas por la Autoridad Portuaria procedentes de grupos de interés, elaboración de mapa de ruido y el plan de acción acústica, aumentan cuando disminuyen las iniciativas dirigidas a garantizar que todo operador que desee prestar servicios en el puerto u optar a una concesión pueda conocer de modo transparente las condiciones para operar en el puerto y los mecanismos administrativos que regulan dicho proceso.

3. Conclusiones

Con la construcción de una red bayesiana se pueden conocer las relaciones entre las diferentes variables de sostenibilidad portuaria, usando para ello el algoritmo K2. De dicha red se deprende que la categoría más decisiva es la categoría institucional, a la que siguen, a un mismo nivel la categoría económica y la social, finalizando con la categoría ambiental.

Por otro lado, la red muestra que las variables institucionales están interconectadas entre sí, mientras que las variables económicas son importantes como causa-efecto porque son efectos de la variable STID (mercados servidos) que pertenecen a la dimensión institucional. Así, por el valor generado y la productividad dependen del tipo de negocio y de servicio (ocupación y actividad de los ingresos por comisiones, uso comercial de la superficie, uso de muelles, etc.).

Las variables sociales son efectos de variables institucionales pero no tienen una relación directa con su misma dimensión. Así, se observa que las variables ambientales están estrechamente interconectadas con la dimensión social y, fundamentalmente son efectos de la categoría institucional.

Finalmente, a modo de conclusión, dado que las variables económicas, sociales y ambientas son efectos de las institucionales, se determina que la cuestión clave es que las Autoridades Portuarias deben comenzar a incorporar elementos sostenibles en las herramientas usadas para regular los servicios portuarios y la gestión, tal y como se estipula en la legislación vigente, si bien, como se ha comentado, existe una fuerte limitación metodológica que hace que la aplicación práctica de la sostenibilidad no resulte fácil.

Referencias

[1] CASTILLO, Enrique, GUTIÉRREZ, Jose María and HADI, Ali S. "*Expert Systems and Probabilistic Network Models*", Springer Verlag, 1997

[2] CRESPO, Patricio. "*Marco Conceptual Introductorio. Agenda Ecuatoriana de Educación y Comunicación Ambiental para el Desarrollo Sustentable - Lineamientos de Políticas y Estrategias*", Quito, 1994

[3] CRESPO SOLER, Cristina, GINER FILLOL, Arturo, MORALES BARAZA, José Antonio., PONTE TUBAL, Nicolás., RIPOLL FELIU, Vicente "*La información de sostenibilidad en el marco de las cuentas anuales: análisis aplicado al caso de la Autoridad Portuaria de Valencia*", Revista do Contabilidado de Maestrado em Ciências Contábeis da UERJ, Rio Janeiro, v-12, n.3, p-11 set./dez, 2007

[4] DE VALENCIA, Autoridad Portuaria "*Análisis de indicadores económicos en las memorias de sostenibilidad: el caso del Sistema Portuario español*", Consejo Editorial.

[5] DOMÉNECH, Juan Luis "*Huella ecológica portuaria y desarrollo sostenible*", Puertos, vol. 114, pp. 26-31, 2004

[6] DOERR, Octavio "*Políticas portuarias sostenibles*", Boletín FAL. CEPAL. Edición nº 299, número 7 de 2011

[7] DUDA, Richard O.; HART, Peter. E. and STORK, David. G. "*Pattern Classification*", NY Wiley, 2000

[8] GLOBAL REPORTING INITIATIVE "*Guía para la elaboración de Memorias de Sostenibilidad*", Versión 3.1. GRI, 2000

[9] GONZÁLEZ LAXE, Fernando, GUERRA SIERRA, Andrés, MARTÍN PALMERO, Federico, NÓVOA GÓMEZ, Juan José., OTERO COUTO, Carlos y PENELA NÚÑEZ, Jorge "*Medición de la sostenibilidad en el Sistema Portuario Español: Propuesta metodológica a través de indicadores sintéticos de desarrollo sostenible*", XII Reunión de economía mundial, Santiago de Compostela, mayo de 2010.

[10] JENSEN, Finn V. "*An Introduction to Bayesian Networks*", London, UCL Press. 1996

[11] LI, Xuefei, CAMARERO ORIVE, Alberto, SOLER FLORES, Francisco y GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoleta "*NNtex: A toolbox to use the Neuronal Network in an easy way*" Pensamiento Matemático, ISSN 2174-0410, Vol. III, Nº. 1 (Octubre), pp. 149-154, 2012

[12] MADERO GÓMEZ, Sergio Manuel; ZARATE SOLÍS, Itzel Alejandra "*La sostenibilidad desde una perspectiva de las áreas de negocios*" Cuadernos de Administración, vol. 32, no 56, p. 7-19, 2017

[13] MARBAN FLORES, Raquel "*La Agenda 21 impulsora del desarrollo sostenible y la protección del medio ambiente en Europa y en España*" Boletín económico del ICE Nº 2899, pp. 31-45, 2006

[14] MÉNDEZ, Néstor Darío, DUQUE PORRAS, Julio César, CHAVARRO LAVERDE, Ricardo Moreno "*Seguridad inteligente*" Scientia et technica, vol. 3, no 35, p. 389-394, 2007

[15] MOLINA SERRANO, Beatriz, GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoleta, SOLER FLORES, Francisco y CAMARERO ORIVE, Alberto "*Classification and prediction of port variables using Bayesian Networks*" Congresos de la Universitat Politècnica de València, CIT2016. Congreso de

Ingeniería del Transporte. 2016.

[16] PEARL, Judea "*The Solution for the Branching Factor of the Alpha-Beta Pruning Algorithm and its Optimality*" Communications of the ACM, 1982, vol. 25, no. 8. pp. 559-564.

[17] PUERTOS DEL ESTADO. "*Memoria de sostenibilidad del sistema portuario de interés general*", 2011

[18] QUIJADA-ALARCÓN, Jorge, GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoleta, SOLER FLORES, Francisco José y CAMARERO ORIVE, Alberto "*Use of decision trees algorithm for the territorial logistic planning*" Revista Pensamiento Matemático, ISSN 2174-0410, Vol. III, Nº. 2 (Octubre) pp. 051-058, 2013

[19] RODRÍGUEZ GARCÍA, Tomás, GONZÁLEZ CANCELAS, Nicoleta y SOLER FLORES, Francisco "*Previsiones de crecimiento y necesidades de infraestructura en terminales portuarias mediante redes neuronales artificiales*" Pensamiento Matemático, ISSN 2174-0410, Vol. V, Nº. 2 (Octubre), pp. 087-108, 2015

[20] SÁNCHEZ, RICARDO, JAIMURZINA, Azhar, WILMSMEIER, Gordon, PÉREZ-SALAS, Gabriel, DOERR, Octavio, PINTO, Francisca "*Transporte marítimo y Puertos. Desafío y oportunidades en busca de un desarrollo sostenible de América Latina y El Caribe*" CEPAL. Serie Recursos Naturales e Infraestructura, 2015

[21] SARRO, Lucía Andrea "*Hacia una memoria de sostenibilidad del puerto de Bahía Blanca: diagnóstico para su posible implementación*" Tesis doctoral, http://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/2868, 2016

[22] SERRANO, Óscar "*Operativa portuaria y sostenibilidad*". CONAMA LOCAL 2015, Málaga, 7 octubre de 2015.

[23] SIMON, Herbert A. "*Why should machines learn?*" Machine Learning, Michalski et al. (eds.) Palo Alto CA: Tioga, 1983

[24] SOLER, Francisco y OLIVAS, José Ángel "*Estimación de sucesos raros mediante Redes Bayesianas*" Pensamiento Matemático, ISSN 2174-0410, Vol. IV, Nº. 1 (Abril), pp. 127-136, 2014

[25] SOLER, Francisco, OLIVAS, José Ángel. y LÓPEZ, María Dolores "*Sucesos raros en Ingeniería de Tráfico*" Pensamiento Matemático, ISSN 2174-0410, Vol. V, Nº. 1 (Abril), pp. 063-074, 2015

[26] WORLD COMMISION ON ENVIRONMENT AND DEVELOPMENT (WCED) "*Our Common Future (Brundtlland Report)*", United Nations, 1987

Sobre los autores:

Nombre: Beatriz Molina Serrano
Correo Electrónico: bmolina@prointec.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Nicoleta González Cancelas
Correo Electrónico: nicoleta.gcancelas@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Francisco Soler Flores
Correo Electrónico: f.soler@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Alberto Camarero Orive
Correo Electrónico: alberto.camarero@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Alfonso Camarero Orive
Correo Electrónico: alcamor@gmail.com
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación

Ecuaciones diofánticas en enteros gaussianos

Diophantine equations on Gaussian integers

Javier Rodrigo Hitos y Mariló López González

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 021–026, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Jun'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

En este artículo se resuelven en los enteros gaussianos algunas ecuaciones diofánticas conocidas.

Palabras Clave: Teoría de números, ecuaciones diofánticas, enteros gaussianos.

Abstract

In this paper we search for solutions in Gaussian integers to some known Diophantine equations.

Keywords: Number theory, Diophantine equations, Gaussian integers.

1. Introducción

El estudio de las ecuaciones diofánticas es una de las ramas más fructíferas de la Teoría de números. Una ecuación diofántica es una ecuación con coeficientes enteros a la que se buscan soluciones enteras.

Una de las ecuaciones diofánticas más conocida es la ecuación de Fermat: $x^n + y^n = z^n$ (1). Fermat conjeturó que no existen soluciones enteras no triviales a su ecuación si el exponente n es mayor que 2 (para $n = 2$ existen infinitas soluciones enteras, las ternas pitagóricas), conjetura probada por Wiles en 1995 [1].

Se han realizado diversas generalizaciones a la ecuación (1), una de ellas consiste en añadir una variable a la derecha: $x^n + y^n = z^n + u^n$ (2), ecuación que da lugar a números que se pueden expresar como suma de dos potencias n-ésimas de dos formas distintas.

Para $n = 2, 3, 4$ existen soluciones paramétricas a la ecuación (2) que dan lugar a infinitas soluciones enteras de la misma (en el caso $n = 4$ no da lugar a todas las soluciones enteras), en cambio para $n = 5$ no se conoce ninguna solución entera no trivial a la ecuación (2) y se conjetura que no hay ninguna [2] (un estudio del número de soluciones en media de la ecuación (2) para $n \geq 4$ se encuentra en [3]

Una generalización de la ecuación (2) es transformarla en sistema:

$$x_1^n + y_1^n = x_2^n + y_2^n = \ldots = x_k^n + y_k^n \text{ (3)}$$

Este sistema da lugar a números enteros que se pueden expresar como suma de dos potencias n-ésimas de k formas distintas. En el caso $n = 4$, $k = 3$ no se conocen soluciones enteras no triviales al sistema y se conjetura que no hay ninguna [4].

En este artículo hayamos soluciones a (2): $n = 5$ y (3): $n = 4$ en un contexto más débil, ya que son soluciones en enteros gaussianos y, en el caso del sistema, añadimos una variable más en cada ecuación: $x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = x_2^4 + y_2^4 + z_2^4 = \ldots = x_k^4 + y_k^4 + z_k^4$ (4).

Los enteros gaussianos son una extensión de los enteros introducida por Gauss como una herramienta para, entre otras cosas, resolver ciertas ecuaciones diofánticas mediante factorización gaussiana. Son los números de la forma $a + b\,i$ donde a, b son enteros, i es la unidad imaginaria. Al tener dos variables: parte real y parte imaginaria, es más factible que una ecuación ó sistema diofántico tenga soluciones en los enteros gaussianos.

Para resolver el sistema (4), resolveremos primero el siguiente sistema diofántico auxiliar:

$$x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = u^4, x_2^4 + y_2^4 + z_2^4 = u^4, \ldots, x_k^4 + y_k^4 + z_k^4 = u^4$$

El caso $k = 1$ de este sistema es la conocida como ecuación de Euler, que es otra generalización de la ecuación de Fermat de grado 3: Euler conjeturó que, al igual que es imposible expresar un cubo como suma de dos cubos, es imposible expresar una potencia cuarta como suma de tres potencias cuartas.

Elkies refutó esta conjetura en 1988 encontrando una solución entera no trivial a la ecuación de Euler y demostrando que había infinitas soluciones de este tipo [5].

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2 damos una solución paramétrica en enteros gaussianos a la ecuación (2), en la sección 3 damos algunas soluciones en enteros gaussianos al sistema (4) y en la sección 4 comentamos futuras aplicaciones de los métodos utilizados en las secciones anteriores.

2. La ecuación de grado 5

Para resolver la ecuación (2) para $n = 5$, realizamos el siguiente cambio de variable: $x = a\,t + c$, $y = b\,t + d$, $z = b\,t + c$, $u = a\,t + d$. Nótese que los coeficientes de t y los términos independientes forman dos soluciones triviales de (2): (a, b, b, a), (c, d, c, d). Esto hace que al sustituir en (2) y pasar todo a un lado obtengamos un polinomio en t de grado 4 sin término independiente, que tiene la raíz trivial 0 y otra raíz racional: $t = \frac{-c - d}{a + b}$ que da lugar a una solución trivial de (2), ya que es de la forma $(x, -x, z, -z)$. El polinomio en t de grado 2 restante tiene como discriminante:

$$(ac + bc + ad + bd)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \text{ (5)}$$

Buscamos c para que la expresión de (5) se anule y así las raíces restantes no tengan radicales, lo que da lugar a una nueva ecuación, en c, de grado 2 de discriminante:

$$-a^4d^2 + 2a^3bd^2 - 2a^2b^2d^2 + 2ab^3d^2 - b^4d^2 (6)$$

Observamos que para $d = b$, (6) se transforma en $-2(a-b)^2b^2(a^2+b^2)$.

Entonces si buscamos una solución a la ecuación diofántica de grado 2: $a^2 + b^2 = 2u^2$ (7), tenemos que, para dicha solución, el discriminante es de la forma $-v^2$ con $v \in N$, lo que da lugar a soluciones complejas con coeficientes racionales a la ecuación en c y consecuentemente a raíces complejas con coeficientes racionales del polinomio inicial de grado 2 en t. Sustituyendo en el cambio de variable estos valores hallados, quitando denominadores y factores comunes (puesto que la ecuación (2) es homogénea) y desarrollando en los complejos, obtendremos una solución en enteros gaussianos de (2).

Una solución paramétrica de (7) es $a = -m^2 - 2mn + n^2 + 4mo - 2o^2$, $\mathrm{b} = m^2 - 2mn - n^2 + 4no - 2o^2$, con $m, n, o \in Z$ que lleva a la siguiente solución paramétrica en enteros gaussianos de (2) utilizando el procedimiento expuesto:

$$\{x = m^2 - mn - mo + no + i(-mn - n^2 + mo + 3no - 2o^2),$$
$$y = mn - n^2 - mo + no + i(m^2 + mn - 3mo - no + 2o^2),$$
$$z = m^2 + mn - 3mo - no + 2o^2 + i(mn - n^2 - mo + no),$$
$$u = -mn - n^2 + mo + 3no - 2o^2 + i(m^2 - mn - mo + no)\}$$

Tenemos por tanto el siguiente resultado:

Teorema 1. Existen enteros gaussianos que se pueden expresar como suma de dos potencias quintas de enteros gaussianos de 2 formas distintas.

Observaciones:

1) Las soluciones de (2) cumplen que $z = i\,\bar{y}$, $u = i\,\bar{x}$, donde la barra es conjugación, por lo que el entero gaussiano que puede expresarse como suma de dos potencias quintas de dos formas distintas tiene igual la parte entera que la imaginaria, ya que si lo llamamos $a + b\,i$, cumple que $a + b\,i = z^5 + u^5 = i\left(\bar{x}^5 + \bar{y}^5\right) = i\,(a - b\,i) \Rightarrow a = b$.

Entonces si renombramos $x \to x + y\,i$, $y \to z + u\,i$, tenemos que hemos encontrado incidentalmente una solución paramétrica a la siguiente ecuación diofántica de grado 5:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left((x+y\,i)^5 + (z+u\,i)^5\right) - \mathrm{Im}\left((x+y\,i)^5 + (z+u\,i)^5\right) = \\ &= x^5 - y^5 + z^5 - u^5 + 5\,x\,y^4 + 5\,z\,u^4 - 5\,x^4\,y - 5\,z^4\,u + 10\,x^2\,y^3 + 10\,z^2\,u^3 - 10\,x^3\,y^2 - 10\,z^3\,u^2 = 0\end{aligned} \quad (8)$$

La solución paramétrica es:

$$\{x = m^2 - mn - mo + no, y = -mn - n^2 + mo + 3no - 2o^2,$$
$$z = mn - n^2 - mo + no, u = m^2 + mn - 3mo - no + 2o^2\}$$

Donde $m, n, o \in Z$

2) La solución de (8) parametriza también la siguiente variedad de dimensión 2 contenida en (8): $\{x - y + z - u = 0, x(y+z) - (y-z)z = 0\}$, lo que nos indica que se puede obtener la siguiente solución más sencilla (dos parámetros) de (8):

$\{x = (p - q)q, y = p(p + q), z = q(p + q), u = p(q - p)\}$, que con la observación 1) da la siguiente solución más sencilla de (2):

$$\{x = (p - q)q + ip(p + q), y = q(p + q) + ip(q - p), z = p(q - p) + iq(p + q),$$

$u = p(p + q) + i(p - q)q\}$, con $p, q \in Z$

Ejemplo

Para valores pequeños de los parámetros en la primera solución: $m = 1$, $n = 2$, $o = 3$, obtenemos la siguiente solución primitiva (sin factores comunes) de (2):

$\{x = 2 - 3i, y = 1 + 6i, z = 6 + i, u = -3 + 2i\}$. Esto da el siguiente entero gaussiano expresable como suma de dos potencias quintas de dos formas distintas:

$$6243 + 6243i = (2 - 3i)^5 + (1 + 6i)^5 = (6 + i)^5 + (-3 + 2i)^5$$

Tenemos entonces la siguiente solución de (8): $\{x = 2, y = -3, z = 1, u = 6\}$, es decir:

$$6243 = Re((2 - 3i)^5 + (1 + 6i)^5) = Im((2 - 3i)^5 + (1 + 6i)^5)$$

3. El sistema de grado 4

Para resolver el sistema auxiliar (ver la introducción), necesitamos el siguiente lema demostrado en [6] y [7] utilizando técnicas similares a las mostradas en la sección 2.

Lema 1

Si (e, f, g, h) es solución de la ecuación diofántica $i x^4 + j y^4 + k z^4 + l u^4 = 0$ (9), entonces también lo es:

$$\{x = e(4e^2f^6g^2h^2j\sqrt{ijkl}(-g^4k + h^4l) + f^4j(g^4k - h^4l)^2(g^4k + h^4l) + g^4h^4kl(g^4k + h^4l)^2 + f^8j^2(g^8k^2 - 6g^4h^4kl + h^8l^2)),$$

$$y = f\left(4e^6f^2g^2h^2i\sqrt{ijkl}(g^4k - h^4l) - 3g^4h^4kl(g^4k + h^4l)^2 + f^4j(g^4k + h^4l)(g^8k^2 - 10g^4h^4kl + h^8l^2) + f^8j^2(g^8k^2 - 6g^4h^4kl + h^8l^2)\right),$$

$$z = g\left(-8e^2f^6g^2h^6jl\sqrt{ijkl} - 4e^2f^2g^2h^6l\sqrt{ijkl}(g^4k + h^4l) + g^4h^4kl(g^4k + h^4l)^2 + f^8j^2(g^8k^2 + 6g^4h^4kl - 3h^8l^2) + f^4j(g^4k + h^4l)(g^8k^2 + 6g^4h^4kl - 3h^8l^2)\right),$$

$$u = h(8e^2f^6g^6h^2jk\sqrt{ijkl} + 4e^2f^2g^6h^2k\sqrt{ijkl}(g^4k + h^4l) + g^4h^4kl(g^4k + h^4l)^2 - f^4j(g^4k + h^4l)(3g^8k^2 - 6g^4h^4kl - h^8l^2) + f^8j^2(-3g^8k^2 + 6g^4h^4kl + h^8l^2))\}$$

Observación: Entonces si los coeficientes enteros i, j, k, l cumplen que $i\,j\,k\,l = -v^2$ con $v \in N$, la solución del lema 1 da soluciones en enteros gaussianos a (9) (si $i\,j\,k\,l$ es un cuadrado perfecto, las soluciones serían enteras).

Vemos ya el procedimiento. Partimos de la solución más pequeña a la ecuación de Euler, encontrada por Roger Frye en 1988 [8]: $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$. Observamos que si multiplicamos a los dos lados por p^4 se sigue cumpliendo la igualdad:

$p^4\, 95800^4 + p^4\, 217519^4 + p^4\, 414560^4 = p^4\, 422481^4$, lo que da la solución:

$$x_1 = p\,95800, y_1 = p\,217519, z_1 = p\,414560, u = p\,422481.$$

Buscamos ahora x_2, y_2, z_2 tales que:

$$x_2^4 + y_2^4 + z_2^4 = p^4\, 422481^4 \Leftrightarrow x_2^4 + y_2^4 + z_2^4 + \left(-422481^4\right) p^4 = 0 \ (10).$$

Pero esta es una ecuación del tipo (9) con $i = j = k = 1$, $l = -422481^4$, que cumplen la condición $i\ j\ k\ l = -v^2$, luego iterando con la solución:

$e = 95800, f = 217519, g = 414560, h = 1$, llegamos a una solución en enteros gaussianos de la ecuación por el lema 1 y su observación. Quitando los factores comunes de las componentes de la solución y multiplicando por el conjugado de la cuarta componente de la solución para que p sea entero (se puede porque la ecuación (10) es homogénea), llegamos a la siguiente solución de (10):

$$\{x2 \\ = -23267460140658670695232850989225721398567881630571903358906585940 0 \\ - 544274656369015465903981796172592217073718058241135926657539200 00i,$$

$$y2 \\ = 160715108449256615936096471585923721160932470224641226789547723839 \\ + 1333340605964306105238050409698642440874611730661389741629440000 00i,$$

$$z2 \\ = 353747746544407098790044432971214401466700318746100833334646331360 \\ - 185889664785802851899294266493199271430764318412331226436482560 00i,$$

$$p = 83658925136422108618538075926441461861146197253209350547928 1\}$$

Sustituyendo el valor de p obtenido en x_1, y_1, z_1, u, completamos la solución del sistema auxiliar, lo que lleva a una solución del sistema (4) para $k = 2$.

Esto da un entero (una potencia cuarta) que se puede expresar como suma de tres potencias cuartas de enteros gaussianos de dos formas distintas (una de ellas con enteros).

Observación: Se puede iterar el procedimiento partiendo esta vez de la solución x_2, y_2, z_2, u (si partimos de x_1, y_1, z_1, u obtenemos $p = 1$ y la solución sería la misma) para encontrar una solución del sistema (4) para $k = 3$. El nuevo p con el que multiplicamos las soluciones anteriores sería:

$$p = 8102419547549629314441869195153096071524242927551153167159199095755227475476495294260046 92 \\ 316963634413675833173194195280765398600290260705568806350726731081534826031362234310140026 1 \\ 815450721951415557896312277117042798643685884426094944756468775815484757584877926219088184 \\ 273254924436123837280292632104511005226431127566362035014305632623611863690551292329761405 6 \\ 706013601132136192325817554107649461607976846963613837759077363246666207625968409603949421 9 \\ 80269932733541771406318805946734607814152183237769112397141381294755773710158443033769$$

Hemos obtenido por tanto el siguiente resultado:

Teorema 2. Existe un entero que se puede expresar como suma de tres potencias cuartas de enteros gaussianos de tres formas distintas

4. Líneas futuras de investigación

La continuación natural a este trabajo sería encontrar soluciones no trivialesen enteros a la ecuación (2) para $n = 5$ y al sistema (3) para $n = 4$. Sin embargo estas líneas de trabajo son demasiado ambiciosas, ya que, como se comentó en la introducción, son problemas abiertos para los que además se sabe que no hay soluciones pequeñas, como se ha comprobado computacionalmente [8].

Una línea futura de investigación más asequible sería encontrar soluciones a (3) en enteros gaussianos y, en el caso de la ecuación (8) para la que sí se han encontrado soluciones enteras, ver si la solución paramétrica hallada es completa o si, por el contrario, existen soluciones extra a dicha ecuación.

Referencias

[1] WILES, A. *Modular Elliptic-Curves and Fermat's Last Theorem*. Ann. Math.141, 443-551, 1995.

[2] HARDY, G. H. AND WRIGHT, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. Oxford, England: Clarendon Press, 1979.

[3] BROWNING, HEATH-BROWN, *Plane curves in boxes and equal sums of two powers*, Math. Zeit. 251, 233–247, 2005.

[4] DICKSON, L.E.*Theory of Numbers*, Vol II. AMA Chelsea Publishing, USA, 1992.

[5] ELKIES, N.*On* $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$. Mathematics of Computation. 51 (184): 825–835, 1988.

[6] LOGAN,A., MCKINNON, D., VANLUIJK, R. *Density of Rational Pointson Diagonal Quartic Surfaces*. Algebra NumberTheory, 4(1):1–20, 2010

[7] RODRIGO, J. *Utilización del programa Mathematica para la resolución de ecuaciones diofánticas de cuarto grado,* Actas del 3cm (Tercer congreso de Mathematica en España): 477, 2009.

[8] GUY, R. K. *Sums of LikePowers. Euler's Conjecture*, in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed.New York: Springer-Verlag, pp. 139-144, 1994.

Agradecimientos

This work has been partially supported by FEDER and the State Research Agency (AEI) of the Spanish Ministry of Economy and Competition under grant TIN2016-76843-C4-2-R (AEI/FEDER, UE).

Sobre los autores:

Nombre: Javier Rodrigo
Correo Electrónico: jrodrigo@comillas.edu
Institución: Universidad Pontificia Comillas, España.

Nombre: Mª Dolores López
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Experiencias Docentes

Buscando Medidas de Apoyo para Superar el Fracaso Académico

In search of remedial actions to overcome academic failure

Victoria Artigue, José Job Flores Godoy, Eduardo Lacués, Clara Messano

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 027–042, ISSN 2174-0410
Recepción: 29 Jul'16; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

Este trabajo surge de la observación de una situación detectada en los cursos de Matemática de las carreras de la Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT) de la Universidad Católica del Uruguay (UCU). A partir de la experiencia recogida con estudiantes que muestran fracaso académico reiterado, se ha constatado que, repetir los cursos hasta que los aprueben no brinda la oportunidad de superar dificultades a aquellos alumnos que las poseen. Entre estas dificultades pueden citarse: insuficiente desarrollo de habilidades en la ejecución de algoritmos o rutinas de cálculo, escasa disponibilidad de estrategias para la búsqueda de solución a ejercicios, ausencia de recursos metacognitivos para abordar tareas no rutinarias. Esta situación ha ido generando una población de alumnos repitientes reincidentes, que acumulan un atraso importante en el desarrollo de sus respectivos programas. Para atender esta situación, se ha propuesto un conjunto de medidas, en un rango que va desde la organización curricular hasta las estrategias de enseñanza utilizadas, tanto en el aula como en tutorías personalizadas. Se presentan algunas de estas medidas y el impacto que las primeras observaciones de su implementación permiten ser apreciadas.

Palabras Clave: Lecturas orientadas, tutorías, metacognición, diseño curricular.

Abstract

This research is the result of observing the situation detected in Math courses delivered at the Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT) at Universidad Católica del Uruguay (UCU). Based on the experience of students that have showed repeated academic failure, it has been observed that repeating courses until students pass them does not provide students with the opportunity of overcoming their difficulties. Among these difficulties we find: lack of skill development to implement algorithms or routine calculations, limited strategies to find a solution for exercises, lack of metacognitive resources to address non-routine tasks. This situation has generated a repeating student population that accumulates a significant delay in the development of their programmes. To address this situation, some measures have been taken: from curriculum organization to teaching strategies in the classroom and in personalised tutorials. Some of these measures are presented as well as the impact that can be observed based on the first observations since their implementation.

Keywords: Orientated readings, tutorials, metacognition, curriculum design.

1. Introducción y antecedentes

La inducción de los nuevos estudiantes[1] a las carreras de Ingeniería sigue siendo parte en Uruguay de un debate ya instalado acerca de la brecha que se percibe entre lo que se considera el punto de partida de los cursos universitarios y la formación general con la que los ingresantes enfrentan esos desafíos [13].

En Uruguay no existe ningún proceso de selección para el ingreso a la universidad. Haber completado el ciclo de enseñanza media es la única condición habilitante; más aún, en algunos casos se admite en forma condicional a estudiantes que tengan pendiente alguna asignatura de bachillerato[2], otorgando un plazo de un semestre para que la aprueben. Esta situación hace que el perfil de los estudiantes ingresantes sea muy variado. Los instrumentos de diagnóstico al ingreso que se utilizan dan cuenta de esta situación [13].

La búsqueda de nuevas estrategias de enseñanza para abatir el fracaso académico en Matemática viene siendo un foco de atención en diversas partes del mundo. En Dinamarca, por ejemplo [3] llevan a cabo un diseño enmarcado en un programa de profesor consejero, uno de cuyos roles es detectar aquellos estudiantes con dificultades a la hora de aprender Matemática y proveer medidas remediales:

> *The programme aims to educate a "task force" of so-called "maths counsellors", i.e., mathematics teachers whose goal is to help identify students with genuine learning difficulties in mathematics, investigate the nature of these difficulties, and carry out research-based interventions to assist the students in overcoming them* [3].

La experiencia de estos expertos indica que en cada clase de Matemática hay un número de estudiantes que aún intentando hacer su mejor trabajo, no llegan a un nivel de suficiencia, incluso afirman que en determinadas carreras universitarias ocurre que este nivel de desempeño sí es logrado en otras asignaturas no específicas de Matemática. Por otro lado en [2] se menciona que casi la mitad de los encuestados, en un estudio de abandono, encontraron las materias de Matemática de primer año como las asignaturas mas difíciles; como consecuencia las visiones de profesores y estudiantes son coincidentes en este punto.

Este hecho está siendo registrado también en las carreras de la FIT, en particular en los cursos de primer año, donde los registros más altos de reprobación se dan en las asignaturas del área Matemática. Considerando una agrupación de las asignaturas de primer año en dos clases, las del área de Matemática, por un lado, y el resto, por otro, y tomando como indicador de éxito académico la fracción de cursos aprobados (número de cursos de la clase aprobados dividido entre número de cursos de la clase), resulta que en 2015 no hay estudiantes ingresantes a la FIT que tengan un indicador de éxito académico en el área de Matemática que sea superior al correspondiente a la otra clase.

La preocupación por esta situación fue el motivo desencadenante de la adopción de un conjunto de medidas tendentes a apoyar a estudiantes que muestran un historial de fracaso académico, y, además, anticipar acciones remediales para atender a quienes estén en riesgo de sufrirlo.

[1]La edad normal de los estudiantes universitarios es de 18 a 23 años.

[2]La educación secundaria esta dividida en dos parte, el ciclo básico de 12 a 15 años y el segundo ciclo o bachillerato de 15 a 18 años.

La intención de estas acciones es ir más allá del simple aprendizaje de contenidos disciplinares, y propiciar el desarrollo de competencias, tanto generales como específicas, que contribuyan a que el estudiante se convierta en un aprendiz autónomo. Entre estas medidas se cuentan:

1. Modificaciones en el diseño curricular.
2. Tutorías personalizadas.
3. Asignaturas organizadas sobre la base de lecturas orientadas.
4. Introducción de nuevas estrategias de enseñanza.

En las secciones siguientes se describen cada una de estas medidas, presentando las justificaciones de las mismas, las referencias teóricas que las orientan, y algunos de los resultados obtenidos.

2. ¿Por qué las tutorías? Un poco de contexto

Una de las mayores preocupaciones es la extensión del fracaso académico en primer año, que muestra resultados de aprobación de cursos o exámenes inaceptablemente bajos en todas las universidades de Uruguay. Los mejores resultados de aprobación en estas asignaturas no superan el 60 %, a lo que se agrega un constante descenso de los promedios de calificación final.

En las carreras de Ingeniería Electrónica, Industrial o Alimentos de la FIT, el currículo de primer año contenía, hasta el 2010, dos asignaturas cuatrimestrales de Cálculo y otras dos de Álgebra Lineal. Los estudiantes debían pasar por dos instancias para acreditar estas asignaturas: aprobar el curso y, una vez logrado esto, aprobar el examen (con una calificación suficientemente alta en el curso, se aprobaban ambas instancias a la vez). Con la organización curricular basada en períodos cuatrimestrales de clase, ocurría que, en caso de perder una asignatura, un estudiante necesariamente se atrasaba en la duración real de su carrera.

El análisis de las causas de fracaso permitió identificar dos factores muy importantes: por un lado, el de los conocimientos previamente adquiridos por los estudiantes y, por otro, el conjunto de cambios personales que era necesario que cada uno procesara para integrarse a la universidad.

En relación con el primero, las pruebas de diagnóstico al ingreso a la FIT han mostrado ser un buen instrumento para identificar a los ingresantes con más riesgo de fracaso. En este sentido, existe una correlación positiva entre conseguir un mal resultado en el test de diagnóstico y reprobar una o más asignaturas en el área de Matemática [1], es decir, una inadecuada adquisición de contenidos previos permitía prever grandes dificultades para aprobar todas las asignaturas del área de Matemática de primer año.

Con respecto al segundo, en instancias con diferente grado de sistematización[3] se ha ido recopilando información que permitió señalar factores asociados al fracaso académico:

1. Organización deficiente en el uso del tiempo, tanto para una planificación de mediano plazo, como para la administración de plazos en parciales o exámenes.
2. Falta de exposición previa a diversos instrumentos de evaluación (proyectos, pruebas con duración limitada, exámenes globalizadores de diferentes contenidos).

[3]Como son consultas personales de estudiantes a los profesores encargados de los cursos, a los coordinadores de su carrera u otros gestores de la FIT, observaciones de las producciones escritas de los alumnos en las pruebas de evaluación, propuestas presentadas por delegados de clase en diferentes contextos.

3. Participación pasiva en la clase, limitada casi exclusivamente a la toma de apuntes.

Una solución que se planteó para afrontar este conjunto de factores fue el paso de dos cuatrimestres en el primer año, a cinco bimestres, dividiendo cada asignatura cuatrimestral en dos bimestrales y agregando otro período de cursado al incluir febrero del año siguiente al ingreso como espacio para el desarrollo de cursos intensivos o para la recuperación de algún curso reprobado.

Además, cada asignatura bimestral curricular se pasó a ofrecer durante tres bimestres consecutivos, a partir del primer período en el que curricularmente correspondía ofrecerlo.

Con esta nueva disposición, dado que se disponía de cinco bimestres para aprobar cuatro cursos bimestrales, se pudo incluir la oferta de cursos introductorios no curriculares de un bimestre de duración, previos a los cursos curriculares, sin que la opción de participar en ellos significara necesariamente un atraso en el desarrollo de la carrera o, alternativamente, si no se hubiera optado por los cursos introductorios, podía recuperarse un curso perdido volviendo a cursarlo en el período inmediatamente siguiente.

La oferta de los cursos introductorios, además de contribuir a solucionar el problema de los contenidos previamente aprendidos, pretendía constituir un espacio donde se pudiera trabajar también en los otros factores reseñados. En efecto:

1. Aun siendo cursos extracurriculares, se diseñaron con un sistema de evaluación semejante al de los curriculares, por lo que los estudiantes quedaban expuestos a la misma exigencia que encontrarían luego, pero en un contexto donde tener malos resultados no tendría consecuencias en la duración de la carrera.
2. Precisamente por ser extracurriculares, los profesores contaban con mayor libertad para experimentar con la introducción de estrategias de enseñanza, sobre todo, de algunas que requirieran un mayor involucramiento de los estudiantes (lecturas previas, trabajo en grupos, tareas de autoevaluación).

Este diseño curricular que se ha llevado a cabo, es en algunos casos insuficiente. Por este motivo, en el 2014 se introdujo una modalidad de tutorías para aquellos estudiantes que aún continuaban con dificultades para aprobar los cursos de Matemática.

3. Dos modelos de tutorías

Teniendo en cuenta que pese a los cambios en la organización curricular una fracción importante de los ingresados cada año continuaban teniendo dificultades en los cursos de Matemática, se tomó la decisión de implementar un sistema de tutorías, con dos modalidades.

Por un lado, se retomó una experiencia ya realizada hace unos años, de acompañamiento personal, en paralelo con los cursos que el estudiante está desarrollando y por otro, una forma de desarrollo de los cursos con un formato basado en lecturas orientadas y avance condicionado a la certificación de conocimientos conseguidos. En lo que sigue, se describen estas dos modalidades.

3.1. Tutorías personalizadas

En las tutorías personalizadas se responde a la situación de estudiantes que están en riesgo de enfrentar una trayectoria de fracaso en el área de Matemática. Este riesgo se mide por su desempeño en el primer año, teniendo en cuenta su grado de avance. Estudiantes que reprueben más de una vez la misma asignatura o que pierdan asignaturas diferentes se consideran dentro de esta categoría de riesgo.

Estas tutorías persiguen la finalidad de evitar que el estudiante termine por acumular un historial de fracaso prolongado o generalizado, como forma de anticipar el problema que se describe en la sección siguiente.

En estos casos, se asigna al estudiante un tutor, que tiene la tarea de orientar el trabajo académico del estudiante, a partir de las tareas propias de los cursos en los que el estudiante está participando, o de otras que surjan como pertinentes a través del diálogo con el alumno a su cargo.

> *La entrevista es la herramienta básica para el desarrollo de la Tutoría debido a que es un proceso de comunicación basado en una relación interpersonal de dos, donde el diálogo o la conversación se desenvuelven en un ambiente caracterizado por la tranquilidad, confianza y privacidad, con el objetivo de que la persona responsable de la Tutoría quien realiza la entrevista, obtenga información y profundice en el conocimiento de ciertos temas relacionados con el presente y las condiciones de la persona entrevistada, que es la alumna o el alumno* [11].

En la entrevista tutorial es conveniente indagar sobre: origen y situación social (contexto familiar, condiciones sociales, antecedentes académicos, etc.), condiciones de estudio (materiales y equipamiento con lo que cuenta el estudiante), orientación (explorar sobre metas y aspiraciones y ocupaciones futuras), hábitos de estudio y prácticas académicas (se indaga acerca de las modalidades de estudio que posee), actividades culturales, entre otros.

Dado que la resolución de problemas, por un lado, o de ejercicios por otro, ocupa gran parte del tiempo de trabajo académico del estudiante, es en estos asuntos donde el tutor puede tener una gran incidencia.

Aprovechando estas tareas, siguiendo a [9] y [10] puede ayudarse al estudiante para que desarrolle habilidades metacognitivas, como, por ejemplo:

1. incorporación de procedimientos para mejorar la comprensión de las consignas y situarlas en un marco conceptual de referencia que permita elaborar un plan de solución,
2. adquisición de mecanismos de control para poder decidir si el plan adoptado progresa hacia la obtención de la solución o es necesario ajustarlo,
3. estimación del tiempo que requerirá completar una cierta actividad,
4. organizar el orden en el que se aborda una instancia de evaluación para optimizar la oportunidad de éxito.

Ante la dificultad de no comprender la consigna, una tarea que se le pide al estudiante es que no dirija sus esfuerzos para intentar resolver el problema (con todo lo que implica matemáticamente este hecho) sino que comience una búsqueda para identificar qué conceptos matemáticos considera que están relacionados con la consigna del problema. Esto involucra cuestiones temáticas, operadores semánticos insertados en el texto del problema, cuestiones de vocabulario, de conceptos, de teoremas, de detección y entendimiento de símbolos matemáticos, de entendimiento de la temporalidad de las acciones del relato del problema, entre otros.

Una dificultad asociada con esta tarea es la tendencia que muestran muchos estudiantes a comenzar a ejecutar cálculos con los datos proporcionados, sin reflexión previa de tipo alguno.

En esta tarea, el estudiante tiene un nuevo problema del cual ocuparse: realizar todo tipo de conexiones entre lo que lee en la letra del problema y los conceptos matemáticos que le sugieran poder tener un vínculo con la misma. Como consecuencia, esto implica comprender el problema, es decir, pensar y actuar de una manera flexible utilizando lo que ya se sabe.

Algunas preguntas directrices que se han planteado como modo de guiar al estudiante fueron:

- ¿En qué tema del curso enmarcaría el problema?
- ¿Qué palabras no comprende?
- ¿Qué símbolos propios de la Matemática figuran en la letra y no los conoce?
- ¿Qué propiedades puede reconocer cuando lee la letra?

En cuanto a las estrategias de abordaje de búsqueda de soluciones, se propone que el estudiante estudie junto con su tutor un conjunto de ejemplos de aplicación de ellas, donde se explicita la aproximación utilizada, y se evalúa el grado de éxito conseguido. Luego, el estudiante es puesto frente a situaciones similares, no idénticas, en las que la estrategia puede ser adaptada, y finalmente en otras donde la misma estrategia exitosa falla en conducir a la solución.

En el marco de estas actividades y asociada con la dificultad antes comentada, se orienta al estudiante para aprender a formular un plan de solución. Entre los consejos que se formulan están tratar de anticipar en qué medida una cierta acción va a aproximarle a la solución, buscar alguna manera de verificar o al menos corroborar la validez de los desarrollos llevados a cabo, explorar alternativas, revisar la solución obtenida para depurarla de aspectos irrelevantes y presentarla en una forma apropiada.

Por otro lado, el aprendizaje de algoritmos[4] es uno de los aspectos donde más fallan los estudiantes.

Cuando lo que se detecta es un problema en relación con seleccionar un algoritmo para resolver un cierto ejercicio, las tareas son otras. Algunas de las primeras preguntas que se pide al estudiante que conteste son:

- ¿Pueden utilizarse algoritmos de cálculo en el problema propuesto? Sí es así, ¿cuáles?
- ¿Cuál es el más conveniente para dicho contexto?
- ¿Cuál es el que requiere menor tiempo?

En relación con este aspecto, se ha podido constatar que dos tipos de dificultades son especialmente notables: una tiene que ver con el tiempo que los alumnos dedican a la ejecución del algoritmo; la otra es la selección errónea del algoritmo.

Estas dificultades pueden deberse, entre otros factores, a la ausencia de práctica o de supervisión en la práctica realizada, falta de atención o incapacidad para mantenerse enfocado en la ejecución de las operaciones durante un tiempo prolongado, o por no disponer de estrategias de verificación en la ejecución de los algoritmos.

En estos casos, lo que se ha ensayado es proponer al estudiante que se responda las siguientes preguntas: ¿creo que tengo todos los elementos para poder completar esta tarea? En caso afirmativo, ¿cuánto tiempo estimo que me va a insumir completarla? Una vez que se ha estimado el tiempo necesario, se le pide al estudiante que la resuelva controlando el tiempo que tarda en terminarla. Luego, se analiza con el estudiante el proceso, y en caso de que se haya fallado al estimar el tiempo necesario, se trata de encontrar las causas, entre las que podrían estar la mala

[4]Se entiende por algoritmo una secuencia ordenada de operaciones que permiten obtener la solución de una cierta clase de situaciones de cálculo, basada en propiedades previamente deducidas.

estimación del tiempo necesario para ejecutar algoritmos, errores al apreciar que se disponía de todos los elementos para obtener la solución, existencia de momentos en los que se perdió el foco en la tarea y se ubicó en otros asuntos.

En [3] se plantea que existen tres tipos de dificultades a la hora de aprender Matemática. La primera consiste en la formación de conceptos, la segunda en razonar y probar en matemáticas y la tercera consiste en utilizar la Matemática para modelar. Estos aspectos también los hemos tenido en cuenta para elaborar el presente trabajo, pues reconocemos en nuestros alumnos los mismos obstáculos.

Como comentario de cierre de esta sección, se puede acotar que la mayoría de los alumnos además de asistir a las tutorías cursan asignaturas de la carrera que no se dictan bajo esta modalidad. De todos modos, en las tutorías el docente tiene un vínculo más personal con el alumno, por lo que una tarea que se le plantea al profesor es la de ayudarlo a cumplir con plazos y tiempos que son necesarios conocer y ordenar para lograr una vida universitaria más adecuada. Con cada uno de los estudiantes tutoreados, el profesor contribuye a organizar sus respectivas agendas de trabajo y esquemas de asesoría académica diferenciada.

3.2. Asignaturas organizadas sobre la base de lecturas orientadas a demanda

Los cursos bajo lecturas dirigidas a demanda del estudiante, buscan generar espacios de trabajo flexibles, de manera que cada estudiante reciba orientación y atención del docente para no solo atender a los contenidos propios de las asignaturas, sino también, y sobre todo, al desarrollo de las capacidades necesarias para el aprendizaje.

Esta modalidad se ofrece a estudiantes que muestran un historial de fracaso reiterado en una cierta asignatura, lo que permite conjeturar que existen factores no evidentes que es necesario develar para poder conseguir superar esa situación.

Sobre los docentes encargados de estos cursos recae una especial responsabilidad, porque deben esforzarse en identificar en cada uno de los estudiantes sus dificultades personales, y a partir de este diagnóstico, idear estrategias para ayudarle a superarlas.

> *More specifically, each teacher would be asked to identify and select one to three "candidate students" in classes he or she was currently teaching, to document the difficulties of each student, and try to determine – through interactions with the individual students – the nature and origin of the observed difficulties. Based on this and drawing on their teaching competency, the teachers then were to design some individual counselling sessions or classroom teaching units, with the purpose of assisting the students selected in overcoming their difficulties* [3].

En general, estas interacciones se desarrollan de una manera distinta a las planteadas en los cursos curriculares, atendiendo, entre otros factores, a la necesidad de considerar otros tiempos académicos y de aprendizaje, necesidades y situaciones personales marcadamente diferentes entre los participantes.

Por otro lado, esta es la causa de que deba limitarse el número de estudiantes participantes en cada grupo.

Tomando en cuenta el programa llevado adelante en Dinamarca, que anteriormente hemos citado, consideramos que los profesores que lleven adelante estos cursos tienen que estar motivados e interiorizados en esta modalidad:

> *Whilst, it was clear that the programme could not be based solely on the teachers' own experiences and intuition—if so, student's learning difficulties would already have been resolved!* [3].

Es importante hacer mención al plan de lecturas: este consiste en una bibliografía seleccionada y recomendada por el docente sobre los temas a tratar, cuya lectura previa corre por cuenta de los estudiantes. En [3] se propone proveer tres tipos de bibliografía, una general, otra específica del tema y una complementaria.

El objetivo de estos cursos y, por lo tanto, el mensaje a transmitir a los estudiantes, es que esta modalidad de cursado no implica ni menor exigencia al evaluar, ni disminución de la cantidad o profundidad de contenidos a tratar, ni menor dedicación por parte del estudiante para lograr los objetivos de aprendizaje. Este último aspecto es crucial, porque se ha podido constatar que en muchos casos esta puede ser aún mayor que en cursos tradicionales.

En efecto, frecuentemente el trabajo en esta modalidad ha dejado expuestas debilidades de los estudiantes que en otras formas de trabajo pueden aparecer más ocultas (por ejemplo, fallas en la ejecución de diferentes algoritmos, o dificultades asociadas con la lectura de consignas). Las tareas que el profesor propone para superar estas deficiencias son una carga de trabajo adicional para el estudiante.

En estos cursos, no existen clases magistrales, sino instancias de consulta periódicas (generalmente una o dos veces por semana). Por otro lado, su extensión temporal no está marcada por la estructura del calendario académico, sino que puede extenderse más allá de los plazos establecidos para las asignaturas con dictado usual.

La decisión institucional de aprobar estas formas de cursado se concretó con la creación de una reglamentación específica para estas instancias, complementaria de las existentes para instancias regulares. Dicha reglamentación contempla diversos aspectos, como son: quiénes están en condiciones de cursarlos, las responsabilidades y derechos por parte de los docentes y alumnos, la organización y la evaluación de los cursos.

En cuanto a quiénes pueden cursar este tipo de cursos, se establece que podrán aquellos alumnos que deban cursar por cuarta vez una misma asignatura.

Entre las responsabilidades y derechos de los docentes, se encuentran:

1. Podrán, en caso de considerarlo relevante solicitar la escolaridad de los participantes del curso.
2. Comunicarán, prepararán y mantendrán actualizado el plan de lecturas desde el comienzo del curso.
3. Generarán conciencia de la importancia de cursar bajo esta modalidad, dando a conocer los lineamientos generales y los objetivos de una manera clara, ya sean a corto, mediano o largo plazo, como también los criterios de evaluación.
4. Identificar las emociones del estudiante que puedan estar obstaculizando sus procesos de aprendizaje, y solicitar apoyo necesario si considera que la situación lo amerita.
5. Llevarán registro escrito de las circunstancias especiales que se detecte en cada estudiante.
6. Comunicarán al coordinador de carrera cuando un estudiante ha completado el curso, o cuando ha perdido tres evaluaciones sobre la misma ficha de lectura (aspecto formal que se verá a continuación).

Y entre las responsabilidades y derechos de los alumnos, se encuentran:

1. Inscribirse en el programa de tutorías.
2. Comprometerse con su tutor en el desarrollo de las actividades que acuerden conjuntamente y ser consciente de que el único responsable de su proceso de formación es el propio alumno.

3. Participar en los procesos de evaluación del trabajo tutorial, de acuerdo con los mecanismos institucionales establecidos.

4. Participar en las actividades complementarias que se promuevan dentro del programa tutorial.

5. Asumir que las únicas asignaturas que se podrán cursar en esta modalidad son las de primer año y que solo podrá cursar una vez en esta modalidad cada asignatura.

En cuanto a la organización, ya hemos mencionado que el desarrollo de los contenidos se hace a partir de un conjunto de fichas de lectura extraídas de la bibliografía recomendada, y de ejercicios sobre cada tema del curso que el estudiante debe realizar por sí mismo, consultando las dudas que le surjan con el profesor en los momentos de encuentro señalados.

Cuando el estudiante siente que ha aprendido lo suficiente sobre el tema, pide al profesor para rendir una prueba correspondiente a esos contenidos. La aprobación de esta prueba es condición necesaria para poder seguir avanzando en el abordaje de los contenidos sucesivos. En tanto el estudiante no consiga mostrar suficiencia, no se le permite continuar. Las siguientes, son condiciones necesarias para la aprobación del curso: no perder 3 veces la prueba sobre una misma ficha de lectura, aprobar las pruebas de al menos dos fichas cada 5 semanas, completar la aprobación de las pruebas de todas las fichas de lectura en el plazo máximo del curso, cumplir con la asistencia mínima.

Ante la reprobación de tres instancias de evaluación correspondientes al mismo tema debe plantearse por parte del docente una consulta con el director de la carrera que sigue el estudiante para decidir qué orientación dar a este.

A los efectos de continuar con aspectos que tienen que ver con la organización de estos cursos, consideramos importante aclarar que la extensión del curso es como máximo el doble de la del curso curricular y el cupo máximo de los mismos es de ocho alumnos. Además, el ritmo de avance estará pautado por el trabajo del estudiante, por lo que es posible que cada uno complete el cursado en plazos diferentes (esto deberá ser tenido en cuenta para los ajustes administrativos que sea necesario llevar a cabo), sin embargo, a todos los estudiantes se les exigirá una participación mínima para permanecer en el curso, consistente en aprobar al menos una prueba cada tres semanas. La asistencia se registrará en al menos una clase de consulta semanal con el tutor del curso, en las cuales el estudiante deberá evidenciar algún grado de avance, a partir de la presentación de tareas o la discusión sobre las dudas que las lecturas le hayan generado. Finalmente, la aprobación del curso se conseguirá cuando el estudiante apruebe todas las evaluaciones previstas.

Para aclarar un poco más el sistema de evaluación a continuación se transcriben otras normas formales que organizan este tipo de modalidad de cursado.

1. Cada ficha de lectura será objeto de una evaluación mediante una prueba específica.

2. La evaluación del curso consistirá en el conjunto de pruebas generado a partir del plan de lecturas y se tomarán a demanda del estudiante, en la forma y con las restricciones siguientes:

   a) Las pruebas a demanda las solicitará el estudiante cuando crea que ha dominado un tema.
   b) Estas pruebas serán corregidas inmediatamente por el profesor, y devueltas al estudiante.
   c) La aprobación de cada prueba es condición necesaria para avanzar en los contenidos del curso, y solicitar rendir prueba de los temas siguientes.
   d) Cada estudiante dispondrá de un máximo de tres intentos para aprobar cada prueba.

e) En el caso de no aprobar una evaluación a la tercera vez, se suspenderá el cursado del estudiante y se pondrá en conocimiento del coordinador de la carrera correspondiente, para que se estudie de manera especial la situación.

f) Se propondrán dos parciales.

g) La calificación final del curso se compondrá sumando el 70 % del promedio ponderado de los dos parciales y el 30 % del promedio de las pruebas sobre las fichas de lecturas.

La experiencia recogida en los cursos implementados de esta manera muestra que esta forma de trabajo es una alternativa válida siempre y cuando el estudiante la asuma con compromiso constante y en forma disciplinada.

Los estudiantes que no muestran regularidad en la asistencia a las consultas, o que no se ajustan a un cierto calendario personal para dar las pruebas, terminan por abandonar el curso, dado que no consiguen los aprendizajes suficientes para superar las pruebas o bien acumulan retrasos tan grandes que hacen inviable la continuación de la participación en el curso. En cambio, los que abordan las tareas compensatorias que los docentes proponen, participan regularmente de las consultas y adquieren un ritmo personal para rendir con seguridad las pruebas de evaluación, consiguen finalmente aprobar el curso.

Como cierre de esta sección, se muestra información correspondiente al curso de Cálculo III llevado a cabo por primera vez en 2015 y al que concurrieron 10 alumnos. Este curso corresponde al primer semestre del segundo año de las carreras de Ingeniería en Electrónica, Telecomunicaciones, Sistemas Eléctricos de Potencia, Industrial o Alimentos. El material se organizó en 14 fichas (ver Tabla 1). Como se dijo anteriormente, no se puede continuar con la ficha siguiente sin haber aprobado la evaluación correspondiente a la ficha anterior.

Tabla 1. Temas de las fichas del curso de Cálculo III.

Ficha	Tema
1	Cuerpo de los números reales e inducción
2	Sucesiones
3	Series
4	Integrales propias
5	Series de funciones y convergencia uniforme
6	Series de potencias y Taylor
7	Series de Fourier
8	Parametrización de curvas por longitud de arco
9	Triedro de Frenet
10	Integrales de línea de funciones escalares/vectoriales
11	Funciones potenciales
12	Integrales de superficies
13	Integrales de superficies de funciones escalares y vectoriales
14	Teoremas de Green, Stokes y Gauss.

En la Tabla 2 se presenta una relación del número de veces que se tuvo que presentar cada estudiante para poder continuar con las fichas posteriores.

Como se puede observar en la Tabla 2, dos estudiantes, estudiantes 7 y 10, no terminaron el curso debido a que no lograron obtener una nota aceptable en tres evaluaciones (calificación mayor o igual que 60 en 100) sobre una misma ficha, fichas 5 y 4, respectivamente. De los 8 estudiantes que terminaron el curso todos tuvieron que dar al menos dos veces alguna de las fichas que consta el curso y 4 de ellos tuvo que dar al menos tres veces la evaluación de alguna ficha (estudiantes 2, 5, 8, 9). Esta evidencia no hace pensar que estos estudiantes en un curso

Tabla 2. Desempeño de los Estudiantes, donde se registra el número de pruebas necesarias para obtener una calificación aprobatoria.

		Fichas													
Alumnos		F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14
	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	2	1
	2	2	2	1	2	1	1	1	1	3	2	3	1	1	2
	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	4	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	1
	5	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	3	1	1
	6	2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1
	7	2	3	3	3	R									
	8	3	1	1	1	3	2	2	3	1	1	1	1	1	2
	9	3	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
	10	3	3	3	R										

curricular de Cálculo III hubieran tenido los mismos inconvenientes que han tenido antes de comenzar la tutoría.

De los 8 estudiantes que terminaron el curso podemos reportar que hubo una diferencia de finalización de las evaluaciones de 2 meses, entre el primero con obtener notas satisfactorias en las 14 fichas hasta el último. Esta evidencia sugiere que en un curso curricular estos estudiantes habrían tenido inconvenientes para cubrir el material

Varios de estos cursos ofrecidos en esta modalidad están en desarrollo en estos momentos. Por eso, solo podemos ofrecer conclusiones preliminares, sujetas a una revisión sistemática una vez que se hayan completado suficientes instancias de esta estrategia de enseñanza.

Una primera consideración es que muchos estudiantes fracasan sistemáticamente en aprobar una ficha de lectura en la primera oportunidad, y frecuentemente llegan a la tercera oportunidad. El hecho de que las pruebas se proponen sobre un tema relativamente poco extenso, lleva a que necesariamente se repitan algunos de los instrumentos de evaluación, porque no hay mucha diversidad de la cual seleccionar.

Esto plantea la pregunta acerca de si el estudiante ha efectivamente modificado de alguna manera su forma de aprender Matemática o está aprobando por simple repetición de pruebas donde finalmente termina por encontrar ejercicios parecidos a algunos de los que ya enfrentó en otras instancias.

La segmentación de contenidos plantea otra cuestión: ¿se puede, con este sistema, tener una razonable seguridad de que el estudiante ha conseguido adecuadas conceptualizaciones? ¿Sería necesario incluir algunas instancias de evaluación globalizadoras?

El tercer aspecto que emerge de estas experiencias es la dificultad que muestran algunos de los estudiantes para mantener un ritmo de trabajo constante; es frecuente que se constaten discontinuidades en las asistencias a las consultas o en la presentación a pruebas. Cuando se interroga a estos estudiantes, es común que contesten con explicaciones que indican una incapacidad para organizar el uso del tiempo personal.

4. Algunas estrategias de enseñanza

Una de las estrategias que se han implementado es la denominada Just in Time Teaching (JiTT). Una de las características de esta metodología es la propuesta de lecturas previas a la clase. A poco de comenzar a aplicarla, resultó claro que una de las dificultades asociadas a su uso era la falta de costumbre de los estudiantes a leer textos matemáticos [14].

Por este motivo, una de las tareas que se ha propuesto a los estudiantes en la ejecución de ciertos procedimientos que orientan a una lectura de un texto matemático y su comprensión. Para el desarrollo de estos procedimientos, han servido de orientación conceptos generales acerca de lectura [4] y otros específicos acerca de lectura en Matemática [8], además de algunos antecedentes donde se elaboró una guía de lectura para orientar a los estudiantes y se recogió evidencias sobre cómo la usaron, que mostró que en general abordan la lectura con superficialidad (ignoran la presencia de símbolos con significados especiales, no articulan información presentada en diferentes registros: gráficos, algebraicos, numéricos, o no prestan atención las estructuras deductivas usadas) [5]; hay otra instancia exploratoria de uso de JiTT, en la que además de recoger evidencias similares a las mencionadas, resultó claro que es necesario incorporar las actividades de lectura en el sistema de evaluación de la asignatura como forma de estimular la participación de los alumnos [6].

Una tarea cualquiera de lectura está basada en capítulos o secciones de un texto matemático, o en documentos elaborados por los docentes acerca de algún contenido específico, y la intención es promover un tipo de lectura reflexiva, llamando la atención sobre algunos aspectos destacables y planteando algunas interrogantes.

Para esto, se proporciona a los estudiantes la guía de lectura que se transcribe a continuación.

CONSIGNA

1. Lea las secciones X del libro de texto recomendado.
2. Luego de la primera lectura, confeccione una lista de dudas o de aspectos que siente que debe revisar nuevamente.
3. Vuelva al texto con la lista de dudas y ensaye alguna de estas acciones para intentar superar la duda:
   a) Trate de expresar el texto leído de otra manera que crea equivalente.
   b) Revisar el contexto, para asegurarse de que está comprendiendo la notación simbólica en forma adecuada.
   c) Desarrolle con cuidado los ejemplos, completando los pasos que eventualmente pudieran faltar.
4. Vaya a la sección de ejercicios, identifique los que tengan que ver con sus dudas, y trate de resolverlos. Depure la lista anterior, eliminando las entradas que crea haber comprendido. Elabore un resumen de la sección, en el que destaque los elementos a su juicio más relevantes, indicando además cuáles le resultaron más difíciles y cuáles más fáciles y cuáles cree necesita aún saber. Este resumen se verá enriquecido si señala vínculos entre lo que ha leído y temas anteriormente estudiados.

A modo de ejemplo, se muestra el trabajo realizado por un alumno que expone la lista de dudas depuradas de las secciones 8.1 y 8.3 del texto [12], temática número complejo (Figuras 1 y 2).

Otra de las estrategias ensayadas se refiere a generar criterios de evaluación de la producción propia. Es importante atender a esta cuestión, dado que es bastante frecuente que después de instancias de evaluación, al presentar las correcciones a los estudiantes, éstos manifiesten asombro por los criterios utilizados. En general, esta reacción es auténtica y sincera, lo que debe interpretarse como un indicador de que los criterios con los que los estudiantes evalúan su trabajo no coinciden con aquellos con los que son usados por sus profesores.

Para reforzar esta estrategia, el segundo curso de Álgebra Lineal (Álgebra II) que se ofrece en el segundo semestre de primer año, está organizado sobre la base de estudio previo a la

Lista de dudas:

Sección 8.1:

a. ***¿Por qué dos coordenadas polares diferentes pueden representar el mismo punto?***

Leyendo nuevamente el texto y analizando el ejemplo 2, se puede apreciar que dado un punto P de coordenadas (r,θ), cualquier punto con coordenadas $(-r,\ \theta+k\pi)$ (siendo k un número entero impar) o $(r,\ \theta+2n\pi)$ (donde n es cualquier entero) representan el mismo punto. Esto implica que cada punto en el plano tiene un número infinito de representaciones en coordenadas polares.

b. ***¿Por qué al convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares, puedo obtener diferentes resultados? ¿Cómo sé cuál es el resultado correcto?***

Desarrollando el ejemplo 4, es apreciable que los resultados obtenidos al convertir coordenadas rectangulares a polares, no determinan de manera única a r y θ. Es por esto que se debe prestar atención al cuadrante donde se encontraba el punto definido en coordenadas rectangulares, para expresar el resultado en coordenadas polares de forma correcta.

Figura 1. Trabajo realizado por un estudiante siguiendo la consigna anterior: lectura orientada sobre número complejo.

Sección 8.3:

a. ***¿Por qué el argumento de un número complejo z, expresado en forma polar, no es único?***

El argumento de un número complejo expresado en forma polar, es un ángulo θ. Volviendo al ejemplo 1 de la Sección 8.1, se puede apreciar que todos los ángulos $\theta+2n\pi$ (donde n es cualquier entero) tienen el mismo lado terminal que el ángulo θ.

b. ***¿Por qué para calcular las raíces n-ésimas de números complejos no utilizamos el Teorema de DeMoivre con n igual 1/n?***

Analizando la demostración se puede concluir que de utilizar el Teorema de DeMoivre con n igual $1/n$, se obtiene una única raíz. Como se busca calcular las n-ésimas raíces, se debe reemplazar θ por $\theta+2k\pi$ (siendo k un número entero, que se sustituirá por 0,1,2,….n-1), pudiendo calcularse de esta manera las n-ésimas raíces.

Figura 2. Trabajo realizado por un estudiante siguiendo la consigna anterior: lectura orientada sobre número complejo.

clase de los materiales que se han desarrollado sobre los contenidos del curso. Estos materiales están elaborados de manera que incorporan instrucciones precisas para contribuir a mejorar la lectura de textos matemáticos. Los lugares elegidos para dar estas sugerencias responden a criterios tales como: indicar la presencia de signos especiales, proponer la identificación de la estructura deductiva que se haya usado, explicitar el resultado conceptual que permite ejecutar un cierto algoritmo, completar detalles de un cierto desarrollo.

Más allá de que esto podría deberse a un problema de comunicación, lo que es necesario promover es el desarrollo de habilidades en los estudiantes que pongan en condiciones de valorar su trabajo de acuerdo a estándares externos.

En este sentido, se han diseñado tres tipos de tareas, que se describen a continuación.

La primera es un trabajo en equipos, en tres fases. La inicial consiste en la entrega de una consigna que cada equipo debe responder; la solución elaborada debe ser escrita de la manera que el equipo considera una correcta presentación. La segunda fase consiste en el intercambio entre los equipos de las soluciones, con la finalidad de que cada equipo corrija con sus propios criterios la producción realizada por otro equipo. La fase final de esta tarea consiste en un análisis hecho por el profesor de cada solución y de cada corrección, marcando aciertos y errores en cada una de esas tareas.

La elaboración de este tipo de tareas surge del comprender que el espacio donde se aprende, es un espacio compartido con otros sujetos, donde no solo están en juego los saberes, sino además las distintas relaciones que se establecen con los otros y con uno mismo [7]. El diseño de este tipo de tareas se enmarca en lo que se conoce como tutorías entre pares, las cuales se pueden llevar a cabo de diversas maneras y con distintos fines, pero sea cual sea la manera, en cualquier caso es una estrategia de enseñanza que se apoya en el compromiso que asumen algunos estudiantes con otros, generándose un ámbito de solidaridad [7]. Muchas veces, en la confrontación y la validación con otros sujetos es cuando se produce el saber y por eso apostamos cuando pensamos en tareas de este estilo.

A modo de ejemplo, mostramos a continuación una tarea propuesta en el curso denominado introducción al álgebra dictada en nuestra facultad; en la primera fase cada equipo debía resolver un sistema de ecuaciones mediante operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada asociada al sistema. En la segunda fase la consigna de la tarea fue realizar la corrección de la tarea que realizó el otro equipo, la cual consistió en resolver un sistema (otro) de ecuaciones, mediante el mismo método. Además, debían utilizar la siguiente tabla para realizar la corrección. Para cada tipo de error, si lo hubiera, debían elegir uno de los tres juicios y explicar todas las correcciones realizadas.

Tabla 3. Corrección entre pares

Tipo de error-Juicio	Insuficiente	Aceptable	Satisfactorio
Al escribir la matriz aumentada			
Al aplicar operaciones elementales			
Al operar			
Al especificar las operaciones elementales			
Al escribir la solución			
Al clasificar			

Además, se garantizó que cada equipo resolviera un sistema de ecuaciones compatible determinado y que corrigiera uno del tipo compatible indeterminado o viceversa.

Una variante de esta actividad es proporcionar dos consignas y en el intercambio de soluciones asegurar que cada grupo corrige una solución de la consigna en la que el grupo no trabajó. Esto agrega dificultad en la fase de corrección, dado que debe analizarse una situación en la que no se ha trabajado previamente.

La segunda es una actividad en dos fases. Comienza con la propuesta de una consigna al grupo entero. Luego de unos minutos de análisis personal, el profesor comienza a dirigir la búsqueda de la solución, tomando las iniciativas de los estudiantes y generando debates sobre sus intervenciones. En esta fase, el docente no es selectivo y toma cada propuesta y la registra en el pizarrón, deliberadamente en forma desordenada. Cuando finalmente se consigue una solución, termina esta fase. La segunda es individual, y consiste en organizar el registro del pizarrón, para escribir una solución correcta. Para conseguir esto, el estudiante debe establecer una secuencia adecuada, eliminar los elementos que no son funcionales a esa solución y completar con comentarios pertinentes la articulación de las diferentes partes que recopiló para producir la solución.

En la tercera tarea la propuesta es también en dos fases. La primera corre a cargo del profesor, que resuelve en forma ordenada un problema de cierta complejidad, poniendo énfasis en la estructura de la solución. La segunda es grupal, donde se propone un problema no idéntico al resuelto, pero con cierta similitud, de manera que sea posible resolverlo adaptando la solución dada al primer problema. Adaptar no significa simplemente ejecutar la misma secuencia con cambios solo en los cálculos con diferentes datos, sino que debe requerir en algún momento que los estudiantes hagan algo que no se hizo en la solución expuesta por el profesor.

En cualquier caso, el tiempo total de cada tarea se extiende a un módulo de 80 minutos. Estas estrategias fueron pensadas inicialmente para los cursos curriculares, sin embargo, son fácilmente adaptables a los cursos basados en lecturas orientadas o tutorías. La puesta en práctica dependerá de la cantidad de estudiantes que haya en cada grupo, lo que es determinante para poder trabajar en equipos.

5. Consideraciones finales

El Departamento de Matemática de la Universidad Católica del Uruguay pretende, con este trabajo, aportar ideas, que han ido surgiendo en la labor cotidiana de los docentes que la integran, con el fin de mejorar la enseñanza de la Matemática en las aulas de las carreras de Ingeniería, y además buscar remedios alternativos para aquellos estudiantes que manifiestan algún tipo de dificultad

Algunas de estas medidas se siguen desarrollando y adecuando de acuerdo con la experiencia que se va recogiendo por lo que se podrá tener una evaluación sobre ellas con mayor evidencia empírica en breve plazo.

Referencias

[1] ÁLVAREZ, W., LACUÉS, E., PAGANO, M., *Diseño y validación de un instrumento predictor del éxito académico de alumnos ingresantes a la universidad*, RELME XVII, Santiago de Chile, 2003.

[2] CASARAVILLA, A., *El abandono académico: análisis y propuestas paliativas. Dos proyectos de la Universidad Politécnica de Madrid*, Revista de Investigación "Pensamiento Matemático", Vol. IV, No. 1, pp. 7–16, 2014.

[3] JANKVIST, U.T., NISS, M., *A framework for designing a research-based "maths consellor" teacher programme*, Education Studies in Mathematics, Nº 90, pp. 259–284, 2015.

[4] KINTSCH, W., *The Construction–Integration Model of Text Comprehension and Its Implications for instruction*, En R. B. Ruddell, & N. J. Unrau (Edits.), Theoretical models and processes of reading, pp. 1270–1328, Newark, DE, USA: International Reading Association, 2004.

[5] LACUÉS, E., PEÑA, J., *La lectura de textos matemáticos como tarea para promover la inserción del estudiante en el medio universitario*, Actas de la V EMCI Internacional, 2006.

[6] LACUÉS, E., VILAR DEL VALLE, S., *Una experiencia preliminar de enseñanza de Álgebra Lineal usando la estrategia "Just in Time Teaching"*, Actas de la V EMCI Internacional, Actas de la XVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática, SOCHIEM, 2012.

[7] MOSCA, A., SANTIVIAGO, C., *Fundamentos Conceptuales de las TUTORÍAS ENTRE PARES. La experiencia de la Universidad de la República*, Montevideo, Uruguay, 2012. Recuperado el 16 de 05 de 2016, de http://data.cse.edu.uy/sites/data.cse.edu.uy/files/diagramacion_TEP_II_corregido4.pdf

[8] ÖSTERHOLM, M., *Characterizing reading comprehension of Mathematical texts*, Educational Studies in Mathematics, Nº 63, pp. 325–346, 2005.

[9] SCHOENFELD, A., *What's all the fuss about metacognition?*, En A. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education, pp. 189–216, Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1987.

[10] SCHOENFELD, A., *Reflections on doing and teaching Mathematics*, En A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving, pp. 53–70, Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1994.

[11] SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA ESTADOS UNIDOS MEXICANOS., *Lineamientos de acción tutorial*, Dirección General de Bachillerato. México, D.F., México, 2015. Obtenido de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/04-actividadesparaescolares/acciontutorial/FI-LAT.pdf

[12] STEWART, J., REDLIN, L., WATSON, S., *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, México, D. F., México: Cengage Learning Editores, S. A. de C. V, 2012.

[13] UNIDAD DE ENSEÑANZA., *Informe Herramienta Diagnóstica al Ingreso Generación 2012*, Montevideo: Facultad de Ingeniería (FING), Universidad de la República (UDELAR), 2013.

[14] VANDERBILT UNIVERSITY., Center for Teaching. Nashville, Tennessee, USA, 2015. Recuperado el 11 de 07 de 2015, de http://cft.vanderbilt.edu/teaching-guides/just-in-time-teaching-jitt/

Sobre los autores:

Nombre: Victoria Artigue
Correo electrónico: maria.artigue@correo.ucu.edu.uy
Institución: Universidad Católica del Uruguay.

Nombre: José Job Flores Godoy
Correo electrónico: jose.flores@ucu.edu.uy
Institución: Universidad Católica del Uruguay.

Nombre: Eduardo Lacués
Correo electrónico: elacues@ucu.edu.uy
Institución: Universidad Católica del Uruguay.

Nombre: Clara Messano
Correo electrónico: claramessano@gmail.com
Institución: Universidad Católica del Uruguay.

Experiencias docentes

Pensamiento Matemático Avanzado y Scratch: El Caso del Máximo Común Divisor

Advanced Mathematical Thinking and Scratch: The Greatest Common Divisor

Miguel Ángel Baeza Alba, Francisco Javier Claros Mellado,
Mª Teresa Sánchez Compaña, Mónica Arnal Palacián

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 043–064, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Abr'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

En este artículo llevamos a cabo una propuesta didáctica, con los alumnos del Máster de Formación del Profesorado en Enseñanza Secundaria y Bachillerato de la Universidad Complutense de Madrid, de la especialidad de Matemáticas. Dicha propuesta consiste en la programación en Scratch del Algoritmo de Euclides para el Máximo Común Divisor. Esta metodología de trabajo, que mezcla matemáticas y programación, permitirá trabajar con los alumnos elementos propios del Pensamiento Matemático Avanzado como son la abstracción, la formalización y la generalización, entre otros.

Palabras Clave: Matemáticas, programación, algoritmo, didáctica.

Abstract

In this article we carry out a didactic proposal with the students of the Master which name is "Teacher training in E.S.O and Bachillerato" at Complutense University in Madrid, in the Maths speciality. This proposal consists in the Scratch programming of Euclides Algorithm for the Greatest Common Divisor. This methodology which mixes Maths and programming, let the students work with the main elements of Advanced Mathematical Thinking such as abstraction, formalization and generalization.

Keywords: Mathematics, programming, algorithm, didactics.

1. Introducción

La introducción de las TIC en la escuela abre un amplio campo de posibilidades que intenta responder a las necesidades que plantea esta nueva sociedad de la información. Este hecho va a llevar emparejado una serie de cambios; Pérez (1998) sugirió reconceptualizar el alcance de lo educativo, reformular el currículo e innovar en las estrategias educativas.

El uso de las nuevas tecnologías ha supuesto un esfuerzo en formación por parte del profesorado. Pascual (1998) advierte que el uso del ordenador no supone una mejora si no va acompañado de un adecuado planteamiento metodológico; el uso que hagamos del ordenador en el aula, tiene que formar parte de una actividad que haya sido diseñada por el profesor.

Carvajal, Font y Giménez (2014) hacen alusión a que, pese a que los alumnos del Máster de Secundaria en Matemáticas poseen una sólida formación en competencia digital, pocos de ellos utilizan las TIC en su periodo de prácticas en el centro de Secundaria. La principal razón que argumentan los estudiantes es la falta de infraestructura y recursos generales en el centro.

Ricoy y Couto (2012) señalan los beneficios, controversias y cambios o mejoras que puede aportar la introducción de las TIC en el aula. Entre las dificultades que puede suponer su utilización señalan, además de la desmotivación de ciertos docentes ante su uso, la escasez de medios tecnológicos en algunos centros. Por el contrario señalan como beneficios, el desarrollo de la comunicación bidireccional y la atención a la diversidad.

En el caso de las matemáticas, son muchos los programas que han surgido en los últimos años y que pretenden ser una herramienta útil en la enseñanza de las mismas. Fernández y Muñoz (2007) realizan un barrido sobre los programas matemáticos que más suelen emplearse en un aula de matemáticas. En la selección que proponen encontramos: Wiris, Geogebra, Cabri y Derive, así como páginas que aportan información y ejercicios sobre cómo trabajar contenidos matemáticos. Se presentan actividades para trabajar con estos programas, aunque son bastantes mecánicas y no promueven una reflexión sobre los contenidos que se están trabajando. De hecho, no encontramos entre las actividades propuestas, aquellas que permiten la programación de aplicaciones.

Scratch es un software libre desarrollado por Lifelong Kindergarten Group de los Laboratorios Media-Lab en MIT. Se trata de un lenguaje gráfico que permite programar uniendo bloques predefinidos. Esta facilidad hace que pueda iniciarse en él a edades muy tempranas. Son muchas las funcionalidades que pueden aplicarse a Scratch y que son objeto de investigación en la actualidad. Carralero (2011) señala como funcionalidad importante el hecho de manejar la programación implícita en Scratch para trabajar un contenido de primaria y secundaria. Es decir, propone no trabajar la programación directamente, sino elegir un concepto y diseñar qué elementos de la programación son necesarios para llegar a definir este concepto. Asimismo señala que para abordar determinados elementos de la programación (por ejemplo los bucles), es necesario que los alumnos se encuentren al menos en 3º o 4º de la ESO, ya que a esa edad los alumnos empiezan a poseer un pensamiento lógico-abstracto. En la construcción del programa a desarrollar, puede ser necesaria la resolución de algoritmos, elementos importantes en el desarrollo de las matemáticas.

Adoptamos la siguiente definición de algoritmo:

> *"Un algoritmo es una sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a la resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase" (Ifrah, 2008, p. 1616)*

En la misma línea se manifiestan Gairín y Sancho (2002); es claro que si la Matemática tiene como objetivo prioritario resolver problemas y encontrar soluciones a cuestiones cada vez más difíciles, parece que la necesidad de utilizar algoritmos está totalmente justificada.

Por otro lado, el progreso en matemáticas exige la automatización de los procesos elementales para concentrar la atención en las nuevas ideas, las cuales, a su vez, necesitarán transformarse en automáticas para poder abordar otras más complejas y así sucesivamente (Skemp, 1993).

La consecuencia más natural que se extrae de estos argumentos es la necesidad de enseñar a los alumnos algoritmos en la escuela. Usiskin (1998), por su parte, enumera hasta nueve razones diferentes por las que es útil saber y enseñar algoritmos matemáticos: son eficaces, fiables, precisos, rápidos, proporcionan un registro escrito, establecen una imagen mental, son instructivos, pueden ser utilizados en otros algoritmos y pueden ser objetos de estudio.

En este documento llevaremos a cabo una propuesta didáctica que pretende trabajar el Pensamiento Matemático Avanzado, en el sentido de Tall (1991), con los alumnos del Máster de Secundaria y Bachillerato de la Universidad Complutense de Madrid (especialidad de Matemáticas) a través del desarrollo de situaciones didácticas. Para ello se trabajará el Algoritmo de Euclides para el cálculo del Máximo Común Divisor, utilizando la herramienta Scratch.

El documento se organiza en torno a seis apartados. Un primer apartado de introducción, un segundo en el que señalamos los objetivos principales y secundarios de la investigación. En el tercero, denominado marco teórico, describiremos dos teorías para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, que determinan los principios didácticos sobre los que basaremos nuestra metodología: el Pensamiento Matemático Avanzado y la Teoría de las Situaciones Didácticas. En el cuarto apartado describimos la metodología que vamos a utilizar. En el quinto mostramos los resultados obtenidos y por último, en el sexto, señalamos las principales conclusiones obtenidas, así como las perspectivas futuras que abordaremos.

2. Objetivos

En esta investigación pretendemos introducir a los alumnos en el Pensamiento Matemático Avanzado dando respuesta a la siguiente cuestión: "Diseñar e implementar un algoritmo en Scratch que permita calcular el M.C.D de dos números naturales". Los objetivos que pretendemos son:

O1. Trabajar con los alumnos del Máster el razonamiento lógico-matemático a través del diseño del algoritmo de Euclides para el cálculo del M.C.D. Queremos observar qué dificultades surgen durante el diseño de dicho algoritmo y cómo éstas son resueltas. Una vez comprendido el algoritmo por parte de los alumnos, estos tendrán que diseñar el diagrama de flujo del mismo para estructurar cuáles son las instrucciones que deberán implementar posteriormente en Scratch. El uso del lenguaje Scratch para potenciar el desarrollo del pensamiento algorítmico en estudiantes fue trabajado también por Vidal, Cabezas, Parra y López (2015) quienes señalaron las virtudes de esta nueva metodología de enseñanza que usa la programación para trabajar conceptos matemáticos. Entre estás señalaban: la motivación del alumno, la participación activa de los alumnos en la búsqueda de soluciones y el análisis de la solución obtenida, la cual podrían probar y mejorar.

O2. Potenciar en los alumnos el uso de la abstracción a través de la traducción a Scratch del algoritmo diseñado. Es decir, se potencia la abstracción a través de la implementación del algoritmo para el M.C.D en Scratch. Una vez diseñado el diagrama de flujo para el algoritmo de Euclides, los alumnos deberán implementarlo en Scratch. La idea de trabajar la programación con Scratch en alumnos que serán futuros profesores de matemáticas, a partir de los algoritmos diseñados previamente, constituye una herramienta muy útil que permite resolver cualquier problema matemático que se presenta en secundaria (véase Barrera, 2013).

O3. Formular hipótesis que permitan ser contrastadas a través del algoritmo diseñado e implementado. Una vez que el algoritmo haya sido programado, los alumnos tendrán que formular hipótesis para comprobar si el algoritmo llega a resultados correctos. En este momento usarán el método tradicional para calcular el M.C.D de dos números y también la aplicación diseñada. Los resultados en ambos casos deben ser iguales; si no fuera así, el algoritmo no estaría bien diseñado o implementado y tendrían que buscar una solución al problema.

O4. Trabajar el concepto de generalización a partir de la comprobación de casos particulares en la aplicación creada. En la comprobación del algoritmo diseñado, es importante empezar por la realización de casos particulares con números pequeños para probar después con números grandes. Esto permitirá una aproximación intuitiva al concepto de generalización, consiguiendo con ello que el alumno adquiera un cierto grado de certeza sobre la aplicación construida. Kidron y Dreyfus (2014) denominan a este proceso "imagen demostración", que emerge en la construcción de la demostración de una afirmación o problema. En nuestro caso, los alumnos tendrán la imagen demostración de que la aplicación construida funciona para cualquier par de números, ya que serán capaces de aproximarse a la generalización de los resultados parciales obtenidos.

O5. Valorar el concepto de modelo matemático. Se incentivará a los alumnos a que conciban el programa diseñado como un modelo matemático que permite calcular el M.C.D y el M.C.M de dos números naturales y se incidirá en que dicho modelo puede ser mejorado. Con este objetivo pretendemos que los alumnos valoren el concepto de modelo matemático como un elemento que tiene una función local, pero que puede ser ampliado, para que permita resolver nuevos problemas. Por ejemplo, se pueden añadir instrucciones al programa del M.C.D para que también calcule el M.C.M (utilizando la propiedad que asegura que el producto de dos números naturales coincide con el de su M.C.D por su M.C.M).

3. Marco Teórico

Nuestro marco teórico se sustenta en dos pilares: el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).

La primera teoría se usará para determinar los procesos implicados en el diseño e implementación del algoritmo de Euclides para calcular el M.C.D con Scratch. Nos basaremos en ella para elegir el contenido y la secuenciación de las actividades. A su vez, éstas estarán diseñadas siguiendo la Teoría de Situaciones Didácticas.

3.1. Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

En 1985, en el seno del grupo Psicologist Mathematic Education (PME), se creó un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del "Pensamiento Matemático Avanzado". Dicho grupo pretendía profundizar en los procesos cognitivos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus 1990 y Tall, 1991).

A partir de este momento, el interés en didáctica de la matemática se empieza a centrar en la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos y no como una simple adquisición de competencias y habilidades. También se produce una evolución en las investigaciones, que empiezan a ocuparse de tópicos que por su naturaleza y complejidad se situarían dentro de una matemática superior (el límite y la derivada, entre otros). Entre los procesos involucrados en el Pensamiento Matemático Avanzado citamos en primer lugar, por su importancia, la abstracción y la generalización.

La abstracción es definida como un proceso de construcción de objetos mentales a partir de objetos matemáticos (Dreyfus, 1991). Para este autor, la generalización es definida como la derivación o inducción de particulares, para identificar generalidades y expandir los dominios de validez.

Robert y Swarzenberger (1991) señalaron una serie de diferencias entre el pensamiento elemental y el avanzado: (1) En el Pensamiento Matemático Avanzado los alumnos tienen que aprender más conceptos en menos tiempo y además estos son presentados de manera formal. (2) Los conceptos enseñados llevan asociadas las siguientes propiedades: generalización, abstracción y formalización; propiedades que pueden entrar en conflicto con el conocimiento anterior que se tenía sobre el concepto. (3) Los alumnos se enfrentan a una amplia gama de problemas que nacen de una variedad de contextos, los cuales no pueden ser discutidos en todo detalle.

Estas diferencias entre el pensamiento elemental y el pensamiento avanzado propuestas por Tall (1991) y Robert y Swarzenberger (1991) son rebatidas por Edwards, Dubinsky y McDonald (2005); los cuales, además de proponer una definición alternativa de Pensamiento Matemático Avanzado, señalan que un concepto se considerará dentro del Pensamiento Matemático Avanzado dependiendo de los aspectos que se traten.

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005; pp.17-18) proponen la siguiente definición de Pensamiento Matemático Avanzado:

> *"Pensamiento que requiere deductivo y riguroso razonamiento acerca de nociones matemáticas que no nos son enteramente accesibles a través de los cinco sentidos".*

Teniendo en cuenta todo lo anterior, si se realiza un tratamiento procedimental de un concepto, dicho concepto quedará fuera del Pensamiento Matemático Avanzado, a pesar de que sea uno que por su naturaleza debiera formar parte de él.

Todo esto nos induce a pensar que el concepto de M.C.D de dos números naturales, abordado a través del diseño e implementación de un algoritmo en Scratch, puede permitir la aparición de procesos cognitivos que forman parte del Pensamiento Matemático Avanzado (véase Tall (1991) y Robert y Swarzenberger (1991)). Estos procesos, como anteriormente se ha explicitado son: la abstracción, la generalización, la formulación de hipótesis, la verificación de dichas hipótesis y la formulación formal del concepto, expresada ésta a través de la aplicación creada.

3.2. Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

La teoría de las situaciones didácticas aparece en 1970. Nació como un método simple de descripción y de interrogación matemática de los dispositivos psicológicos y didácticos. Dicha teoría se fundamenta en varias ideas:

- "[...] los conocimientos se manifiestan esencialmente como instrumentos de control de las situaciones" (Brousseau, 1997, p.3). Es decir, el conocimiento se adquiere mediante una adaptación al medio. El sujeto se enfrenta con un medio que le plantea una dificultad que tiene que superar. Si lleva a cabo esta tarea con éxito, el resultado es un nuevo conocimiento.
- Asociado a cada conocimiento existe una situación característica tal que el sujeto, al actuar sobre ella e intentar controlarla, adquiere el conocimiento con el que se corresponde.

Según Brousseau (2011), la teoría de las situaciones didácticas modeliza las condiciones bajo las cuales los seres humanos producen, comunican y asimilan los conocimientos matemáticos. Estas condiciones son modelizadas por sistemas llamados "situaciones", que conducen a agentes en interacción con ellas a manifestar este conocimiento. Son pues específicas del conocimiento en juego.

Algunas situaciones requieren de un conocimiento previo para poder tener éxito en alcanzar el nuevo conocimiento, pero hay otras situaciones en las que el sujeto puede construir por sí mismo el conocimiento requerido sin recurrir a ningún conocimiento anterior.

Brousseau (1998) distingue, en el campo de la enseñanza de las matemáticas, dos tipos de situaciones: las didácticas y las a-didácticas (generalmente incluidas como una fase, dentro de las situaciones didácticas).

Una situación didáctica es una situación que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica; la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución.

En las situaciones didácticas es el profesor el que transmite el saber al alumno ignorando las relaciones entre los otros elementos de la situación. En las situaciones a-didácticas la intencionalidad del profesor queda oculta. El profesor no interviene didácticamente, sino que diseña un medio en el que el alumno tiene que actuar, eligiendo sus acciones libremente, sin la dirección del profesor. Son estas acciones que realiza el alumno, las que determinarán si es capaz de obtener el nuevo conocimiento. Esta situación debe ser diseñada de forma que el alumno no sepa qué saber va a adquirir. Se dirá que el alumno tiene éxito en dicha situación cuando ha adquirido el conocimiento que el profesor pretendía.

Se distinguen tres tipos de situaciones: de acción, de formulación y de validación que pueden darse en el proceso de enseñanza-aprendizaje (véase Brousseau, 1997).

Al finalizar cualquier situación didáctica o a-didáctica, es necesaria una institucionalización del saber alcanzado. En esta institucionalización se devuelve la responsabilidad al profesor, el cual define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno, con el saber cultural o científico que se ha trabajado y con el proyecto didáctico. El profesor realiza una revisión de las actividades realizadas y le da un estatus oficial. En ese momento el contenido matemático pasa a formar parte del saber de la clase.

4. Metodología

El trabajo se organiza en torno a 7 fichas que se llevan a cabo con los alumnos del Máster de Formación del Profesorado en Enseñanza Secundaria y Bachillerato de la Universidad Complutense de Madrid (especialidad de Matemáticas). El trabajo se desarrolló en la asignatura "Innovación Docente e Iniciación a la Investigación en Educación Matemática". Cada ficha de trabajo es una situación didáctica que pretende mostrar los elementos del Pensamiento Matemático Avanzado. Antes de comenzar con las fichas de trabajo, se dividió a los dieciocho alumnos en nueve grupos de dos integrantes cada uno; no se utilizó ningún criterio para la división en grupos, simplemente la disposición usual de los alumnos en clase. De los dieciocho alumnos, catorce son Licenciados en Matemáticas, uno Doctor en Matemáticas, uno Ingeniero en Informática, uno Licenciado en Físicas y un último licenciado en Administración y Dirección de Empresas.

Las fichas de los diferentes grupos con las tareas propuestas realizadas, son recogidas por el profesor al acabar el tiempo destinado a cada una.

La ficha 0 tiene como objetivo familiarizar a los alumnos con el lenguaje de programación Scratch. Para ello se llevó a cabo una sesión introductoria a Scratch en el aula de informática de la Facultad de Educación. Ninguno de los alumnos conocía previamente la herramienta, por lo que esta sesión introductoria fue esencial. Durante los 40 primeros minutos, la sesión fue conducida por el profesor, explicando nociones generales del programa y realizando ejemplos que todos pudieron visualizar con ayuda del proyector. Posteriormente se dedicaron 50 minutos para que los alumnos realizasen las tareas propuestas en la ficha 0.

La ficha 1 tiene como objetivo trabajar con los alumnos la noción de algoritmo, señalando la importancia que estos tienen en las matemáticas que se trabajan en la Enseñanza Primaria y Secundaria (algoritmo de la división, multiplicación, etc.). La ficha se inicia con la explicación del algoritmo de Euclides para el máximo común divisor. Se facilitan dos ejemplos resueltos sobre cómo llevarlo a la práctica y a continuación se pide a los alumnos que realicen 4 ejercicios de aplicación del mismo. La duración asignada a esta ficha fue de 30 minutos.

La ficha 2 va encaminada a que los alumnos sean capaces de diseñar diagramas de flujo a partir de un determinado algoritmo. Estos diagramas son un instrumento útil y previo a la programación de una aplicación. La ficha comienza presentando tres ejemplos concretos sobre cómo realizar el diagrama de flujo para tres algoritmos que se muestran. A continuación se propone que cada grupo realice el diagrama de flujo correspondiente al algoritmo de Euclides. La duración asignada a esta ficha fue de 30 minutos.

En la ficha 3 los alumnos trabajan con la aplicación Scratch. La ficha comienza mostrando el código en Scratch de los tres algoritmos que se utilizaron en la ficha anterior para ejemplificar los diagramas de flujo. Los alumnos deberán introducirlos en Scratch y validar su funcionamiento ejecutándolos varias veces. Esta labor, junto con la realizada en la ficha 0, intentará conseguir que los alumnos se familiaricen con el lenguaje del programa. A continuación se les pide que intenten programar en Scratch el algoritmo de Euclides. Para ello, deberán hacer uso del diagrama de flujo que diseñaron en la ficha 2. La duración asignada a esta ficha fue de 70 minutos (30 minutos para los ejercicios iniciales y 40 minutos para la implementación del algoritmo de Euclides).

La ficha 4 supone la institucionalización del diseño del algoritmo de Euclides a través del diagrama de flujo. Los alumnos tienen que comparar el diagrama de flujo que se les entrega en esta ficha con el que realizaron en la ficha 2 para subsanar los posibles errores que cometieran. El objetivo de esta ficha es intentar conseguir que todos los alumnos sean capaces de implementar bien el programa en Scratch. La duración asignada a esta ficha fue de 10 minutos.

La ficha 5 supone la institucionalización del programa en Scratch que permite calcular el M.C.D de dos números. En dicha ficha se hace entrega del código que permite programar el algoritmo de Euclides. Los alumnos tienen que compararlo con el suyo y corregir los posibles errores que tuvieran. A continuación se presentan tres ejercicios en los que se les pide calcular el M.C.D de varios pares de números; además, también se solicita que contesten a cuestiones relativas sobre los resultados que se esperan. La duración asignada a esta ficha fue de 10 minutos.

La ficha 6 supone una mejora de la aplicación creada en la ficha 5, ya que permite calcular tanto el M.C.D como el M.C.M. Se les pide que diseñen el diagrama de flujo que permite calcular el M.C.M y también el código del programa que realizará en Scratch el cálculo del M.C.M de dos números. La ficha acaba con varios ejercicios para que los alumnos prueben la aplicación creada. La duración asignada a esta ficha fue de 50 minutos.

5. Resultados

A lo largo de los siguientes párrafos, se hará alusión a los resultados obtenidos en las diferentes fichas señaladas en el apartado "metodología".

Respecto a la ficha 0 señalamos que aunque en algunos grupos se observó mayor facilidad que en otros para comprender el lenguaje y realizar los algoritmos que se pedían, todos finalizaron con éxito dicha ficha.

La siguiente sesión de clase (2ª sesión) se dedicó a la realización de las fichas 1 y 2. La ficha 1 (manejo del algoritmo) resultó muy sencilla para ellos. Los alumnos leyeron y comprendieron rápidamente el algoritmo y no tuvieron ninguna dificultad para realizarla. Tras los 30 minutos establecidos, todos los grupos tenían la ficha finalizada correctamente; dicha ficha fue recogida por el profesor para su análisis. No se encontró ningún error en la misma. El profesor creyó conveniente, antes del inicio de la ficha 2, entablar una conversación con los alumnos para analizar la ficha 1. En dicha conversación, los alumnos detectaron por ellos mismos que los pares de números elegidos en cada uno de los ejercicios de la ficha 1, constituían una variable didáctica, ya que cada par encerraba una situación distinta de la anterior.

Una vez resuelta la ficha 1 y acabada la conversación antes descrita, se repartió a los alumnos la ficha 2. En esta ficha debían comprender qué es un diagrama de flujo y representar el diagrama de flujo para el algoritmo de Euclides. Esta ficha supuso muchas dificultades para algunos grupos, mientras que para otros resultó algo muy sencillo. Para analizar los resultados de la ficha 2, se diseñó una tabla de categorías (Tabla 1) que pensamos, permite clasificar cada una de las respuestas que se obtuvieron.

Tabla 1. Tabla de categorías para el análisis de la ficha 2

Categorías	Subcategorías
C1-. Identificación de las representaciones del diagrama de flujo	C1.1-. Los polígonos del diagrama de flujo no se corresponden en absoluto con la instrucción que deben representar. C1.2-. Falta algún polígono o alguno de ellos no es el que debiese ser (por ejemplo: aparece un cuadrado donde debiese ser un rombo o un romboide). C1.3-. Todos los polígonos del diagrama de flujo se corresponden con el tipo de función que desempeñan (Inicio/Fin, Entrada/Salida de datos, Proceso o Decisión). Además, aparecen todas las líneas de flujo.
C2-. Realmacenamiento de las variables si N1<N2	C2.1-. No realiza este paso en el diagrama de flujo. C2.2-. Realmacena las variables, pero lo hace de forma incorrecta. C2.3-. Realmacena las variables de forma correcta.
C3-. Identificación de la condición de parada	C3.1-. No aparece en el diagrama de flujo ninguna decisión que se corresponda con una condición de parada. C3.2-. Identifica que existe un bucle y establece una decisión de parada, pero esta es incorrecta. C3.3-. Identifica correctamente la existencia de un bucle y su condición de parada correspondiente.
C4-. Reasignación de las variables dentro del bucle	C4.1-. No existe reasignación de variables dentro del bucle. C4.2-. Se reasignan variables dentro del bucle, pero esta reasignación es incorrecta. C4.3-. Se reasignan las variables correctamente dentro del bucle.
C5-. Devolución del MCD	C5.1-. El programa no devuelve correctamente el valor del MCD. C5.2-. El programa devuelve correctamente el valor del MCD.
C6-. Nivel de Eficiencia	C6.1-. El programa no funciona. Por tanto, no tiene sentido hablar de eficiencia. C6.2-. El programa funciona, pero se crean más variables de las necesarias. C6.3-. El programa funciona con el número mínimo de variables posibles.

Una vez establecidas las categorías, procedimos a analizar los resultados de cada grupo. Se ha asignado una subcategoría a cada grupo para cada una de las categorías. Cada categoría lleva asignada una puntuación para cada grupo. Así, la categoría C1 puede tomar los valores 1, 2 o 3 dependiendo de que la respuesta se clasifique como C1.1, C1.2 o C1.3. Entendemos que 1 es la puntuación más baja y 3 la puntuación máxima. Las demás categorías funcionan de igual forma, a excepción de la categoría C5, que solo puede tomar los valores 1 o 2 dependiendo si se le asigna C5.1 o C5.2, respectivamente. Las tablas que contienen los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 2. Tabla de resultados por grupos de la ficha 2

Categoría	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
C1-. Identifica correctamente las representaciones del diagrama de flujo	C1.3	C1.2	C1.2	C1.3	C1.3	C1.3	C1.3	C1.3	C1.3
C2-. Realmacena correctamente las variables si N1<N2	C2.2	C2.1	C2.3	C2.3	C2.3	C2.3	C2.3	C2.3	C2.3
C3-. Identifica correctamente la condición de parada	C3.3	C3.3	C3.3	C3.3	C3.3	C3.3	C3.3	C3.3	C3.3
C4-. Reasigna correctamente las variables dentro del bucle	C4.2	C4.2	C4.3	C4.2	C4.2	C4.3	C4.3	C4.3	C4.3
C5-. Devuelve correctamente el valor del MCD	C5.1	C5.1	C5.2	C5.1	C5.1	C5.2	C5.1	C5.2	C5.2
C6-. Nivel de Eficiencia	C6.1	C6.1	C6.3	C6.1	C6.1	C6.3	C6.1	C6.2	C6.3

Tabla 3. Tabla de resultados globales de la ficha 2

Grupo	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
Puntuación Global	12	10	16	13	13	17	14	16	17

Como muestra de las respuestas, se adjuntan las de los grupos con mayor y menor puntuación (tabla 4 y Figura 1 respectivamente).

Tabla 4. Resultados de la ficha 2 de los grupos con mayor puntuación

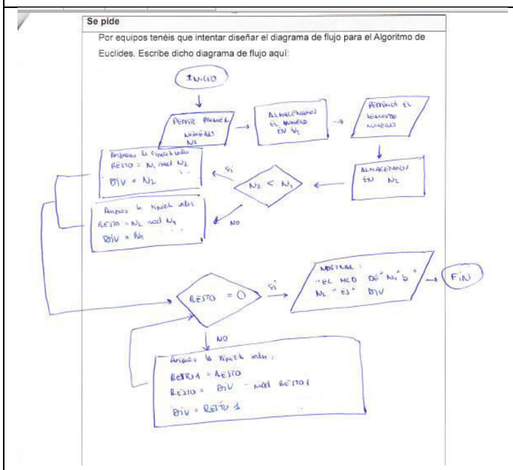
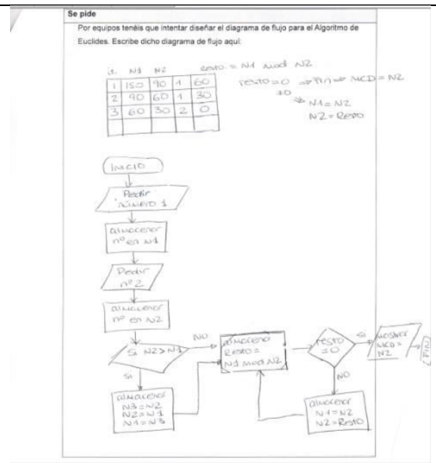
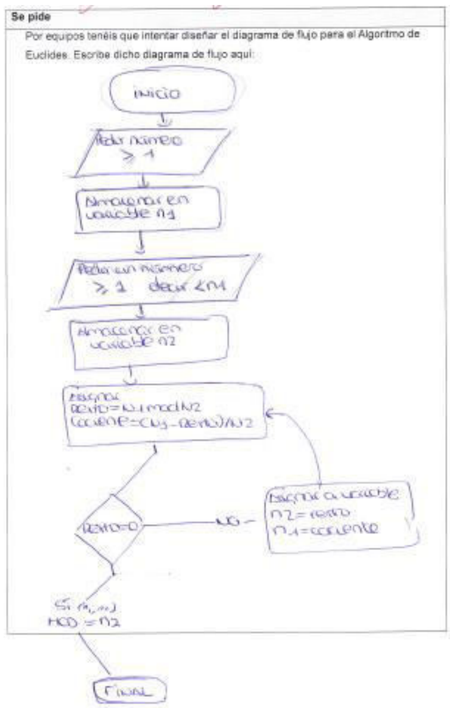
Grupo 6	Grupo 9
	

Figura 1. Resultados de la ficha 2 del grupo con menor puntuación



En la siguiente sesión de clase (3ª sesión) se realizó la ficha 3. Los 30 primeros minutos de la sesión se dedicaron a que los alumnos realizasen los tres primeros ejercicios de la ficha. Los alumnos resolvieron y enviaron correctamente los mencionados ejercicios en el tiempo pactado; los 40 minutos restantes se dedicaron a la realización del ejercicio 4 (traducir al lenguaje de Scratch el diagrama de flujo del algoritmo de Euclides que cada uno de los grupos había creado en la sesión anterior). Se indicó a los grupos que si detectaban algún error en el diagrama de flujo, tras introducir el algoritmo en Scratch, podían intentar solucionarlo. Tal y como se ha indicado en la tabla de resultados anterior, los algoritmos (en forma de diagrama de flujo) de los grupos 1, 2, 4, 5 y 7 no proporcionaban un valor correcto del máximo común divisor. Los resultados que se obtuvieron fueron:

El grupo 1 no consiguió hacer funcionar el algoritmo. En la segunda rama del condicional, no reasignaron el valor del resto dentro del bucle. Por tanto, el algoritmo ingresa en un proceso infinito y no devuelve una respuesta. El diagrama de flujo de este grupo no fue correcto.

El grupo 2 tampoco consiguió hacer funcionar el algoritmo. En este caso, una mala reasignación de la variable divisor antes de iniciar el bucle, hace que el programa no devuelva correctamente el valor del MCD. El diagrama de flujo de este grupo tampoco fue correcto.

El grupo 3 consiguió que su algoritmo funcionase. Su diagrama de flujo fue correcto.

El grupo 4 consiguió que su algoritmo funcionase, pese a que su diagrama de flujo no era correcto en un principio.

El grupo 5 tampoco consiguió hacer funcionar el algoritmo. En este caso, las variables que hay que intercambiar dentro del bucle, las intercambian fuera de este, dentro del condicional. Además, se intercambian de forma incorrecta. El diagrama de flujo de este grupo tampoco fue correcto.

El grupo 6 consiguió que su algoritmo funcionase. Su diagrama de flujo fue correcto.

El grupo 7, al igual que el grupo 4, consiguió que su algoritmo funcionase, pese a que su diagrama de flujo no era correcto en un principio. Cabe destacar que los errores en el diagrama de flujo de este grupo fueron el devolver por pantalla el valor del dividendo en lugar del divisor, en el caso en el que el resto sea 0 (por lo que puntuaron 1 en la categoría C5) además de introducir un condicional, en el caso en que el resto sea distinto de cero, cuya condición es que el dividendo sea mayor que el resto, algo que siempre ocurre (por lo que puntuaron 1 en la categoría C6). Estos errores fueron subsanados en la elaboración del algoritmo en Scratch.

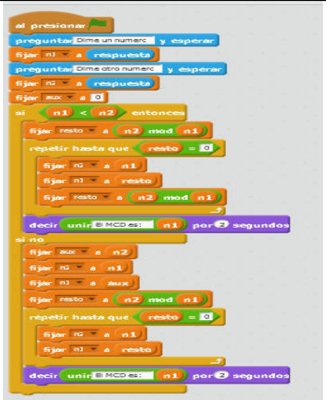
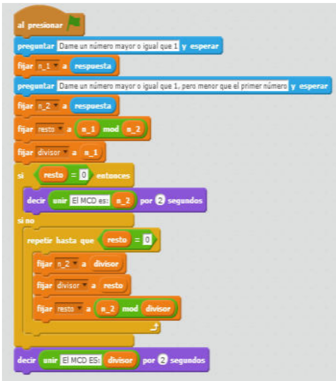
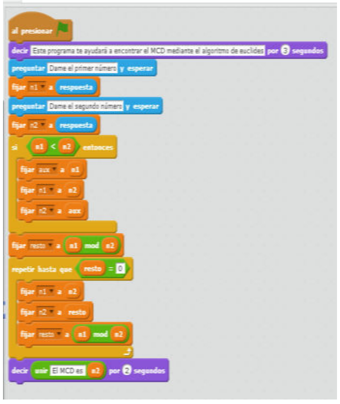
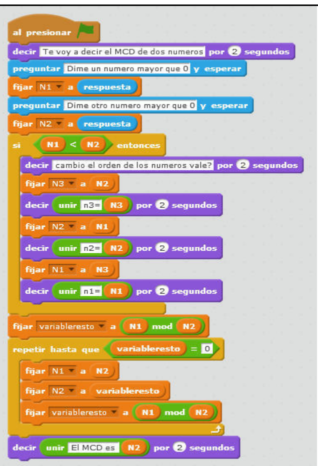
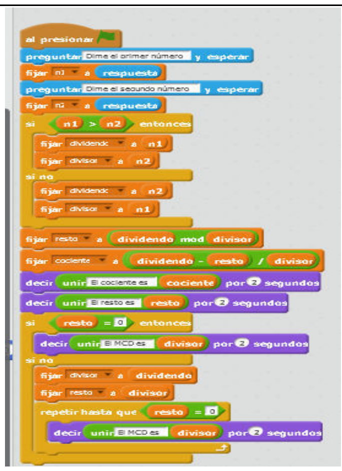
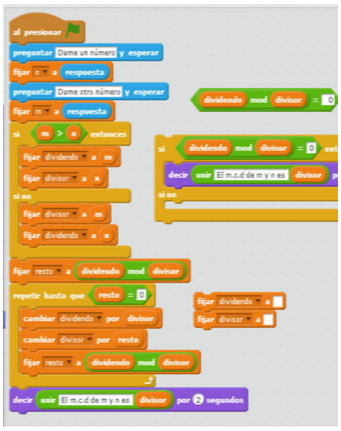
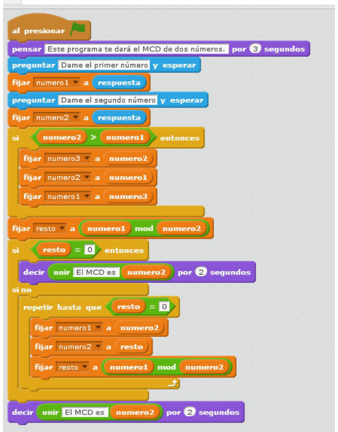
El grupo 8, pese a tener un diagrama de flujo correcto, no fue capaz de hacer funcionar el algoritmo. En este caso, aunque el algoritmo es aparentemente correcto, no han comprendido la diferencia en Scratch entre "cambiar" y "fijar". Al utilizar "cambiar" en lugar de "fijar" dentro del bucle, el algoritmo ingresa en un proceso infinito y no devuelve, por tanto, un valor para el máximo común divisor.

El grupo 9 consiguió que su algoritmo funcionase. Su diagrama de flujo fue correcto.

Podemos por tanto concluir que, de los cuatro grupos que diseñaron bien el diagrama de flujo, solamente tres han conseguido implementarlo correctamente. Además, dos grupos, de entre los cinco que no diseñaron correctamente el diagrama de flujo, han conseguido implementarlo correctamente. Llama la atención que cuatro grupos, de entre los nueve, no hayan conseguido que su algoritmo funcione correctamente en Scratch, lo que supone un 44,44% de los alumnos. Es necesario mencionar que el tiempo no fue un obstáculo. Todos los alumnos terminaron los programas en el tiempo establecido. Como peculiaridad mostramos que el grupo 8, aunque tenía el algoritmo terminado, al probarlo detectaban que lo tenían mal; aunque lo intentaron solucionar, fueron incapaces en el tiempo que les facilitamos. Quizá si hubiesen tenido 10 minutos más, hubiesen solucionado el problema que tenían en la asignación de las variables dividendo y divisor dentro del bucle.

Los algoritmos de cada uno de los grupos se muestran en la tabla 5:

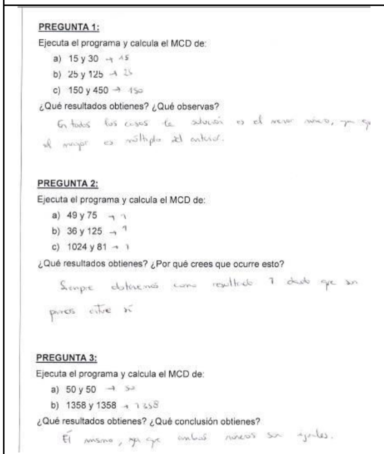
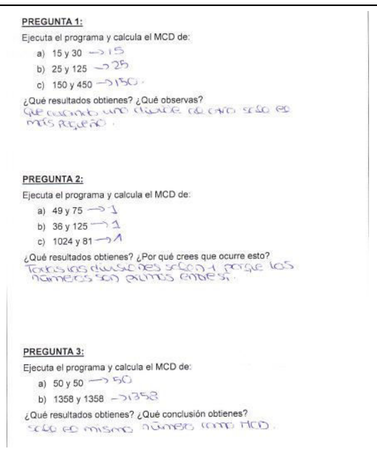
Tabla 5. Resultados del ejercicio 4 de la ficha 3

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
		
Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
		
Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
		

En la siguiente sesión de clase (4ª sesión) se realizaron las fichas 4, 5 y 6. Antes de comenzar la sesión, se dedicaron 5 minutos para indicar en alto qué grupos habían sido capaces de programar correctamente el algoritmo y cuáles no. Tras este tiempo, se comenzó con la ficha número 4. Se dedicó a ella únicamente 10 minutos. El objetivo de esta ficha fue el de facilitar a los alumnos el diagrama de flujo correcto para el algoritmo de Euclides e intentar que con éste, todos los alumnos fueran capaces de realizar bien el programa en Scratch. El grupo 1 se dio rápidamente cuenta de su error en el algoritmo; comentaron que no llegaron a probar el algoritmo para pares de números en el que el primero fuese más grande que el segundo. Comentaron que en el caso en que lo hubiesen hecho, habrían entregado el algoritmo correcto. El grupo 2 no conseguía detectar qué estaba mal en su algoritmo. Lo probaban para casos concretos y sí les funcionaba y para otros casos no. No fueron capaces, ni tan siquiera con el diagrama de flujo correcto, de implementar bien el algoritmo. El grupo 5 localizó su error y supo subsanarlo. El grupo 8 ya sabía dónde estaba su error antes de ver el diagrama de flujo. Pensaban que "fijar" y "cambiar" variable significaba lo mismo. Buscaron por la red y encontraron su fallo antes de asistir a clase.

Tras los 10 minutos dedicados a la ficha 4, se repartió la ficha 5. En ésta se les facilita el código del algoritmo de Euclides para que todos puedan programarlo correctamente (solamente el grupo 2 no lo tenía bien programado previamente) y responder a una serie de preguntas que se proponen a continuación. De nuevo se dedica a esta ficha 10 minutos de clase. Todos los grupos responden correctamente a las preguntas que se hacen; en este caso son preguntas muy sencillas para alumnos de Máster. No obstante, resultan llamativas las respuestas que dan los alumnos que integran el grupo 2, en comparación a las dadas por el resto de los grupos; sobre todo a las preguntas 1 y 3 (véase tabla 6).

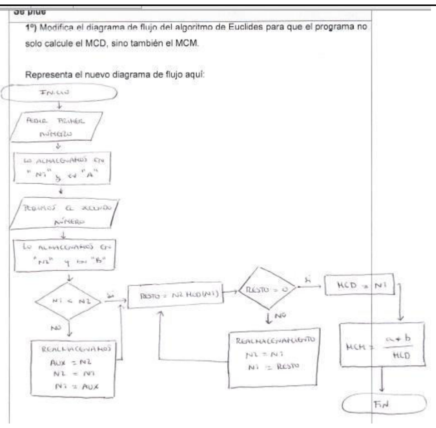
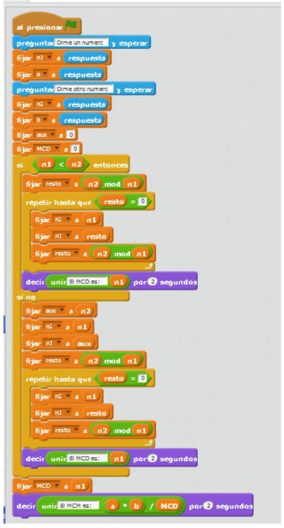
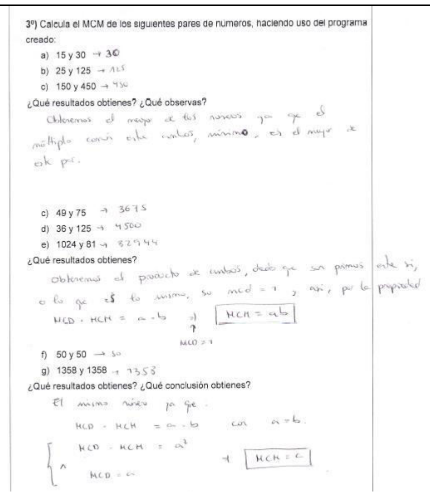
Tabla 6. Resultados de los grupos 1 y 2 a la ficha 5

Grupo 1	Grupo 2
 **PREGUNTA 1:** Ejecuta el programa y calcula el MCD de: a) 15 y 30 → 15 b) 25 y 125 → 25 c) 150 y 450 → 150 ¿Qué resultados obtienes? ¿Qué observas? En todos los casos la solución es el menor número, ya que el mayor es múltiplo del anterior. **PREGUNTA 2:** Ejecuta el programa y calcula el MCD de: a) 49 y 75 → 1 b) 36 y 125 → 1 c) 1024 y 81 → 1 ¿Qué resultados obtienes? ¿Por qué crees que ocurre esto? Siempre obtenemos como resultado 1 dado que son primos entre sí **PREGUNTA 3:** Ejecuta el programa y calcula el MCD de: a) 50 y 50 → 50 b) 1358 y 1358 → 1358 ¿Qué resultados obtienes? ¿Qué conclusión obtienes? El mismo, ya que ambos números son iguales.	 **PREGUNTA 1:** Ejecuta el programa y calcula el MCD de: a) 15 y 30 → 15 b) 25 y 125 → 25 c) 150 y 450 → 150. ¿Qué resultados obtienes? ¿Qué observas? Que cuando uno divide al otro sale el más pequeño. **PREGUNTA 2:** Ejecuta el programa y calcula el MCD de: a) 49 y 75 → 1 b) 36 y 125 → 1 c) 1024 y 81 → 1 ¿Qué resultados obtienes? ¿Por qué crees que ocurre esto? Todas las divisiones salen 1 porque los números son primos entre sí. **PREGUNTA 3:** Ejecuta el programa y calcula el MCD de: a) 50 y 50 → 50 b) 1358 y 1358 → 1358 ¿Qué resultados obtienes? ¿Qué conclusión obtienes? Sale el mismo número como MCD.

Transcurridos los 25 primeros minutos de la 4ª sesión, se comienza con la ficha 6. Se dedican 50 minutos a la misma. En esta ficha, se pretende que los alumnos hagan una modificación al algoritmo para que éste muestre también el M.C.M. En la ficha se pide el diagrama de flujo del algoritmo, el programa en Scratch y la respuesta a una serie de preguntas. Los resultados a dicha ficha se comentan a continuación:

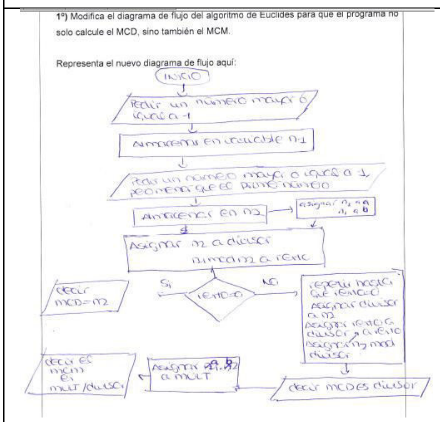
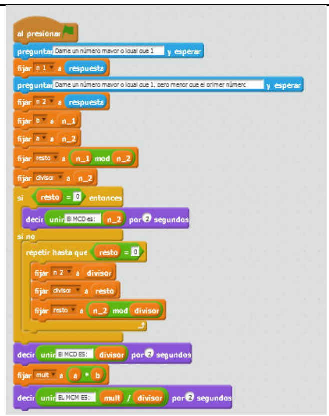
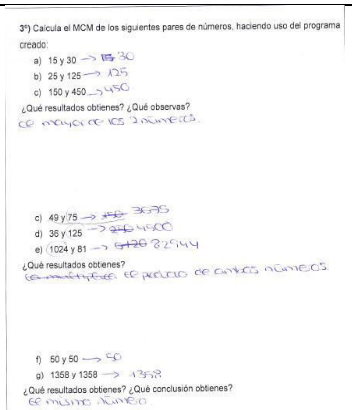
El grupo 1 diseña correctamente el diagrama de flujo, traduce correctamente dicho algoritmo a Scratch y responde correctamente a las preguntas que se efectúan.

Tabla 7. Resultado del grupo 1 a la ficha 6

Grupo 1		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

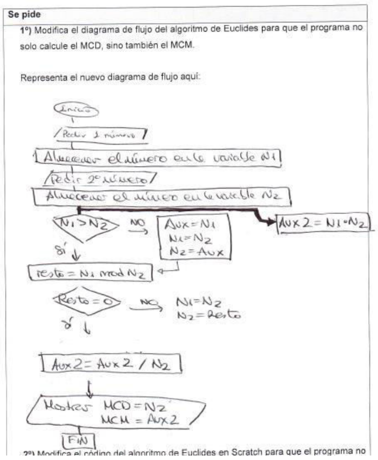
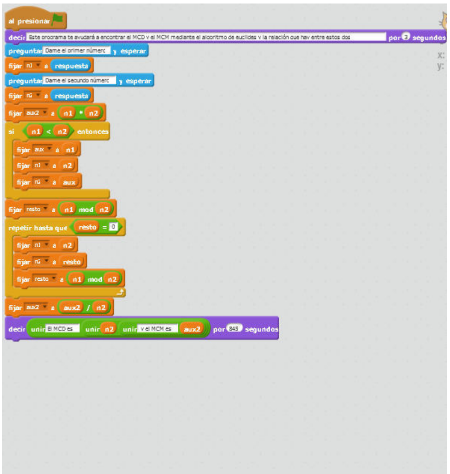
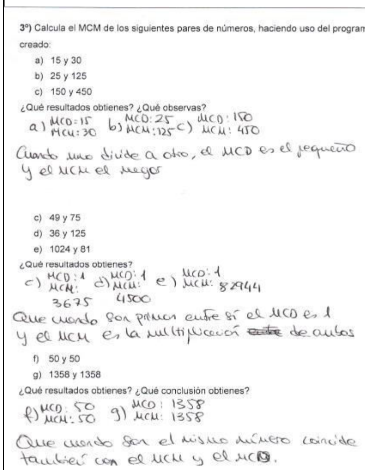
El grupo 2 es uno de los grupos que más dificultades ha tenido a lo largo del desarrollo de las tareas. Dicho grupo no logra diseñar correctamente el diagrama de flujo. Sin embargo, logra traducir su pensamiento correctamente a Scratch y consigue que finalmente funcione el algoritmo. Las respuestas a las preguntas que aparecen en la ficha, son también correctas, pero no argumentan el porqué. Se limitan a dar respuestas escuetas y sin justificación (tabla 8).

Tabla 8. Resultado del grupo 2 a la ficha 6

Grupo 2		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

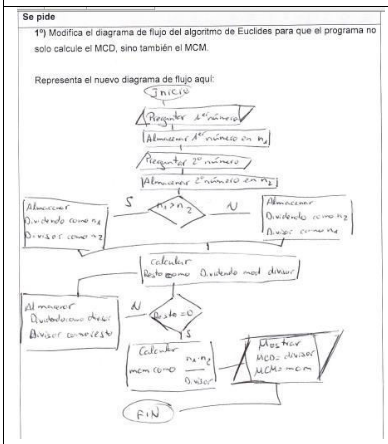
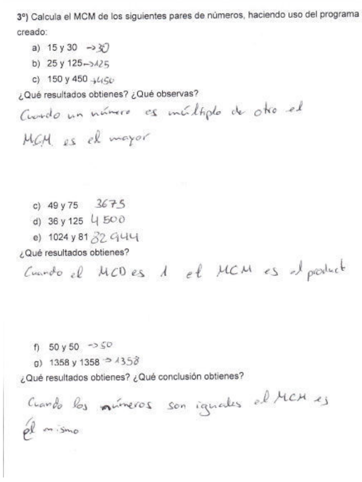
El grupo 3 no diseña correctamente el diagrama de flujo ya que olvidan marcar en un rectángulo la condición que está dentro del bucle, además de faltarles la línea de flujo que regresa esa condición al inicio del mismo. No obstante, traducen correctamente el algoritmo a Scratch y responden correctamente a las preguntas que se efectúan (tabla 9).

Tabla 9. Resultado del grupo 3 a la ficha 6

Grupo 3		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

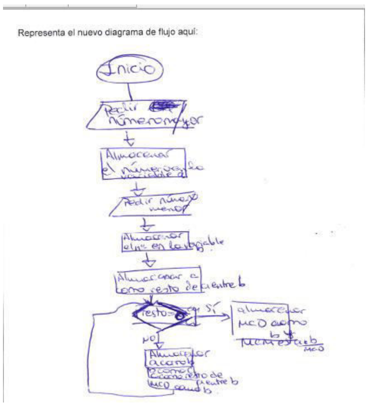
El grupo 4 diseña correctamente el diagrama de flujo, traduce correctamente dicho algoritmo a Scratch y responde correctamente a las preguntas que se efectúan (tabla 10).

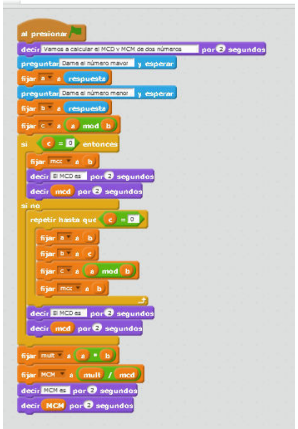
Tabla 10. Resultado del grupo 4 a la ficha 6

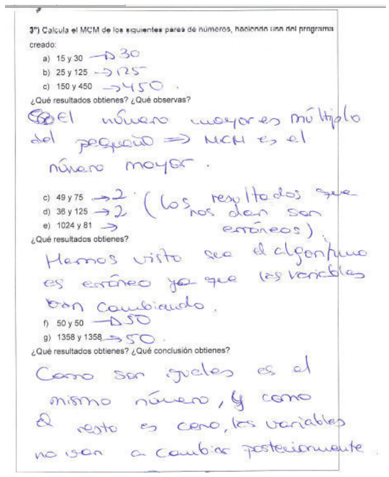
Grupo 4		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

El grupo 5, sin embargo, devuelve el peor resultado de entre todos los grupos. Diseñan mal el diagrama de flujo, ya que, al utilizar continuamente las variables a y b y no guardar los valores iniciales pedidos en dos variables distintas, utilizan dichas variables pasadas por el bucle, para calcular el M.C.M. Por tanto, el algoritmo no devuelve el M.C.M de forma correcta. Además de esto, la escritura en el diagrama de flujo no es nada clara. Como consecuencia, arrastran este error al implementar el algoritmo en Scratch. A la hora de dar las respuestas, denotan que saben que su algoritmo es incorrecto; no obstante, no saben argumentar el porqué (tabla 11).

Tabla 11. Resultado del grupo 5 a la ficha 6

<table>
<tr><th colspan="3">Grupo 5</th></tr>
<tr><th>Diagrama de flujo</th><th>Algoritmo</th><th>Conclusiones</th></tr>
<tr><td>


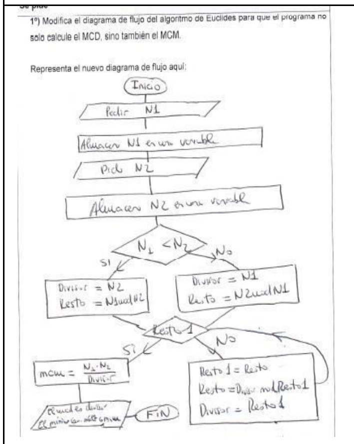
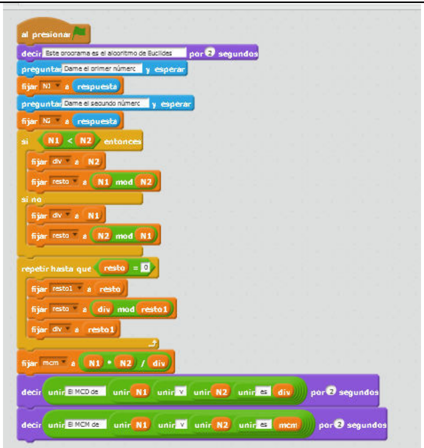
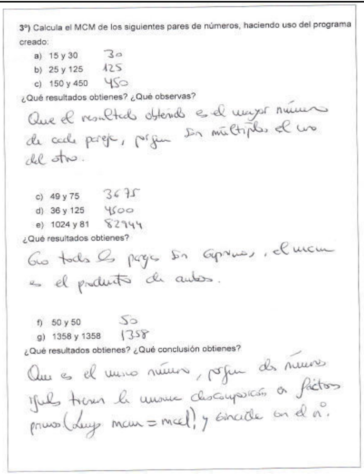
</td><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

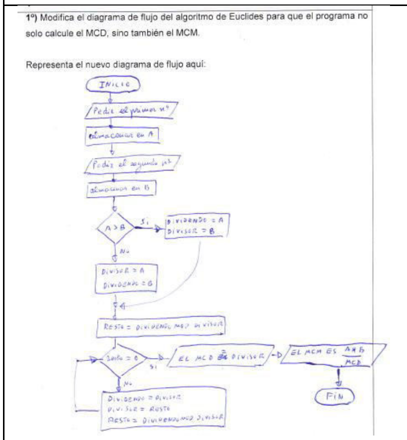
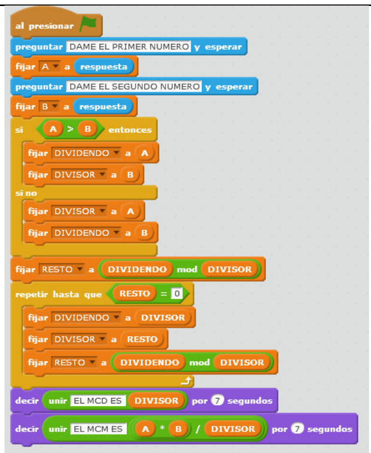
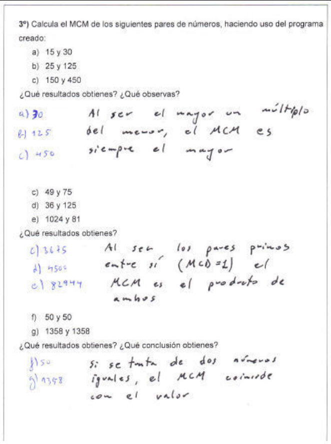
El grupo 6 diseña de forma incorrecta el diagrama de flujo ya que la condición para ingresar en el bucle es incorrecta. No obstante, implementan de forma correcta el algoritmo en Scratch y responden a las preguntas de forma correcta y argumentada (tabla 12).

Tabla 12. Resultado del grupo 6 a la ficha 6

Grupo 6		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

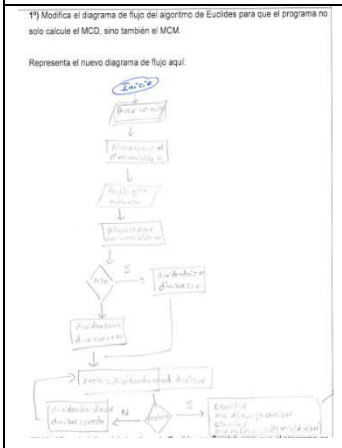
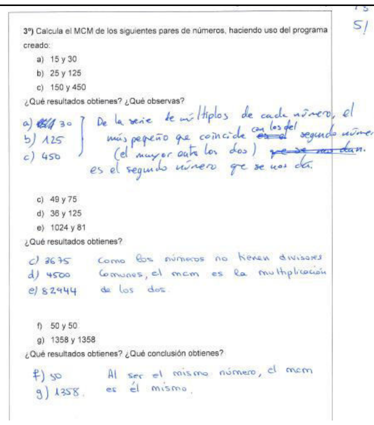
El grupo 7 diseña correctamente el diagrama de flujo, traduce correctamente dicho algoritmo a Scratch y responde correctamente a las preguntas que se efectúan (tabla 13).

Tabla 13. Resultado del grupo 7 a la ficha 6

Grupo 7		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

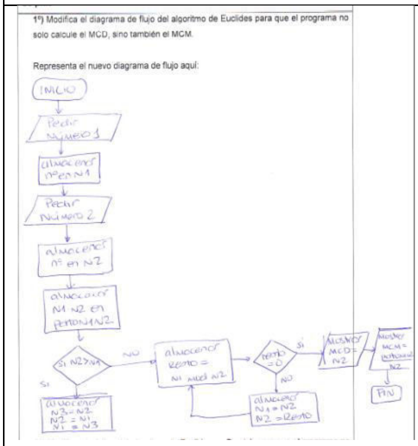
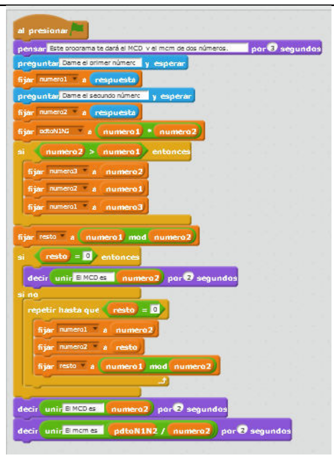
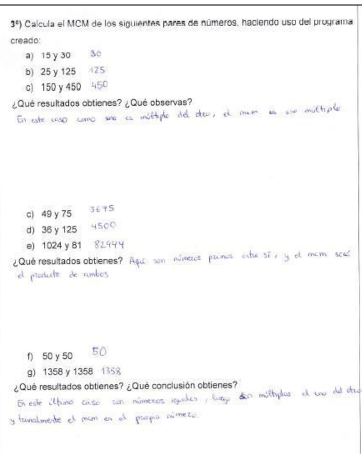
El grupo 8 diseña correctamente el diagrama de flujo, traduce correctamente dicho algoritmo a Scratch y responde correctamente a las preguntas que se efectúan, aunque no queda muy claro el argumento que dan en la pregunta 1 (tabla 14).

Tabla 14. Resultado del grupo 8 a la ficha 6

Grupo 8		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

El grupo 9 diseña correctamente el diagrama de flujo, a excepción de una línea de flujo que falta uniendo la condición SI del condicional, con el resto del programa. Traduce correctamente dicho algoritmo a Scratch y responde correctamente a las preguntas que se efectúan (tabla 15).

Tabla 15. Resultado del grupo 9 a la ficha 6

Grupo 9		
Diagrama de flujo	Algoritmo	Conclusiones
		

6. Conclusiones y perspectivas futuras

En este documento se ha trabajado el M.C.D, un concepto que aparece por primera vez en 5º de primaria y que por su naturaleza y el tratamiento que se realiza habitualmente del mismo en el aula, se puede situar dentro de lo que denominamos pensamiento matemático elemental. A pesar de esto, podemos señalar que este concepto, tratado como se ha hecho en este documento, forma parte del Pensamiento Matemático Avanzado. Las razones que justifican este hecho son:

- Se ha trabajado el razonamiento lógico-matemático y la formalización a la hora de diseñar el diagrama de flujo para el algoritmo de Euclides. Esto puede observarse a través de la ficha 2 y de los resultados que se obtuvieron de la realización de la misma (véase tabla 2 del documento). Como consecuencia de esto podemos señalar que se ha cumplido el objetivo 1.
- Se ha potenciado la abstracción a la hora de traducir el diagrama de flujo para el algoritmo de Euclides al lenguaje de programación Scratch. Este hecho se constata a través de la realización y los resultados de la ficha 5. Por este motivo podemos decir que se ha cumplido el objetivo 2.
- Se han formulado hipótesis que han podido ser contrastadas mediante la ejecución del programa para diversos casos particulares. Este hecho se puede observar a través de la comprobación que hacen los alumnos de la aplicación creada en la ficha 5. En cualquier caso, la formulación de hipótesis ha sido un elemento presente durante todo el proceso de implementación del algoritmo de Euclides en Scratch. Como consecuencia de lo anterior podemos señalar que se ha cumplido el objetivo 3.
- Se ha trabajado el concepto de generalización. Los alumnos han podido inferir resultados generales, a partir de la ejecución del algoritmo para diversos casos particulares. Esto se observa tanto en la ficha 5 como en la ficha 6. Por ello podemos decir que se ha cumplido el objetivo 4.
- Ha supuesto un duro trabajo para alumnos con una sólida formación matemática. Tal y como se ha detallado en el apartado resultados, no todos los grupos han sido capaces de llevar a cabo de forma satisfactoria todas las fichas.
- Por último señalamos que los alumnos han valorado el algoritmo implementado en Scracth como un modelo matemático que, una vez probado y verificado, permite calcular el M.C.D y el M.C.M de cualquier par de números naturales. Esto, que se observa una vez que los alumnos han completado las fichas 5 y 6, implica la consecución del objetivo 5.

Como perspectivas futuras, se encuentra la puesta en práctica de esta secuencia de actividades con alumnos de 3º ESO, en la asignatura de Matemáticas para las Enseñanzas Académicas. Tal y como señala Carralero (2011), a partir de este curso los alumnos empiezan a poseer un desarrollo lógico-abstracto que permitiría desarrollar en ellos algunos elementos del Pensamiento Matemático Avanzado. Cabe señalar que los tiempos dedicados a cada una de las fichas que se han trabajado en este documento deberán ser modificados y adaptados a los alumnos de secundaria, pero el contenido de las mismas prevemos permanecerá intacto.

Referencias

[1] BOYER, Carl Benjamin. *Historia de la Matemática*, pp. 241, 146, 485, Alianza Editorial, Madrid, 2010.

[2] BARRERA, L. (2013). *Algoritmos y programación para la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.* Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797), 6680.

[3] BROUSSEAU, G. (1997). *La théorie des situations didactiques.* Le cours de Montréal 1997. Curso dictado por G. Brousseau con motivo de la atribución del título de Doctor Honoris

Causa de la Universidad de Montréal, Québec.

[4] BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, coll. Recherches en didactique des mathématiques.

[5] BROUSSEAU, G. (2011). La *théorie des situations didactiques en mathématiques* (Vol. 5, No. 1, pp. 101-104). Presses universitaires de Rennes.

[6] CARRALERO, N. (2011). *Scratch. Programación fácil para primaria y secundaria.* Revista digital sociedad de la Información, 29, 1-10.

[7] CARVAJAL, S., FONT, V., y GIMÉNEZ, J. (2014). *Uso de las TIC en las prácticas de la formación de profesores de secundaria de matemáticas.* Revista del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI), (2).

[8] DREYFUS, T. (1990). *Advanced mathematical thinking.* En Nesher, P. Y Kilpatrick, J. (Eds.), Mathematics and cognition. Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.

[9] DREYFUS, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes.* En Tall, D. (Ed), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

[10] EDWARDS, B.S., DUBINSKY, E., y MCDONALD, M.A. (2005). *Advanced mathematical thinking.* Mathematical Thinking and Learning, 7(1), 15-25.

[11] FERNÁNDEZ, J., y MUÑOZ, J. (2007). *Las TIC como herramienta educativa en matemáticas.* Unión, 119-147.

[12] GAIRÍN, J.M., y SANCHO, J. (2002). *Números y algoritmos.* Madrid: Síntesis.

[13] KIDRON, I. y DREYFUSS, T. (2014). *Proof image.* Educational Studies in Mathematics, vol. 87, 297-321.

[14] IFRAH, G. (2008). *Historia universal de las cifras.* Madrid: Espasa Calpe.

[15] PASCUAL, M.A. (1998). *La nueva frontera educativa con nuevas tecnologías.* Nuevas Tecnologías, medios de comunicación y educación. Formación inicial y permanente del profesorado. Madrid: CCS.

[16] PÉREZ, R.P. (1998). Nuevas *tecnologías y nuevos modelos de enseñanza.* Nuevas tecnologías, medios de comunicación y educación: formación inicial y permanente del profesorado (pp. 105-150). Madrid: CCS.

[17] RICOY, M.C., y COUTO, M.J. (2012). *El acercamiento al contexto profesional como móvil para indagar sobre las TIC: un estudio cualitativo.* Revista Complutense de Educación, 23 (2), 443-461.

[18] ROBERT, A. y SCHWARZENBERGER, T. (1991). *Research in the teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level.* En Tall, D (Ed.). Advanced Mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

[19] SKEMP, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Morata.

[20] TALL, D. (1991). *The psychology of advanced mathematical thinking.* Advanced mathematical thinking (pp. 3-21). Springer Netherlands.

[21] USISKIN, Z. (1998). *Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age.* En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) The Teaching and Learning of Algorithms in School

Mathematics (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[22] VIDAL, C.L., CABEZAS, C., PARRA, J.H., y LÓPEZ, L.P. (2015). *Experiencias Prácticas con el Uso del Lenguaje de Programación Scratch para Desarrollar el Pensamiento Algorítmico de Estudiantes en Chile.* Formación universitaria, 8 (4), 23-32.

Sobre los autores:

Nombre: Miguel Ángel Baeza Alba
Correo Electrónico: mbaeza@ucm.es
Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Nombre: Francisco Javier Claros Mellado
Correo Electrónico: fclaros@ucm.es
Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Nombre: María Teresa Sánchez Compaña
Correo Electrónico: teresasanchez@uma.es
Institución: Universidad de Málaga, España.

Nombre: Mónica Arnal Palacián
Correo Electrónico: monica.arnal@urjc.es
Institución: Universidad Rey Juan Carlos, España.

Historias de Matemáticas

Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes

Infinitesimal methods to calculate tangents

José María Ayerbe Toledano

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VII, Número 2, pp. 065–086, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Jun'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

En este artículo se estudian los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes desarrollados por Fermat y Barrow a mediados del siglo XVII, incluyendo algunos ejemplos que ilustrarán al lector sobre su aplicación. Asimismo, se estudia el método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos. En todos los casos se indaga sobre la base teórica de los procedimientos, contrastando las opiniones de diversos autores que han tratado la materia.

Palabras Clave: Fermat, Barrow, Cálculo de tangentes, Máximos y mínimos, Métodos infinitesimales.

Abstract

In this paper we study the infinitesimal methods to calculate tangents developed by Fermat and Barrow in the XVII century. Several examples to ilustrate the methods are given. Moreover, we show the Fermat's method to obtain maxima and minima. Discussions about the theoretical basis of the methods, given by some authors, are commentated.

Keywords: Fermat, Barrow, Tangents, Maxima and minima, Infinitesimal methods.

1. Introducción.

El problema de hallar la tangente a una curva había sido considerado por los matemáticos desde la antigüedad. Además de los múltiples resultados sobre la tangente a la circunferencia que podemos encontrar en Los Elementos de Euclides, Apolonio (262-190 a.C.) estudió de manera exhaustiva las tangentes a las cónicas en su obra Cónicas. Esta memoria, que consta de siete libros, dedica el Libro II a estudiar las tangentes a las cónicas y el Libro V realiza un estudio sobre máximos y mínimos y sobre trazado de tangentes y normales a secciones cónicas. Posteriormente Arquímedes construyó la tangente a la espiral. Sin embargo, el punto de vista griego era estático, de forma que la tangente se consideraba como la recta que cortaba a la curva en un sólo punto, "dejándola a un lado", sin que hubiera un proceso de paso al límite ni ninguna otra consideración de carácter infinitesimal.

En este artículo vamos a tratar los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes a curvas planas que fueron desarrollados por Fermat y por Barrow a mediados del siglo XVII. Esta elección no es casual. Los métodos de Fermat y Barrow son, posiblemente, los que más contribuyeron al alumbramiento del cálculo diferencial y así lo señala el Marqués de L'Hôpital en el prefacio de [6, pág.18-19], el primer libro de texto que se publicó sobre la materia:

> *Poco tiempo después de la publicación del método del Sr. Descartes para las tangentes, el Sr. de Fermat encontró también uno que finalmente el mismo Sr. Descartes confesó que es más sencillo que el suyo para múltiples usos. Sin embargo, es cierto que no era todavía tan sencillo como el del Sr. Barrow, al considerar más de cerca la naturaleza de las poligonales [...] El Sr. Barrow no se quedó ahí: inventó también una especie de cálculo propio de este método; sin embargo, para auxiliarse de ello hizo falta, igual que en el del Sr. Descartes, quitar las fracciones y eliminar todos los signos radicales.*

Y a renglón seguido añade:

> *El vacío de este cálculo lo cubrió el del célebre Sr. Leibniz; este sabio geómetra comenzó donde el Sr. Barrow y los otros habían terminado. Su cálculo lo ha llevado a regiones hasta ahora desconocidas; y ha hecho descubrimientos que son la admiración de los más hábiles matemáticos de Europa.*

El cálculo de tangentes era un tema de intenso estudio en la época y fueron muchos los matemáticos que establecieron procedimientos, más o menos generales, para calcularlas. Merece la pena destacar el método de Descartes para el calculo de la normal y, por tanto también de la tangente, a una curva algebraica, pero no nos detendremos en él pues no está basado en procedimientos infinitesimales, sino en consideraciones sobre la existencia de raíces dobles en ecuaciones algebraicas.

También desarrollaron procedimientos para el cálculo de tangentes Torricelli y Roberval. Para el cálculo de la tangente a la cicloide ambos matemáticos utilizaron una composición de movimientos que recordaba la determinación de la tangente a la espiral, que ya había realizado Arquímedes dos mil años antes. La similitud de los procedimientos ideados por ambos autores y el hecho de que Torriceli no mencionara en su trabajo a Roberval motivó la airada protesta de éste y la consiguiente acusación de plagio. La idea de Roberval para el cálculo de tangentes es muy simple. Dado que una curva es trazada por un punto en movimiento, la tangente en cualquier punto era para Roberval la recta de velocidad instantánea en ese punto. Así escribía:

> *La dirección del movimiento de un punto que describe una curva es la tangente a la curva en cada posición de ese punto.*

Desarrollando esta idea Roberval calculó la tangente a la parábola y a otras cónicas, que ya habían sido obtenidas por los griegos, y, asimismo, abordó el estudio de la familia de las concoides, partiendo de la concoide de Nicomedes, la espiral de Arquímedes, la cisoide, la cuadratriz de Hipias y, por supuesto, la cicloide, con lo que hace un recorrido exhaustivo por la mayor parte de las curvas consideradas en su tiempo.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) fue uno de los pocos matemáticos profesionales franceses del siglo XVII que destacó por sus investigaciones, particularmente sobre la cicloide. Perteneció al círculo de Mersenne y fue muy amigo de Fermat con el que mantuvo una fluida correspondencia a lo largo de muchos años. Obtuvo la cátedra de Ramus en el Collège Royal de París en 1634 y, a pesar de que este puesto se convocaba cada tres años a concurso público, mantuvo su empleo hasta su muerte. Dado que el concurso consistía en un examen competitivo en el que las cuestiones se las proponían entre sí los opositores, Roberval adoptó la costumbre de no publicar nunca sus descubrimientos, con objeto de utilizar esos conocimientos en la oposición para batir a sus contrincantes. Sin duda tuvo éxito en su empeño, pero a cambio, al no publicar sus resultados, se vio envuelto en múltiples controversias relativas a la prioridad de los mismos, una de las cuales es la ya citada con Torricelli.

Resultados similares a los de Roberval fueron obtenidos también por Torricelli, su rival, como decimos, en la invención del método de determinación de tangentes por medio de velocidades instantáneas. En relación con estos dos autores, y sin perjuicio de a quien corresponda la prioridad del descubrimiento, lo más interesante es señalar el gran paso que dieron en la dirección de considerar la tangente no ya sólo como la recta que corta a la curva una única vez, al menos en un entorno del punto de tangencia, sino como el límite de las rectas secantes en el punto de tangencia cuando el otro punto de corte se aproxima tanto como se quiera al de tangencia.

También se ocuparon del cálculo de tangentes otros matemáticos de la época, como Philippe de Lahire, Johann Hudde y René Francois Walter, Baron de Sluse, entre otros, pero nosotros nos centraremos en los métodos de Fermat y de Barrow que fueron, según parece, los que iluminaron a Newton y a Leibniz para el desarrollo del cálculo infinitesimal. Por lo que se refiere al método de Fermat, este es una aplicación del procedimiento de adigualdad que desarrolló para el cálculo de máximos y mínimos. El artículo lo iniciaremos con el estudio de este método que, además de estar en la base del procedimiento de Fermat para el cálculo de tangentes que desarrollamos en la siguiente sección, tiene interés por sí mismo. Finalizaremos el artículo examinando el método de Barrow para el cálculo de tangentes, que no es más que una mejora del de Fermat según reconoció Newton.

2. El método de Fermat para la determinación de máximos y mínimos.

Pierre de Fermat (1601-1665) fue, junto con Descartes, el matemático más destacado de la primera mitad del siglo XVII pero, como tanto otros en su época, incluido el propio Descartes, no fue un matemático profesional. Fermat estudió Derecho en Toulouse, para incorporarse más tarde a las tareas del parlamento local, primero como abogado y más tarde como miembro del consejo. Fue sin duda un hombre polifacético: políglota, filólogo, jurista, poeta,... Pero sin duda donde su genio brilló a más altura fue en las matemáticas. Como matemático realizó importantes contribuciones en casi todos los campos, desde la geometría analítica al cálculo infinitesimal, pero también a la teoría de números, quizás su tema favorito y al que su nombre se halla más asociado en la actualidad, o a la teoría de probabilidades de la que fue cofundador junto con Blaise Pascal.

Fermat desarrolló el primer método general para la determinación de máximos y mínimos en su obra *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* o, en castellano, Método para la investigación de máximos y mínimos, escrita entre 1629 y 1637 y que comenzó a circular a partir de esta última fecha entre los mátemáticos franceses gracias a las artes del padre Mersenne. El método de Fermat traduce algebraicamente la idea, ya observada por Oresme y Kepler, relativa a que la variación de las cantidades en un entorno de un extremo se hace imperceptible. Fermat diseña un método para la determinación de esos valores, sin perjuicio de que, como afirma Paul Tannery, editor de las Oeuvres de Fermat, es muy posible que éste no dispusiera de los trabajos de aquellos.

Como han señalado numerosos autores, el método de Fermat es digno de mención no sólo porque constituye el primer procedimiento general para la determinación de máximos y mínimos, sino también porque en él aparece por primera vez la fructífera idea de incrementar una magnitud asimilable a lo que ahora es la variable independiente de una función, incremento que constituye la esencia del cálculo diferencial. Veamos el método tal como el propio Fermat, en poco más de medio folio, lo explica en su obra:

"Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

[I.] Sea A una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).

[II.] Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A en términos que pueden ser de cualquier grado.

[III.] Se sustituirá a continuación la incógnita original A por $A + E$ y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A y de E, en términos que pueden ser de cualquier grado.

[IV.] Se adigualará, para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima. [La adigualdad viene a significar algo así como "tan aproximadamente iguales como sea posible" o, para eliminar en principio cualquier connotación infinitesimal, quizás sería más fiel al pensamiento de Fermat entenderla como una pseudoigualdad [7, pág. 51]. Fermat utiliza la palabra "adaequo", que podría traducirse como "hacer adigual"].

[V.] Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que en los dos miembros habrá términos afectados de E o de una de sus potencias.

[VI.] Se dividirán todos los términos por E, o por alguna potencia superior de E, de modo que desaparezca la E de, al menos, uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.

[VII.] Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparezca la E o una de sus potencias, y se igualará lo que queda, o bien, si en uno de los dos miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo. [Es curioso, para nosotros, como se enuncia esta regla. Puede verse aquí como la utilización del álgebra simbólica todavía precisaba de una explicación].

[VIII.] La resolución de esta última ecuación dará el valor de A, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original".

Una vez enunciadas las reglas que componen su método, Fermat lo ilustra con el siguiente ejemplo, que no es más que un caso particular de la proposición 27 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides:

Ejemplo 2.1. *De todos los rectángulos de perímetro* $2B$*, el que tiene mayor área es el cuadrado de lado* $B/2$.

En efecto, consideremos un segmento de longitud B y dividámoslo en dos trozos de longitudes A y $B - A$. Apliquemos el método de Fermat para la obtención del máximo buscado:

I y II: Tenemos, por tanto, que hacer máxima la expresión $A(B - A)$.

III. Sustituyendo en la expresión original A por $A + E$ obtenemos: $(A + E)(B - A - E)$.

IV. Adigualamos: $A(B - A) \sim (A + E)(B - A - E)$.

V. Operamos y eliminamos los términos comunes de ambos lados y queda:

$$AB - A^2 \sim AB - A^2 - AE + EB - EA - E^2 \Longleftrightarrow EB - 2AE - E^2 \sim 0$$

VI. Dividimos por E y queda: $B - 2A - E \sim 0$.

VII. Suprimimos los términos donde aparece la E e igualamos: $B - 2A = 0$.

VIII. La resolución de la ecuación nos da el valor de A que conduce al máximo, esto es, $A = B/2$. $\square$

Una vez obtenido el resultado y a modo de epitafio Fermat, con una envidiable seguridad en sí mismo, apostilla: "nec poteft generalior dari methodus" o, en cristiano, "es imposible dar un método más general".

A pesar de la última afirmación, el método de Fermat para la determinación de máximos y mínimos, debido al laconismo y a la falta de fundamentación teórica con que fue descrito en el *Methodus*, atrajo una ardiente atención de la comunidad científica del momento, lo que obligó a Fermat, en contra de su costumbre, a escribir cinco memorias breves, así como numerosos comentarios epistolares, detallando los fundamentos de su procedimiento y resolviendo numerosos ejemplos. No obstante, la aparente contradicción que suponía dividir por E y después hacer $E = 0$ no quedó nunca suficientemente aclarada. De hecho en [7, pág. 50] se señala que Fermat nunca estuvo en posesión de una verdadera prueba de su método. En cualquier caso, para Fermat siempre fue más importante comprobar que el método funcionaba en la práctica que dar una demostración exacta del mismo, muy en línea con el cambio de mentalidad que se iba abriendo paso en el siglo XVII y que, en general, primaba el descubrimiento frente a la demostración impecablemente lógica del resultado.

No obstante, resulta inevitable, aunque sin duda anacrónico y peligroso, pues puede conducir a conclusiones erróneas, reproducir el método de Fermat con notación moderna, poniendo $A = x$, $E = \Delta x$ y la cantidad a hacer máxima o mínima igual a $f(x)$. Con esta terminología la regla de Fermat nos dice:

I. x es la variable independiente del problema de extremos.

II. $f(x)$ es la función a maximizar o minimizar.

III. $f(x + \Delta x)$ es lo que se obtiene al sustituir en la función x por $x + \Delta x$.

IV. Adigualamos: $f(x) \sim f(x + \Delta x)$.

V. Eliminamos los términos comunes de ambos lados: $f(x) - f(x + \Delta x) \sim 0$.

VI. Dividimos por Δx: $\dfrac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \sim 0$.

VII. Hacemos $\Delta x = 0$.

VIII. $\left(\dfrac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = 0$.

Los apartados VII y VIII podríamos escribirlos con notación actual como:

VII y VIII: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\dfrac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}\right] = 0$.

Con esta interpretación podemos llegar a la conclusión, quizás engañosa, de que el método de Fermat viene a decir que la derivada de la función en el extremo vale cero, es decir, lo que hoy llamamos la condición necesaria de extremo. En este sentido se manifiesta C. Boyer en [1, pág. 440] señalando que

> *resulta completamente justo, por lo tanto, reconocer la razón que asistía a Laplace [otro francés, por cierto] al aclamar a Fermat como el verdadero descubridor del cálculo diferencial.*

Y más aún, añade:

> *Obviamente Fermat no disponía del concepto de límite, pero salvo esto, su método para determinar máximos y mínimos sigue un camino completamente paralelo al que podemos ver*

> *hoy en los libros de cálculo, excepto en la mínima diferencia de que hoy se suele utilizar el símbolo h o* Δx *en vez de la E de Fermat para el incremento de la variable. El procedimiento de Fermat, que consiste en cambiar ligeramente el valor de la variable para considerar valores próximos a uno dado, ha constituido desde entonces la verdadera esencia del análisis infinitesimal.*

La opinión de otros autores es, sin embargo, diferente. Así I. Grattan-Guinness señala en [5, pág. 39] que esta interpretación

> *significaría extrapolar demasiado el contenido estricto del método. En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y en segundo lugar no decía nada acerca de que E fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico; en tercer lugar, la condición VI no tiene sentido en esta interpretación en cuanto que siempre dividimos por E en primer grado simplemente; sin embargo, como se puede ver por sus ejemplos, el dividía en ocasiones por potencias más elevadas de E, y la razón para esto era que si la cantidad considerada contenía una raíz cuadrada, elevaba al cuadrado la adigualdad antes de aplicar las últimas etapas del método. Nótese además que no se hacía ninguna referencia a que el método da sólo una condición necesaria.*

En este mismo sentido se manifiesta González Urbaneja en [4, pág. 81] al afirmar lo siguiente:

> *Un estudio exhaustivo de la Investigación analítica [se refiere a la obra de Fermat Investigación analítica del método de máximos y mínimos, en la que se establecen los fundamentos teóricos del procedimiento] nos mostrará la falta de base de esta anacrónica interpretación del método de Fermat. Veremos que el* Methodus *no se basa en ningún concepto infinitesimal, sino en conceptos algebraicos puramente finitos derivados de la teoría de ecuaciones de Viète.*

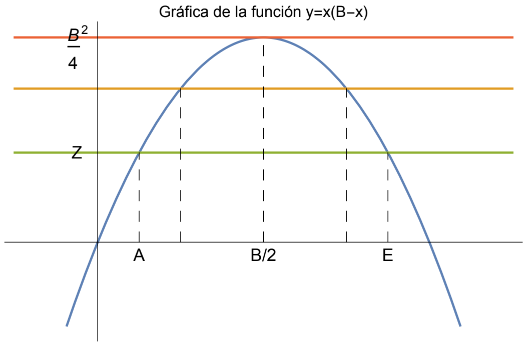
Efectivamente, el propio Fermat señala en la Investigación analítica del método de máximos y mínimos [manuscrito sin fecha ni título que en [7] se argumenta que fue escrito antes de agosto de 1638, aunque la mayor parte de los autores lo datan en el periodo 1640-44] que el algoritmo se le ocurrió estudiando el método de la Syncrisis y de la Anastrophe de Vieta y combinándolo con lo que Pappus denomina puntos únicos y singulares. A continuación da un ejemplo para ilustrar lo que quiere decir. Veamoslo:

> *Un segmento de longitud B debe ser dividido por un punto de forma que el producto de los segmentos resultantes sea máximo. Ya sabemos que el punto buscado es el punto medio [este fue, como hemos visto, el problema de extremos que resolvió en el Methodus] que hace el máximo igual a* $\frac{B^2}{4}$.

Sigue Fermat diciendo:

> *Pero si uno se propone dividir el mismo segmento de longitud B de manera que el producto de los segmentos sea igual a Z (deberá ser* $Z < \frac{B^2}{4}$*) se tendrán dos puntos satisfaciendo la cuestión, situados a uno y otro lado del punto correspondiente al producto máximo.*

O sea, si consideramos la función $f(x) = x(B - x)$ a maximizar y dibujamos la parábola $y = x(B - x)$ tenemos la siguiente situación:



A y E son las dos raíces de la ecuación $x(B-x) = Z$ que como vemos son simétricas respecto del punto $B/2$ donde está el máximo. Ya que A y E son las dos raíces de la ecuación $x(B-x) = Z$ obtenemos, siguiendo a Vieta, que

$$A(B-A) = E(B-E) \Longleftrightarrow BA - BE = A^2 - E^2$$

Dividiendo ahora ambos miembros por $A - E$ obtenemos que $B = A + E$.

Continúa Fermat diciendo:

> *Si en lugar de Z se toma un valor mayor, aunque siempre inferior a $\frac{B^2}{4}$, las rectas A y E diferirán menos entre ellas que las precedentes [ver el dibujo] y los puntos de división se aproximarán más al punto correspondiente al punto máximo. El producto de los segmentos aumentará, mas al contrario disminuirá la diferencia entre A y E hasta que desaparece completamente esta diferencia para la división correspondiente al producto máximo; en este caso no hay más que una solución única y singular [en términos de Pappus] y las dos cantidades A y E llegan a ser iguales.*

Ahora bien, el método de Vieta aplicado a las dos ecuaciones correlativas anteriores nos ha llevado a $B = A + E$; por consiguiente, si $A = E$, lo que sucede para el punto correspondiente al máximo o mínimo, se tendrá, en el caso propuesto $B = 2A$. Es decir, si se toma el punto medio de la recta B, el producto de los segmentos será máximo.

Como vemos en esta obra Fermat explica con más detalle los fundamentos de su método de máximos y mínimos. La única diferencia con el algoritmo del *Methodus* es que en el manuscrito Investigación analítica las raíces son A y E y debe dividir por $A - E$. Como esto puede ser complicado, Fermat tiene la idea de tomar las dos raíces A y $A + E$ y dividir entonces por E, para igualar finalmente las dos raíces haciendo $E = 0$, lo que explica un poco más adelante en esta memoria. Además, da dos ejemplos, de los cuales nosotros nos detendremos en el primero:

Ejemplo 2.2. *Dividir la recta [el segmento] B de manera que el producto del cuadrado de uno de los segmentos por el otro sea máximo.*

Apliquemos el método de máximos y mínimos de Fermat:

I. Dividamos el segmento en dos trozos de longitudes A y $B - A$.

II. La función a maximizar será $A^2(B-A)$ en la variable A.

III. Sustituyendo en la expresión original A por $A + E$ queda: $(A+E)^2(B-A-E)$.

IV. Adigualamos: $(A+E)^2(B-A-E) \sim A^2(B-A)$.

V. Operando y eliminando términos comunes obtenemos:

$$(A^2 + E^2 + 2AE)(B - A - E) \sim A^2B - A^3$$
$$\Longleftrightarrow -A^2E + E^2B - E^2A - E^3 + 2ABE - 2AE^2 - 2A^2E \sim 0$$

VI. Dividimos por E y queda: $-A^2 + EB - EA - E^2 + 2AB - 2AE - 2A^2 \sim 0$.

VII. Suprimimos los términos donde aparece la E e igualamos: $-A^2 + 2AB - 2A^2 = 0$.

VIII. Resolvemos la ecuación y obtenemos $A = \frac{2B}{3}$ que es el máximo buscado. $\square$

Tanta confianza tenía Fermat en su método, a pesar de la falta de rigor que ya hemos comentado y que tantas críticas le acarreó, sobre todo por parte de Descartes, que finaliza esta obra de forma muy similar a como finalizó el *Methodus*, afirmando:

> *Es por consiguiente que afirmo hoy y siempre, con la misma confianza que antes, que la investigación de máximos y mínimos se reconduce a esta regla única y general, cuyo feliz éxito será siempre legítimo y no debido al azar, como algunos [en velada referencia a Descartes] han pensado [. . .]. Si todavía hay alguien que considere este método como debido a un feliz azar, puede intentar encontrar uno similar.*

En [7] se argumenta que el método de Fermat basado en el criterio de la razón doble contenido en la Investigación analítica es anterior, cronológicamente, al método, más general, contenido en el *Methodus*, sin perjuicio de que éste fuera el primero en hacerse público. En dicho artículo se analiza en profundidad el fundamento teórico de ambos métodos y esta interpretación podría sugerir la idea de una evolución en el pensamiento de Fermat desde una concepción puramente algebraica del problema de máximos y mínimos, basada fundamentalmente en Pappus y Vieta, hacia un planteamiento infinitesimal en línea con nuestra moderna visión del cálculo. Stromholm, no obstante, se muestra prudente a este respecto y, en este sentido, afirma [7, pág.67]:

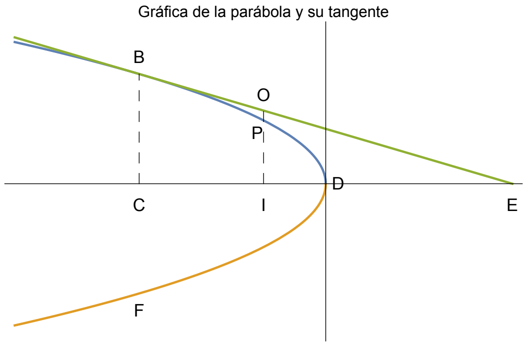
> *El [Fermat] fue en este caso particular bastante más el último de los antiguos que el primero de los modernos.*

3. El método de Fermat para el cálculo de la tangente.

Vamos ahora a analizar el método de Fermat para el cálculo de la tangente a una curva. El procedimiento aparece por primera vez en su obra *Methodus*, como una aplicación del método para la obtención de máximos y mínimos, y por tanto podemos considerar que Fermat lo diseñó, en esta versión inicial, en el periodo entre 1629 y 1637. La obra *Methodus* contiene dos secciones. La primera, titulada *Ad disquirendam maximam et minimam* contiene el método para la determinación de máximos y mínimos al que nos hemos referido en el apartado anterior. La segunda sección, titulada *De tangentibus linearum curvarum*, es decir, Sobre las tangentes a las líneas curvas, es la que propiamente contiene el método de Fermat para el cálculo de la tangente a una curva. Para familiarizarnos con él vamos a estudiar con detalle el ejemplo recogido en esa memoria, que no es otro que el cálculo de la tangente a la parábola.

Ejemplo 3.1. *Cálculo de la subtangente a la parábola.*

Consideremos la parábola BDF y tracemos la tangente en un punto B que corta al eje de la parábola en E. Sea O un punto cualquiera de la tangente que determina a su vez los puntos P e I que aparecen en la gráfica.



Denotemos por d a la distancia CD, por a a la subtangente, esto es, al segmento CE y por e a la distancia CI. Nosotros aquí hemos puesto estas últimas letras en minúsculas, pero Fermat las denotó con las letras en mayúsculas, sin importarle el hecho de que entonces E o D representasen tanto un punto del plano como la longitud de un segmento.

La propiedad intrínseca de la parábola es (Apolonio, Cónicas, I.11):

$$\frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD}{ID} \Longleftrightarrow \frac{BC^2}{CD} = \frac{PI^2}{ID}$$

En la época de Fermat, antes de la invención de la geometría analítica, era habitual definir las curvas utilizando proporciones. En el caso de la parábola la proporción es la que acabamos de señalar que, lógicamente, puede obtenerse inmediatamente de la ecuación cartesiana. En efecto, dada la parábola $y^2 = 4px$ se tiene que $\dfrac{y^2}{x} = 4p = \text{constante}$.

Dado que O es exterior a la parábola se tiene que

$$\frac{CD}{ID} > \frac{BC^2}{OI^2}$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos, se tiene que $\dfrac{BC}{CE} = \dfrac{OI}{IE}$, lo que implica que $BC = \dfrac{OI}{IE}CE$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2} &\Longleftrightarrow \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2} \\ &\Longleftrightarrow d(a-e)^2 > a^2(d-e) \\ &\Longleftrightarrow da^2 + de^2 - 2dae > a^2d - a^2e \end{aligned}$$

Ahora Fermat dice:

> *Adigualamos según el método precedente [el de máximos y mínimos]; se tendrá eliminando términos comunes* $de^2 - 2dae \sim -a^2e$.

Dividiendo por e queda

$$de - 2da \sim -a^2$$

y haciendo $e = 0$ e igualando obtenemos $2da = a^2$, esto es, $a = 2d$, que es el resultado buscado. □

Fermat comenta finalmente:

Hemos probado de esta forma que CE es doble de CD, lo que es conforme a la verdad [el resultado era conocido pues había sido obtenido por Apolonio].

Y muy en su línea, como hemos visto en la sección anterior, termina diciendo que

este método nunca falla y puede ser aplicado a un gran número de cuestiones muy hermosas.

Como vemos Fermat utiliza la propiedad intrínseca de la parábola y luego plantea un problema que resuelve por su método de máximos y mínimos. Pero realmente, ¿cuál es el problema de máximos y mínimos que está resolviendo? O dicho de otra forma, ¿que cantidad extrema se somete al método de máximos y mínimos en el trazado de una tangente? Esta objeción a su método le fue planteada por Descartes y realmente Fermat nunca dio una respuesta categórica a la misma, a pesar de que, como hemos comentado en la sección anterior en relación con su método de máximos y mínimos, fueron muchas las ocasiones en que volvió sobre estos temas.

González Urbaneja aventura en [4, pág. 124-128] una hipótesis sobre el problema de extremos que hay detrás del de tangentes. Aplicado a la tangente a la parábola se señala que

$$\frac{BC^2}{CD} = \text{mín}\left\{\frac{OI^2}{DI} : O \in \text{tangente } BE\right\}$$

Teniendo en cuenta que, si llamamos $m = \dfrac{BC}{CE} = \dfrac{OI}{IE}$, entonces $\dfrac{BC^2}{CD} = \dfrac{m^2a^2}{d}$ y $\dfrac{OI^2}{DI} = \dfrac{m^2(a-e)^2}{d-e}$, adigualando resulta

$$\frac{m^2a^2}{d} \sim \frac{m^2(a-e)^2}{d-e} \Longleftrightarrow a^2(d-e) \sim d(a-e)^2$$

que es la misma adigualdad a la que llegó Fermat.

Sin perjuicio de la veracidad o no de la hipótesis de González Urbaneja, lo que subyace en el método, aunque quizás en este caso Fermat no incide en ello especialmente, es la sustitución del punto P de la parábola por el correspondiente punto O sobre la tangente. En efecto, el elemento clave del procedimiento es la sustitución del segmento PI por el segmento OI en la propiedad intrínseca de la parábola, transformando la igualdad $\dfrac{BC^2}{PI^2} = \dfrac{CD}{ID}$ en la adigualdad $\dfrac{BC^2}{OI^2} \sim \dfrac{CD}{ID}$. Sobre este punto volverá a insistir Fermat, como veremos, en posteriores memorias. En esta, sin embargo, el punto P sobre la parábola ni siquiera es señalado por Fermat en el dibujo original con el que ilustra este ejemplo.

En cualquier caso González Urbaneja sostiene su hipótesis sobre los fundamentos del método de Fermat, en su versión original, alegando que en la fecha en que este escribe la memoria *Methodus* no había desarrollado aún la geometría analítica y, por tanto, no era posible una interpretación de la recta tangente en términos de extremos de la variación de su coeficiente angular. Concretamente González Urbaneja [4, pág. 162] señala que

en el cálculo de una tangente Fermat busca y encuentra simplemente la longitud de la subtangente, pero todavía no llama especialmente la atención sobre el ángulo determinado por el eje y la tangente -lo que para nosotros es la pendiente de la recta tangente-. Fermat ni siquiera considera la tangente como límite geométrico de las secantes determinadas por el punto de tangencia y los puntos de la curva próximos a él.

En esta misma línea en [4, pág. 119 y siguientes] se afirma lo siguiente:

Hay que considerar que hasta los avances que su propia geometría analítica y su lectura de la Geometría de Descartes provocaron en su propio pensamiento sobre extremos y tangentes, las curvas se manejaban mediante proporciones. [. . .] La invención de la geometría analítica es posterior a la invención del método de tangentes de Fermat. Algunas interpretaciones del método de tangentes pasan por alto este detalle, que según veremos es crucial para entender la futura evolución del método.

Y más adelante se apostilla:

Sólo cuando a toda curva -de las que nosotros llamamos algebraicas- se le puede asignar una ecuación, que le corresponde unívocamente y que implícitamente contiene todas sus propiedades, tiene interés generalizar, en el más amplio sentido, todo método algebraico de tangentes. Por consiguiente, la discusión del método de tangentes de Fermat posterior a 1635-36 ofrecerá poca ayuda al historiador que busque los fundamentos de su método original.

No es de esta opinión, sin embargo, Boyer que en [1, pág. 439-440] afirma:

Es muy posible que Fermat estuviera ya en posesión de su geometría analítica en una fecha tan temprana como el año 1629, puesto que por esta época hizo dos importantes descubrimientos que están estrechamente relacionados con sus trabajos sobre lugares geométricos. El más importante de ellos lo expuso unos años más tarde en un tratado, que tampoco se publicó durante su vida, titulado Methodus ad disquirendam maximam et minimam.

Y más adelante señala:

Durante los mismos años en que Fermat se encontraba desarrollando su geometría analítica, descubrió también cómo aplicar su procedimiento de los valores próximos de la variable, para hallar la tangente a una curva algebraica de ecuación $y = f(x)$.

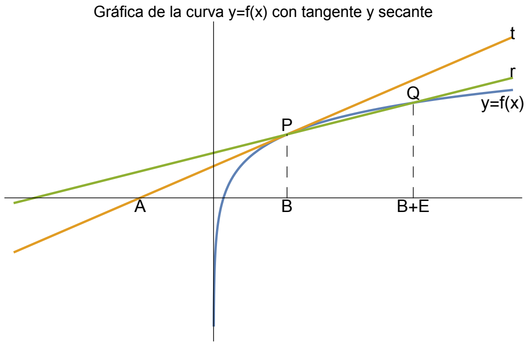
De forma más clara se pronuncian Rey Pastor y Babini en [8, pág. 76] al afirmar que

Fermat utiliza este método en la determinación de las tangentes a las curvas planas, concibiéndolas como las rectas que, entre todas las secantes que pasan por un punto fijo del eje, determinan el máximo o el mínimo coeficiente angular.

En este mismo sentido en [2, pág. 452] se recoge:

El [Fermat] indica, por cierto, que para encontrar una inflexión, nosotros debemos encontrar un máximo o un mínimo del ángulo que forma la tangente con una dirección dada, y esto quiere decir encontrar un máximo o un mínimo de su cotangente, y eso quiere decir maximizar o minimizar a/y, *donde a es la subtangente.*

De acuerdo con este punto de vista, podemos suponer que Fermat concebía la tangente a una curva plana como la recta que, entre todas las secantes que pasan por el punto de tangencia, determina el máximo o el mínimo coeficiente angular o, lo que es lo mismo, la mínima o máxima subtangente. El método de Fermat es entonces una aplicación de su método de máximos y mínimos y podemos explicarlo de la siguiente forma:



En el caso del dibujo podemos observar que la recta tangente t es, de todas las secantes r que pasan por $P(x_0, y_0)$ y por $Q(x_0 + E, f(x_0 + E))$, siendo E una cantidad pequeña mayor que cero, la que tiene mayor coeficiente angular y menor subtangente $s = AB$. Vamos a calcular la recta r secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos P y Q. Será:

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + E) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0 + E - x_0} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x(f(x_0 + E) - f(x_0)) - yE + f(x_0)E - x_0(f(x_0 + E) - f(x_0)) = 0$$

Esta recta tiene de pendiente

$$m_r = \frac{f(x_0 + E) - f(x_0)}{E}$$

y la recta tangente tiene de pendiente $m_t = \dfrac{f(x_0)}{s}$. Aplicamos ahora el método de máximos y mínimos adigualando la pendiente máxima que buscamos m_t con las pendientes de las rectas que pasan por los puntos de coordenadas (x_0, y_0) y $(x_0 + E, f(x_0 + E))$, es decir, adigualando m_t y m_r. Obtenemos entonces

$$\frac{f(x_0)}{s} \sim \frac{f(x_0 + E) - f(x_0)}{E}$$

Siempre que la expresión de la función f permita desarrollar la expresión $f(x_0 + E)$, eliminando la cantidad E que aparece en el denominador, haciendo luego $E = 0$ y transformando la adigualdad en una igualdad, de acuerdo con las reglas de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos, podemos hallar s, que es lo que buscaba Fermat, o la pendiente m_t como hacemos hoy en día.

Ejemplo 3.2. *La tangente a la parábola* $x^2 = 4py$ *en el punto de abscisa* $x = 3$ *es la recta* $6x - 4py - 9 = 0$.

En efecto, de acuerdo con el procedimiento será

$$\frac{f(3)}{s} \sim \frac{f(3 + E) - f(3)}{E}$$

y sustituyendo obtenemos

$$\frac{9}{4ps} \sim \frac{(3 + E)^2 - 9}{4pE}$$

Operando y simplificando queda

$$9E \sim E^2 s + 6Es$$

Dividiendo por E, haciendo $E = 0$ e igualando queda $9 = 6s$, es decir que la subtangente $s = 3/2$. Una vez obtenida la subtangente, que es lo que buscaba Fermat, la pendiente no es más que

$$m = \frac{f(3)}{s} = \frac{3}{2p}$$

y, por tanto, la ecuación de la tangente será

$$y - \frac{9}{4p} = \frac{3}{2p}(x-3) \Longleftrightarrow 6x - 4py - 9 = 0$$

que es el resultado buscado. □

Es de destacar el argumento infinitesimal utilizado por Fermat. En efecto, él obtiene la subtangente estudiando la modificación producida al perturbar infinitesimalmente la variable con la cantidad muy pequeña que representó con la letra E y luego haciendo $E = 0$, lo que podría interpretarse como una rudimentaria forma de paso al límite. Si, como en el caso de los extremos, interpretamos el método de Fermat en términos de límites y derivadas con la notación actual tendremos que la adigualdad

$$\frac{f(x_0)}{s} \sim \frac{f(x_0+E) - f(x_0)}{E}$$

la escribiríamos hoy en la forma

$$\frac{f(x_0)}{s} \sim \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

y, aplicando el método de máximos y mínimos, obtendríamos la igualdad

$$\frac{f(x_0)}{s} = \left[\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right]_{\Delta x = 0}$$

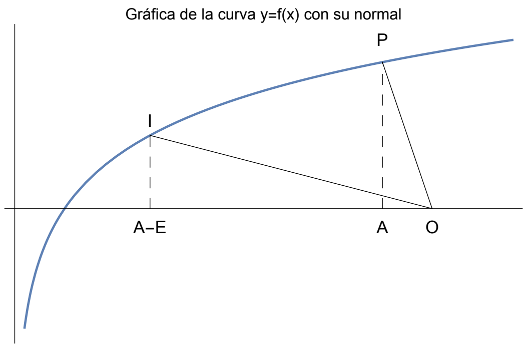
Teniendo en cuenta que $m_t = \dfrac{f(x_0)}{s}$ e interpretando el corchete en términos de límites seguiría la fórmula

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Como hemos señalado, el método de la tangente de Fermat se recogió por primera vez en su memoria *Methodus* como un corolario del procedimiento para la obtención de máximos y mínimos. No obstante, ya hemos indicado que de la explicación de Fermat no quedaba claro en absoluto cuál era el problema de extremos al que se estaba aplicando el procedimiento, lo que fue puesto de manifiesto por Descartes y provocó una agria polémica entre ambos. En realidad la polémica tuvo su origen en unas ligeras críticas que Fermat hizo a la Dióptrica de Descartes, obra que se publicó como apéndice al Discurso del Método. Descartes no tardó en contraatacar descalificando el método de tangentes de Fermat con estas injustas y poco corteses palabras:

> *Car premiérement la sienne (c'est-à-dire celle qu'il a eu envie de trouver) est telle que, sans industrie et par hasard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour le rencontrer.*

Como consecuencia de ello Fermat escribió numerosos documentos para justificar su método, entre los cuales uno de los más significativos es el llamado *Methode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat a M. Descartes*, de junio de 1638. En esta memoria Fermat contesta a algunas objeciones de Descartes e intenta justificar, aunque de forma no muy clara, que el método de tangentes efectivamente deriva del de máximos y mínimos. Descartes había interpretado esta insistencia en el sentido de que la tangente era encontrada por Fermat como la recta que, en algún sentido, da el máximo desde un punto del eje de abscisas a la curva. Sin embargo Fermat en esta obra saca a colación sorprendentemente la normal, posiblemente influido por los trabajos del propio Descartes que había establecido un procedimiento general para el cálculo de la normal a una curva algebraica. Fermat calcula ahora la normal caracterizándola como la recta que da la longitud mínima. En efecto, dado un punto P sobre la curva $y = f(x)$, si calculamos el punto O del eje de abscisas de forma que la distancia OP sea la más corta desde O hasta la curva, entonces la recta OP es la normal a la curva en P.



De acuerdo con el dibujo, si $P(A, f(A))$, $O(B, 0)$ e $I(A - E, f(A - E))$, entonces el problema se resuelve escribiendo la adigualdad

$$(B - A)^2 + f(A)^2 \sim (B - A + E)^2 + f(A - E)^2$$

y aplicando el método de máximos y mínimos para obtener el mínimo buscado. De manera que, sin que en el *Methodus* se hubiese dicho nada al respecto, Fermat se saca ahora de la chistera que el vínculo entre máximos, mínimos y tangentes se establece a través del mínimo que proporciona la normal y, para justificarlo, escribe:

> *Es así [mediante la normal] como aplicaba mi método para encontrar tangentes, pero reconozco que tenía su defecto, a causa de que la línea OI, o su cuadrado, son difíciles de calcular por esta vía.*

Como el método de la normal presentaba este problema, Fermat añade que

> *era necesario encontrar uno que resolviera estas dificultades*

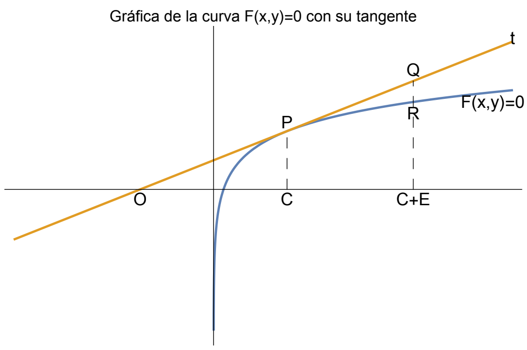
y así llegó a su método de tangentes. Además en esta obra calculó la tangente al "folium" de Descartes, un problema difícil que el propio Descartes no había podido resolver y que nosotros veremos enseguida. Fue a raíz de este trabajo que Descartes reconoció, bien que a regañadientes, la validez general del método de Fermat para las tangentes. Finalmente en su obra *Doctrinam tangentium* de 1640 Fermat no añade nada nuevo al algoritmo pero pone por escrito el procedimiento, en unas cortas pero significativas palabras, con una claridad incomparablemente superior a la de las dos memorias anteriores. Así escribe:

> *Nosotros consideramos de hecho en el plano de una curva cualquiera, las rectas dadas en su posición, de las que una se puede llamar diámetro y a la otra ordenada. Nosotros suponemos la tangente ya encontrada en un punto dado y consideramos mediante la adigualdad la propiedad específica de la curva, no sobre la curva misma, sino sobre la tangente a encontrar.*

Y más adelante continúa:

> *Eliminando siguiendo nuestra teoría de máximos y mínimos los términos que sean necesarios, llegamos a una igualdad que determina el punto de contacto de la tangente con el diámetro. Es decir, la tangente misma.*

Veamos como podemos aplicar este procedimiento a una curva $F(x,y)=0$ cualquiera.



De acuerdo con la gráfica, sea $P(x_0, y_0)$ el punto de tangencia, $C(x_0, 0)$, $A = OC$ la subtangente y E una cantidad positiva que podemos suponer tan pequeña como queramos. Denotemos por t la tangente a la curva en el punto considerado y sea B la ordenada sobre la tangente del punto de abscisa $x_0 + E$, esto es, la ordenada de Q. Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{y_0}{A} = \frac{B}{A+E} \Longleftrightarrow B = y_0\left(1 + \frac{E}{A}\right)$$

Dado que cuando E es pequeño la ordenada B correspondiente a la abscisa $x_0 + E$ sobre la tangente será próxima a la que corresponde a esa abscisa sobre la curva $F(x,y)=0$, esto es, la ordenada del punto R, la idea de Fermat es plantear la adigualdad

$$F(x_0+E, B) \sim 0 \Longleftrightarrow F\left(x_0+E, y_0\left(1+\frac{E}{A}\right)\right) \sim 0$$

y a ella aplicarle su método de máximos y mínimos ya que cuando E se hace pequeño el punto $\left(x_0+E, y_0\left(1+\frac{E}{A}\right)\right)$ se acerca a (x_0, y_0) y los valores $F\left(x_0, y_0\left(1+\frac{E}{A}\right)\right)$ se acercan a cero manteniendo, además, valores positivos o negativos según sea $F(x,y)$ mayor o menor que cero en el semiplano determinado por $F(x,y)=0$ donde está la tangente.

A propósito de la evolución operada en el método de Fermat a lo largo de los años y que puede sintetizarse en la forma de explicarlo en las tres memorias que hemos mencionado, González Urbaneja señala en [4, pág. 130] que

> *la adigualdad empezaba a tener una vida propia, al comenzar una lenta transición entre la adigualdad como disfraz para ocultar los verdaderos fundamentos de los métodos de máximos, mínimos y tangentes, y la adigualdad como pseudo-igualdad, cuasi-igualdad o aproximadamente igual en el camino hacia lo infinitesimal.*

Esta evolución comenzaría en el documento *Methode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes* y se haría meridiana en la obra *Doctrinam tangentium*. Esta memoria representa por su contenido la más sofisticada versión del método de las tangentes, obteniendo las tangentes a las curvas clásicas cisoide, concoide y cuadratriz, así como la tangente a la curva más famosa del momento, la cicloide, que Fermat llama la curva de Roberval pues había sido estudiada intensamente por este, donde se aprecia en todo su esplendor la potencia de su método (Ver [4, pág. 148-153]).

No obstante los éxitos de Fermat, el método en puridad tiene una aplicación limitada, ya que la expresión de la curva $F(x,y) = 0$ debe ser tal que permita el desarrollo de las operaciones que deben realizarse para implementar el método de máximos y mínimos, en particular la cancelación de la cantidad E. Esto en principio no era posible para las curvas llamadas mecánicas, aunque como hemos dicho Fermat fue capaz de obtener la tangente para algunas de ellas. Nosotros vamos a ver, para terminar esta sección, dos importantes ejemplos realizados por Fermat: la tangente al "folium" de Descartes y la tangente a la elipse.

Ejemplo 3.3. *La subtangente al "folium" de Descartes $x^3 + y^3 = nxy$ es $A = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$.*

En efecto, si (x,y) es un punto cualquiera de la curva para el que queremos calcular la subtangente, debemos escribir, de acuerdo con el método,

$$F\left(x+E, y\left(1+\frac{E}{A}\right)\right) \sim 0 \Longleftrightarrow (x+E)^3 + y^3\left(1+\frac{E}{A}\right)^3 \sim n(x+E)y\left(1+\frac{E}{A}\right)$$

Desarrollando queda:

$$x^3 + 3x^2E + 3xE^2 + E^3 + y^3\left(1 + \frac{3E}{A} + \frac{3E^2}{A^2} + \frac{E^3}{A^3}\right) \sim nxy + nxy\frac{E}{A} + nEy + \frac{nE^2y}{A}$$

Teniendo en cuenta que (x,y) es un punto de la curva y, por tanto, $x^3 + y^3 = nxy$ y agrupando términos obtengo:

$$E\left(3x^2 + \frac{3y^3}{A} - \frac{nxy}{A} - ny\right) + E^2\left(3x + \frac{3y^3}{A^2} - \frac{ny}{A}\right) + E^3\left(1 + \frac{y^3}{A^3}\right) \sim 0$$

Dividiendo por E, haciendo luego $E = 0$ e igualando a cero obtenemos:

$$3x^2 + \frac{3y^3}{A} - \frac{nxy}{A} - ny = 0$$

de donde sigue que $A = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$. □

Ejemplo 3.4. *La subtangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es $A = -\dfrac{a^2y^2}{b^2x}$.*

En efecto, si (x,y) es un punto cualquiera de la curva para el que queremos calcular la subtangente, debemos escribir, de acuerdo con el método,

$$F\left(x+E, y\left(1+\frac{E}{A}\right)\right) \sim 0 \Longleftrightarrow \frac{(x+E)^2}{a^2} + \frac{y^2\left(1+\frac{E}{A}\right)^2}{b^2} \sim 1$$

Desarrollando queda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{E^2}{a^2} + \frac{2xE}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2E^2}{A^2b^2} + \frac{2y^2E}{Ab^2} \sim 1$$

Teniendo en cuenta que (x, y) es un punto de la curva y, por tanto, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y agrupando términos obtengo:

$$E\left(\frac{2x}{a^2} + \frac{2y^2}{Ab^2}\right) + E^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{y^2}{b^2A^2}\right) \sim 0$$

Dividiendo por E, haciendo luego $E = 0$ e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y^2}{Ab^2} = 0$$

de donde sigue que $A = -\frac{a^2y^2}{b^2x}$. □

Para finalizar debemos mencionar que el método de tangentes de Fermat tuvo una enorme importancia para la invención del cálculo infinitesimal por parte de Newton. En una carta de este descubierta en 1934 escribe [3, pág. 107]:

> *La indicación [para la invención del cálculo] me vino del método de Fermat para las tangentes. Aplicándolo a las ecuaciones abstractas directa e inversamente, yo lo hice general.*

4. El método de Barrow para el cálculo de la tangente.

Isaac Barrow (1630-1677) fue el predecesor de Newton en la cátedra lucasiana de la Universidad de Cambridge y, como tal, fue maestro de Newton. Las frecuentes discusiones entre maestro y discípulo y la mutua colaboración entre ambos, que puede verse por ejemplo en el hecho de que Newton revisó y corrigió una de las ediciones de las *Lectiones Geometricae* de Barrow, fueron hechos que sin duda contribuyeron al posterior desarrollo por parte de Newton de las ideas que le llevaron a su método de fluxiones, lo que hoy llamamos el cálculo infinitesimal.

Barrow recibió las órdenes sagradas, pero dedicó gran parte de su vida a la enseñanza de las matemáticas, ocupando en 1662 una plaza de profesor de geometría en el Gresham College de Londres y, a partir de 1663, la mencionada cátedra lucasiana de la Universidad de Cambridge, siendo, de hecho, el primero en ocuparla. Desde el punto de vista matemático Barrow reivindicaba el regreso al rigor de la geometría clásica, considerando que el álgebra debería formar parte más de la lógica que de la propia matemática. Esta admiración por la matemática griega le empujó a realizar ediciones de las principales obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio y Teodosio, a las que acompañaba con numerosos comentarios.

Al mismo tiempo Barrow preparaba sus propias obras, las *Lectiones opticae* de 1669 y las *Lectiones geometricae* de 1670. En esta última ya colaboró, como hemos señalado, su joven alumno Isaac Newton. En estas obras Barrow ofreció una panorámica de la situación de los métodos infinitesimales en su época, obteniendo numerosos teoremas geométricos, en parte nuevos, que representaron en conjunto un gran avance para el cálculo. Allí encontramos problemas de cuadraturas, de tangentes o de rectificación de curvas, así como la primera demostración de lo que hoy llamamos el teorema fundamental del cálculo integral, es decir, el carácter inverso de los problemas de tangentes y cuadraturas.

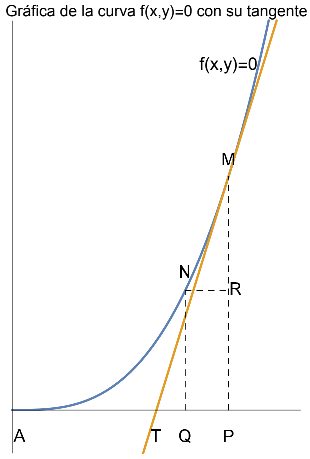
Debido a su reticencia al proceso de algebrización de la matemática que se estaba produciendo en su época, Barrow apenas utiliza en sus obras el simbolismo algebraico y aritmético tan característico de otros autores contemporáneos suyos. De esta forma renunció al gran avance que suponía la geometría analítica y se impuso un lenguaje geométrico oscuro y difícil que terminó por ocultar la importancia y el carácter novedoso de los resultados que obtuvo. Esto ha restado crédito a su reconocimiento, por parte de algunos historiadores de la matemática, como el principal precursor, junto con Fermat, del cálculo infinitesimal. Nosotros pensamos, sin embargo, que de todos los grandes matemáticos del siglo XVII anteriores a Newton y a Leibniz, Barrow fue posiblemente el que más cerca estuvo de alumbrar el cálculo infinitesimal y si no lo hizo fue precisamente por su desprecio del álgebra y, en particular, de la geometría analítica.

En esta sección vamos a desarrollar el método de Barrow para la determinación de tangentes, un algoritmo singular en su obra precisamente por su enfoque algebraico. El método de Barrow, que podemos llamar diferencial, utiliza el famoso triángulo que Leibniz llamó característico, ya utilizado antes por Torricelli y Pascal, entre otros, y que es la piedra angular del desarrollo del cálculo de Leibniz. El método de tangentes de Barrow se incluye como apéndice a la Lección X de sus *Lectiones Geometricae*, que encabeza, bastante modestamente, con las siguientes palabras:

> *Simplemente a esto añadiremos, en forma de apéndice, un método de cálculo para hallar tangentes utilizado frecuentemente por nosotros, aunque no sé muy bien si después de tantos métodos bien conocidos y muy trillados de los tipos anteriores, hay o no alguna ventaja en hacerlo. No obstante, lo hago siguiendo el consejo de un amigo [posiblemente Newton], y de buena gana, puesto que parece ser más útil y general que los que he expuesto.*

Y a continuación Barrow pasa a explicar su método de la siguiente forma:

> *Sean AP y PM dos líneas rectas dadas, PM cortando a la curva dada en M, y supongamos que MT corta a la curva en M y a la recta AP en T.*



"En orden a encontrar el segmento PT [es decir, la subtangente] consideremos un arco de la curva MN infinitamente pequeño. Tracemos NQ y NR paralelas, respectivamente, a MP y AP. Sean $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$ y $NR = e$ otros segmentos determinados por la naturaleza de la curva. Comparamos MR con NR por medio de una ecuación obtenida por el cálculo. A continuación observamos las siguientes reglas:

Regla 1. En el cálculo omitiremos todos los términos conteniendo potencias [superiores a uno] de a o e, o productos de ellos.

Regla 2. Después de formar la ecuación, desecharemos todos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen a o e (estos términos pasándolos a un lado de la ecuación serán siempre igual a cero).

Regla 3. Se sustituye m (o MP) por a y t (o PT) por E, de aquí se encontrará la cantidad PT".

Analicemos las reglas de Barrow. Si denotamos $AP = p$, entonces, las coordenadas de los puntos M y N serán, respectivamente, $M(p,m)$ y $N(p-e, m-a)$. Dado que ambos puntos están sobre la curva $f(x,y) = 0$ deberán verificar que

$$f(p,m) = f(p-e, m-a) = 0$$

A continuación vamos a aplicar las tres reglas:

Regla 1. De la ecuación $f(p-e, m-a) = 0$ vamos a eliminar todos los términos que contienen potencias superiores a uno de e o de a, así como los productos de ellos (incluidos los productos de e y a). El motivo para esta regla es que estos términos se consideran infinitesimales respecto de los restantes y, por tanto, pueden ser despreciados.

Regla 2. Se ignoran todos los términos que no contienen e o a, puesto que esos términos son los obtenidos de $f(p,m)$ que ya sabemos que es igual a cero.

Regla 3. Se sustituye m por a y t por e, de aquí se encontrará la cantidad PT. Se utiliza aquí que el triángulo MTP y el triángulo infinitesimal MNR son semejantes y, por tanto, $a/e = m/t$ de donde, teniendo en cuenta que m es un dato del problema, podemos hallar la subtangente t. Merece la pena mencionar que si N está en la curva, el triángulo MNR no es "exactamente" semejante a MTP y realmente estamos identificando el punto N con el punto sobre la tangente que corta al segmento NR y que está "muy próximo" a N. Esta idea, que es la esencia de su método, Barrow la expresa de la siguiente forma:

> *Si el arco MN es infinitamente pequeño, podemos sustituir con seguridad dicho arco por un pequeño trozo de la tangente.*

Vemos, por tanto, cómo Barrow está aplicando el triángulo característico bajo la idea de que la tangente es la posición límite de las secantes cuando a y e se aproximan a cero (o sea, cuando N se aproxima a M), aplicando el límite en el paso 1 cuando elimina los infinitésimos de orden superior.

Barrow aplicó su método de tangentes a un gran número de curvas. Nosotros veremos, para ilustrar el método, dos ejemplos: la kappa curva y el folium de Descartes.

Ejemplo 4.1. *La subtangente a la kappa curva* $x^2(x^2+y^2) = r^2y^2$ *es* $t = \dfrac{y^2(r^2-y^2)}{x(2x^2+y^2)}$.

En efecto:

Regla 1. Partimos de

$$(x-e)^2\left((x-e)^2+(y-a)^2\right) = r^2(y-a)^2$$

y desarrollando queda

$$(x^2+e^2-2xe)(x^2+e^2-2ex+y^2+a^2-2ya) = r^2y^2+r^2a^2-2r^2ay$$

Eliminamos los términos que contienen potencias superiores a uno de e y de a, así como productos de e y a o sus potencias. Queda entonces:

$$x^4-4x^3e+x^2y^2-2x^2ya-2xy^2e = r^2y^2-2r^2ay$$

Regla 2. Dado que $x^4+x^2y^2 = r^2y^2$ ignoramos estos términos y queda:

$$-4x^3e-2xy^2e = 2x^2ya-2r^2ay \Longleftrightarrow a(2x^2y-2r^2y) = e(-4x^3-2xy^2)$$

Así
$$\frac{a}{e} = \frac{4x^3 + 2xy^2}{2r^2y - 2x^2y} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(r^2 - x^2)}$$

Regla 3. Obtenemos finalmente que si llamamos m a la pendiente de la tangente se tiene que
$$m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(r^2 - x^2)}$$
de donde se obtiene que $t = \dfrac{y^2(r^2 - y^2)}{x(2x^2 + y^2)}$. □

Ejemplo 4.2. *La subtangente al "folium" de Descartes* $x^3 + y^3 = nxy$ *es* $t = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$.

En efecto, partimos de
$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = n(x - e)(y - a)$$

Desarrollando queda:
$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = nxy - nxa - ney + nea$$

Eliminamos los términos con potencias superiores a uno de e o de a, así como los productos de e y a o sus potencias. Queda:
$$x^3 - 3x^2e + y^3 - 3y^2a = nxy - nxa - ney$$

Teniendo en cuenta que $x^3 + y^3 = nxy$ sigue que
$$-3x^2e - 3y^2a = -nxa - ney \iff a(nx - 3y^2) = e(3x^2 - ny)$$
es decir,
$$\frac{a}{e} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}$$

Así finalmente obtenemos que
$$m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}$$
de donde $t = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$, que es la fórmula buscada y que lógicamente coincide con la que más de veinte años antes que Barrow había obtenido Fermat. □

Como vemos, el método de cálculo de tangentes de Barrow es ya, esencialmente, el que utilizamos en nuestro cálculo diferencial, donde las letras a y e han sido sustituidas por dy y dx o Δy e Δx, respectivamente. Pero la mecánica del algoritmo es muy parecida a la de Fermat en la forma que se recoge en su obra *Doctrinam tangentium* que comentamos en la sección anterior. Según todos los indicios, Barrow no conocía directamente la obra de Fermat, al que no cita en ningún momento, pero es razonable pensar que le llegaran noticias de su trabajo a través de otros matemáticos. En cualquier caso, el propio Newton que, como hemos dicho, trabajó muy estrechamente con Barrow, reconocía que el algoritmo de este no era más que el de Fermat ligeramente mejorado. Pero sin duda, formalmente, el procedimiento de Barrow es ya la antesala del cálculo diferencial, pues en él juega un papel esencial el triángulo característico, concebido como un triángulo de lados infinitesimales, que es la clave sobre la que Leibniz construyó poco después su teoría. Debemos señalar, asimismo, que tanto el método de Fermat como el de Barrow presentan serias dificultades conceptuales, problemas que fueron luego comunes a todo el cálculo infinitesimal y que precisaban para su formalización de la introducción del concepto de límite, que no se produjo hasta el siglo XIX. Afortunadamente estos problemas de rigor no detuvieron a los grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII que estaban seguros de la veracidad de sus resultados, aunque no pudieran dar demostraciones de los mismos impecablemente lógicas como se hacía en la matemática griega.

Para terminar debemos insistir en que tanto el método de Barrow como el de Fermat eran de aplicación limitada. Funcionaban bien en general, como hemos visto en los ejemplos que hemos presentado, para curvas algebraicas, pero mostraban serios inconvenientes para las trascendentes que, como hemos señalado, había que ir resolviendo con procedimientos específicos para cada caso. Esta falta de generalidad en el algoritmo fue superada por el cálculo infinitesimal, pero eso no es objeto de este artículo. No obstante, Barrow obtuvo la tangente de algunas curvas mecánicas. Como ejemplo, vamos a aplicar el método de Barrow a la curva $y = \tan(x)$.

Ejemplo 4.3. *La subtangente a la curva* $y = \tan(x)$ *es* $t = \dfrac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$.

En efecto, partimos de

$$y - a = \tan(x - e) \iff y - a = \frac{\tan(x) - \tan(e)}{1 + \tan(x)\tan(e)}$$

Desarrollando queda:

$$\begin{aligned} &(y-a)(1+\tan(x)\tan(e)) = \tan(x) - \tan(e) \iff \\ &\iff y + y\tan(x)\tan(e) - a - a\tan(e)\tan(x) = \tan(x) - \tan(e) \end{aligned}$$

Utilizamos ahora que para e pequeño es $\tan(e) \sim e$ y obtenemos que

$$y + ye\tan(x) - a - ae\tan(x) = \tan(x) - e$$

Eliminamos los términos que contienen a ae y ya que $y = \tan(x)$ queda:

$$ye\tan(x) - a = -e \iff a = e(1 + y\tan(x))$$

es decir,

$$\frac{a}{e} = 1 + y\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Así finalmente obtenemos que

$$m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e} = 1 + \tan^2(x)$$

de donde $t = \dfrac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$, que es la fórmula buscada. □

Obsérvese que si en lugar de t buscamos m, es decir, y', lo que obtenemos es la fórmula de la derivada de la tangente $y' = 1 + \tan^2(x)$. Por este motivo algunos autores consideran que Barrow debería ser acreditado como el primero que calculó las derivadas de las funciones trigonométricas, crédito que habitualmente se atribuye a James Bernouilli, que calculó las derivadas de las funciones $\tan(x)$ y $\sec(x)$, y a Roger Cotes que en su obra *Harmonia mensurarum* de 1722 calculó las derivadas de las seis funciones circulares.

Referencias

[1] BOYER, C. B., *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, 2007.

[2] COOLIDGE, J. L., *The story of tangents*, American Mathematical Monthly, LVIII, 449-462, 1951.

[3] DURÁN, A. J., *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, 1996.

[4] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*, Nivola libros y ediciones, 2008.

[5] GRATTAN-GUINNESS, I., *Del cálculo a la teoría de conjuntos (1630-1910)*, Alianza Editorial, 1984.

[6] MARQUÉS DE L'HOSPITAL *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, Colección: MATHEMA, Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1998.

[7] STROMHOLM, P., *Fermat's Methods of Maxima and Minima and of Tangents. A reconstruction*, Archive for History of Exacts Sciences, 5, 47-69, 1968.

[8] REY PASTOR, J., BABINI, J., *Historia de la Matemática, volumen 2*, GEDISA, S.A., 1985.

Sobre el autor:
Nombre: José María Ayerbe Toledano
Correo electrónico: jayerbe@us.es
Institución: Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, España.

Historias de Matemáticas

Matemáticas y Movimiento en el Siglo XIV

Mathematics and Motion in the XIVth Century

Juan Tarrés Freixenet

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 087–100, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Abr'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

En el siglo XIV hubo un gran interés por el estudio del movimiento, principalmente en Oxford y París. Analizamos los trabajos de Thomas Bradwardine en Oxford y Nicolás Oresme en París, quienes publicaron sendos libros esenciales acerca de estas cuestiones mediante el estudio de las razones. Además, Bradwardine formuló una *Ley del Movimiento* que tuvo un gran éxito y se utilizó como referencia, hasta el siglo XVI.

Palabras Clave: Thomas Bradwardine, Nicolás Oresme, Razones, Ley del Movimiento.

Abstract

In the XIVth century ther was a great interest about the study of the motion, mainly in Oxford and Paris. We analyze the works of Thomas Bradwardine in Oxford and Nicole Oresme in Paris, who published two essential books on these questions using the theory of ratios. Furthermore Bradwardine formulated a *Law of Motion* that had a great successand was used until the XVIth century

Keywords: Thomas Bradwardine, Nicole Oresme, Ratios Law of Motion.

1. Introducción

A principios del siglo XI Europa comienza a disfrutar de una época de relativa tranquilidad que también coincidió con un periodo de condiciones climáticas más benignas. Se pasa entonces por cambios sociales, políticos y económicos, que van a desembocar en el llamado Renacimiento del siglo XII. Los avances tecnológicos posibilitan el cultivo de nuevas tierras y el aumento de la diversidad de los productos agrícolas, que sostienen una población que pasa a crecer rápidamente. El comercio está en franca expansión, tiene lugar el desarrollo de rutas entre los diversos pueblos que reducen las distancias, facilitando no sólo el comercio de bienes físicos, sino también el cambio de ideas y corrientes entre los países. Las ciudades también van abandonando su dependencia agraria, creciendo en torno a los castillos y monasterios. En ese ambiente receptivo, comienzan a abrirse nuevas escuelas a lo largo de todo el continente, incluso en ciudades y villas menores.

En el campo intelectual, los cambios son también fruto del contacto con el mundo oriental y árabe a través de las Cruzadas y del movimiento de Reconquista de la Península Ibérica. Por aquel entonces, el mundo islámico se encontraba bastante avanzado en términos intelectuales y científicos. Los autores árabes habían mantenido durante mucho tiempo un contacto regular con las obras clásicas griegas (Aristóteles, por ejemplo), habiendo hecho un trabajo de traducción que sería muy valioso para los pueblos occidentales, ya que por este medio volvieron a entrar en contacto con sus raíces eruditas ya olvidadas. De hecho, ya sea en España (Toledo), ya sea en el sur de Italia, los traductores europeos van a producir una cantidad considerable de traducciones que permitieron avances importantes en conocimientos como la astronomía, la matemática, la biología y la medicina, y que serían el caldo de cultivo de la evolución intelectual europea de los siglos posteriores. Se tradujeron al latín las obras clásicas que habían sido traducidas al árabe y también obras originales griegas. Llegan a Europa las obras de Aristóteles; su filosofía será dominante en estos siglos.

Alrededor de 1150 se fundan las primeras universidades medievales – Bolonia (1088), París (1150) y Oxford (1167) — que en 1500 ya serían más de setenta. Ése fue efectivamente el punto de partida para el modelo actual de universidad. Algunas de esas instituciones recibían de la Iglesia o de Reyes el título de *Studium Generale*; y eran consideradas los lugares de enseñanza más prestigiosos de Europa, sus académicos eran animados a compartir documentos y dar cursos en otros institutos por todo el continente.

En el siglo XIII aparece un gran número de pensadores. Es el siglo culminante de la filosofía escolástica de la Edad Media. En él destacan figuras como Ramón Llull, Tomás de Aquino, Alberto Magno, etc. También en este siglo surgen dos figuras que van a cambiar el rumbo del pensamiento de la época: Robert Grosseteste (1176-1253) y su discípulo Roger Bacon (1214-1294). Son los precursores del *Método Científico*, pues utilizaban un procedimiento empírico-matemático para estudiar los fenómenos naturales. Aunque eran aristotélicos convencidos, con esta metodología comenzaron a apartarse de los postulados de Aristóteles.

A finales del siglo XIII y durante la primera mitad del XIV nos encontramos en el Merton College de Oxford un grupo de sabios que se conocían como los *Calculadores*. Se ocuparon del estudio de la Filosofía Natural, especialmente de los problemas relacionados con el movimiento de los cuerpos. Formaron parte de este grupo Thomas Bradwardine (1290-1349), William Heytesbury (1313-1372), Robert Swineshead (fl. 1340-1354) y John Dumbleton (1310-1349). Fruto de sus trabajos fue el llamado *Teorema del Merton College* sobre el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, que en lenguaje moderno expresa:

> *Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado recorre, en un determinado intervalo de tiempo, el mismo espacio que sería recorrido por un cuerpo que se desplazara con velocidad constante e igual a la velocidad media del primero.*

Este enunciado no pudo ser demostrado por los estudiosos de Oxford. Lo consiguió Nicolás de Oresme (1328-1383), de la Universidad de París, en su obra *Tractatus de Latitudine Formarum*. En esta obra, Oresme presenta una representación de las intensidades de las cualidades (figura 1). En particular, muestra un gráfico relativo a la velocidad del movimiento de un cuerpo en cada instante (*longitudino*) en el que representa el tiempo en una línea recta, dibujando en cada punto un segmento rectilíneo perpendicular a la línea que representa la velocidad del cuerpo en ese instante (*latitudino*):

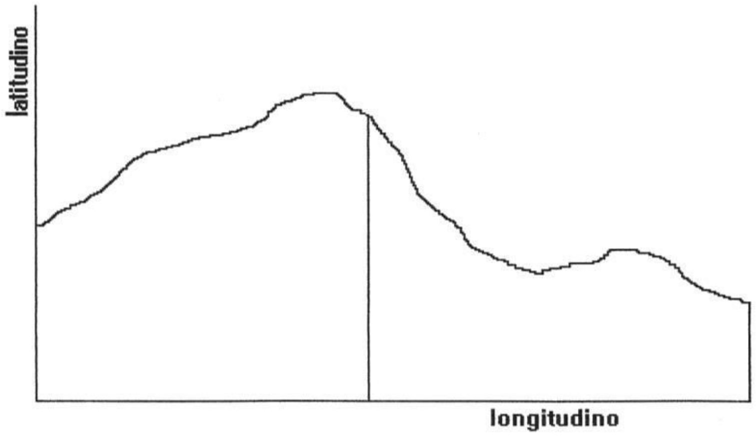


Figura 1: Representación de las intensidades de las cualidades

Esta representación puede considerarse como precursora de la Geometría Analítica de Descartes. Considera Oresme la línea continua que dibujan los extremos de las latitudes y afirma que tal línea es característica del movimiento estudiado. Por otra parte, se da cuenta de que el área limitada por la línea del tiempo y la que definen los extremos de las velocidades en un determinado intervalo de tiempo es una medida del espacio recorrido por el móvil en dicho intervalo de tiempo, avanzándose en más de dos siglos a la teoría de los indivisibles de Cavalieri y, por tanto, al cálculo integral (ver figura 2):

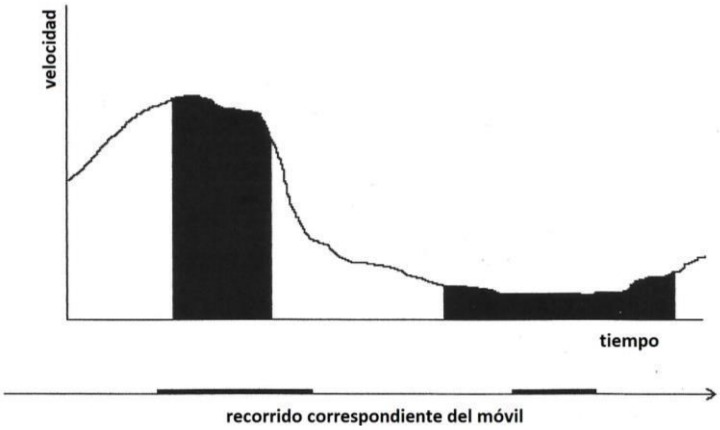


Figura 2: Representación de la velocidad en función del tiempo

Con estos presupuestos puede probar de una manera gráfica el teorema de los Calculadores de Oxford, pues un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado queda caracterizado por una línea recta inclinada, como el segmento CD de la figura y, en consecuencia, el espacio recorrido por el móvil se corresponde al área del trapecio ABCD. Dicha área es igual a la del rectángulo ABC'D', en el que el segmento C'D' representa la línea de la velocidad de un movimiento rectilíneo uniforme cuya velocidad es la representada por la latitud asociada a M, punto medio del intervalo AB (figura 3).

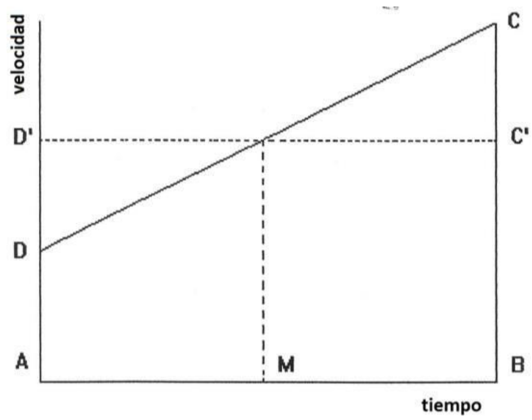


Figura 3: Prueba gráfica del teorema de los Calculadores de Oxford

Utilizando este método, Galileo consiguió establecer, dos siglos más tarde, que el espacio recorrido por un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en concreto, el movimiento de la caída libre de un cuerpo, es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. Para ello utilizó el esquema de la figura 4.

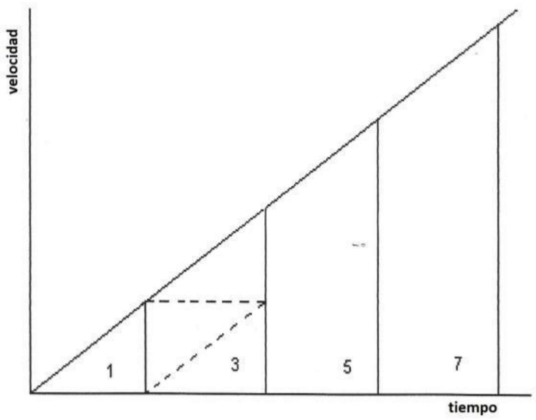


Figura 4: Prueba gráfica de un teorema de Galileo: $S = K[1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] = K \cdot t^2$

Hasta el siglo XIV se admitía la teoría aristotélica del movimiento, según la cual el movimiento de un cuerpo se producía solamente por la acción de un motor, cuya potencia daba lugar al movimiento, que sería frenado por la resistencia que pudiera afectar a dicho movimiento. Por otra parte, la teoría de Aristóteles postulaba:

Si un motor mueve un móvil con una cierta velocidad, un motor de potencia doble mueve un móvil que ofrece una resistencia doble con la misma velocidad.

Se deducía de esto que la velocidad es proporcional a la razón existente entre la potencia y la resistencia: $V = K \cdot \frac{P}{R}$

Inmediatamente aparecen paradojas fruto de esta definición. Por ejemplo, si un motor desplaza un móvil en una cierta distancia, el mismo motor desplaza un móvil de resistencia doble a una distancia dos veces menor. Así, un mismo motor puede mover un móvil de resistencia cuádruple, etc … hasta el infinito. En consecuencia, se puede mover cualquier móvil con independencia de la resistencia que éste ofrezca, tan grande como se quiera. Otra paradoja: un motor cuya potencia es dos veces menor puede desplazar un mismo móvil con una rapidez también dos veces menor; así, un hombre podría mover un barco que mueven veinte hombres, aunque sea con una lentitud mucho mayor, pero la experiencia demuestra que esto es imposible.

Uno de los problemas sobre el movimiento que había en tiempos de Aristóteles era el del movimiento de un proyectil. Sostenía el filósofo que una vez el motor dejaba de estar en contacto con el proyectil éste seguía moviéndose por el empuje del aire. Esto tenía muchos inconvenientes y era motivo de múltiples controversias, la más importante de las cuales era que impedía el movimiento en el vacío.

El primero en dar una respuesta a esta cuestión fue Juan Buridán (1300-1358), de la Universidad de París. Definió el concepto de *ímpetu*, que es un precedente de las nociones de fuerza e inercia:

> *... Después de dejar el brazo del lanzador, el proyectil sería movido por un ímpetu suministrado por el lanzador y continuaría moviéndose siempre y cuando ese ímpetu permaneciese más fuerte que la resistencia. Ese movimiento sería de duración infinita en caso de que no fuera disminuido y corrompido por una fuerza contraria resistente a él, o por algo que desvíe al objeto a un movimiento contrario.*

2. Dos libros fundamentales

En este contexto, aparecen dos libros fundamentales para el estudio de los fenómenos del movimiento, el *Tratado de razones entre las velocidades de los móviles,* de Thomas Bradwardine (fechado en 1328) y el libro titulado *Sobre las razones de razones* de Nicolás Oresme (escrito entre 1351 y 1360). Son dos textos fundamentales de la filosofía natural en el siglo XIV. Se refieren a la relación que existe entre la rapidez de un movimiento, la potencia del motor y la resistencia del móvil. Este problema tiene su origen en los pasajes de la *Física* de Aristóteles (en el libro IV, el libro VIII y en el capítulo V del libro VII) así como en el tratado *Sobre el Cielo,* del mismo autor.

La cuestión de dar una formulación satisfactoria de una regla del movimiento apareció pues de manera natural en los numerosos comentarios que suscitaba la lectura de los tratados aristotélicos, ya sea en el mundo árabe (por ejemplo, en los comentarios de Avempace o de Averroes) como en el mundo latino.

Dice Bradwardine en el prólogo de su libro:

> *Puesto que todo movimiento sucesivo* (continuo) *es proporcional a otro en rapidez, la filosofía natural, que se ocupa del movimiento, no debe despreciar el conocimiento de la razón entre los movimientos y sus velocidades.*

Para seguir:

> *Y como el conocimiento de esta razón es necesario y puesto que tal conocimiento es difícil de alcanzar y, por otra parte, nunca ha sido tratado de manera completa en ninguna de*

> *las ramas de la filosofía, hemos compuesto esta obra sobre las razones entre velocidades y movimientos.*

Y también:

> *Y como, según el testimonio de Boecio en el primer capítulo de su* Aritmética, *está claro que quien desconozca las ciencias matemáticas arruinará cualquier conocimiento filosófico, hemos comenzado por presentar los conceptos matemáticos que necesitamos para nuestros objetivos.*

Su *Tratado de las razones* está dividido en cuatro capítulos; el primero está dedicado al enunciado de las propiedades de las razones y las proporciones útiles para su estudio. En la segunda parte expone y discute cuatro tesis sostenidas por sus predecesores acerca de la interpretación que debe darse a la proporcionalidad existente entre la rapidez, la potencia y la resistencia. El tercer capítulo está consagrado a su *regla del movimiento*, que presenta como una quinta opinión, a la que se adhiere y contra la cual ofrece algunas objeciones que él mismo contesta. Finalmente, en el último capítulo se pregunta por la medida de la rapidez según el tipo de movimiento y termina su tratado con la cuestión de la proporcionalidad entre los cuatro elementos (tierra, agua, aire y fuego) y hace un recordatorio de las herramientas matemáticas que son de utilidad en una primera parte.

El libro de Thomas Bradwardine tuvo un éxito inmediato, tanto en Inglaterra como en el continente. Fue utilizado también como manual de enseñanza en varias universidades tanto en la Edad Media como más tarde en el Renacimiento como dan fe de ello las obras que recogen muchas cuestiones que se refieren a él (por ejemplo, las *Cuestiones sobre el tratado de las razones del maestro Thomas Bradwardine*, escritas a finales del siglo XIV por Blas de Parma) o también las obras que presentan su contenido de manera simplificada (tenemos un ejemplo de ello en el *Tratado de las razones* del maestro parisino del siglo XIV Alberto de Sajonia).

Nicolás Oresme fue un renombrado "maestro de artes" de la universidad de París a mitad del siglo XIV. No sabemos si llegó a enseñar la regla del movimiento con la ayuda del tratado de Thomas Bradwardine; no parece que este último esté necesariamente relacionado con la enseñanza de su tratado *Sobre las razones de razones*. La comprensión de este texto requiere un buen conocimiento de las nociones matemáticas en las que se basa la teoría de las razones y las proporciones y una excelente habilidad en la manipulación de estos objetos. El fuerte interés de Nicolás Oresme por las matemáticas no sólo aparece en este tratado sino también en otras obras suyas: sus *Cuestiones sobre la geometría de Euclides,* su tratado *Ad pauca rescipientes*, su *Tratado sobre la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de los movimientos celestes,* su famoso *Tratado sobre las cualidades y los movimientos*, su *Algoritmo de las razones*, y también sus *Cuestiones sobre la física.*

En el prólogo, Nicolás de Oresme afirma:

> *Todas las opiniones razonables sobre la velocidad de los movimientos dicen que esta última se deduce de una determinada razón entre la potencia motriz y la resistencia o potencia del móvil, cuestión que doy por cierta, tal como lo han mantenido Aristóteles y Averroes.*

Y justifica el título de su tratado diciendo:

> *Como la rapidez queda determinada por una razón, la razón de velocidades se va a poder formular como una razón de razones de la misma naturaleza. Así, es de utilidad decir*

> *unas palabras sobre esta última cuestión, que constituye una ayuda inestimable no sólo para los movimientos sino también para los misterios y las arduas tareas de la filosofía.*

El libro *Sobre las razones de razones* de Nicolás Oresme, tal como ha llegado hasta nosotros, está organizado en cuatro capítulos. Parece que el texto original contenía dos capítulos más, que se han perdido. En efecto, al final del prólogo, cuando Oresme presenta los diferentes capítulos, habla de un quinto capítulo dedicado a la rapidez de los movimientos y también de un sexto capítulo sobre la inconmensurabilidad de los movimientos celestes. Y en el cuarto capítulo Oresme hace referencia a las conclusiones sobre la inconmensurabilidad de los movimientos del cielo, cuestión que ya ha tratado en otra obra y expone su deseo de volver sobre ese tema en lo que denomina "el último capítulo", en el que también se corrigen resultados expuestos en una obra anterior: *Ad pauca rescipientes*. De los cuatro capítulos que nos han llegado, tres están dedicados a la teoría de razones y razones de razones. Oresme desarrolla y amplía una teoría esbozada por Bradwardine. En el cuarto capítulo, expone la regla del movimiento del maestro inglés y saca conclusiones acerca del movimiento de los planetas y su conjunción a partir de la misma con el objetivo de atacar las bases de la astrología, de la que era acérrimo enemigo.

3. La teoría de razones y proporciones de Thomas Bradwardine

En la época de Bradwardine existían varias fuentes disponibles para llevar a cabo el estudio de las razones y las proporciones: en primer lugar, los libros V y VII de los Elementos de Euclides, en la versión de Campano de Novara, escrita a mediados del siglo XIII; también, la Aritmética de Boecio, que dio a conocer al mundo latino en el siglo VI la teoría de razones y proporciones de Nicómaco de Gerasa. Bradwardine utiliza habitualmente la Arithmetica de Jordano Nemorario. Cita también un opúsculo del matemático de lengua árabe Ahmad ibnYusuf (fallecido hacia el 912/913 en Bagdad), traducido al latín en el siglo XII por Gerardo de Cremona.

Thomas Bradwardine recurre a Campano para dar la definición clásica de razón como relación entre cantidades del mismo género. Siguiendo a Campano, presenta la división de las razones en racionales e irracionales. Pero se aleja bastante de la línea de su predecesor al introducir el concepto de denominación para distinguir estos dos tipos de razones entre sí. Explica, en efecto, que las razones racionales se pueden denominar con un número, como la razón doble, entre 2 y 1, que queda denominada por 2, mientras que las irracionales solamente se pueden denominar mediante otra razón, como la que forman la diagonal y el lado de un mismo cuadrado, que se denomina "mitad de la razón doble". Bradwardine no es más explícito en esto. De momento nos quedamos aquí, pero veremos más tarde cómo Nicolás Oresme desarrolla su teoría de razones de razones que permite dar un sentido a estas expresiones.

Bradwardine prosigue dando las definiciones más clásicas de las razones racionales y las irracionales: racionales son las que tienen lugar entre cantidades conmensurables, es decir, las cantidades que se pueden medir con una misma cantidad (por ejemplo 2 y 3 se pueden medir con el 1, o $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$, que se pueden medir por $\sqrt{2}$); e irracionales son las razones entre cantidades inconmensurables, es decir las que no se pueden medir con una cantidad común como por ejemplo, 1 y $\sqrt{2}$. Observemos que Bradwardine se aleja de la terminología euclídea al calificar las cantidades conmensurables de racionales y las inconmensurables de irracionales. Efectúa entonces una identificación terminológica entre las cantidades y las razones, que solamente es posible si se elige una cantidad de referencia. Si $\sqrt{2}$ es inconmensurable con 1, $\sqrt{2}$ es conmensurable con $2\sqrt{2}$. Tiene que elegir una cantidad de referencia, como por ejemplo 1, para poder decir que $\sqrt{2}$ es irracional.

Bradwardine continúa su exposición tomando de Boecio la división de Nicómaco de las razones racionales en razones de igualdad (entre cantidades iguales) y desigualdad (entre cantidades desiguales); después, las razones de desigualdad, en razones de desigualdad mayor (entre A y B con $A > B$) y de desigualdad menor (entre A y B con $A < B$); y finalmente, las razones de desigualdad mayor en cinco especies:

Razones Múltiples: entre A y B con $A = nB$ con $n > 1$
Razones superpacientes: $A = B + \frac{1}{K}B$ con $k > 1$
Razones superparticulares: $A = B + \frac{p}{q}B$ con $p > 1$, $q > 1$, $p < q$
Razones múltiples superpacientes: $A = nB + \frac{1}{K}B$
Razones múltiples superparticulares: $A = nB + \frac{p}{q}B$

Da la misma clasificación en el caso de las razones de desigualdad menor.

La segunda parte del primer capítulo está dedicada a las proporciones, es decir, a sucesiones de cantidades que tienen igualdad de razones entre ellas, o de exceso. Así, las cantidades A, B, C y D, con $A > B$ y $C > D$ forman una proporción aritmética si los excesos de A sobre B y de C sobre D son iguales (A – B = C – D). La proporcionalidad es geométrica si las razones de A a B y de C a D son iguales ($A : B = C : D$). Finalmente, si se tienen tres cantidades A, B, C tales que $A > B > C$ y la razón entre los extremos A y C es la misma que la de los excesos de A sobre B y de B sobre C ($A : C = (A - B) : (B - C)$), se tiene una proporcionalidad armónica. La fuente de esta exposición es la *Institución Aritmética* de Boecio.

Prosigue Bradwardine distinguiendo para las proporciones aritméticas y geométricas las que llama continuas y las que denomina discontinuas. Para ello, cita a Ahmad ibnYusuf. La proporcionalidad de A, B, C, D es continua cuando $A - B = B - C = C - D$ o bien $(A : B) = (B : C) = (C : D)$. Es discontinua si $A - B = C - D$, pero $A - B \neq B - C$, o bien que $(A : B) = (C : D)$ pero $(A : B) \neq (B : C)$.

Ahmad había remarcado que, en el caso de una proporcionalidad continua todas las cantidades deben ser del mismo género mientras que en una proporcionalidad discontinua es suficiente que lo sean A y B por un lado (por ejemplo, líneas) y C y D por otro (por ejemplo, superficies).

Finalmente Bradwardine regresa a Euclides cuando presenta las distintas formas de manipulación de las proporciones geométricas

La **permutación**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(A : C) = (B : D)$.
La **inversión**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(B : A) = (D : C)$.
La **conjunción**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(A + B : B) = (C + D : D)$.
La **igualdad**: se tienen dos series de cantidades A, B, C y E, F, G tales que $(A : B) = (E : F)$ y $(B : C) = (F : G)$.

Añade una más, la **reinversión**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(A + B : A) = (C + D : C)$.

Tras la exposición de estas nociones Bradwardine pasa a estudiar algunas propiedades de las razones y las proporciones, útiles para su estudio del movimiento, en la tercera parte del primer capítulo. Para ello se apoya en un pequeño opúsculo atribuido erróneamente a Jordano Nemorario del que extrae una hipótesis según la cual si se tienen dos cantidades A y B entre las que se intercala una tercera cantidad C, entonces la razón de A a B está compuesta de la razón de A a C y la de C a B. Se puede generalizar este último resultado intercalando varios términos intermedios entre A y B. Veremos que esta propiedad juega un papel fundamental en toda la obra.

Bradwardine introduce también las nociones de "doble de una razón", "triple", "cuádruplo" etc. Explica, en efecto, que si se tienen tres cantidades proporcionales A, B, C con $A > B > C$, la razón de A a C es doble de la de A a B, y que si se tienen cuatro cantidades proporcionales A, B, C, D con $A > B > C > D$ la razón de A a D es triple de la de A a B. No hay que interpretar que el doble de la razón de A a B es dos veces la misma, sino esa razón compuesta consigo misma; análogamente, el triple de una razón es esta razón compuesta dos veces con ella misma, y así sucesivamente.

Es decir, cuando se dice que la razón óctuple es triple de la razón doble no debe interpretarse que es:

$$(8 : 1) = (2 : 1)^2$$

en el sentido moderno de las potencias de una fracción, sino que es:

$$8 : 1 = (8 : 4) \cdot (4 : 2) \cdot (2 : 1)$$

Los términos intercalados entre los dos que forman una razón no tienen que ser necesariamente números enteros:

Cuando se dice que la razón entre la diagonal de un cuadrado y el lado del mismo es la **mitad de la razón doble** no debe interpretarse como $(2 : 1)^{½}$ sino como (en lenguaje actual)

$$2 : 1 = \left(2 : \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} : 1\right)$$

Por supuesto, ni Bradwardine ni Oresme se refieren a la media geométrica entre 2 y 1 como $\sqrt{2}$ sino que consideran la proporcionalidad de segmentos, tal como se expresa en la figura 5.

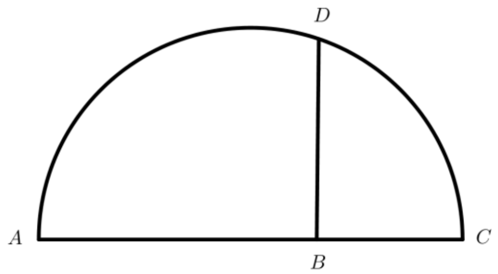


Figura 5: AB : BC =(AB : BD) · (BD : BC) con AB = 2BC

En lo que respecta a las razones de razones, Oresme pone como ejemplo la razón entre la razón óctuple (8 : 1) y la cuádruple (4 : 1): Como es $(8 : 1) = (2 : 1)^3$ y $(4 : 1) = (2 : 1)^2$, la razón óctuple es triple de la razón doble, mientras que la razón cuádruple es doble de la razón doble. Así, la razón entre las razones óctuple y cuádruple es la razón sesquilátera:

$$(8 : 1) : (4 : 1) = 3 : 2$$

Bradwardine ya había hablado de una manera implícita de esta cuestión al afirmar:

> *La razón entre los volúmenes de dos esferas cualesquiera tiene, respecto de la razón de sus superficies tomadas en el mismo orden, la razón sesquiláltera.*

Había probado con anterioridad que la razón entre los volúmenes de las dos esferas es triple de la que hay entre sus diámetros respectivos, mientras que la de sus áreas es doble de la razón de tales diámetros.

4. La Ley del Movimiento

Una vez planteadas las premisas matemáticas, podemos pasar al estudio de la rapidez de los movimientos. Este estudio se hace, como ya se ha dicho, en el marco de la filosofía natural. Thomas Bradwardine cita a Aristóteles, y más concretamente a su comentarista Averroes, al enunciar su ley. Espera, en efecto, que su formulación permita resolver las dificultades a las que no podían dar respuesta las diferentes interpretaciones que se hacían de las afirmaciones de Aristóteles y de los correspondientes comentarios de Averroes, que expresan que existe una relación entre la rapidez y la razón entre la potencia del motor y la resistencia del móvil.

Bradwardine lleva a cabo esta tarea mediante la exposición y la refutación de cuatro opiniones adversas, tras las cuales propone una quinta interpretación de los enunciados aristotélicos.

La **primera opinión** que analiza Bradwardine es la que Averroes atribuye a Avempace, que afirma que:

> *La rapidez es consecuencia del exceso de la potencia del motor respecto de la resistencia del objeto que se mueve*

Esta opinión interpreta que la razón de la que hablan tanto Aristóteles como Averroes es una razón aritmética, es decir la diferencia o exceso $P – R$.

Bradwardine rechaza de un solo golpe la **segunda opinión**, según la cual:

> *La velocidad es igual a la razón entre el exceso de potencia sobre la resistencia y la propia resistencia:*

$$V = ((P – R) : R)$$

Para él es inconcebible que la rapidez dependa del exceso de la potencia sobre la resistencia y no de toda la potencia.

La **tercera opinión** afirma:

> *La razón entre las velocidades viene de la razón entre los sujetos pacientes o de los móviles, si los agentes o los motores son idénticos* (hay que dar por cierto que la razón entre las velocidades es inversa a la de las resistencias) *y que proceden de la razón entre los agentes si los pacientes son iguales.*

Bradwardine rechaza también esta hipótesis reprochándole en primer lugar su insuficiencia: no permite tratar el caso general (agentes diferentes, lo mismo que los pacientes) como debería hacer cualquier ley del movimiento.

A continuación da un argumento que se utiliza a menudo contra la ley de Aristóteles, por la cual un motor puede mover un móvil de una resistencia tan grande como se quiera sin importar que el móvil se mueva a causa de una potencia tan pequeña como se desee.

La **cuarta opinión**,

> *… rechaza la idea de que pueda haber una razón o incluso un exceso entre la potencia motriz y la resistencia.*

En efecto, para quienes sostienen esta teoría, la potencia y la resistencia no son cantidades, e incluso, si lo fuesen, no serían del mismo género, por lo que no podría haber ni una razón ni un exceso entre ellas. Esta opinión se apoya en un comentario de Averroes según el cual la potencia no es una cantidad, finita o infinita, pues no es un cuerpo; la potencia se considera entonces como una forma incorporada a un cuerpo o separada de él.

Por su parte, Nicolás Oresme comienza su tratado con el enunciado de tres opiniones acerca de la velocidad de los movimientos:

La **primera** se corresponde con la primera opinión rebatida por Thomas Bradwardine que se expresa con la ayuda del exceso respecto de la resistencia.

La **segunda** corresponde a la tercera opinión que rechaza Bradwardine, que distingue los casos en que los motores son iguales o bien hay igualdad en los móviles.

La **tercera** opinión es la propia ley del movimiento enunciada por Bradwardine. Oresme afirma que la considera válida y ni siquiera se plantea rebatir las otras dos.

Thomas Bradwardine expone su ley del movimiento por primera vez justo al comienzo del tercer capítulo de su libro diciendo:

> *La razón entre las velocidades de los movimientos es consecuencia de la razón de la potencia del motor respecto de la resistencia del móvil.*

Tras varias consideraciones acaba afirmando:

> *Las razones de las potencias motrices a las potencias resistentes y la de las velocidades correspondientes a los movimientos respectivos son proporcionales en el mismo orden y viceversa. Y debemos entender aquí que se trata de una proporcionalidad geométrica.*

La formulación que da Nicolás Oresme de la misma regla al comienzo del capítulo IV de su libro es diferente, pero equivalente. En ella se encuentra también la referencia al enunciado de Aristóteles, pero la proporcionalidad está dada en términos de razones de razones (primera hipótesis del capítulo IV):

> *La velocidad es consecuencia de la potencia motriz al móvil o a su resistencia. De ahí que la razón de una velocidad a otra es como la razón de la razón de la potencia de uno de los motores a su móvil respecto de la potencia del otro motor al suyo*

Por lo tanto, cuando la razón de la potencia a la resistencia se dobla en el sentido que han dado a esta operación Bradwardine y Oresme, es decir, que la razón está compuesta consigo misma, la velocidad queda multiplicada por dos. Por ejemplo, si una potencia de 4 mueve un móvil de resistencia 1 con una velocidad igual a 3, una potencia de 16 mueve el mismo móvil con velocidad 6.

En términos actuales se podría expresar esta ley como: $V = K \cdot log\frac{P}{R}$

En el ámbito de su teoría, para dividir la velocidad por dos es necesario que la razón entre la potencia y la resistencia sea la raíz cuadrada de la razón inicial. Por ejemplo, si un motor de potencia 1 mueve un móvil de resistencia $R < 1$ a la velocidad V, el mismo motor mueve a velocidad $V/2$ un móvil de resistencia $\sqrt{R} < 1$ y el mismo motor mueve a velocidad $V/4$ un móvil de resistencia $\sqrt[4]{R} < 1$, y así sucesivamente. De esta manera, el mismo motor mueve móviles de resistencias cada vez mayores, pero que se mantienen siempre inferiores a la potencia del motor.

En la primera parte del **capítulo IV** propone una serie de conclusiones que explican cómo determinar uno de los términos que intervienen en la misma conocidos los restantes. Por ejemplo, en la **conclusión 6** propone:

> *Determinar, en los casos en que sea posible, la potencia y la resistencia (salvo un factor de proporcionalidad) conocida la velocidad*

En este caso, supone que la velocidad es conocida gracias a la denominación de la razón que la origina. Subraya entonces que existen razones irracionales cuya denominación es desconocida (las que son inconmensurables a cualquier razón racional). Ahora, no se puede determinar la potencia ni la resistencia, pero se puede saber si dicha razón es mayor o menor que cualquier razón racional dada.

Si la razón que da lugar a la velocidad es racional, es posible determinar la potencia y la resistencia a partir de la denominación: En efecto, como la denominación es de la forma $n + \frac{p}{q}$con $p < q$ y los términos que hacen la razón irreducible son $nq + p$ y q, tenemos que la potencia es $nq + p$ y la resistencia, q.

La influencia de los tratados de Thomas Bradwardine y Nicolás de Oresme, en especial el del primero, se expande desde el siglo XIV hasta el XVI. A partir de este momento, el estudio del movimiento va a tomar una nueva dirección gracias, entre otros, a los trabajos de Galileo.

Referencias

[1] ARTIGAS, MARIANO. *Nicolas Oresme Gran Maestre del Colegio de Navarra, y el origen de la ciencia moderna.* Príncipe de Viana (Suplemento de Ciencias), año IX, nª 9, Suplemento anual 1989, pp. 207-331.

[2] BRADWARDINE, THOMAS. *Traité des Rapports entre les rapiditésdans les mouvements .* (Introducción, traducción y comentarios de Sabine Rommevaux). Sagesses Médiévales, pags 1-74.Les BellesLettres, Paris 2010.

[3] COSTÉ. ALAIN. *L'Oeuvre scientifique de Nicolas d'Oresme.* Bulletin de la Société historique de Lisieux. **37** (1997).

[4] FERNÁNDEZ GONZÁLEZ, MANUEL Y RONDERO GUERRERO, CARLOS. *El inicio histórico de la ciencia del movimiento*: *Implicaciones epistemológicas y didácticas*. Relime **7** nº 2. (2004), 145-156

[5] HORTALÁ GONZÁLEZ, TERESA. *El Nacimiento de las Universidades.* En "Seminario de Historia de la Matemática. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid. 1991.

[6] ORESME, NICOLE. *Sur les Rapports de Rapports.* (Introducción, traducción y comentarios de Sabine Rommevaux). Sagesses Médiévales, pags 75-173.Les Belles Lettres, Paris 2010.

[7] PRIETO LÓPEZ, LEOPOLDO. *Buridan, El "Impetus" y la primera unificación de la Física Terrestre y Celeste.* Themata. Revista de Filosofía **41** (2009), 350-371.

[8] RAMÍREZ CRUZ, JORGE ALEJANDRO. *Reflexiones sobre las ideas de Nicolás de Oresme.* Asclepio. Revista sobre las ideas de la Medicina y de la Ciencia **49**, nº 1 (2007), 23-34.

[9] RIU, MANUEL Y SÁNCHEZ, MANUEL (Eds.). *La Edad Media Europea: Economía y Sociedad.* Historia Universal Salvat. . Barcelona. 1984

[10] VERDÚ BERGANZA, IGNACIO. *Aspectos generales del pensamiento en el siglo XIV.* Anales del Seminario de Historia de la Filosofía. Universidad Complutense de Madrid. **10** (1993), 195-208.

Sobre el autor:
Nombre: Juan Tarrés Freixenet
Correo Electrónico: jtarres@ucm.es
Institución: Universidad Complutense de Madrid, España

Juegos y Rarezas Matemáticas

La no numerabilidad es un juego de niños

Uncountability is child's play

Dionisio Pérez Esteban

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VII, Número 2, pp. 101–104, ISSN 2174-0410
Recepción: 20 Jun'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

Para establecer la no numerabilidad de la recta real no es preciso recurrir a sesudos argumentos adultos, tales como la estrategia diagonal de Cantor. Es tan sencillo como saltar a la comba, un juego de niños.

Palabras Clave: Recta real, no numerabilidad, teoría de juegos, sucesiones.

Abstract

As an alternative to the usual proofs, such as Cantor diagonal method, for proving the uncountability of the real line, we present here an approach involving two children playing a simple game.

Keywords: Real line, uncountability, game theory, sequences.

1. El juego

Se empieza eligiendo un subconjunto S del intervalo (0,1). Andrea y Blanca juegan una partida con las reglas siguientes:

En primer lugar juega Andrea, eligiendo un número entre 0 y 1, $0 < a_1 < 1$; a continuación, Blanca escoge otro número entre a_1 y 1, $a_1 < b_1 < 1$, y se van turnando, eligiendo alternativamente números comprendidos entre los últimos que se jugaran. Así, en la jugada n-sima, Andrea elige a_n entre a_{n-1} y b_{n-1} , $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$ y Blanca responde con un número situado entre a_n y b_{n-1}, $a_n < b_n < b_{n-1}$.

La observación clave del juego es la siguiente: como la sucesión (a_n) es estrictamente creciente y acotada, tiene un límite, l. También merece la pena advertir que $a_n < l < b_n$ para cualquier n.

Descrita la mecánica del juego, falta decir lo esencial: quién gana. Pues bien, si el límite de la sucesión (a_n), l, está en S, gana Andrea; en caso contrario, gana Blanca.

2. Estrategias

Como es natural, Andrea procurará escoger los números a_n de manera que se vayan acercando a algún número de S, y Blanca tratará de impedirlo escogiendo los b_n de tal forma que corten por su derecha trozos del intervalo (0,1) que eliminen cuanto sea posible del conjunto S. Cómo se desarrollan esas estrategias en conflicto dependerá de cuál sea S (y de la pericia de los jugadores, claro está).

Por ejemplo, si S fuera el intervalo comprendido entre $1/3$ y $2/3$, Andrea no debe elegir en primer lugar un número mayor que $2/3$, porque entonces ella misma impide que el límite l pertenezca a S, ni menor que $1/3$, pues en ese caso Blanca podría escoger $b_1 = 1/3$ y ya habría dejado todo S fuera del alcance de Andrea. En cambio, escogiendo a_1 entre $1/3$ y $2/3$, Andrea se asegura la victoria.

Eso en el caso de que S sea como se ha dicho, pero ¿qué sucede en otros supuestos?

La observación siguiente no puede sorprender: si S es pequeño, Blanca se puede garantizar la vistoria. Con más precisión:

Si S es numerable, Blanca tiene una estrategia que le garantiza la victoria.

Al ser numerable, sus elementos se pueden escribir en sucesión: $s_1, s_2, s_3, \cdots$. La estrategia de Blanca consistirá en asegurarse en cada jugada de ir descartando un término de S; así, elegirá $b_1 = s_1$, salvo que esa jugada sea ilegal, porque su rival haya escogido $a_1 \geq s_1$ (en cuyo caso, Blanca se puede permitir el lujo de elegir cualquier valor lícito para b_1), y en general la elección de b_n será $b_n = s_n$ si a_n es menor, y b_n cualquier valor legal (por ejemplo, el punto medio entre a_n y b_{n-1}) en caso contrario.

De ese modo, s_n nunca está situado estrictamente entre a_n y b_n. Y como hemos advertido que l siempre está comprendido entre esos valores, concluimos que l no coincide con ningún s_n, luego no está en S y Blanca gana.

Evidentemente, si S es finito, Blanca gana con más facilidad aún, pues le basta seguir la estrategia anterior hasta agotar los elementos de S.

3. Conclusión: $\mathbb{R}$ no es numerable

La conclusión es inevitable: si S es todo el intervalo (0,1), gana Andrea aun sin atender a estrategia alguna. Por tanto, el intervalo (0,1) no puede ser numerable, y lo mismo le sucede a la recta real $\mathbb{R}$.

Sobre el autor:
Nombre: Dionisio Pérez Esteban
Correo electrónico: dionisio.perez@upm.es
Institución: Departamento de Matemáticas e Informática. ETSI Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Cuentos Matemáticos

El legado absoluto

The absolute legacy

Laura Lozano Conde

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 105–108, ISSN 2174-0410
Recepción: 20 Jun'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

En esta sección retomamos la publicación de los cuentos presentados al Primer Concurso de Relatos Cortos Matemáticos "π-ensa" organizado durante el curso 2015-2016 por el Aula Taller de las Matemáticas "π-ensa". Toda la información puede consultarse en la web del Aula: http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas/. En este artículo se presenta el relato que recibió la mención de honor del jurado en la 2º categoría "estudiantes de ESO".

Palabras Clave: Cuentos con contenido matemático

Abstract

This issue continues with the publication of the awarded tales in the First Mathematical Short Tales Contest "π-ensa" organized by the Mathematics Museum Workshop Classroom "π-ensa" during the 2015-2016 course. This tale has been awarded an honourable mention in the secondary student category. All the information of the contest is available on the website of the Classroom: http://innovacioneducativa.upm.es/museomatematicas.

Keywords: Tales with mathematical content.

1. El legado absoluto

"Adolescentes. Hablan de las matemáticas como si se refirieran a algo insignificante. No saben que cuando se les enseña esta disciplina, aprenden a utilizar su cerebro para cosas más útiles, llenando su mente con infinitos conocimientos, aunque no sepan apreciarlos debido a la cantidad de hormonas que tienen en el cuerpo. ¿Y qué hay de Aristóteles, Newton o Pascal? Para ellos son simples autores de teoremas que consideran aburridos. Qué ignorantes…"

Y así, día tras día, mi madre repite el mismo discurso, quejándose de los pubescentes, y de su manera de ver el mundo. Entiendo su estrés y mal humor, ser reina de un lugar como este no es nada fácil. Aquellos que ven nuestro mundo desde fuera, lo describen como un objeto con teclas que realiza cálculos y le han asignado un nombre:

Calculadora. A nosotros, los habitantes de ésta, nos llaman números y somos muy distintos unos de otros. Por este motivo, nos organizamos en dos colonias, racionales e irracionales, separadas por un gran signo de división, que tenemos terminantemente prohibido cruzar, pues crearía un gran desorden en nuestro hábitat. La vida aquí dentro es muy curiosa. Vivimos en casas que fabricamos nosotros mismos con corchetes o paréntesis y generalmente construimos cubos, aunque hay quienes prefieren utilizar formas más complejas y elaboran pirámides o prismas de diferentes materiales, logrando resultados bastante originales. Aunque para inédita la famosa cadena de restaurantes "Cocinando el producto" cuyo salón nupcial está adornado con figuras geométricas en color blanco y una lámpara colosal con cinco estrellas de dieciséis puntas. Es tanto un espectáculo culinario como ornamental.

Tenemos unas grandes centrales con forma de cilindro en la zona periférica de cada colonia, donde tomamos las decisiones más importantes de cálculo. Se identifican fácilmente porque tienen nombres de matemáticos serigrafiados en su superficie y encada entrada, la foto de los diferentes reyes que dirigieron "La calculadora" años atrás. Como medio de transporte optamos por unas esferas ahuecadas, donde se han instalado asientos y comandos para dirigir la velocidad a la que quieras rodar. Dichas esferas se conectan con las múltiples ciudades por una extensa red de funciones y puedes viajar por las lineales y afines, que te llevan de forma más directa a tu destino, o puedes elegir parábolas, que dan más rodeo y se utilizan para fines turísticos. Pero nuestros visitantes no solamente disfrutan con nuestro peculiar transporte, también adoran las maravillas arquitectónicas y artísticas. Aquí han triunfado numerosos artistas y escultores retratando al ocho, al que admiran por la perfección de sus círculos, o al 1, del cual destacan su sencillez. Pese a esto, el número más popular fuera de "La calculadora" no es otro que el 0, que comenzó una gran polémica al aparecer dispuesto a renovar el mundo de las matemáticas, concediendo entrevistas exclusivas a la prensa rosa, llegando a ser de los más poderosos de aquí, pues tenía más dinero en x que nadie. Te preguntarás qué son las equis. Es nuestra moneda oficial y es muy peculiar. Para conseguirla, tuvimos que profundizar en la base de datos de "La Calculadora" y obtener toda la información que pudimos sobre el motivo por el cual existían letras del alfabeto en medio de aquella inmensidad de números y descubrimos que era la herramienta de pago perfecta. Podríamos igualarla a 10 y decidiendo el exponente, puede adoptar el valor que deseemos. Por tanto a la hora de mirar el precio en las tiendas y mercados, lo único que hay que hacer es calcular una potencia y ¡voila! tienes el precio final del producto. He de añadir que a pesar del prodigioso transporte, los exquisitos alimentos gourmet y el éxito de algunos números, hay que ganarse la vida y no todo es tan idóneo. Desde pequeños vamos a "La ecuación", una escuela donde nos enseñan a situarnos en las teclas de la calculadora y a ejecutar sumas y restas correctamente. Según avanza el nivel, conseguimos más rapidez en nuestras operaciones y las realizamos con más precisión: todo es cuestión de práctica. Pero sólo los mejores llegan a conseguir realizar raíces, logaritmos y bicuadradas. Incluso, ha habido en nuestra historia números tan inteligentes que han pasado a ser lunáticos, tan obsesionados por prolongarse infinitamente y ser eternos que se han agrupado formando números irracionales, como el famoso señor Pi. La reina decidió apartarlos de los racionales y no eliminarlos, han perdido la cabeza pero al fin y al cabo siguen siendo números y los necesitamos como a cualquier otro. Todos somos imprescindibles. Incluso los números que abandonan la escuela para ganarse la vida de otras formas, o bien encargándose del mantenimiento o accionando palancas en caso de problemas para que aparezca en la pantalla "sintax error". Yo respeto la elección de cada número, al menos ellos son libres de escoger su futuro, sin embargo el mío ya está escrito. Seré el próximo heredero de uno de los reinos de La calculadora. En unas semanas mi madre me cederá el poder de la colonia de los racionales y a mi hermano, le corresponderán los irracionales. Él lo tiene mucho más fácil, por supuesto, los irracionales son felices buscando números y no se meten en problemas ajenos a ellos, ya tienen suficiente con sus propias cifras. El reto está en mantener bajo control a los racionales, los rebeldes. La mayoría de ellos pronto pasará a formarse y no sólo hablo de instrucción matemática. Los números también tienen pubertad, y es peor que la de los humanos. Protestan por no tener libertad de cálculo y tener un valor asignado que no han escogido. Comienzan las grandes preguntas de su existencia y analizan la vida dentro de aquel objeto aparentemente inanimado en el que vivimos. Y lo peor de todo reside en la ciudad de números Enteros, que odian su signo y quieren cambiarlo. Si nacen positivos, no tienen problemas, son mejores vistos y acceden a altos puestos. El problema está en los negativos, que son considerados "inexistentes" y cobardes, porque en las riñas siempre se esconden entre paréntesis, al tener miedo de que las multiplicaciones y divisiones le arrebaten su signo. Llevamos casi un año con estos problemas en la ciudad "Enteros", mi querida madre está agobiada por los problemas y tiene miedo a dejar en mis manos el reinado. Se equivoca. No tiene motivos para desconfiar, estoy más que preparado para ser un buen líder, para aceptar el desafío. No puedo permitir más discusiones por el signo porque como continuemos así, esta disputa durará toda su vida y los números son infinitos, luego hablamos de un largo tiempo. Solucionaré de una vez los problemas del signo, demostraré que valgo para dirigir esta colonia. Y entre pensamientos de victoria y liderazgo, mis párpados se cierran lentamente, avisándome que llega el momento del descanso.

- Buenos días- una voz dulce y femenina se aproxima para sacarme del profundo sueño en el que estaba inmerso. Tras sus palabras, se dirige a la ventana y tira suavemente de la correa de la persiana, permitiendo que entren unos rayos de luz solar que me impidan dormir de nuevo. Inicio mi camino a la cocina y de pronto mi mente es bombardeada con el sinfín de pensamientos que tuve ayer. Mi propósito de ser un número de provecho vuelve a colocarse en primer plano y no estoy dispuesto a retirarlo de esta posición. Desayuno, me visto y visualizo mi camino a la sede de los racionales, decidido no a provocar un cambio, sino a ser el cambio. El camino hasta la central es ameno y disfruto de cada paso. Una vez en la entrada del gran cilindro, me detengo en las fotos de los anteriores reyes y reinas, imaginando mi rostro próximamente en uno de aquellos retratos. Entro en la sala de reuniones, llena de números aparentemente sabios e inteligentes. Al fondo, unas cámaras de vídeo dispuestas a retransmitir en todas las televisiones de la ciudad cada palabra de mi discurso. Me subo al atril y ajusto el micrófono a mi antojo. Toda la sala enmudece y me mira con atención. Esperan un sermón con ideas para finalizar los problemas de la colonia "racionales". Confían en mí y en mis hipotéticos proyectos, pero les decepciono con mi silencio absoluto. No consigo articular ni una palabra, no tengo ni la más mínima idea de qué hacer o cómo solucionar el problema. La tensión me obliga a abandonar la sede, a huir como un cobarde. Al salir, me golpea en la cara una bofetada de aire frío, haciéndome reflexionar sobre mis actos. Ya no hay vuelta atrás, toda la colonia ha sido testigo de mi fuga y nadie quiere ser regido por una persona sin planes de mejora. Necesitan a alguien que sepa controlar a los habitantes de la ciudad Enteros. Me dirijo de vuelta a casa, sumiéndome en la más profunda tristeza y pienso en lo desilusionada que se sentirá mi madre al ver que mi alegato ha sido nulo. Comienza a llover. Con cada gota que cae, una parte de mi orgullo cae con ella. Y como me suele pasar en estas situaciones, empiezo a identificarlas con elementos que me resultan parecidos. Son lágrimas que resbalan de las mejillas de quien llora, son … ¡signos de valor absoluto! Creía que no volvería a tener ni un momento más de lucidez, pero aquí estaba la prueba de mi error.

Pasar a todos los habitantes de Enteros por la calculadora y añadirles un signo de valor absoluto a cada uno anularía el signo. Adiós a las constantes disputas entre ellos, todos serían igual de nobles y podrían acceder a los puestos en igualdad de condiciones. Es la solución perfecta y la idea más perspicaz de todas. Estoy dispuesto a reorganizar una rueda de prensa para dar la noticia a los habitantes de que su futuro rey conseguirá vencer.

Hoy es el día definitivo. Acabo de salir de la sede y he dado un buen discurso, convincente y con argumentos. Ambas colonias, racionales e irracionales, esperan mucho de mí y creen en mi propuesta para solventar las dificultades de "Enteros". Es el momento de pasar a los números por la calculadora y ejecutar el plan. A la perfección es el modo en el que se desarrolla la operación y pronto se ven los resultados. Al añadirles el valor absoluto, se elimina por completo cualquier rastro de positivos y negativos, quedan números equilibrados. Ocurren cosas inéditas: antiguos negativos aparecen de la mano con antiguos positivos ¡qué milagro! El resto de los espectadores me mira con asombro y surgen elogios y halagos hacia mí. Mi madre se acerca, me planta un beso encada mejilla y murmura: "Mira qué lejos has llegado a tu corta edad. La lucha hasta encontrar la solución, el valor absoluto, servirá de ejemplo a las futuras generaciones y será tu legado. Heredarán la constancia que tuviste y las razones que te impulsaron hasta dar con la respuesta. Creo en ti y en tu capacidad de cambiarlo todo." En ese momento esa frase se hizo permanente en mi memoria. No pude decirle que fue ella el motivo de mi constancia, fueron los valores que me inculcó los que me harían un gran rey, porque estaba conmocionado por sus palabras. O tal vez no quise decírselo, porque sospechaba que ella lo supo desde el principio.

Sobre la autora:
Nombre: Laura Lozano Conde
Correo Electrónico: lauralozano.scf@gmail.com
Institución: Colegio Sagrado Corazón de Fuencarral. (Madrid, España)

Críticas y Reseñas

Informe sobre la película “Figuras ocultas”

A report of the film “Hidden figures”

Belén García Jiménez

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp.109–112, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Jun’17; Aceptación: 2 Sep’17

1 de octubre de 2017

Resumen

Este artículo presenta una reseña de la película “Figuras Ocultas” dirigida por Theodore Melfi, año 2016. En ella se narra la vida real de tres mujeres afroamericanas que fueron clave para que el proyecto, protagonizado por el astronauta John Glenn, de realizar la primera órbita completa alrededor de la Tierra, se llevara a cabo con éxito.

Palabras Clave: Películas con contenido matemático.

Abstract

This paper presents a report about the movie “Hidden figures”, directed by Theodore Melfi on 2016. The film relates the true story of three Afro-American women that worked in a project whose aim was to perform the first complete spatial orbit around the Earth planet. The leader of the project was an astronaut named John Glenn but the calculations of the women were the key of the success of the mission.

Keywords: Movies with mathematics.

1. Ficha técnica

Título: Figuras ocultas

Director: Theodore Melfi

Reparto: Taraji P. Henson, Octavia Spencer, Janelle Monáe, Kevin Costner, Kirsten Dunst, Jim Parsons, Aldis Hodge y Mahershala Ali.

Género: Drama, Biografía.

País: Estados Unidos.

Año: 2016

2. Resumen

La historia se desarrolla en Estados Unidos a principios de los años 60 durante la guerra fría y en plena carrera espacial de la NASA que en su intento de superar a los rusos busca mentes privilegiadas para trabajar como auténticos ordenadores humanos.

Esta película, basada en el libro de Margot Lee Shetterly, cuenta la historia real de tres mujeres afroamericanas. Katherine Johnson, DorothyVaughan y Mary Jackson, víctimas de la segregación racial,sirviéndose tan solo de sus lápices y unas sencillas máquinas de calcular, aportaron los cálculos necesarios para que el astronauta John Glenn realizara con éxito la primera órbita completa alrededor de la Tierra.

Pero lo realmente sorprendente es que el nombre de estas tres mujeres ha permanecido oculto para la Historia cuando en realidad su trabajo resultó indispensable en los avances que permitieron al hombre pisar la Luna.

3. Sobre el director

Theodore Melfi es guionista, director y productor de cine estadounidense.

Su primera película, *St. Vincent (2014)* estuvo protagonizada por Bill Murray y cuenta la historia de un niño de madre separada, víctima de acoso en la escuela, que encuentra un amigo en alguien mucho mayor que él. En este caso en lugar de hablar de la diferencia racial, se habla de la generacional.

Ahora su última película, *Figuras ocultas*, contó con una nominación en la 89ª edición de los Oscar como mejor película, sin llegar a obtener el premio, en una gala que pasará a la historia por la bochornosa confusión de sobres en la entrega de la estatuilla a la mejor película.

4. Crítica y opinión

Siempre he sentido admiración por las mentes prodigiosas que son capaces de dar sentido a nuestra existencia. Mentes que crean, construyen, sanan, sienten y que, en definitiva, hacen que el género humano no sea tan predecible y lo elevan a una categoría superior.

Si no fuera por las mentes prodigiosas, no hubiéramos podido evolucionar hasta el punto que lo hemos hecho, y el saber es lo que nos hace grandes.

Quiero recomendar esta película porque, entre otras cosas, trata precisamente de eso: de tres mentes prodigiosas que tienen género, porque son mentes de mujer, y tienen color, porque son afroamericanas, pero que permanecieron en el anonimato al que muchas veces la propia ciencia relega a las mujeres.

A lo largo de la Historia, han existido mujeres dedicadas al conocimiento, la investigación, el pensamiento… Pero, ¿por qué no somos capaces, la inmensa mayoría de nosotros, de enumerar con fluidez el nombre de al menos diez de esas pensadoras, científicas, investigadoras?

Quizá sea por lo de siempre. La ciencia ha sido desgraciadamente una parcela reservada al hombre y donde la mujer siempre ha estado intentando hacerse un hueco.

Las *Figuras ocultas* a las que hace referencia la película, jugaron un papel crucial en la carrera espacial de Estados Unidos, gracias a sus brillantes capacidades en el campo de la Geometría Analítica y la Aeronáutica. Para ello tuvieron que luchar y reivindicarse en una sociedad machista y racista, en una época – los principios de los 60 – en la que la segregación racial en América era algo natural y asumido.

La película se deja ver con amabilidad por parte del espectador. No deja sitio para la sorpresa pero sí para la reflexión.

El reparto es brillante. Las tres actrices protagonistas logran dar a sus personajes fortaleza, seguridad, pero al mismo tiempo, les dotan también de sensibilidad y cercanía. Porque son mujeres de carne y hueso.

Por su parte, Kevin Costner, el protagonista principal masculino, hace un papel relevante. Profesional inflexible y exigente, demuestra ser una persona justa y ecuánime que deja a un lado los prejuicios sexistas y racistas para convertirse en el auténtico valedor de sus empleadas.

Su contrapunto – en toda historia debe haber un villano – Jim Parsons, conocido por su singular Sheldon Cooper en la serie *Bing Band*, es el prototipo de hombre al que le cuesta reconocer que una mujer pueda llegar a ser tan inteligente o más que él, y personifica la envidia profesional y la preponderancia masculina en el mundo científico.

En definitiva, película reivindicativa que cumple con creces la labor de dar visibilidad a estas tres heroínas, y muy apta también para ver en familia, porque puede enseñar a las nuevas generaciones que todo en la vida es posible con talento, trabajo y tesón.

Sobre la autora:
Nombre: Belén García Jiménez
Correo Electrónico: belen.garcia@uah.es
Institución: Universidad de Alcalá, España.

Entrevista

Francesco Mugelli y las Olimpiadas Matemáticas

Francesco Mugelli and Math Olympiads

Rosa María Herrera

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 113–124, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Abr'16; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2016

Resumen

Francesco Mugelli, matemático de la Universidad de Florencia, adiestra a jóvenes y a sus maestros en los problemas de matemáticas. Su afición a los problemas y retos de la matemática elemental proviene de la infancia y hay que buscarlo en los libros que se guardaban en el sótano de su casa. Aquí nos mostrará algunos divertidos secretos de su trabajo en el mundo juvenil de las Olimpiadas Matemáticas y su funcionamiento en Italia.

Palabras Clave: Olimpiadas Matemáticas, trabajo en equipo, retos matemáticos.

Abstract

Francesco Mugelli is a mathematician at the University of Florence, expert in the Mathematical Olympiads. His interest in problems and challenges of elementary Mathematics is coming from childhood and must be sought in the books that were kept in the cellar of his house. Here he will show us some fun secrets of his work in the youth world of the Mathematical Olympiads, and their functioning in Italy.

Keywords: Mathematical Olympiads, Teamwork, Mathematical Challenges.

Introducción

Francesco Mugelli nació en Florencia hace ya 50 años, es seguidor (*tifoso*) de la Fiorentina, el equipo de su ciudad natal, como yo soy seguidora del Real Madrid, encuentro aquí otra afición compartida, el fútbol, además de nuestro gusto por las matemáticas.

Desarrolla su actividad como investigador en Análisis Matemático en el departamento de Matemáticas de la Universidad de Florencia. Vive a las afueras de Florencia con su novia, Laura, que lo "soporta" desde hace años.

Su afición por las matemáticas desde la infancia se debe quizá al descubrimiento en el sótano de su casa de algunos viejos libros de matemáticas. Objetos preciosísimos en años en los cuales las únicas fuentes de información eran librerías o bibliotecas públicas. Enseguida la matemática se transformó en una diversión y los problemas en desafíos a "última sangre".

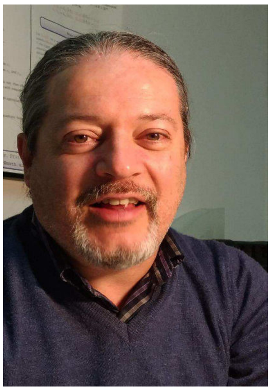


Figura 1. Francesco Mugelli.

De estudiante participó en las primeras ediciones de los concursos organizados por el departamento de Matemáticas de la Universidad de Florencia, de los cuales desde hace casi 20 años es uno de los organizadores.

Ya hace algunos años se ocupa junto con algunos colegas de los encuentros de preparación del concurso de matemáticas para estudiantes de la escuela superior.

Desde 2006 es miembro de la Comisión de las Olimpiadas de la Unión Matemática Italiana que organiza la fase nacional de las Olimpiadas de Matemáticas en Italia y varias actividades de formación para estudiantes o docentes entre las cuales se hallan los Encuentros Olímpicos, de los cuales Francesco es el creador y director.

1. Una charla sobre Olimpiadas Matemáticas

- Francesco, me gustaría que contaras a los lectores interesados qué sentimiento, interés, pasión … despiertan las Olimpiadas Matemáticas en Italia.

Las Olimpiadas Matemáticas en Italia son un movimiento muy amplio que implica a muchísimas personas: cada año participan en los "Juegos de Arquímedes", la fase de instituto, aproximadamente 220.000 estudiantes pertenecientes a casi 1.500 escuelas. De estos, cerca de 10.000 accederán a la fase siguiente. Al contrario que en España donde, si no me equivoco, las primeras fases son regionales, en Italia también la fase de instituto se coordina a nivel nacional, por tanto en todas las regiones de Italia se proponen los mismos ejercicios. Además de los chicos, se implican al menos 1 o 2 maestros de cada escuela, como coordinadores locales a los que hay que añadir, en la primera fase, los profesores que realizan tareas de supervisión durante la realización de la prueba.

Ten presente que todos los maestros que colaboran en las diversas fases de las Olimpiadas Matemáticas lo hacen de forma gratuita y voluntaria. Todo lo que hacen, lo hacen sobre todo porque tienen una gran pasión por los juegos matemáticos y por las Olimpiadas. Sin embargo, hay casos, pocos por fortuna, en los cuales esta pasión se tropieza con la rutina escolar no siempre gratificante y con colegas poco colaborativos.

Desde el punto de vista de la selección de los mejores, la fase local después de todo no sirve de mucho. Si preguntásemos a cada escuela que indicase libremente 2, 3 o 5 estudiantes merecedores de participar en las selecciones siguientes, probablemente obtendríamos el mismo resultado con un esfuerzo mucho menor. El valor añadido de la fase de instituto es la divulgación, la difusión de la cultura matemática, hacer ver a los chicos que las matemáticas no están solo hechas de los cálculos y del álgebra que aprenden en la escuela. Llevar a cabo una operación de este tipo no es simple, especialmente por lo que se refiere a la redacción del texto que si, por una parte, tiene que posibilitar que todos puedan divertirse consiguiendo resolver algún problema, por otra, debe salvaguardar el aspecto selectivo produciendo una clasificación que no baje el techo de exigencia, de tal manera que nos arriesguemos a que haya demasiadas personas con la puntuación máxima, o al menos altísima, y con este baremo no seamos capaces de seleccionar a los mejores. El problema contrario sucedería si se planteasen unos ejercicios demasiado difíciles, y este punto de inicio (el suelo del que se parte) haría que muchos tuvieran una puntuación muy baja y acabaran muy frustrados y descontentos de la experiencia realizada. Procuramos evitar ambos extremos, sobre todo el segundo para no correr el riesgo de hacer que las matemáticas resulten antipáticas toda la vida.

Entre los factores a tener en cuenta no están solo la edad de los muchachos: el nivel medio de la preparación de los chicos en Italia después de todo no es geográficamente homogéneo, por ello los problemas considerados factibles en algunas zonas pueden resultar difíciles para los chavales de otras.

Cada año la Comisión de las Olimpiadas Matemáticas prepara por tanto dos textos distintos para la primera fase: uno para el tramo de edad que comprende 14-15 años, y otro para tres años de los 16 a los 18 años de edad. Para simplificar la corrección y la asignación de la puntación, los textos se componen respectivamente de 16 y de 20 ejercicios de respuesta múltiple. Se proponen 5 respuestas y los muchachos deben señalar la que es correcta.

Los mejores de cada grupo de edad pasan a la siguiente etapa, en la que sin embargo el texto es el mismo para todos, independientemente de la edad.

Hace algunos años nos dimos cuenta de que los chicos del primer año estaban en desventaja con respecto a los del segundo año del bienio. La competición del instituto de hecho se lleva a cabo en noviembre cuando la preparación de los chicos de primero es sustancialmente todavía la de la escuela media (equivalente a la escuela secundaria en España). Hemos pensado introducir una nueva competición no de instituto sino provincial, reservada para los chavales del primer curso y la iniciativa está teniendo un buen resultado.

En el pasado nos llegó también alguna crítica sobre el nivel de dificultad del texto, creo sin embargo que se ha encontrado el equilibrio justo: una cuarta parte de las preguntas son de nivel curricular, una meta accesible sin embargo no estrictamente estándar y otro cuarto es más selectivo. Esta fórmula parece funcionar bastante bien.

Me preguntabas acerca de los sentimientos suscitados por las Olimpiadas Matemáticas: debo decir que son variados, desde luego es normal que sea así cuando la base de participantes es bastante amplia. Algunas escuelas permiten participar solo a los muchachos que se declaran interesados o realizan una preselección internamente. Muchas otras, por el contrario, hacen participar en los Juegos de Arquímedes a la población escolar al completo. Estamos muy contentos de que esto suceda, pero es normal que entre los participantes haya alguno que lo hace contra su voluntad o a quien no interesa. Por otra parte se ofrece a todos una ocasión de tener una experiencia, después depende de ellos disfrutarla de la mejor manera posible y obtener provecho.

Pero no hablamos solamente de los chicos: sin los docentes, el movimiento olímpico no podría existir, al menos con las dimensiones que tiene en Italia.

Además de los responsables de instituto de los cuales te hablaba antes, hay casi 200 docentes que coordinan su distrito olímpico, que más o menos corresponde a la misma provincia a la cual pertenecen (en Italia hay aproximadamente 100 provincias, mucho más pequeñas que las españolas) y no te sabría decir cuántos docentes hay que, por propia pasión y la de los estudiantes, organizan jornadas de entrenamiento para sus estudiantes. Se trata de iniciativas nacidas espontáneamente, gracias a la pasión de los maestros y de los muchachos.

A esto han contribuido mucho, según creo, las competiciones de matemáticas en equipo. En estos equipos no concurre el individuo aislado por sí mismo, sino que se selecciona un grupo de 7 estudiantes que compiten representando a la propia escuela. Las competiciones consisten en la solución de un cierto número de problemas cuya respuesta es siempre un número entero de cuatro cifras (por tanto no hay elección múltiple) y en la cual se admite, de hecho se prefiere, el trabajo del grupo. Las competiciones duran normalmente de 90 a 120 minutos, un estudiante por equipo desempeña la tarea de "consignar" y es él mismo quien escribe la respuesta en una tarjeta y la consigna en la mesa del jurado que incluye el dato en un ordenador que actualiza la clasificación y la proyecta en tiempo real.

Las competiciones en equipo son ajetreadas y espectaculares y han originado nuevos estímulos tanto en los estudiantes como en los docentes creando espíritu de grupo, competitividad y también alguna rivalidad con las escuelas vecinas.

Las escuelas que participan de modo estable en las competiciones en equipo ya tienen todas un entrenador/preparador que las sigue durante el curso. Muy a menudo se presentan a la competición vestidos con una camiseta del equipo y, por qué no, también acompañados por un séquito de aficionados.

Figura 2. Olimpiadas Matemáticas Italianas. Dos instantáneas de la final por equipos.

- Tras esta interesante y completa descripción de las Olimpiadas, los docentes de matemáticas que nos leen pueden corroborar que se trata de una experiencia divertida y positiva, este hecho me invita al siguiente cuestionamiento, ¿será cierto el terror (miedo) de los estudiantes de la escuela secundaria a las Matemáticas, como parecen señalar todos los expertos en psicología educativa?, ¿tú qué opinas al respecto?

No creo que las Olimpiadas Matemáticas aterroricen a los estudiantes. Como te decía hay estudiantes que se desinteresan o que se implican de mala gana, pero terror me parece una palabra exagerada. Puede ocurrir que haya estudiantes decepcionados, o en algunos casos un poco mortificados que se presentan con ciertas expectativas que no se cumplen, quizá porque el texto no era adecuado o realmente no estaba a su alcance, pero se trata de una minoría. Esto le sucedía un poco, como te decía antes, a los estudiantes del primer año que competían todos juntos con los de segundo. El problema se atenuó bastante cuando introdujimos la competición para los estudiantes de primero.

Quizá te estás preguntando qué le sucede a los chicos del tercer curso que compiten junto a los del cuarto o del quinto curso. Pues bueno, no ocurre nada, ¡va bien así! Uno de los motivos es que las matemáticas de los últimos dos años escolares tienen menos que ver con los argumentos típicos de las Olimpiadas. En los últimos años hemos tenido varios campeones nacionales del tercer curso o del cuarto, es decir que a estos niveles se la juegan seguramente con las mismas armas.

Sin embargo también en Italia se dan situaciones negativas, rara vez a decir verdad, causadas principalmente por dos interpretaciones erróneas de las Olimpiadas Matemáticas:

1) Las Olimpiadas Matemáticas son ante todo un divertimento. Hay personas a las cuales les gustan las Matemáticas y hay a quienes simplemente no les gustan las competiciones Matemáticas. Entre estos podría citar a algunos de mis colegas de departamento, todos investigadores consolidados y de nivel óptimo. Por tanto, lo digo sobre todo por los estudiantes, si no se obtiene buen resultado en las Olimpiadas esto no significa que no pueden ser buenos matemáticos en el futuro, así como tampoco está escrito que un campeón nacional de las Olimpiadas o alguien que haya obtenido la medalla del IMO tenga un futuro ya asegurado como matemático. Puedo citar algunos ex-concursantes pluri-medallistas a nivel internacional que después han escogido ser médicos o cualquier otra profesión, pero que cuando pueden colaboran con la Comisión Nacional y continúan divirtiéndose con las Olimpiadas.

- Estoy de acuerdo contigo, las Olimpiadas no son un condicionante del futuro de los escolares y me parece una buena idea subrayarlo.

2) Las Olimpiadas Matemáticas son principalmente una diversión. Sé que ya lo he dicho, pero es conveniente repetirlo e insistir en ello. Algunos docentes, poquísimos por fortuna, buscan explotar las Olimpiadas para evaluar el aprovechamiento de los muchachos: en mi opinión, no hay nada más equivocado. Los chicos a menudo se encuentran con que tienen que improvisar al afrontar situaciones nuevas. Saber que vas a ser evaluado por el resultado de una competición te estropea la fiesta, crea tensión, te coarta la libertad y la diversión de intentarlo o experimentar. ¡Colegas enseñantes, no cometáis este error! Dejad que los chicos se diviertan, para los controles hay otras ocasiones.

- Francesco, dado que las Olimpiadas suponen un divertimento en equipo, en cierto modo un juego de competición, que requiere uso de la creatividad individual y desarrollo de las capacidades personales dentro del equipo, en tu opinión: ¿fomentan el aprendizaje colaborativo y la inteligencia entre pares? ¿Suponen, quizá en espíritu, lo opuesto a la idea de examen o prueba, que es propio de una sociedad donde se compite por supervivencia, no por juego?

Para empezar quisiera precisar que las Olimpiadas son también una diversión en equipo. Las competiciones individuales son el centro, el motor principal del movimiento olímpico y es a través de las competiciones individuales como se realiza una primera selección para conseguir los seis que representarán a Italia en el IMO y en otras competiciones internacionales (Romanian Masters of Matematics, Balkan Matematial Olympiad, EGMO).

Las competiciones en equipo, por otra parte, están asumiendo una importancia cada vez mayor y creo que esto es un hecho positivo. Cada año participan en la fase eliminatoria más de 600 equipos. La fase eliminatoria se desarrolla en una veintena de sedes simultáneamente. De estas un centenar de equipos accede a la final nacional que se desarrolla en mayo en Cesenatico (en la costa del mar Adriático, hacia el norte de Rimini, en la Emilia-Romaña) en la cual se producen cuatro semifinales y una final.

Quizás habrás notado una contradicción: las semifinales deberían ser dos, ¡no cuatro! En efecto, en el pasado eran dos, después el interés fue creciendo, así como el nivel y el número de los equipos que participan, y con el tiempo las semifinales se convirtieron en tres, después en cuatro. Más que semifinales se trata entonces de una segunda fase de calificación real: la fase final nacional para los equipos que alberga una participación de casi 1.000 personas entre estudiantes, acompañantes y equipos extranjeros.

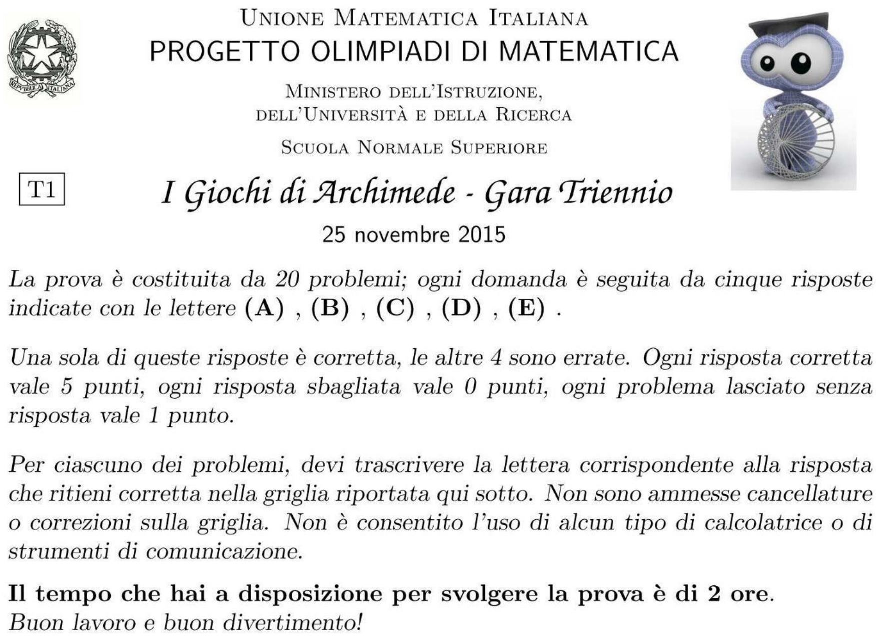
Para una escuela organizar un equipo es mucho más simple que construir una buena individualidad: es suficiente encontrar un maestro con un poco de pasión y construir un pequeño grupo de una decena de muchachos; como en el fútbol, también aquí los estudiantes reservas son importantes. A menudo sucede que una escuela prepara dos equipos, uno de titulares y otro de jóvenes dispuestos a tomar el relevo de quien se gradúa. Algunas escuelas, en las que hay muchos chicos interesados, también capacitan a 4 o 5 equipos, si bien solo uno llega a la fase final.

Para obtener buenos resultados no es suficiente tener muchachos con una buena preparación matemática. La organización interna del equipo es importante, he notado que muy a menudo el trabajo interno de un equipo se desarrolla por pares: dos muchachos tratan de resolver juntos un mismo ejercicio porque de esta manera se intercambian ideas y es más difícil cometer errores.

Solo para hacer de nuevo una comparación con el fútbol en el cual hay porteros, defensas, centrocampistas y atacantes, también en los equipos matemáticos de buen nivel cada miembro se especializa en algún sector (geometría, combinatoria, álgebra, teoría de números) y con frecuencia hay un "calculador" es decir una persona rápida y fiable en los cálculos al cual los demás le pasan ese trabajo. Quien se lo puede permitir además tiene a un "Messi", "Cristiano Ronaldo" (o a cualquier otro, no nos decantamos por ninguna primera figura en particular, cada cual elige la suya) de la situación o un organizador que hace de director distribuyendo el trabajo a los demás según la capacidad de cada uno y se pone a trabajar desde el principio en los ejercicios que pueden marcar la diferencia.

Como ves se trata de un verdadero trabajo de equipo en el que cada uno desempeña su tarea y el éxito del equipo depende también de cuánto los miembros congenien entre sí y sean colaborativos. Desde el punto de vista didáctico creo que un trabajo de grupo así estructurado es seguramente alentador.

Como dices, es cierto que nuestra sociedad es principalmente individualista, como son las pruebas examen, pero la vida no se acaba con un examen, con una licenciatura o con un diploma. Esto solo es el inicio si se piensa bien. En el mundo del trabajo todos tarde o temprano nos encontramos formando parte de un grupo y debemos coordinar la actividad propia para alcanzar un fin común.


Unione Matematica Italiana
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca
Scuola Normale Superiore

T1 *I Giochi di Archimede - Gara Triennio*

25 novembre 2015

- *La prova è costituita da 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** .
- *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
- *Per ciascuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 2 ore.
Buon lavoro e buon divertimento!

Figura 3. Encabezamiento de una prueba.

Pensando también en el fútbol, tengo en mente varios jugadores técnicamente buenísimos, también italianos y españoles, que habrían podido vencer muchísimo pero que sin embargo se han cedido a equipos menores porque no se adaptaban a trabajar grupalmente. Saber colaborar es importante en cada ambiente; hablas de competencia para la supervivencia, pero estar habituado a trabajar en un grupo estructurado es seguramente un arma añadida, no veo ninguna contradicción.

- Estoy de acuerdo contigo una vez más, no pretendía contraponer de modo forzoso la competencia individual con el trabajo en equipo como aspectos de la misma realidad excluyentes "per se" forzosamente, quería destacar las contradicciones de las conductas sociales que tantas veces se trasmiten a la educación de los escolares donde, en no pocas ocasiones, se fomenta y se premia más el individualismo que la cooperación racional y bien estructurada.

- Francesco, a continuación sería interesante que nos explicases detalladamente cualquier aspecto que consideres interesante con respecto, por ejemplo, a la formación de los docentes que se ocupan de las Olimpiadas, también sería muy útil y valioso que nos describieras brevemente la estructura de las fases de cualificación individual, y tal vez contaras con algún detalle cómo se desarrolla la fase final; obviamente también cualquier otro aspecto que tú consideres de interés, para que los lectores adquieran una visión global de las Olimpiadas Matemáticas.

La organización de las competiciones es solo un aspecto, aunque sea el principal, del movimiento olímpico en Italia. Como te mencioné al inicio de la entrevista la base de los participantes es muy amplia y difusa sobre todo el territorio. Las dos primeras fases de calificación (de instituto y distrito) se desarrollan a mitad de noviembre y a mitad de febrero y utilizan un texto único nacional preparado por la Comisión de la que formo parte. De estos dos niveles de selección salen los 300 finalistas nacionales.

Las personas clave de estos dos niveles de selección son los Responsables de Distrito de los docentes de escuela que se ocupan de la gestión de su distrito. Los Responsables de Distrito se eligen entre las escuelas del distrito propio y se renuevan o confirman cada tres años. Su tarea es seleccionar los estudiantes que se admiten en el equipo del distrito y señalar en la Comisión Nacional a los estudiantes que participarán en la final nacional. ¿Pero cuántos estudiantes se admiten en la final de cada distrito?

Primero de todo, visto que se trata de Olimpiadas, a cada distrito se le garantiza al menos un representante en la final. Por otra parte, los estudiantes medalla de oro (la medalla de oro espera a 1/12 de los participantes por tanto más o menos son 25) del año precedente y que aún no son diplomados se admiten por derecho en la final. Para asignar los puestos remanentes con criterios de equidad tenemos en cuenta el número de escuelas que participan y el puntaje obtenido en la final en los años precedentes por los estudiantes de cada distrito y las cuotas se asignan utilizando el algoritmo de Hondt. [https://en.wikipedia.org/wiki/D'Hondt_method]. El principio es similar al de cuotas de la UEFA o el número de equipos que de cada nación se admiten en las copas europeas.

Este mecanismo estimula a los Responsables de Distrito a elegir al mejor de los muchachos para la final nacional para ganar o mantener la cuota y no perder puestos para el año siguiente.

Otro aspecto de este mecanismo perverso de cuotas es que cada distrito es estimulado a preparar de la mejor manera a los chicos propios organizando cursos de entrenamiento. Para hacer eso solo sirven enseñantes bien preparados. La Comisión de las Olimpiadas pone a disposición un cierto número de colaboradores (normalmente estudiantes universitarios ex-concursantes de alto nivel) que cada año recorren Italia para desarrollar talleres locales en los diferentes distritos. Las solicitudes siempre van en aumento y los recursos humanos desde hace algunos años se han vuelto insuficientes. La solución ha sido tratar de formar docentes de escuela voluntariosos (¡por fortuna hay muchísimos!) que proporcionan su conocimiento y material para ponerlo a disposición de la organización de nivel de base sin pedir ayuda a la Comisión.

Además desde 2009 existen los Encuentros Olímpicos [2], un taller de 4 días que normalmente se desarrolla en octubre, en la cual participan hasta 80 docentes. Tras ellos hay muchos Responsables de Distrito pero también docentes que se aproximan por primera vez a las competiciones matemáticas. Todas las intervenciones se registran por audio y vídeo y se ponen a disposición en red, lo mismo que todo el material impreso distribuido. En la actualidad hay disponible aproximadamente 120 horas de vídeo accesibles para todos, docentes y estudiantes. La participación no solo es gratuita para todos, sino que también se cubren parte de los gastos de alojamiento de los Responsables de Distrito que participan.

La fase final se desarrolla a principios de mayo en Cesenatico y se trata de una verdadera proeza para los miembros de la Comisión. El viernes por la mañana se desarrolla la final individual. Después de comer sin embargo se desarrollan las cuatro semifinales para los equipos. Al mismo tiempo Comisiones y colaboradores corrigen los 300 exámenes elaborados por las individualidades continuando sin interrupción hasta que se acaba el trabajo (a menudo hasta la noche cerrada). El sábado por la mañana se celebra la final por equipos que por tradición es temática: el staff se viste con trajes inspirados en alguna película, dibujo animado o libro: *Reservoir Dogs (Tarantino)*, *Alice in Wonderland*, *Dragonball*, *Star Wars*, *Pirates of the Caribbean* . . .

Después de comer, entrega de premios de los equipos y reuniones variadas con los Responsables de Distrito, el domingo por la mañana todo se concluye con la entrega de premios a las individualidades.

Cada año el cansancio es enorme, con la preocupación de que toda la máquina organizativa funcione bien, pero al mismo tiempo es muchísima la satisfacción por el trabajo hecho.

- Francesco, los links a los videos que proporcionas a nuestros lectores (véanse las referencias) dan una visión interesante y simpática del ambiente en las Olimpiadas. Un ambiente entre festivo y épico, esto último debido a la música utilizada en el montaje. Realmente resultan muy motivadores para las futuras generaciones de jóvenes estudiantes.

Es verdad, ¡el espíritu es exactamente este! La final nacional, sea individual o en equipo se desarrolla en el mismo lugar y en los mismos días (hay muchos chicos, tanto concursantes individuales como miembros del equipo de su escuela). Hay más de 1.000 muchachos entre alumnos individuales y de equipos, la atmósfera es la de una gran fiesta.

- Me ha llamado la atención uno de los vídeos en que aparece una chica, que dice más o menos: "no me gustan especialmente las matemáticas pero sí me gusta el desafío". También me parece, en general, que hay más muchachos que chicas que participan. Quizá sea solo una impresión, no sé . . . ¿Cómo es la relación de las chicas con las Olimpiadas Matemáticas?, ¿están interesadas, les gusta competir?, ¿participan con un entusiasmo similar a sus colegas masculinos?

La impresión que has obtenido es exacta. Entre los participantes en la final individual, las chicas son siempre entre el 5 y el 10 %, ¡poquísimas! El problema no es solo italiano: Inglaterra, Francia y varios países del Este tienen más o menos el mismo porcentaje. ¿En España cómo va? ¿Tienes algún dato?

- Respondiendo a tu pregunta, me temo que el porcentaje en España es similar, solo una chica entre los 10 finalistas del año pasado, leo en las páginas oficiales de las Olimpiadas, y no encuentro, aunque busco, datos más alentadores.

La chica de la que hablas es una excepción: normalmente a las chicas les gusta la matemática, pero no se sienten atraídas por el desafío, la competición y por tanto no participan incluso aunque, quizá, son mejores que sus compañeros.

- ¿Para afrontar esta situación se ha tomado alguna medida en Italia en particular, o dado que se trata de un problema común a todos los países hay alguna iniciativa o movimiento para animar a las chicas a participar más activamente en las actividades matemáticas?

Como te decía, en efecto el problema también se da a nivel internacional, hasta tal extremo que por iniciativa de los ingleses, en 2012 nació el EGMO https://www.egmo.org/, una competición europea reservada para las chicas. España ha participado este año (2016) por primera vez. La esperanza es que, incluyendo a las chicas en un ambiente menos competitivo, con los años se apasionen un poco más con el torneo y el porcentaje poco a poco se equilibre.

El problema es serio: los equipos que participan en el IMO, la fase internacional de las Olimpiadas, están formados por 6 chicos o chicas. Los equipos que participan en el EGMO por el contrario tienen solo 4 miembros. ¿Por qué? Porque por otra parte, muchos países, quizá incluso Italia, no serían capaces de completar el equipo si no fuera mediante la colocación de muchos miembros de bajo nivel.

En la final nacional de este año han participado 17 chicas de 300 concursantes. Las 4 chicas seleccionadas para la EGMO han ido bastante bien y han terminado en los 60 primeros puestos de 300.

Después de ellas solo otras 2 han obtenido resultados suficientemente aceptables incluso alcanzando un lugar cerca de la posición cien, pero ya la séptima chica obtuvo solo 10 puntos sobre 42 situándose en el lugar 179 de 300. No obstante 8 chicas tienen menos de 6 puntos sobre 42.

- En mi opinión, Francesco, quizá el secreto del menor éxito de las Olimpiadas entre las chicas está en su estructura, no sé explicarlo bien, y no me refiero absolutamente al sexismo, eso sería una simplificación muy boba, hoy en día nadie duda de la capacidad de las chicas para el pensamiento matemático o científico, lo que ocurre quizá (aunque no estoy segura) es que las estructuras que sustentan el mundo en general casi siempre están hechas sin haber considerado a las chicas y las Olimpiadas no son una excepción, no sé si estoy expresando bien lo que quiero decir.

- Por eso tal vez no sea mala cosa pensar otro tipo de colaboración en equipo con algunos otros matices (aunque no esté todavía clara la idea y la forma de llevarla a cabo hay que hacer probar ensayo-error, tal vez) que sirvan para potenciar cualidades que no son las habituales asociadas a la competición en el sentido más antiguo de la palabra, por eso quizá el EGMO es un buen comienzo, pero seguramente habrá que seguir experimentando en otras formas de implicación femenina, no sé si es una idea confusa.

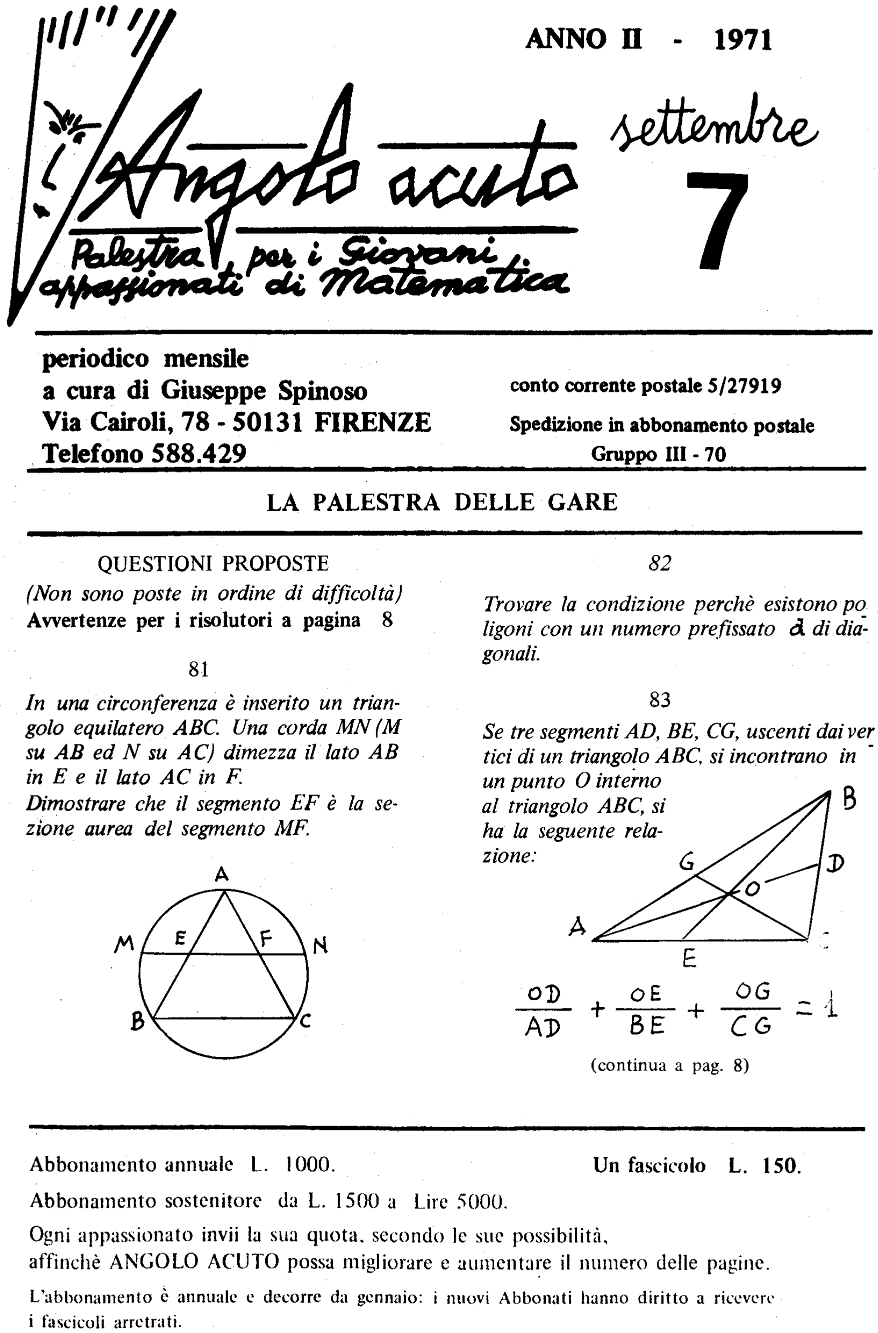
Esta vez soy yo quien está de acuerdo contigo. Te confieso que la primera vez que escuché hablar de las EGMO me quedé un poco perplejo. Si se hablase de "levantamiento de pesas" está claro que las chicas no pueden participar en la misma competición que los muchachos, pero con las matemáticas no es el caso. Por tanto, ¿son en realidad necesarias las EGMO? ¿Servirán para algo o llegarán a ser en realidad parte del problema? No sé responder a estas preguntas pero creo que hay que hacer una prueba. Mi experiencia es que las EGMO desempeñan una función de catalizador y que, tal vez tras 20 años, una vez agotada su función, no serán necesarias y se transformarán en un campeonato europeo (¡que de momento no existe!) abierto a todos, chicos y chicas.

En la competición por equipos las chicas están presentes en un porcentaje un poco más alto por tanto quizás tienes razón, las chicas agradecen más el trabajo en colaboración. Quizás por ello, se nos pidió organizar una competición para equipos femeninos y hemos decidido probar: la primera edición será el 20 de enero próximo. Los grupos mejores accederán a la final nacional por equipos, en la cual participarán los equipos mixtos. Tras algunos años, cuando haya elementos para evaluar, te contaré.

2. El proyecto *Angolo Acuto* (Ángulo Agudo): la historia de una revista de juegos matemáticos y el maestro italiano que la impulsó

- Entre las actividades de preparación de las Olimpiadas, que invito a los lectores a examinar a través de los links que aparecen en las referencias que envías [1], [2], [3], me interesaría que comentaras un poco el proyecto Angolo Acuto, sobre todo porque me parece una historia bonita que muestra algunos aspectos de la labor didáctica de los maestros y profesores que nos precedieron.

Angolo Acuto es un proyecto, no mío evidentemente, iniciado ya en 1949 por Giuseppe Spi-



ANNO II - 1971

L'Angolo acuto

Palestra per i Giovani appassionati di Matematica

settembre

7

periodico mensile
a cura di Giuseppe Spinoso
Via Cairoli, 78 - 50131 FIRENZE
Telefono 588.429

conto corrente postale 5/27919
Spedizione in abbonamento postale
Gruppo III - 70

LA PALESTRA DELLE GARE

QUESTIONI PROPOSTE
(Non sono poste in ordine di difficoltà)
Avvertenze per i risolutori a pagina 8

81

In una circonferenza è inserito un triangolo equilatero ABC. Una corda MN (M su AB ed N su AC) dimezza il lato AB in E e il lato AC in F.
Dimostrare che il segmento EF è la sezione aurea del segmento MF.

82

Trovare la condizione perchè esistono poligoni con un numero prefissato d di diagonali.

83

Se tre segmenti AD, BE, CG, uscenti dai vertici di un triangolo ABC, si incontrano in un punto O interno al triangolo ABC, si ha la seguente relazione:

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OG}{CG} = 1$$

(continua a pag. 8)

Abbonamento annuale L. 1000. **Un fascicolo L. 150.**
Abbonamento sostenitore da L. 1500 a Lire 5000.
Ogni appassionato invii la sua quota, secondo le sue possibilità, affinchè ANGOLO ACUTO possa migliorare e aumentare il numero delle pagine.
L'abbonamento è annuale e decorre da gennaio: i nuovi Abbonati hanno diritto a ricevere i fascicoli arretrati.

Figura 4. Una cubierta de la revista de didáctica matemática "Angolo Acuto".

noso, un profesor que enseñaba en una escuela de Pescara (región de los Abruzos), ciudad situada en la costa del mar Adriático. En Italia ya en el 1800 existían algunas revistas de juegos matemáticos dedicados a estudiantes de la escuela secundaria (14-18 años). Giuseppe Spinoso, en su etapa de estudiante (1930-1935) participaba en los concursos organizados en la revista y, una vez se convirtió en enseñante creó *Angolo Acuto* que proponía problemas y publicaba las soluciones de los mejores estudiantes. La revista se imprimía de modo artesanal en heliografía en la terraza de su casa y las copias se enviaban a mano por correo postal a quienes las pedían.

En 1953 *Angolo Acuto* se convirtió en una columna de Archimede (Arquímedes), una revista de difusión nacional que todavía existe hoy, pero tras algunos años se suspendió.

Mientras tanto Spinoso y su familia se mudaron a Florencia. La publicación se reanudó en 1970 y continuó hasta 1980 cuando Spinoso, ya pensionista, suspendió la publicación.

Giuseppe Spinoso murió en 1982. Su mujer propuso al "Istituto di Matematica" (Instituto de Matemáticas) instituir en memoria de su marido una competición de matemáticas para los estudiantes de la escuela superior.

Al año siguiente se creó el Premio Spinoso, o sea la competición matemática del Departamento, que existe todavía hoy. La competición es por tanto hija de *Angolo Acuto*; con los años se ha ido transformando y el nivel de dificultad se ha elevado también porque los participantes cada año son mejores.

Quizá habrás notado que en un link [1] de los que te he enviado hay varios números de *Angolo Acuto* en formato pdf. La familia Spinoso regaló al Departamento de Matemáticas una colección completa de todos los números publicados entre 1970 y 1980. A ratos estoy digitalizando todo el material. Los originales se imprimieron en ciclostil, una máquina usada en los años 70 y 80 para imprimir pasquines y folletos ¡también por grupos revolucionarios e incluso terroristas!, por tanto no se trata solo de hacer los escaneos sin también de limpiarlos de todas las manchas de tinta. Es un trabajo lento, poco a poco espero que llegaré al final.

3. Comentarios finales

- El tema es apasionante y por mi parte podría continuar indefinidamente charlando con Francesco desde su profundo conocimiento, entusiasmo e interés en el asunto; al ser un gran conocedor podría animar la lectura con anécdotas simpáticas, o profundizando en los aspectos más técnicos del proyecto, en fin en la filosofía del mismo, para ello le emplazo amablemente a continuar las charlas matemáticas en artículos sucesivos, como ya hemos hablado. Por mi parte nada más que agradecerle la colaboración y el buen ánimo. Este diálogo que el lector encontrará en español en realidad es bilingüe (italiano/español) y se ha desarrollado entre Florencia y Madrid.

- No sé si Francesco quiere añadir algo más, en ese caso le invito a continuar yo me despido aquí, ¡hasta pronto!

Quisiera agradecer a Rosa la oportunidad que me ha dado de hablar de las Olimpiadas Matemáticas en Italia. En realidad podría continuar hablando de Olimpiadas todavía mucho más. Ocuparse de competiciones matemáticas puede ser una tarea agotadora, pero también llena de satisfacciones no solo si se alcanzan buenos resultados internacionales, sino sobre todo viendo que, en cada nivel, los muchachos se divierten y quizá un poco también se apasionan por la materia. La colaboración con Rosa, escribiendo cada uno en su propia lengua, ha sido agradable e interesante, estoy seguro de que en el futuro encontraremos el modo de repetirla.

Referencias

[1] Incontri di preparazione per studenti organizzati dal dipartimento di matematica: http://www.dimai.unifi.it/vp-186-olimpiadi-della-matematica.html

[2] Incontri Olimpici: http://www.dma.unifi.it/~mugelli/incontri_olimpici.html

[3] Entrevista del telediario de Canal 5 a Andrea Fogari, campeón de Italia en 2008 cuando era estudiante de tercer curso: https://www.youtube.com/watch?v=vXkvTbYOnvs

[4] Progetto Olimpiadi della Matematica: http://olimpiadi.dm.unibo.it/

[5] Breve notificación de la RAI sobre la final de Cesenatico: http://www.dma.unifi.it/~mugelli/Cesenatico/2015/Superquark-30_luglio_2015.mp4

[6] https://www.youtube.com/watch?v=QxNt8Y2B5Jo

[7] https://www.youtube.com/watch?v=YGeuyPCjdhs

[8] https://www.youtube.com/watch?v=FpKZRetfF6w

[9] https://www.youtube.com/watch?v=D072rQVyt6w

Sobre la autora:
Nombre: Rosa María Herrera
Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com
Institución: SEAC, España.

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

BY NC SA

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

VEO VEO