Historias de Matemáticas

Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes

Infinitesimal methods to calculate tangents

José María Ayerbe Toledano

Revista de Investigación

Volumen VII, Número 2, pp. 065–086, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Jun'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

En este artículo se estudian los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes desarrollados por Fermat y Barrow a mediados del siglo XVII, incluyendo algunos ejemplos que ilustrarán al lector sobre su aplicación. Asimismo, se estudia el método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos. En todos los casos se indaga sobre la base teórica de los procedimientos, contrastando las opiniones de diversos autores que han tratado la materia.

Palabras Clave: Fermat, Barrow, Cálculo de tangentes, Máximos y mínimos, Métodos infinitesimales.

Abstract

In this paper we study the infinitesimal methods to calculate tangents developed by Fermat and Barrow in the XVII century. Several examples to ilustrate the methods are given. Moreover, we show the Fermat's method to obtain maxima and minima. Discussions about the theoretical basis of the methods, given by some authors, are commentated.

Keywords: Fermat, Barrow, Tangents, Maxima and minima, Infinitesimal methods.

1. Introducción.

El problema de hallar la tangente a una curva había sido considerado por los matemáticos desde la antigüedad. Además de los múltiples resultados sobre la tangente a la circunferencia que podemos encontrar en Los Elementos de Euclides, Apolonio (262-190 a.C.) estudió de manera exhaustiva las tangentes a las cónicas en su obra Cónicas. Esta memoria, que consta de siete libros, dedica el Libro II a estudiar las tangentes a las cónicas y el Libro V realiza un estudio sobre máximos y mínimos y sobre trazado de tangentes y normales a secciones cónicas. Posteriormente Arquímedes construyó la tangente a la espiral. Sin embargo, el punto de vista griego era estático, de forma que la tangente se consideraba como la recta que cortaba a la curva en un sólo punto, "dejándola a un lado", sin que hubiera un proceso de paso al límite ni ninguna otra consideración de carácter infinitesimal.

En este artículo vamos a tratar los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes a curvas planas que fueron desarrollados por Fermat y por Barrow a mediados del siglo XVII. Esta elección no es casual. Los métodos de Fermat y Barrow son, posiblemente, los que más contribuyeron al alumbramiento del cálculo diferencial y así lo señala el Marqués de L'Hôpital en el prefacio de [6, pág.18-19], el primer libro de texto que se publicó sobre la materia:

> *Poco tiempo después de la publicación del método del Sr. Descartes para las tangentes, el Sr. de Fermat encontró también uno que finalmente el mismo Sr. Descartes confesó que es más sencillo que el suyo para múltiples usos. Sin embargo, es cierto que no era todavía tan sencillo como el del Sr. Barrow, al considerar más de cerca la naturaleza de las poligonales [. . .] El Sr. Barrow no se quedó ahí: inventó también una especie de cálculo propio de este método; sin embargo, para auxiliarse de ello hizo falta, igual que en el del Sr. Descartes, quitar las fracciones y eliminar todos los signos radicales.*

Y a renglón seguido añade:

> *El vacío de este cálculo lo cubrió el del célebre Sr. Leibniz; este sabio geómetra comenzó donde el Sr. Barrow y los otros habían terminado. Su cálculo lo ha llevado a regiones hasta ahora desconocidas; y ha hecho descubrimientos que son la admiración de los más hábiles matemáticos de Europa.*

El cálculo de tangentes era un tema de intenso estudio en la época y fueron muchos los matemáticos que establecieron procedimientos, más o menos generales, para calcularlas. Merece la pena destacar el método de Descartes para el calculo de la normal y, por tanto también de la tangente, a una curva algebraica, pero no nos detendremos en él pues no está basado en procedimientos infinitesimales, sino en consideraciones sobre la existencia de raíces dobles en ecuaciones algebraicas.

También desarrollaron procedimientos para el cálculo de tangentes Torricelli y Roberval. Para el cálculo de la tangente a la cicloide ambos matemáticos utilizaron una composición de movimientos que recordaba la determinación de la tangente a la espiral, que ya había realizado Arquímedes dos mil años antes. La similitud de los procedimientos ideados por ambos autores y el hecho de que Torriceli no mencionara en su trabajo a Roberval motivó la airada protesta de éste y la consiguiente acusación de plagio. La idea de Roberval para el cálculo de tangentes es muy simple. Dado que una curva es trazada por un punto en movimiento, la tangente en cualquier punto era para Roberval la recta de velocidad instantánea en ese punto. Así escribía:

> *La dirección del movimiento de un punto que describe una curva es la tangente a la curva en cada posición de ese punto.*

Desarrollando esta idea Roberval calculó la tangente a la parábola y a otras cónicas, que ya habían sido obtenidas por los griegos, y, asimismo, abordó el estudio de la familia de las concoides, partiendo de la concoide de Nicomedes, la espiral de Arquímedes, la cisoide, la cuadratriz de Hipias y, por supuesto, la cicloide, con lo que hace un recorrido exhaustivo por la mayor parte de las curvas consideradas en su tiempo.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) fue uno de los pocos matemáticos profesionales franceses del siglo XVII que destacó por sus investigaciones, particularmente sobre la cicloide. Perteneció al círculo de Mersenne y fue muy amigo de Fermat con el que mantuvo una fluida correspondencia a lo largo de muchos años. Obtuvo la cátedra de Ramus en el Collège Royal de París en 1634 y, a pesar de que este puesto se convocaba cada tres años a concurso público, mantuvo su empleo hasta su muerte. Dado que el concurso consistía en un examen competitivo en el que las cuestiones se las proponían entre sí los opositores, Roberval adoptó la costumbre de no publicar nunca sus descubrimientos, con objeto de utilizar esos conocimientos en la oposición para batir a sus contrincantes. Sin duda tuvo éxito en su empeño, pero a cambio, al no publicar sus resultados, se vio envuelto en múltiples controversias relativas a la prioridad de los mismos, una de las cuales es la ya citada con Torricelli.

Resultados similares a los de Roberval fueron obtenidos también por Torricelli, su rival, como decimos, en la invención del método de determinación de tangentes por medio de velocidades instantáneas. En relación con estos dos autores, y sin perjuicio de a quien corresponda la prioridad del descubrimiento, lo más interesante es señalar el gran paso que dieron en la dirección de considerar la tangente no ya sólo como la recta que corta a la curva una única vez, al menos en un entorno del punto de tangencia, sino como el límite de las rectas secantes en el punto de tangencia cuando el otro punto de corte se aproxima tanto como se quiera al de tangencia.

También se ocuparon del cálculo de tangentes otros matemáticos de la época, como Philippe de Lahire, Johann Hudde y René Francois Walter, Baron de Sluse, entre otros, pero nosotros nos centraremos en los métodos de Fermat y de Barrow que fueron, según parece, los que iluminaron a Newton y a Leibniz para el desarrollo del cálculo infinitesimal. Por lo que se refiere al método de Fermat, este es una aplicación del procedimiento de adigualdad que desarrolló para el cálculo de máximos y mínimos. El artículo lo iniciaremos con el estudio de este método que, además de estar en la base del procedimiento de Fermat para el cálculo de tangentes que desarrollamos en la siguiente sección, tiene interés por sí mismo. Finalizaremos el artículo examinando el método de Barrow para el cálculo de tangentes, que no es más que una mejora del de Fermat según reconoció Newton.

2. El método de Fermat para la determinación de máximos y mínimos.

Pierre de Fermat (1601-1665) fue, junto con Descartes, el matemático más destacado de la primera mitad del siglo XVII pero, como tanto otros en su época, incluido el propio Descartes, no fue un matemático profesional. Fermat estudió Derecho en Toulouse, para incorporarse más tarde a las tareas del parlamento local, primero como abogado y más tarde como miembro del consejo. Fue sin duda un hombre polifacético: políglota, filólogo, jurista, poeta,... Pero sin duda donde su genio brilló a más altura fue en las matemáticas. Como matemático realizó importantes contribuciones en casi todos los campos, desde la geometría analítica al cálculo infinitesimal, pero también a la teoría de números, quizás su tema favorito y al que su nombre se halla más asociado en la actualidad, o a la teoría de probabilidades de la que fue cofundador junto con Blaise Pascal.

Fermat desarrolló el primer método general para la determinación de máximos y mínimos en su obra *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* o, en castellano, Método para la investigación de máximos y mínimos, escrita entre 1629 y 1637 y que comenzó a circular a partir de esta última fecha entre los mátemáticos franceses gracias a las artes del padre Mersenne. El método de Fermat traduce algebraicamente la idea, ya observada por Oresme y Kepler, relativa a que la variación de las cantidades en un entorno de un extremo se hace imperceptible. Fermat diseña un método para la determinación de esos valores, sin perjuicio de que, como afirma Paul Tannery, editor de las Oeuvres de Fermat, es muy posible que éste no dispusiera de los trabajos de aquellos.

Como han señalado numerosos autores, el método de Fermat es digno de mención no sólo porque constituye el primer procedimiento general para la determinación de máximos y mínimos, sino también porque en él aparece por primera vez la fructífera idea de incrementar una magnitud asimilable a lo que ahora es la variable independiente de una función, incremento que constituye la esencia del cálculo diferencial. Veamos el método tal como el propio Fermat, en poco más de medio folio, lo explica en su obra:

"Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

[I.] Sea A una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).

[II.] Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A en términos que pueden ser de cualquier grado.

[III.] Se sustituirá a continuación la incógnita original A por $A + E$ y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A y de E, en términos que pueden ser de cualquier grado.

[IV.] Se adigualará, para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima. [La adigualdad viene a significar algo así como "tan aproximadamente iguales como sea posible" o, para eliminar en principio cualquier connotación infinitesimal, quizás sería más fiel al pensamiento de Fermat entenderla como una pseudoigualdad [7, pág. 51]. Fermat utiliza la palabra "adaequo", que podría traducirse como "hacer adigual"].

[V.] Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que en los dos miembros habrá términos afectados de E o de una de sus potencias.

[VI.] Se dividirán todos los términos por E, o por alguna potencia superior de E, de modo que desaparezca la E de, al menos, uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.

[VII.] Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparezca la E o una de sus potencias, y se igualará lo que queda, o bien, si en uno de los dos miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo. [Es curioso, para nosotros, como se enuncia esta regla. Puede verse aquí como la utilización del álgebra simbólica todavía precisaba de una explicación].

[VIII.] La resolución de esta última ecuación dará el valor de A, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original".

Una vez enunciadas las reglas que componen su método, Fermat lo ilustra con el siguiente ejemplo, que no es más que un caso particular de la proposición 27 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides:

Ejemplo 2.1. *De todos los rectángulos de perímetro* $2B$*, el que tiene mayor área es el cuadrado de lado* $B/2$.

En efecto, consideremos un segmento de longitud B y dividámoslo en dos trozos de longitudes A y $B - A$. Apliquemos el método de Fermat para la obtención del máximo buscado:

I y II: Tenemos, por tanto, que hacer máxima la expresión $A(B - A)$.

III. Sustituyendo en la expresión original A por $A + E$ obtenemos: $(A + E)(B - A - E)$.

IV. Adigualamos: $A(B - A) \sim (A + E)(B - A - E)$.

V. Operamos y eliminamos los términos comunes de ambos lados y queda:

$$AB - A^2 \sim AB - A^2 - AE + EB - EA - E^2 \Longleftrightarrow EB - 2AE - E^2 \sim 0$$

VI. Dividimos por E y queda: $B - 2A - E \sim 0$.

VII. Suprimimos los términos donde aparece la E e igualamos: $B - 2A = 0$.

VIII. La resolución de la ecuación nos da el valor de A que conduce al máximo, esto es, $A = B/2$. $\square$

Una vez obtenido el resultado y a modo de epitafio Fermat, con una envidiable seguridad en sí mismo, apostilla: "nec poteft generalior dari methodus" o, en cristiano, "es imposible dar un método más general".

A pesar de la última afirmación, el método de Fermat para la determinación de máximos y mínimos, debido al laconismo y a la falta de fundamentación teórica con que fue descrito en el *Methodus*, atrajo una ardiente atención de la comunidad científica del momento, lo que obligó a Fermat, en contra de su costumbre, a escribir cinco memorias breves, así como numerosos comentarios epistolares, detallando los fundamentos de su procedimiento y resolviendo numerosos ejemplos. No obstante, la aparente contradicción que suponía dividir por E y después hacer $E = 0$ no quedó nunca suficientemente aclarada. De hecho en [7, pág. 50] se señala que Fermat nunca estuvo en posesión de una verdadera prueba de su método. En cualquier caso, para Fermat siempre fue más importante comprobar que el método funcionaba en la práctica que dar una demostración exacta del mismo, muy en línea con el cambio de mentalidad que se iba abriendo paso en el siglo XVII y que, en general, primaba el descubrimiento frente a la demostración impecablemente lógica del resultado.

No obstante, resulta inevitable, aunque sin duda anacrónico y peligroso, pues puede conducir a conclusiones erróneas, reproducir el método de Fermat con notación moderna, poniendo $A = x$, $E = \Delta x$ y la cantidad a hacer máxima o mínima igual a $f(x)$. Con esta terminología la regla de Fermat nos dice:

I. x es la variable independiente del problema de extremos.

II. $f(x)$ es la función a maximizar o minimizar.

III. $f(x + \Delta x)$ es lo que se obtiene al sustituir en la función x por $x + \Delta x$.

IV. Adigualamos: $f(x) \sim f(x + \Delta x)$.

V. Eliminamos los términos comunes de ambos lados: $f(x) - f(x + \Delta x) \sim 0$.

VI. Dividimos por Δx: $\dfrac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \sim 0$.

VII. Hacemos $\Delta x = 0$.

VIII. $\left(\dfrac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = 0$.

Los apartados VII y VIII podríamos escribirlos con notación actual como:

VII y VIII: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\dfrac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}\right] = 0$.

Con esta interpretación podemos llegar a la conclusión, quizás engañosa, de que el método de Fermat viene a decir que la derivada de la función en el extremo vale cero, es decir, lo que hoy llamamos la condición necesaria de extremo. En este sentido se manifiesta C. Boyer en [1, pág. 440] señalando que

> *resulta completamente justo, por lo tanto, reconocer la razón que asistía a Laplace [otro francés, por cierto] al aclamar a Fermat como el verdadero descubridor del cálculo diferencial.*

Y más aún, añade:

> *Obviamente Fermat no disponía del concepto de límite, pero salvo esto, su método para determinar máximos y mínimos sigue un camino completamente paralelo al que podemos ver*

hoy en los libros de cálculo, excepto en la mínima diferencia de que hoy se suele utilizar el símbolo h o Δx en vez de la E de Fermat para el incremento de la variable. El procedimiento de Fermat, que consiste en cambiar ligeramente el valor de la variable para considerar valores próximos a uno dado, ha constituido desde entonces la verdadera esencia del análisis infinitesimal.

La opinión de otros autores es, sin embargo, diferente. Así I. Grattan-Guinness señala en [5, pág. 39] que esta interpretación

significaría extrapolar demasiado el contenido estricto del método. En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y en segundo lugar no decía nada acerca de que E fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico; en tercer lugar, la condición VI no tiene sentido en esta interpretación en cuanto que siempre dividimos por E en primer grado simplemente; sin embargo, como se puede ver por sus ejemplos, el dividía en ocasiones por potencias más elevadas de E, y la razón para esto era que si la cantidad considerada contenía una raíz cuadrada, elevaba al cuadrado la adigualdad antes de aplicar las últimas etapas del método. Nótese además que no se hacía ninguna referencia a que el método da sólo una condición necesaria.

En este mismo sentido se manifiesta González Urbaneja en [4, pág. 81] al afirmar lo siguiente:

Un estudio exhaustivo de la Investigación analítica [se refiere a la obra de Fermat Investigación analítica del método de máximos y mínimos, en la que se establecen los fundamentos teóricos del procedimiento] nos mostrará la falta de base de esta anacrónica interpretación del método de Fermat. Veremos que el Methodus *no se basa en ningún concepto infinitesimal, sino en conceptos algebraicos puramente finitos derivados de la teoría de ecuaciones de Viète.*

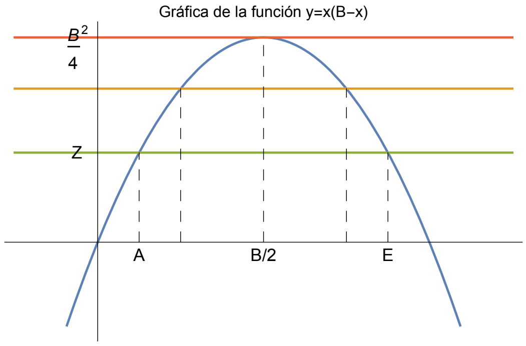
Efectivamente, el propio Fermat señala en la Investigación analítica del método de máximos y mínimos [manuscrito sin fecha ni título que en [7] se argumenta que fue escrito antes de agosto de 1638, aunque la mayor parte de los autores lo datan en el periodo 1640-44] que el algoritmo se le ocurrió estudiando el método de la Syncrisis y de la Anastrophe de Vieta y combinándolo con lo que Pappus denomina puntos únicos y singulares. A continuación da un ejemplo para ilustrar lo que quiere decir. Veamoslo:

Un segmento de longitud B debe ser dividido por un punto de forma que el producto de los segmentos resultantes sea máximo. Ya sabemos que el punto buscado es el punto medio [este fue, como hemos visto, el problema de extremos que resolvió en el Methodus] que hace el máximo igual a $\frac{B^2}{4}$.

Sigue Fermat diciendo:

Pero si uno se propone dividir el mismo segmento de longitud B de manera que el producto de los segmentos sea igual a Z (deberá ser $Z < \frac{B^2}{4}$*) se tendrán dos puntos satisfaciendo la cuestión, situados a uno y otro lado del punto correspondiente al producto máximo.*

O sea, si consideramos la función $f(x) = x(B - x)$ a maximizar y dibujamos la parábola $y = x(B - x)$ tenemos la siguiente situación:



A y E son las dos raíces de la ecuación $x(B-x) = Z$ que como vemos son simétricas respecto del punto $B/2$ donde está el máximo. Ya que A y E son las dos raíces de la ecuación $x(B-x) = Z$ obtenemos, siguiendo a Vieta, que

$$A(B-A) = E(B-E) \iff BA - BE = A^2 - E^2$$

Dividiendo ahora ambos miembros por $A - E$ obtenemos que $B = A + E$.

Continúa Fermat diciendo:

> *Si en lugar de Z se toma un valor mayor, aunque siempre inferior a $\frac{B^2}{4}$, las rectas A y E diferirán menos entre ellas que las precedentes [ver el dibujo] y los puntos de división se aproximarán más al punto correspondiente al punto máximo. El producto de los segmentos aumentará, mas al contrario disminuirá la diferencia entre A y E hasta que desaparece completamente esta diferencia para la división correspondiente al producto máximo; en este caso no hay más que una solución única y singular [en términos de Pappus] y las dos cantidades A y E llegan a ser iguales.*

Ahora bien, el método de Vieta aplicado a las dos ecuaciones correlativas anteriores nos ha llevado a $B = A + E$; por consiguiente, si $A = E$, lo que sucede para el punto correspondiente al máximo o mínimo, se tendrá, en el caso propuesto $B = 2A$. Es decir, si se toma el punto medio de la recta B, el producto de los segmentos será máximo.

Como vemos en esta obra Fermat explica con más detalle los fundamentos de su método de máximos y mínimos. La única diferencia con el algoritmo del *Methodus* es que en el manuscrito Investigación analítica las raíces son A y E y debe dividir por $A - E$. Como esto puede ser complicado, Fermat tiene la idea de tomar las dos raíces A y $A + E$ y dividir entonces por E, para igualar finalmente las dos raíces haciendo $E = 0$, lo que explica un poco más adelante en esta memoria. Además, da dos ejemplos, de los cuales nosotros nos detendremos en el primero:

Ejemplo 2.2. *Dividir la recta [el segmento] B de manera que el producto del cuadrado de uno de los segmentos por el otro sea máximo.*

Apliquemos el método de máximos y mínimos de Fermat:

I. Dividamos el segmento en dos trozos de longitudes A y $B - A$.

II. La función a maximizar será $A^2(B - A)$ en la variable A.

III. Sustituyendo en la expresión original A por $A + E$ queda: $(A + E)^2(B - A - E)$.

IV. Adigualamos: $(A + E)^2(B - A - E) \sim A^2(B - A)$.

V. Operando y eliminando términos comunes obtenemos:

$$(A^2 + E^2 + 2AE)(B - A - E) \sim A^2B - A^3$$
$$\iff -A^2E + E^2B - E^2A - E^3 + 2ABE - 2AE^2 - 2A^2E \sim 0$$

VI. Dividimos por E y queda: $-A^2 + EB - EA - E^2 + 2AB - 2AE - 2A^2 \sim 0$.

VII. Suprimimos los términos donde aparece la E e igualamos: $-A^2 + 2AB - 2A^2 = 0$.

VIII. Resolvemos la ecuación y obtenemos $A = \frac{2B}{3}$ que es el máximo buscado. $\square$

Tanta confianza tenía Fermat en su método, a pesar de la falta de rigor que ya hemos comentado y que tantas críticas le acarreó, sobre todo por parte de Descartes, que finaliza esta obra de forma muy similar a como finalizó el *Methodus*, afirmando:

> *Es por consiguiente que afirmo hoy y siempre, con la misma confianza que antes, que la investigación de máximos y mínimos se reconduce a esta regla única y general, cuyo feliz éxito será siempre legítimo y no debido al azar, como algunos [en velada referencia a Descartes] han pensado [...]. Si todavía hay alguien que considere este método como debido a un feliz azar, puede intentar encontrar uno similar.*

En [7] se argumenta que el método de Fermat basado en el criterio de la razón doble contenido en la Investigación analítica es anterior, cronológicamente, al método, más general, contenido en el *Methodus*, sin perjuicio de que éste fuera el primero en hacerse público. En dicho artículo se analiza en profundidad el fundamento teórico de ambos métodos y esta interpretación podría sugerir la idea de una evolución en el pensamiento de Fermat desde una concepción puramente algebraica del problema de máximos y mínimos, basada fundamentalmente en Pappus y Vieta, hacia un planteamiento infinitesimal en línea con nuestra moderna visión del cálculo. Stromholm, no obstante, se muestra prudente a este respecto y, en este sentido, afirma [7, pág.67]:

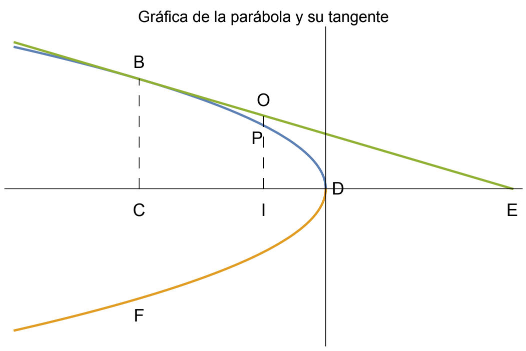
> *El [Fermat] fue en este caso particular bastante más el último de los antiguos que el primero de los modernos.*

3. El método de Fermat para el cálculo de la tangente.

Vamos ahora a analizar el método de Fermat para el cálculo de la tangente a una curva. El procedimiento aparece por primera vez en su obra *Methodus*, como una aplicación del método para la obtención de máximos y mínimos, y por tanto podemos considerar que Fermat lo diseñó, en esta versión inicial, en el periodo entre 1629 y 1637. La obra *Methodus* contiene dos secciones. La primera, titulada *Ad disquirendam maximam et minimam* contiene el método para la determinación de máximos y mínimos al que nos hemos referido en el apartado anterior. La segunda sección, titulada *De tangentibus linearum curvarum*, es decir, Sobre las tangentes a las líneas curvas, es la que propiamente contiene el método de Fermat para el cálculo de la tangente a una curva. Para familiarizarnos con él vamos a estudiar con detalle el ejemplo recogido en esa memoria, que no es otro que el cálculo de la tangente a la parábola.

Ejemplo 3.1. *Cálculo de la subtangente a la parábola.*

Consideremos la parábola BDF y tracemos la tangente en un punto B que corta al eje de la parábola en E. Sea O un punto cualquiera de la tangente que determina a su vez los puntos P e I que aparecen en la gráfica.



Denotemos por d a la distancia CD, por a a la subtangente, esto es, al segmento CE y por e a la distancia CI. Nosotros aquí hemos puesto estas últimas letras en minúsculas, pero Fermat las denotó con las letras en mayúsculas, sin importarle el hecho de que entonces E o D representasen tanto un punto del plano como la longitud de un segmento.

La propiedad intrínseca de la parábola es (Apolonio, Cónicas, I.11):

$$\frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD}{ID} \iff \frac{BC^2}{CD} = \frac{PI^2}{ID}$$

En la época de Fermat, antes de la invención de la geometría analítica, era habitual definir las curvas utilizando proporciones. En el caso de la parábola la proporción es la que acabamos de señalar que, lógicamente, puede obtenerse inmediatamente de la ecuación cartesiana. En efecto, dada la parábola $y^2 = 4px$ se tiene que $\dfrac{y^2}{x} = 4p =$ constante.

Dado que O es exterior a la parábola se tiene que

$$\frac{CD}{ID} > \frac{BC^2}{OI^2}$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos, se tiene que $\dfrac{BC}{CE} = \dfrac{OI}{IE}$, lo que implica que $BC = \dfrac{OI}{IE}CE$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2} &\iff \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2} \\ &\iff d(a-e)^2 > a^2(d-e) \\ &\iff da^2 + de^2 - 2dae > a^2d - a^2e\end{aligned}$$

Ahora Fermat dice:

> *Adigualamos según el método precedente [el de máximos y mínimos]; se tendrá eliminando términos comunes* $de^2 - 2dae \sim -a^2e$.

Dividiendo por e queda

$$de - 2da \sim -a^2$$

y haciendo $e = 0$ e igualando obtenemos $2da = a^2$, esto es, $a = 2d$, que es el resultado buscado. □

Fermat comenta finalmente:

> *Hemos probado de esta forma que CE es doble de CD, lo que es conforme a la verdad [el resultado era conocido pues había sido obtenido por Apolonio].*

Y muy en su línea, como hemos visto en la sección anterior, termina diciendo que

> *este método nunca falla y puede ser aplicado a un gran número de cuestiones muy hermosas.*

Como vemos Fermat utiliza la propiedad intrínseca de la parábola y luego plantea un problema que resuelve por su método de máximos y mínimos. Pero realmente, ¿cuál es el problema de máximos y mínimos que está resolviendo? O dicho de otra forma, ¿que cantidad extrema se somete al método de máximos y mínimos en el trazado de una tangente? Esta objeción a su método le fue planteada por Descartes y realmente Fermat nunca dio una respuesta categórica a la misma, a pesar de que, como hemos comentado en la sección anterior en relación con su método de máximos y mínimos, fueron muchas las ocasiones en que volvió sobre estos temas.

González Urbaneja aventura en [4, pág. 124-128] una hipótesis sobre el problema de extremos que hay detrás del de tangentes. Aplicado a la tangente a la parábola se señala que

$$\frac{BC^2}{CD} = \text{mín}\left\{\frac{OI^2}{DI} : O \in \text{tangente } BE\right\}$$

Teniendo en cuenta que, si llamamos $m = \dfrac{BC}{CE} = \dfrac{OI}{IE}$, entonces $\dfrac{BC^2}{CD} = \dfrac{m^2a^2}{d}$ y $\dfrac{OI^2}{DI} = \dfrac{m^2(a-e)^2}{d-e}$, adigualando resulta

$$\frac{m^2a^2}{d} \sim \frac{m^2(a-e)^2}{d-e} \Longleftrightarrow a^2(d-e) \sim d(a-e)^2$$

que es la misma adigualdad a la que llegó Fermat.

Sin perjuicio de la veracidad o no de la hipótesis de González Urbaneja, lo que subyace en el método, aunque quizás en este caso Fermat no incide en ello especialmente, es la sustitución del punto P de la parábola por el correspondiente punto O sobre la tangente. En efecto, el elemento clave del procedimiento es la sustitución del segmento PI por el segmento OI en la propiedad intrínseca de la parábola, transformando la igualdad $\dfrac{BC^2}{PI^2} = \dfrac{CD}{ID}$ en la adigualdad $\dfrac{BC^2}{OI^2} \sim \dfrac{CD}{ID}$. Sobre este punto volverá a insistir Fermat, como veremos, en posteriores memorias. En esta, sin embargo, el punto P sobre la parábola ni siquiera es señalado por Fermat en el dibujo original con el que ilustra este ejemplo.

En cualquier caso González Urbaneja sostiene su hipótesis sobre los fundamentos del método de Fermat, en su versión original, alegando que en la fecha en que este escribe la memoria *Methodus* no había desarrollado aún la geometría analítica y, por tanto, no era posible una interpretación de la recta tangente en términos de extremos de la variación de su coeficiente angular. Concretamente González Urbaneja [4, pág. 162] señala que

> *en el cálculo de una tangente Fermat busca y encuentra simplemente la longitud de la subtangente, pero todavía no llama especialmente la atención sobre el ángulo determinado por el eje y la tangente -lo que para nosotros es la pendiente de la recta tangente-. Fermat ni siquiera considera la tangente como límite geométrico de las secantes determinadas por el punto de tangencia y los puntos de la curva próximos a él.*

En esta misma línea en [4, pág. 119 y siguientes] se afirma lo siguiente:

> *Hay que considerar que hasta los avances que su propia geometría analítica y su lectura de la Geometría de Descartes provocaron en su propio pensamiento sobre extremos y tangentes, las curvas se manejaban mediante proporciones. [...] La invención de la geometría analítica es posterior a la invención del método de tangentes de Fermat. Algunas interpretaciones del método de tangentes pasan por alto este detalle, que según veremos es crucial para entender la futura evolución del método.*

Y más adelante se apostilla:

> *Sólo cuando a toda curva -de las que nosotros llamamos algebraicas- se le puede asignar una ecuación, que le corresponde unívocamente y que implícitamente contiene todas sus propiedades, tiene interés generalizar, en el más amplio sentido, todo método algebraico de tangentes. Por consiguiente, la discusión del método de tangentes de Fermat posterior a 1635-36 ofrecerá poca ayuda al historiador que busque los fundamentos de su método original.*

No es de esta opinión, sin embargo, Boyer que en [1, pág. 439-440] afirma:

> *Es muy posible que Fermat estuviera ya en posesión de su geometría analítica en una fecha tan temprana como el año 1629, puesto que por esta época hizo dos importantes descubrimientos que están estrechamente relacionados con sus trabajos sobre lugares geométricos. El más importante de ellos lo expuso unos años más tarde en un tratado, que tampoco se publicó durante su vida, titulado Methodus ad disquirendam maximam et minimam.*

Y más adelante señala:

> *Durante los mismos años en que Fermat se encontraba desarrollando su geometría analítica, descubrió también cómo aplicar su procedimiento de los valores próximos de la variable, para hallar la tangente a una curva algebraica de ecuación $y = f(x)$.*

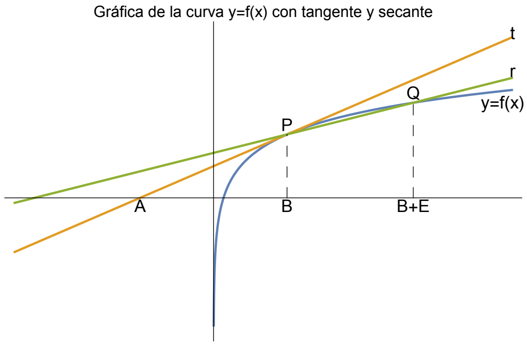
De forma más clara se pronuncian Rey Pastor y Babini en [8, pág. 76] al afirmar que

> *Fermat utiliza este método en la determinación de las tangentes a las curvas planas, concibiéndolas como las rectas que, entre todas las secantes que pasan por un punto fijo del eje, determinan el máximo o el mínimo coeficiente angular.*

En este mismo sentido en [2, pág. 452] se recoge:

> *El [Fermat] indica, por cierto, que para encontrar una inflexión, nosotros debemos encontrar un máximo o un mínimo del ángulo que forma la tangente con una dirección dada, y esto quiere decir encontrar un máximo o un mínimo de su cotangente, y eso quiere decir maximizar o minimizar a/y, donde a es la subtangente.*

De acuerdo con este punto de vista, podemos suponer que Fermat concebía la tangente a una curva plana como la recta que, entre todas las secantes que pasan por el punto de tangencia, determina el máximo o el mínimo coeficiente angular o, lo que es lo mismo, la mínima o máxima subtangente. El método de Fermat es entonces una aplicación de su método de máximos y mínimos y podemos explicarlo de la siguiente forma:



En el caso del dibujo podemos observar que la recta tangente t es, de todas las secantes r que pasan por $P(x_0, y_0)$ y por $Q(x_0 + E, f(x_0 + E))$, siendo E una cantidad pequeña mayor que cero, la que tiene mayor coeficiente angular y menor subtangente $s = AB$. Vamos a calcular la recta r secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos P y Q. Será:

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + E) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0 + E - x_0} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x(f(x_0 + E) - f(x_0)) - yE + f(x_0)E - x_0(f(x_0 + E) - f(x_0)) = 0$$

Esta recta tiene de pendiente

$$m_r = \frac{f(x_0 + E) - f(x_0)}{E}$$

y la recta tangente tiene de pendiente $m_t = \dfrac{f(x_0)}{s}$. Aplicamos ahora el método de máximos y mínimos adigualando la pendiente máxima que buscamos m_t con las pendientes de las rectas que pasan por los puntos de coordenadas (x_0, y_0) y $(x_0 + E, f(x_0 + E))$, es decir, adigualando m_t y m_r. Obtenemos entonces

$$\frac{f(x_0)}{s} \sim \frac{f(x_0 + E) - f(x_0)}{E}$$

Siempre que la expresión de la función f permita desarrollar la expresión $f(x_0 + E)$, eliminando la cantidad E que aparece en el denominador, haciendo luego $E = 0$ y transformando la adigualdad en una igualdad, de acuerdo con las reglas de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos, podemos hallar s, que es lo que buscaba Fermat, o la pendiente m_t como hacemos hoy en día.

Ejemplo 3.2. *La tangente a la parábola* $x^2 = 4py$ *en el punto de abscisa* $x = 3$ *es la recta* $6x - 4py - 9 = 0$.

En efecto, de acuerdo con el procedimiento será

$$\frac{f(3)}{s} \sim \frac{f(3 + E) - f(3)}{E}$$

y sustituyendo obtenemos

$$\frac{9}{4ps} \sim \frac{(3 + E)^2 - 9}{4pE}$$

Operando y simplificando queda

$$9E \sim E^2 s + 6Es$$

Dividiendo por E, haciendo $E = 0$ e igualando queda $9 = 6s$, es decir que la subtangente $s = 3/2$. Una vez obtenida la subtangente, que es lo que buscaba Fermat, la pendiente no es más que

$$m = \frac{f(3)}{s} = \frac{3}{2p}$$

y, por tanto, la ecuación de la tangente será

$$y - \frac{9}{4p} = \frac{3}{2p}(x-3) \Longleftrightarrow 6x - 4py - 9 = 0$$

que es el resultado buscado. □

Es de destacar el argumento infinitesimal utilizado por Fermat. En efecto, él obtiene la subtangente estudiando la modificación producida al perturbar infinitesimalmente la variable con la cantidad muy pequeña que representó con la letra E y luego haciendo $E = 0$, lo que podría interpretarse como una rudimentaria forma de paso al límite. Si, como en el caso de los extremos, interpretamos el método de Fermat en términos de límites y derivadas con la notación actual tendremos que la adigualdad

$$\frac{f(x_0)}{s} \sim \frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}$$

la escribiríamos hoy en la forma

$$\frac{f(x_0)}{s} \sim \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

y, aplicando el método de máximos y mínimos, obtendríamos la igualdad

$$\frac{f(x_0)}{s} = \left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right]_{\Delta x=0}$$

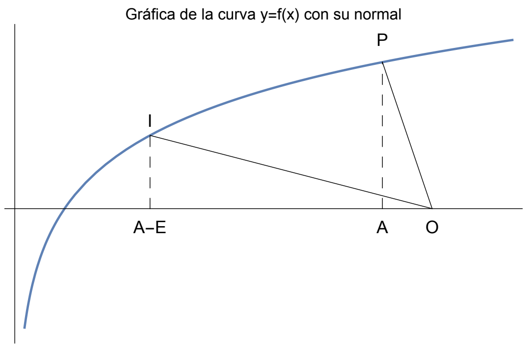
Teniendo en cuenta que $m_t = \dfrac{f(x_0)}{s}$ e interpretando el corchete en términos de límites seguiría la fórmula

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Como hemos señalado, el método de la tangente de Fermat se recogió por primera vez en su memoria *Methodus* como un corolario del procedimiento para la obtención de máximos y mínimos. No obstante, ya hemos indicado que de la explicación de Fermat no quedaba claro en absoluto cuál era el problema de extremos al que se estaba aplicando el procedimiento, lo que fue puesto de manifiesto por Descartes y provocó una agria polémica entre ambos. En realidad la polémica tuvo su origen en unas ligeras críticas que Fermat hizo a la Dióptrica de Descartes, obra que se publicó como apéndice al Discurso del Método. Descartes no tardó en contraatacar descalificando el método de tangentes de Fermat con estas injustas y poco corteses palabras:

> *Car premiérement la sienne (c'est-à-dire celle qu'il a eu envie de trouver) est telle que, sans industrie et par hasard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour le rencontrer.*

Como consecuencia de ello Fermat escribió numerosos documentos para justificar su método, entre los cuales uno de los más significativos es el llamado *Methode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat a M. Descartes*, de junio de 1638. En esta memoria Fermat contesta a algunas objeciones de Descartes e intenta justificar, aunque de forma no muy clara, que el método de tangentes efectivamente deriva del de máximos y mínimos. Descartes había interpretado esta insistencia en el sentido de que la tangente era encontrada por Fermat como la recta que, en algún sentido, da el máximo desde un punto del eje de abscisas a la curva. Sin embargo Fermat en esta obra saca a colación sorprendentemente la normal, posiblemente influido por los trabajos del propio Descartes que había establecido un procedimiento general para el cálculo de la normal a una curva algebraica. Fermat calcula ahora la normal caracterizándola como la recta que da la longitud mínima. En efecto, dado un punto P sobre la curva $y = f(x)$, si calculamos el punto O del eje de abscisas de forma que la distancia OP sea la más corta desde O hasta la curva, entonces la recta OP es la normal a la curva en P.



De acuerdo con el dibujo, si $P(A, f(A))$, $O(B, 0)$ e $I(A-E, f(A-E))$, entonces el problema se resuelve escribiendo la adigualdad

$$(B-A)^2 + f(A)^2 \sim (B-A+E)^2 + f(A-E)^2$$

y aplicando el método de máximos y mínimos para obtener el mínimo buscado. De manera que, sin que en el *Methodus* se hubiese dicho nada al respecto, Fermat se saca ahora de la chistera que el vínculo entre máximos, mínimos y tangentes se establece a través del mínimo que proporciona la normal y, para justificarlo, escribe:

> *Es así [mediante la normal] como aplicaba mi método para encontrar tangentes, pero reconozco que tenía su defecto, a causa de que la línea OI, o su cuadrado, son difíciles de calcular por esta vía.*

Como el método de la normal presentaba este problema, Fermat añade que

> *era necesario encontrar uno que resolviera estas dificultades*

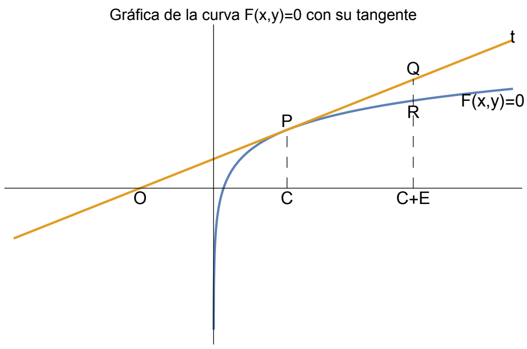
y así llegó a su método de tangentes. Además en esta obra calculó la tangente al "folium" de Descartes, un problema difícil que el propio Descartes no había podido resolver y que nosotros veremos enseguida. Fue a raíz de este trabajo que Descartes reconoció, bien que a regañadientes, la validez general del método de Fermat para las tangentes. Finalmente en su obra *Doctrinam tangentium* de 1640 Fermat no añade nada nuevo al algoritmo pero pone por escrito el procedimiento, en unas cortas pero significativas palabras, con una claridad incomparablemente superior a la de las dos memorias anteriores. Así escribe:

> *Nosotros consideramos de hecho en el plano de una curva cualquiera, las rectas dadas en su posición, de las que una se puede llamar diámetro y a la otra ordenada. Nosotros suponemos la tangente ya encontrada en un punto dado y consideramos mediante la adigualdad la propiedad específica de la curva, no sobre la curva misma, sino sobre la tangente a encontrar.*

Y más adelante continúa:

> *Eliminando siguiendo nuestra teoría de máximos y mínimos los términos que sean necesarios, llegamos a una igualdad que determina el punto de contacto de la tangente con el diámetro. Es decir, la tangente misma.*

Veamos como podemos aplicar este procedimiento a una curva $F(x, y) = 0$ cualquiera.



De acuerdo con la gráfica, sea $P(x_0, y_0)$ el punto de tangencia, $C(x_0, 0)$, $A = OC$ la subtangente y E una cantidad positiva que podemos suponer tan pequeña como queramos. Denotemos por t la tangente a la curva en el punto considerado y sea B la ordenada sobre la tangente del punto de abscisa $x_0 + E$, esto es, la ordenada de Q. Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{y_0}{A} = \frac{B}{A+E} \Longleftrightarrow B = y_0\left(1 + \frac{E}{A}\right)$$

Dado que cuando E es pequeño la ordenada B correspondiente a la abscisa $x_0 + E$ sobre la tangente será próxima a la que corresponde a esa abscisa sobre la curva $F(x, y) = 0$, esto es, la ordenada del punto R, la idea de Fermat es plantear la adigualdad

$$F(x_0 + E, B) \sim 0 \Longleftrightarrow F\left(x_0 + E, y_0\left(1 + \frac{E}{A}\right)\right) \sim 0$$

y a ella aplicarle su método de máximos y mínimos ya que cuando E se hace pequeño el punto $\left(x_0 + E, y_0\left(1 + \frac{E}{A}\right)\right)$ se acerca a (x_0, y_0) y los valores $F\left(x_0, y_0\left(1 + \frac{E}{A}\right)\right)$ se acercan a cero manteniendo, además, valores positivos o negativos según sea $F(x, y)$ mayor o menor que cero en el semiplano determinado por $F(x, y) = 0$ donde está la tangente.

A propósito de la evolución operada en el método de Fermat a lo largo de los años y que puede sintetizarse en la forma de explicarlo en las tres memorias que hemos mencionado, González Urbaneja señala en [4, pág. 130] que

> *la adigualdad empezaba a tener una vida propia, al comenzar una lenta transición entre la adigualdad como disfraz para ocultar los verdaderos fundamentos de los métodos de máximos, mínimos y tangentes, y la adigualdad como pseudo-igualdad, cuasi-igualdad o aproximadamente igual en el camino hacia lo infinitesimal.*

Esta evolución comenzaría en el documento *Methode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes* y se haría meridiana en la obra *Doctrinam tangentium*. Esta memoria representa por su contenido la más sofisticada versión del método de las tangentes, obteniendo las tangentes a las curvas clásicas cisoide, concoide y cuadratriz, así como la tangente a la curva más famosa del momento, la cicloide, que Fermat llama la curva de Roberval pues había sido estudiada intensamente por este, donde se aprecia en todo su esplendor la potencia de su método (Ver [4, pág. 148-153]).

No obstante los éxitos de Fermat, el método en puridad tiene una aplicación limitada, ya que la expresión de la curva $F(x,y) = 0$ debe ser tal que permita el desarrollo de las operaciones que deben realizarse para implementar el método de máximos y mínimos, en particular la cancelación de la cantidad E. Esto en principio no era posible para las curvas llamadas mecánicas, aunque como hemos dicho Fermat fue capaz de obtener la tangente para algunas de ellas. Nosotros vamos a ver, para terminar esta sección, dos importantes ejemplos realizados por Fermat: la tangente al "folium" de Descartes y la tangente a la elipse.

Ejemplo 3.3. *La subtangente al "folium" de Descartes $x^3 + y^3 = nxy$ es $A = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$.*

En efecto, si (x, y) es un punto cualquiera de la curva para el que queremos calcular la subtangente, debemos escribir, de acuerdo con el método,

$$F\left(x + E, y\left(1 + \frac{E}{A}\right)\right) \sim 0 \Longleftrightarrow (x+E)^3 + y^3\left(1 + \frac{E}{A}\right)^3 \sim n(x+E)y\left(1 + \frac{E}{A}\right)$$

Desarrollando queda:

$$x^3 + 3x^2E + 3xE^2 + E^3 + y^3\left(1 + \frac{3E}{A} + \frac{3E^2}{A^2} + \frac{E^3}{A^3}\right) \sim nxy + nxy\frac{E}{A} + nEy + \frac{nE^2y}{A}$$

Teniendo en cuenta que (x, y) es un punto de la curva y, por tanto, $x^3 + y^3 = nxy$ y agrupando términos obtengo:

$$E\left(3x^2 + \frac{3y^3}{A} - \frac{nxy}{A} - ny\right) + E^2\left(3x + \frac{3y^3}{A^2} - \frac{ny}{A}\right) + E^3\left(1 + \frac{y^3}{A^3}\right) \sim 0$$

Dividiendo por E, haciendo luego $E = 0$ e igualando a cero obtenemos:

$$3x^2 + \frac{3y^3}{A} - \frac{nxy}{A} - ny = 0$$

de donde sigue que $A = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$. □

Ejemplo 3.4. *La subtangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es $A = -\dfrac{a^2y^2}{b^2x}$.*

En efecto, si (x, y) es un punto cualquiera de la curva para el que queremos calcular la subtangente, debemos escribir, de acuerdo con el método,

$$F\left(x + E, y\left(1 + \frac{E}{A}\right)\right) \sim 0 \Longleftrightarrow \frac{(x+E)^2}{a^2} + \frac{y^2\left(1 + \frac{E}{A}\right)^2}{b^2} \sim 1$$

Desarrollando queda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{E^2}{a^2} + \frac{2xE}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2E^2}{A^2b^2} + \frac{2y^2E}{Ab^2} \sim 1$$

Teniendo en cuenta que (x, y) es un punto de la curva y, por tanto, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y agrupando términos obtengo:

$$E\left(\frac{2x}{a^2} + \frac{2y^2}{Ab^2}\right) + E^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{y^2}{b^2A^2}\right) \sim 0$$

Dividiendo por E, haciendo luego $E = 0$ e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y^2}{Ab^2} = 0$$

de donde sigue que $A = -\frac{a^2y^2}{b^2x}$. □

Para finalizar debemos mencionar que el método de tangentes de Fermat tuvo una enorme importancia para la invención del cálculo infinitesimal por parte de Newton. En una carta de este descubierta en 1934 escribe [3, pág. 107]:

> *La indicación [para la invención del cálculo] me vino del método de Fermat para las tangentes. Aplicándolo a las ecuaciones abstractas directa e inversamente, yo lo hice general.*

4. El método de Barrow para el cálculo de la tangente.

Isaac Barrow (1630-1677) fue el predecesor de Newton en la cátedra lucasiana de la Universidad de Cambridge y, como tal, fue maestro de Newton. Las frecuentes discusiones entre maestro y discípulo y la mutua colaboración entre ambos, que puede verse por ejemplo en el hecho de que Newton revisó y corrigió una de las ediciones de las *Lectiones Geometricae* de Barrow, fueron hechos que sin duda contribuyeron al posterior desarrollo por parte de Newton de las ideas que le llevaron a su método de fluxiones, lo que hoy llamamos el cálculo infinitesimal.

Barrow recibió las órdenes sagradas, pero dedicó gran parte de su vida a la enseñanza de las matemáticas, ocupando en 1662 una plaza de profesor de geometría en el Gresham College de Londres y, a partir de 1663, la mencionada cátedra lucasiana de la Universidad de Cambridge, siendo, de hecho, el primero en ocuparla. Desde el punto de vista matemático Barrow reivindicaba el regreso al rigor de la geometría clásica, considerando que el álgebra debería formar parte más de la lógica que de la propia matemática. Esta admiración por la matemática griega le empujó a realizar ediciones de las principales obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio y Teodosio, a las que acompañaba con numerosos comentarios.

Al mismo tiempo Barrow preparaba sus propias obras, las *Lectiones opticae* de 1669 y las *Lectiones geometricae* de 1670. En esta última ya colaboró, como hemos señalado, su joven alumno Isaac Newton. En estas obras Barrow ofreció una panorámica de la situación de los métodos infinitesimales en su época, obteniendo numerosos teoremas geométricos, en parte nuevos, que representaron en conjunto un gran avance para el cálculo. Allí encontramos problemas de cuadraturas, de tangentes o de rectificación de curvas, así como la primera demostración de lo que hoy llamamos el teorema fundamental del cálculo integral, es decir, el carácter inverso de los problemas de tangentes y cuadraturas.

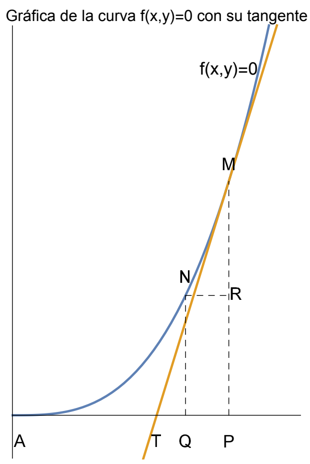
Debido a su reticencia al proceso de algebrización de la matemática que se estaba produciendo en su época, Barrow apenas utiliza en sus obras el simbolismo algebraico y aritmético tan característico de otros autores contemporáneos suyos. De esta forma renunció al gran avance que suponía la geometría analítica y se impuso un lenguaje geométrico oscuro y difícil que terminó por ocultar la importancia y el carácter novedoso de los resultados que obtuvo. Esto ha restado crédito a su reconocimiento, por parte de algunos historiadores de la matemática, como el principal precursor, junto con Fermat, del cálculo infinitesimal. Nosotros pensamos, sin embargo, que de todos los grandes matemáticos del siglo XVII anteriores a Newton y a Leibniz, Barrow fue posiblemente el que más cerca estuvo de alumbrar el cálculo infinitesimal y si no lo hizo fue precisamente por su desprecio del álgebra y, en particular, de la geometría analítica.

En esta sección vamos a desarrollar el método de Barrow para la determinación de tangentes, un algoritmo singular en su obra precisamente por su enfoque algebraico. El método de Barrow, que podemos llamar diferencial, utiliza el famoso triángulo que Leibniz llamó característico, ya utilizado antes por Torricelli y Pascal, entre otros, y que es la piedra angular del desarrollo del cálculo de Leibniz. El método de tangentes de Barrow se incluye como apéndice a la Lección X de sus *Lectiones Geometricae*, que encabeza, bastante modestamente, con las siguientes palabras:

> *Simplemente a esto añadiremos, en forma de apéndice, un método de cálculo para hallar tangentes utilizado frecuentemente por nosotros, aunque no sé muy bien si después de tantos métodos bien conocidos y muy trillados de los tipos anteriores, hay o no alguna ventaja en hacerlo. No obstante, lo hago siguiendo el consejo de un amigo [posiblemente Newton], y de buena gana, puesto que parece ser más útil y general que los que he expuesto.*

Y a continuación Barrow pasa a explicar su método de la siguiente forma:

> *Sean AP y PM dos líneas rectas dadas, PM cortando a la curva dada en M, y supongamos que MT corta a la curva en M y a la recta AP en T.*



"En orden a encontrar el segmento PT [es decir, la subtangente] consideremos un arco de la curva MN infinitamente pequeño. Tracemos NQ y NR paralelas, respectivamente, a MP y AP. Sean $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$ y $NR = e$ otros segmentos determinados por la naturaleza de la curva. Comparamos MR con NR por medio de una ecuación obtenida por el cálculo. A continuación observamos las siguientes reglas:

Regla 1. En el cálculo omitiremos todos los términos conteniendo potencias [superiores a uno] de a o e, o productos de ellos.

Regla 2. Después de formar la ecuación, desecharemos todos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen a o e (estos términos pasándolos a un lado de la ecuación serán siempre igual a cero).

Regla 3. Se sustituye m (o MP) por a y t (o PT) por E, de aquí se encontrará la cantidad PT".

Analicemos las reglas de Barrow. Si denotamos $AP = p$, entonces, las coordenadas de los puntos M y N serán, respectivamente, $M(p, m)$ y $N(p-e, m-a)$. Dado que ambos puntos están sobre la curva $f(x, y) = 0$ deberán verificar que

$$f(p, m) = f(p-e, m-a) = 0$$

A continuación vamos a aplicar las tres reglas:

Regla 1. De la ecuación $f(p-e, m-a) = 0$ vamos a eliminar todos los términos que contienen potencias superiores a uno de e o de a, así como los productos de ellos (incluidos los productos de e y a). El motivo para esta regla es que estos términos se consideran infinitesimales respecto de los restantes y, por tanto, pueden ser despreciados.

Regla 2. Se ignoran todos los términos que no contienen e o a, puesto que esos términos son los obtenidos de $f(p, m)$ que ya sabemos que es igual a cero.

Regla 3. Se sustituye m por a y t por e, de aquí se encontrará la cantidad PT. Se utiliza aquí que el triángulo MTP y el triángulo infinitesimal MNR son semejantes y, por tanto, $a/e = m/t$ de donde, teniendo en cuenta que m es un dato del problema, podemos hallar la subtangente t. Merece la pena mencionar que si N está en la curva, el triángulo MNR no es "exactamente" semejante a MTP y realmente estamos identificando el punto N con el punto sobre la tangente que corta al segmento NR y que está "muy próximo" a N. Esta idea, que es la esencia de su método, Barrow la expresa de la siguiente forma:

> *Si el arco MN es infinitamente pequeño, podemos sustituir con seguridad dicho arco por un pequeño trozo de la tangente.*

Vemos, por tanto, cómo Barrow está aplicando el triángulo característico bajo la idea de que la tangente es la posición límite de las secantes cuando a y e se aproximan a cero (o sea, cuando N se aproxima a M), aplicando el límite en el paso 1 cuando elimina los infinitésimos de orden superior.

Barrow aplicó su método de tangentes a un gran número de curvas. Nosotros veremos, para ilustrar el método, dos ejemplos: la kappa curva y el folium de Descartes.

Ejemplo 4.1. *La subtangente a la kappa curva* $x^2(x^2+y^2) = r^2y^2$ *es* $t = \dfrac{y^2(r^2-y^2)}{x(2x^2+y^2)}$.

En efecto:

Regla 1. Partimos de

$$(x-e)^2\left((x-e)^2+(y-a)^2\right) = r^2(y-a)^2$$

y desarrollando queda

$$(x^2+e^2-2xe)(x^2+e^2-2ex+y^2+a^2-2ya) = r^2y^2+r^2a^2-2r^2ay$$

Eliminamos los términos que contienen potencias superiores a uno de e y de a, así como productos de e y a o sus potencias. Queda entonces:

$$x^4-4x^3e+x^2y^2-2x^2ya-2xy^2e = r^2y^2-2r^2ay$$

Regla 2. Dado que $x^4+x^2y^2 = r^2y^2$ ignoramos estos términos y queda:

$$-4x^3e-2xy^2e = 2x^2ya-2r^2ay \Longleftrightarrow a(2x^2y-2r^2y) = e(-4x^3-2xy^2)$$

Así

$$\frac{a}{e} = \frac{4x^3 + 2xy^2}{2r^2y - 2x^2y} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(r^2 - x^2)}$$

Regla 3. Obtenemos finalmente que si llamamos m a la pendiente de la tangente se tiene que

$$m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(r^2 - x^2)}$$

de donde se obtiene que $t = \dfrac{y^2(r^2 - y^2)}{x(2x^2 + y^2)}$. □

Ejemplo 4.2. *La subtangente al "folium" de Descartes $x^3 + y^3 = nxy$ es $t = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$.*

En efecto, partimos de

$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = n(x - e)(y - a)$$

Desarrollando queda:

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = nxy - nxa - ney + nea$$

Eliminamos los términos con potencias superiores a uno de e o de a, así como los productos de e y a o sus potencias. Queda:

$$x^3 - 3x^2e + y^3 - 3y^2a = nxy - nxa - ney$$

Teniendo en cuenta que $x^3 + y^3 = nxy$ sigue que

$$-3x^2e - 3y^2a = -nxa - ney \Longleftrightarrow a(nx - 3y^2) = e(3x^2 - ny)$$

es decir,

$$\frac{a}{e} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}$$

Así finalmente obtenemos que

$$m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}$$

de donde $t = \dfrac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$, que es la fórmula buscada y que lógicamente coincide con la que más de veinte años antes que Barrow había obtenido Fermat. □

Como vemos, el método de cálculo de tangentes de Barrow es ya, esencialmente, el que utilizamos en nuestro cálculo diferencial, donde las letras a y e han sido sustituidas por dy y dx o Δy e Δx, respectivamente. Pero la mecánica del algoritmo es muy parecida a la de Fermat en la forma que se recoge en su obra *Doctrinam tangentium* que comentamos en la sección anterior. Según todos los indicios, Barrow no conocía directamente la obra de Fermat, al que no cita en ningún momento, pero es razonable pensar que le llegaran noticias de su trabajo a través de otros matemáticos. En cualquier caso, el propio Newton que, como hemos dicho, trabajó muy estrechamente con Barrow, reconocía que el algoritmo de este no era más que el de Fermat ligeramente mejorado. Pero sin duda, formalmente, el procedimiento de Barrow es ya la antesala del cálculo diferencial, pues en él juega un papel esencial el triángulo característico, concebido como un triángulo de lados infinitesimales, que es la clave sobre la que Leibniz construyó poco después su teoría. Debemos señalar, asimismo, que tanto el método de Fermat como el de Barrow presentan serias dificultades conceptuales, problemas que fueron luego comunes a todo el cálculo infinitesimal y que precisaban para su formalización de la introducción del concepto de límite, que no se produjo hasta el siglo XIX. Afortunadamente estos problemas de rigor no detuvieron a los grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII que estaban seguros de la veracidad de sus resultados, aunque no pudieran dar demostraciones de los mismos impecablemente lógicas como se hacía en la matemática griega.

Para terminar debemos insistir en que tanto el método de Barrow como el de Fermat eran de aplicación limitada. Funcionaban bien en general, como hemos visto en los ejemplos que hemos presentado, para curvas algebraicas, pero mostraban serios inconvenientes para las trascendentes que, como hemos señalado, había que ir resolviendo con procedimientos específicos para cada caso. Esta falta de generalidad en el algoritmo fue superada por el cálculo infinitesimal, pero eso no es objeto de este artículo. No obstante, Barrow obtuvo la tangente de algunas curvas mecánicas. Como ejemplo, vamos a aplicar el método de Barrow a la curva $y = \tan(x)$.

Ejemplo 4.3. *La subtangente a la curva* $y = \tan(x)$ *es* $t = \dfrac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$.

En efecto, partimos de

$$y - a = \tan(x-e) \iff y - a = \frac{\tan(x) - \tan(e)}{1 + \tan(x)\tan(e)}$$

Desarrollando queda:

$$\begin{aligned} &(y-a)(1+\tan(x)\tan(e)) = \tan(x) - \tan(e) \iff \\ &\iff y + y\tan(x)\tan(e) - a - a\tan(e)\tan(x) = \tan(x) - \tan(e) \end{aligned}$$

Utilizamos ahora que para e pequeño es $\tan(e) \sim e$ y obtenemos que

$$y + ye\tan(x) - a - ae\tan(x) = \tan(x) - e$$

Eliminamos los términos que contienen a ae y ya que $y = \tan(x)$ queda:

$$ye\tan(x) - a = -e \iff a = e(1 + y\tan(x))$$

es decir,

$$\frac{a}{e} = 1 + y\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Así finalmente obtenemos que

$$m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e} = 1 + \tan^2(x)$$

de donde $t = \dfrac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$, que es la fórmula buscada. □

Obsérvese que si en lugar de t buscamos m, es decir, y', lo que obtenemos es la fórmula de la derivada de la tangente $y' = 1 + \tan^2(x)$. Por este motivo algunos autores consideran que Barrow debería ser acreditado como el primero que calculó las derivadas de las funciones trigonométricas, crédito que habitualmente se atribuye a James Bernouilli, que calculó las derivadas de las funciones $\tan(x)$ y $\sec(x)$, y a Roger Cotes que en su obra *Harmonia mensurarum* de 1722 calculó las derivadas de las seis funciones circulares.

Referencias

[1] BOYER, C. B., *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, 2007.

[2] COOLIDGE, J. L., *The story of tangents*, American Mathematical Monthly, LVIII, 449-462, 1951.

[3] DURÁN, A. J., *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, 1996.

[4] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*, Nivola libros y ediciones, 2008.

[5] GRATTAN-GUINNESS, I., *Del cálculo a la teoría de conjuntos (1630-1910)*, Alianza Editorial, 1984.

[6] MARQUÉS DE L'HOSPITAL *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, Colección: MATHEMA, Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1998.

[7] STROMHOLM, P., *Fermat's Methods of Maxima and Minima and of Tangents. A reconstruction*, Archive for History of Exacts Sciences, 5, 47-69, 1968.

[8] REY PASTOR, J., BABINI, J., *Historia de la Matemática, volumen 2*, GEDISA, S.A., 1985.

Sobre el autor:
Nombre: José María Ayerbe Toledano
Correo electrónico: jayerbe@us.es
Institución: Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, España.