

## HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS PARA ENTENDER LOS FENÓMENOS SOCIALES : LOS TRABAJOS PIONEROS DE FLORENCE NIGHTINGALE

ESTUDIO ESTADÍSTICO SOBRE LA VIOLENCIA DE GÉNERO

PRECISIÓN EN LAS REGLAS DE CÁLCULO

## CUENTOS MATEMÁTICOS

PARAMETRIZANDO MUNDOS DE FANTASÍA

LA POSTAL DE DIDO

## JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

SCHWARZSCHILD Y LA TRAMA DE NUESTRO UNIVERSO: CIEN AÑOS DE PERSPECTIVA

MÚSICA, EN CLAVE GEOMÉTRICA, PARA UNA OBRA ARQUITECTÓNICA

FACTORES QUE DETERMINAN EL NIVEL DE ANSIEDAD HACIA LA MATEMÁTICA EN ALUMNOS DE NIVEL SUPERIOR

## EXPERIENCIAS DOCENTES

CRÍTICA DEMOCRÁTICA, UNA ASIGNATURA PENDIENTE

DIDÁCTICA CON R. MENOS CUENTAS Y MÁS PENSAMIENTO CRÍTICO

APLICACIÓN DE JUEGOS DIDÁCTICOS COMO METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA: UNA REVISIÓN DE LA LITERATURA

## INVESTIGACIÓN

UNA PROPUESTA DE FÓRMULA ELECTORAL MATEMÁTICAMENTE JUSTA

CONTROL CENTRALIZADO Y DESCENTRALIZADO DE EDIFICACIONES MEDIANTE ACRISTALAMIENTOS ACTIVOS

## HOMENAJE A:



VERA SPINADEL

## CRÍTICAS Y RESEÑAS

AVENTURAS DE UN MATEMÁTICO: MEMORIAS DE STANISLAW M. ULAM

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen VII, Número 1, Abril 2017

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y  
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC  
Foto de portada / Escalera en el Museo del Cubismo Checo en Praga (República Checa)  
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

# Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

y

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid



MAIIC

The logo features the letters 'MAIIC' in a bold, serif font. Above the letters is a stylized, dark arch that curves over the 'I' and 'C'. The background of the letters and the arch is a light, textured pattern.

Volumen VII, Número 1, ISSN 2174-0410

## Coordinación Comité Editorial

Mariló López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Javier Rodrigo Hitos

José Manuel Sánchez Muñoz

## Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Ascensión Moratalla de la Hoz,

Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Rosa María Herrera, Fernando Chamizo Lorente,

Luis Garmendia Salvador, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador,

Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla

1 de abril de 2017



# Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Vol. VII) ..... 1

## Investigación

Una propuesta de fórmula electoral matemáticamente justa ..... 007  
*Javier Rodrigo Hitos y Mariló López González*

Aplicación de métodos de decisión multicriterio discretos al análisis de alternativas en estudios informativos de infraestructuras de transporte ..... 019  
*Belén Moreno y Juan A. Hernández*

## Experiencias Docentes

Crítica democrática, una asignatura pendiente ..... 039  
*Elena Misa Borrego y Juan Núñez Valdés*

Didáctica con R. Menos cuentas y más pensamiento crítico ..... 053  
*Alejandro Galindo Alba*

Aplicación de juegos didácticos como metodología de enseñanza: Una Revisión de la Literatura ..... 075  
*Bryan Montero Herrera*

## Historias de Matemáticas

Matemáticas para entender los fenómenos sociales: los trabajos pioneros de Florence Nightingale ..... 093  
*Marta Macho Stadler*

Estudio estadístico sobre violencia de género ..... 107  
*Concepción López Baissón y Lucía Inglada-Pérez*

Precisión en las Reglas de Cálculo ..... 129  
*Jorge Luis Victoria*

## Juegos y Rarezas Matemáticas

Schwarzschild y la trama de nuestro universo: cien años de perspectiva ..... 149  
*José Rojo Montijano*

Música, en clave geométrica, para una obra arquitectónica ..... 157  
*Ascensión Moratalla y David Guillén*

Factores que determinan el nivel de ansiedad hacia la matemática en alumnos de nivel superior ..... 165  
*Arturo García-Santillán, Jutta Schnell y Jesica Ramos-Hernández*

## Cuentos Matemáticos

Parametrizando mundos de fantasía ..... 181  
*Patricia Minguito y Ascensión Moratalla*

La postal de Dido ..... 193  
*Franco Bagnoli*

## Críticas y Reseñas

Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw M. Ulam ..... 199  
*Santiago Higuera de Frutos*

## Homenaje

Vera Spinadel .....	203
<i>Camila Offenhenden, Nadia Horta y Omar Grandoso</i>	

# Editorial del Número 1 (Vol. VII)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 001-006, ISSN 2174-0410  
Recepción: 3 Mar '17; Aceptación: 24 Mar '17

1 de abril de 2017

## Resumen

El Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático organizó los días 17 y 18 de junio de 2016 la cuarta edición de las Jornadas Internacionales "Matemáticas Everywhere". En el anterior número se presentaron algunos de los trabajos expuestos en dichas Jornadas. En este nuevo número se presentan los trabajos que no se publicaron en el anterior, junto con otros recibidos durante estos últimos seis meses.

## Abstract

The Educational Innovation Group Mathematical Thinking organized on 17<sup>th</sup> and 18<sup>th</sup> of June 2016 the fourth edition of the International Conference "Mathematics Everywhere". Some of the articles presented in this Conference are published in this number besides other that we receive during these last six months.

## Investigación

En "*Una propuesta de fórmula electoral matemáticamente justa*" se propone un sistema de reparto de escaños que no penalice tanto a los partidos pequeños como lo hace el sistema de reparto que se utiliza en las elecciones en España. Para ello se realiza un reparto basado en un sistema de resto mayor (el cociente Hare), más proporcional que el sistema D'Hont vigente en España y, como novedad principal, se cambia el orden en que se hace la distribución de escaños: primero se realiza el reparto a nivel general y luego se distribuyen los escaños de los partidos por las distintas circunscripciones, para evitar la pérdida de votos por circunscripciones (votos que no dan escaños) que tienen los partidos pequeños en el sistema de reparto actual.

En "*Control centralizado y descentralizado de edificaciones mediante acristalamientos activos*" (figura 1) se expone como los acristalamientos activos con agua se caracterizan por tener una cámara de agua que absorbe la energía solar y la transporta a un depósito de inercia o al resto del edificio. De esta manera, la envolvente del edificio se convierte en un elemento colector de energía. La gestión de la energía transportada y las estrategias de ahorro energético se articulan a través de un sistema de control. Generalmente, los sistemas de control de climatización de las edificaciones son sistemas centralizados y la estrategia de ahorro energético está diseñada *a priori*.

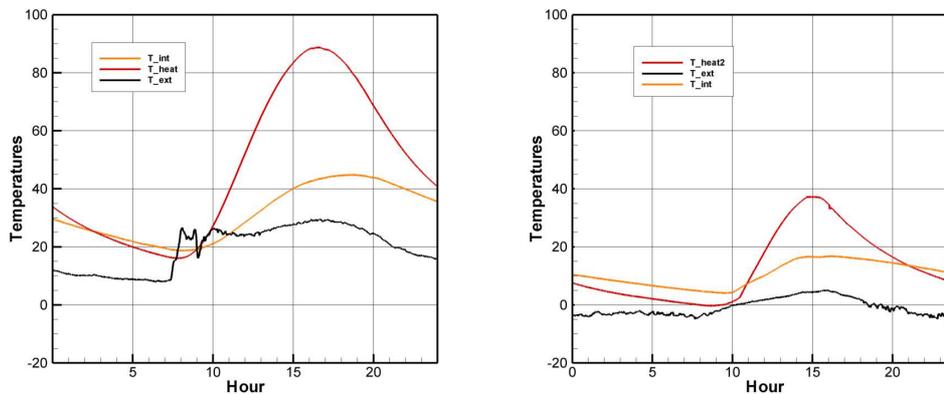


Figura 1. Temperaturas de estancamiento de la cámara de agua de un acristalamiento de cubierta de 30° dependiente y con 150° de orientación. Datos reales 9 de mayo de 2012 y 26 de noviembre de 2013.

## Experiencias Docentes

En *“Crítica democrática, una asignatura pendiente”*, los autores presentan una reflexión sobre la enseñanza de contenidos transversales en educación política que pueden aplicarse a las unidades didácticas de Estadística de los últimos años de la E.S.O. y los cursos de Bachillerato. Se pretende a su vez hacer más interesantes al alumnado dichos contenidos, los cuales suelen ubicarse a final de curso, con las dificultades que ello conlleva, potenciando el trabajo en equipo, la investigación y el uso de las TIC’s.

En *“Didáctica con R. Menos cuentas y más pensamiento crítico”*, se pone de manifiesto que la estadística cada vez está tomando un papel más relevante en el desarrollo de la sociedad moderna. La crisis bursátil, las encuestas electorales, el manejo y clasificación de la información, la ciencia del dato o el Big Data son solo algunos ejemplos para entender la necesidad de tener una sólida cultura estadística para poder analizar nuestro entorno desde un punto de vista crítico y fundamentado.

Por todo ello, el objetivo de la comunicación es introducir una propuesta para la mejora de la didáctica de la estadística. Esta nos permitirá manejar un gran volumen de datos reales, evitar el uso de la calculadora, la visualización de gráficos y el análisis crítico de los resultados. Todo ello a través de un software libre, destinado hasta hoy a Estudios Superiores (figura 2).

En *“Aplicación de juegos didácticos como metodología de enseñanza: Una Revisión de la Literatura”*, se pone de manifiesto que la sociedad ha evolucionado y esto también incluye a la educación, las metodologías tradicionales (conductistas) ya no generan el deseo de aprender sino más bien aburrimiento y desmotivación, por lo que son necesarias nuevas y mejores estrategias para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, uno de esos métodos es por medio de la aplicación de juegos educativos en el aula. Este trabajo ofrece un análisis de los diferentes temas relacionados con el juego en el aprendizaje permitiendo hacerse una idea del papel que pueden tener cuando son más las instituciones que hacen uso de ellos como una forma de enseñanza.

## Historias de Matemáticas

En *“Matemáticas para entender los fenómenos sociales: los trabajos pioneros de Florence Nightingale”*, se hace un repaso de la vida de Florence Nightingale (1820-1910), conocida, sobre todo, como fundadora de la enfermería moderna y por su contribución a la reforma de las condicio-

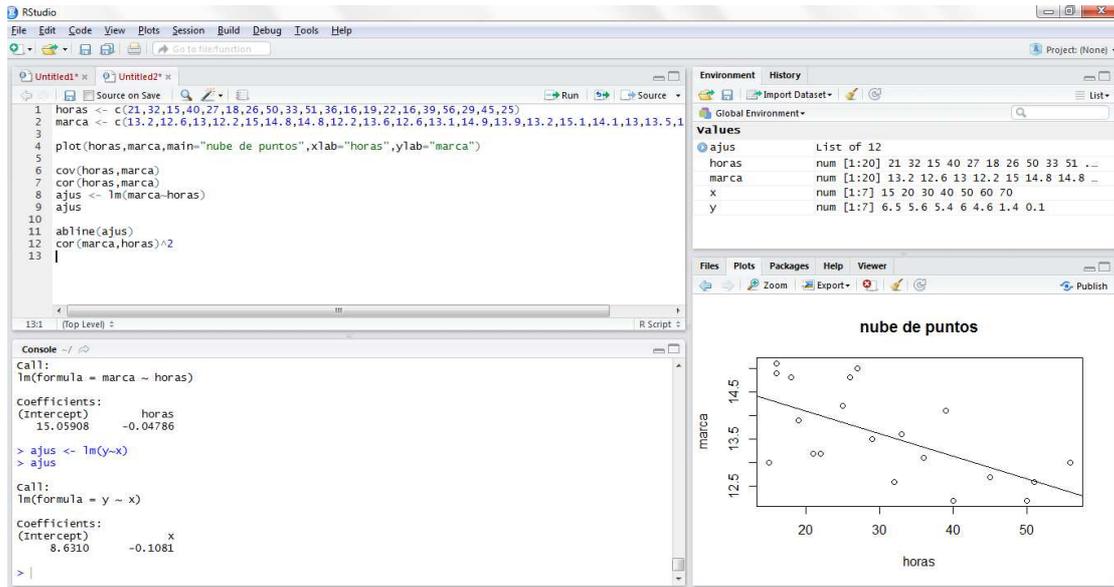


Figura 2. R-Studio.

nes sanitarias de los hospitales de campaña. Fue además precursora en la representación visual de la información: con sus técnicas evidenció que una buena utilización de la estadística puede llevar a mejoras en las prácticas médicas.



Figura 3. Florence Nightingale con un grupo de enfermeras.

*“Precisión en las Reglas de Cálculo”* presenta una visión global de este “utensilio”. Las reglas de cálculo logarítmicas han sido durante años el instrumento de cálculo preferido por ingenieros y técnicos, usándose ampliamente hasta el advenimiento de las calculadoras científicas portátiles. Hoy día las reglas de cálculo ya en desuso, están despertando un renovado interés entre grupos de educadores que redescubren sus muchos valores pedagógicos para la enseñan-

za de las matemáticas. A su vez, las reglas de cálculo son un perfecto ejemplo de matemáticas aplicadas, y el uso de las mismas en la enseñanza puede ser llevado todavía un paso más allá complementándolo con estudios sobre el instrumento en sí mismo. Uno de los términos universalmente asociados a las Reglas de Cálculo es el de “Precisión”, sin embargo generalmente fue usado de manera vaga y meramente intuitiva, por lo cual merece un estudio más detallado.

El presente artículo expone una breve reseña de los distintos aspectos que participan del concepto de precisión de una Regla de Cálculo. Se enfoca principalmente en analizar las particularidades del error de cálculo con escalas y su propagación, dada la especial naturaleza de la Regla de Cálculo y de su operación. Posteriormente propone una metodología general para evaluar y comparar desde lo teórico el desempeño de distintas escalas utilizadas en las Reglas de Cálculo, así como evaluar métodos diferentes de realizar el mismo cálculo. Finalmente el artículo presenta ciertas conclusiones generales a tener en cuenta al diseñar o utilizar Reglas de Cálculo.

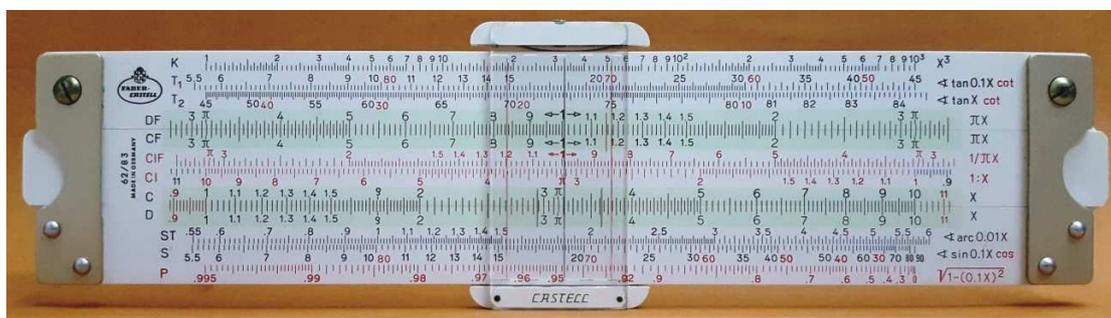


Figura 4. Regla de bolsillo de alta calidad.

## Juegos y Rarezas Matemáticas

Con ocasión del centenario de la muerte de Karl Schwarzschild, en *“Schwarzschild y la trama de nuestro universo: cien años de perspectiva”*, se revisa el influjo de la noción de agujero negro en la cosmología contemporánea, enfatizando las propiedades que emergen a partir de su métrica.

*“Música, en clave geométrica, para una obra arquitectónica”*, expone que de las muchas formas que puede inspirar una obra arquitectónica la composición de una obra musical, se propone en este trabajo una, que conjuga la esencia del diseño arquitectónico y la geometría.

*“Factores que determinan el nivel de ansiedad hacia la matemática en alumnos de nivel superior”*, presenta una investigación que tuvo como propósito la medición del nivel de ansiedad hacia las matemáticas en los alumnos de una escuela náutica en Veracruz, para lo cual se tomaron como fundamento los trabajos seminales de Fennema y Sherman (1976), así como los estudios recientes de García-Santillán, Escalera y Venegas (2013, 2014, 2015). Con este fin se utilizó la escala de Muñoz y Mato (2007) que mide cinco factores: ansiedad ante la evaluación, la temporalidad, la comprensión de problemas matemáticos, frente a los números y las operaciones matemáticas y ante situaciones matemáticas en la vida cotidiana. La encuesta se aplicó cara a cara a 202 estudiantes de los diferentes semestres de la escuela náutica Fernando Siliceo de la ciudad de Veracruz. La consistencia interna obtenida fue  $\alpha = 0,947$  individual y  $0.776$  agrupada (Hair et. al, 1991). Este estudio se abordó desde el paradigma cuantitativo no experimental de corte transversal utilizando el análisis factorial exploratorio como técnica para la medición de los datos (KMO,  $\chi^2$ ,  $\alpha = 0,05$ ).

## Cuentos Matemáticos

“*Parametrizando mundos de fantasía*” es un cuento ilustrado, muestra de cómo la modelización matemática de superficies es una herramienta de gran interés pedagógico por las posibilidades que ofrece de fomentar la creatividad.

PARAMETRIZANDO

MUNDOS

DE

FANTASÍA

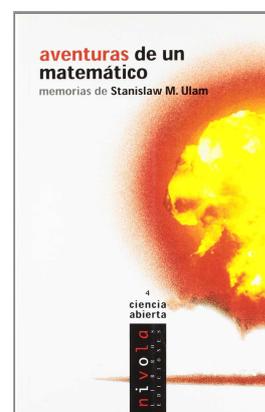


Figura 5. Ilustración del cuento.

En “*La postal de Dido*”, se expone cómo Dido resolvió el primer problema isoperimétrico de la historia, cortando una piel de toro, anudando las tiras y rodeando una porción de tierra donde construir Cartago. Pero su resultado puede mejorarse, y se puede demostrar cortando una postal de tal manera que sea posible que una persona pase a su través.

## Críticas y Reseñas

“*Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw M. Ulam*” hace una reseña del libro «*Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw M. Ulam*». Se trata de una autobiografía del matemático polaco Stanislaw M. Ulam, uno de los matemáticos más brillantes del siglo XX, fallecido en mayo de 1984. Ulam fue uno de los científicos que intervino en el *Proyecto Manhattan*, nombre en clave de un proyecto científico llevado a cabo durante la Segunda Guerra Mundial por los Estados Unidos con ayuda del Reino Unido y Canadá. El objetivo final del proyecto era el desarrollo de la primera bomba atómica antes de que la Alemania nazi la consiguiera. Ulam realizó diversas aportaciones a las matemáticas, entre las que destaca el desarrollo con John Von Neumann del Método de Montecarlo.



## Entrevistas



Figura 6. Vera Spinadel

*“Homenaje a Vera Spinadel”*. El pasado 26 de enero 2017 falleció la matemática argentina Vera Martha Winitzky de Spinadel, conocida por muchos de nosotros y participante en los CONGRESOS INTERNACIONALES DE MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA Y ARQUITECTURA, organizados por el Grupo de investigación MAIC (Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil) en E.T.S. Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid.

Como homenaje a esta matemática dedicada a Formas y Diseño, a Fractales y Caos, a los Números Metálicos y la Proporción Áurea en la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo de la Universidad de Buenos Aires durante 70 años, reproducimos el siguiente texto *“Con la cabeza en las nubes: entrevista con Vera Spinadel”* escrita por Camila Offenhenden, Nadia Horta y Omar Grandoso en la revista IF.

Su hija Laura Spinadel nos explica: *“Sus palabras en esta entrevista son una enseñanza de una Maestra con Mayúsculas”*.



Finalizaremos como siempre esta pequeña introducción a nuestro nuevo número con alguna que otra cita motivadora para nuestros lectores. Esperamos que disfrutéis de este nuevo número, agradecemos enormemente vuestro más que demostrado interés por participar en este gran proyecto y os invitamos una vez más a que nos hagáis llegar vuestros trabajos.

*“No os fiéis de las brujerías y atractivos diabólicos de las matemáticas.”*

Fenelón

El Comité Editorial

# Investigación

## Una propuesta de fórmula electoral matemáticamente justa

### A proposal of a mathematically balanced electoral system

Javier Rodrigo Hitos y Mariló López González

Revista de Investigación



Volumen VI, Número 2, pp. 007-018, ISSN 2174-0410

Recepción: 27 Abr'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de abril de 2017

#### Resumen

En este artículo se propone un sistema de reparto de escaños que no penalice tanto a los partidos pequeños como lo hace el sistema de reparto que se utiliza en las elecciones en España. Para ello se realiza un reparto basado en un sistema de resto mayor (el cociente Hare), más proporcional que el sistema D'Hont vigente en España y, como novedad principal, se cambia el orden en que se hace la distribución de escaños: primero se realiza el reparto a nivel general y luego se distribuyen los escaños de los partidos por las distintas circunscripciones, para evitar la pérdida de votos por circunscripciones (votos que no dan escaños) que tienen los partidos pequeños en el sistema de reparto actual.

**Palabras Clave:** Matemática aplicada a la política, Fórmulas electorales, cociente Hare.

#### Abstract

This paper proposes a system of distribution of the seats that is more balanced than the one applied in the Spanish elections. To do this, a distribution based in a largest remainder system (the Hare quotient) is performed. This yields a system that is more proportional than the D'Hont law. But the main contribution of the paper is the change in the order of the distribution of the seats: first an assignation of the seats in a general level is done and then the seats earned by each party are distributed along the circumscriptions. This avoids the loss of votes that the small parties suffer in each circumscription with the current system.

**Keywords:** Mathematics applied to the political science, electoral formulas, Hare quotient.

## 1. Introducción

Los sistemas electorales son necesarios para transformar los votos en escaños. Son, por tanto el conjunto de normas que hacen posible esa conversión de votos en los escaños asignados a los parlamentarios.

Es conocido el descontento de los partidos “pequeños” de implantación nacional con los actuales sistemas de reparto de escaños seguidos en los diferentes países, que suelen beneficiar a los partidos grandes y a los partidos nacionalistas, que concentran sus votos en una sola circunscripción. Tal es así que la mayoría de los partidos pequeños o medianos incluyen en sus programas la promesa de un cambio en el sistema electoral para que el reparto de los escaños se haga de una manera más proporcional al número de votos. Plataformas de movimiento ciudadano como Frente Cívico, también exigen en su ideario, como condición para dar su apoyo a un partido político, el compromiso de éste de llevar esta reforma en su programa electoral, ver [1].

A pesar de estas demandas, no parece que los partidos especifiquen claramente la manera de llevar este cometido a la práctica.

En el presente trabajo se repasan los principales sistemas de reparto de escaños seguidos en los distintos países y se hace una propuesta de lo que se considera un método de reparto novedoso y “aritméticamente” justo. Dicho método se pone en práctica para valorar cómo hubiese sido el mapa político resultante en las elecciones andaluzas del año 2015 si se hubiese aplicado esta metodología, comparándolo con el mapa político que se obtuvo en la realidad.

## 2. Repaso de las principales fórmulas electorales

La fórmula electoral es el cálculo matemático mediante el cual, en una votación, se distribuyen los escaños de una asamblea en función de los votos del electorado. Se clasifican en dos grandes tipos: mayoritarias y proporcionales. Algunas de las fórmulas electorales más conocidas son:

Dentro de las mayoritarias:

- Fórmula de la mayoría relativa
- Fórmula de la mayoría absoluta
- Voto alternativo
- Voto limitado
- Voto único no transferible
- Voto acumulativo
- Voto fraccionado o por puntuación

Dentro de las proporcionales:

- Voto único transferible
- Fórmulas de resto mayor (o fórmulas de cociente):
  - Cuota de Hare o Hare-Niemeyer
  - Cuota Imperiali
  - Cuota de Droop
  - Cuota de Hagenbach-Bischoff

- Fórmulas de promedio mayor (o fórmulas de divisor):
  - Fórmula D'Hondt
  - Fórmula de Sainte-Lague
  - Fórmula de Sainte-Lague modificada

Se comentan brevemente las características de ellas.

#### a) Mayoritarias:

Este tipo de fórmulas favorecen la hegemonía de los dos principales partidos en el Parlamento. Estados Unidos es el paradigma de los sistemas mayoritarios, aunque Francia o Gran Bretaña también hacen uso de él. En los sistemas mayoritarios, se gana gobernabilidad pero se pierde representatividad lo que propicia que el control del gobierno quede en manos de un solo partido.

#### b) Proporcionales:

Los escaños se distribuyen de manera más equitativa, teniendo en cuenta la fuerza de cada partido en las elecciones. Aún así, debemos destacar que aunque la proporcionalidad es una de las máximas de este sistema, la elección de fórmula electoral puede influir negativamente.

En los sistemas proporcionales se refleja mejor la pluralidad que suele envolver a las sociedades complejas de nuestro tiempo, se produce una mejor representatividad que en el caso de los sistemas mayoritarios. El poder ya no queda en manos de un solo partido, sino que suele ser compartido, lo que facilita las situaciones de negociación y consenso.

Las consecuencias derivadas, tanto del sistema mayoritario como del sistema proporcional son complejas y es difícil determinar cuál de los dos sistemas es mejor, puesto que dependerá de lo que queramos primar: gobernabilidad, capacidad del sistema de representar la diversidad, etc.

A continuación se detallan algunos de los sistemas proporcionales. Nos centraremos particularmente en ellos por ser los más usados en la actualidad por países de la Europa occidental, culturalmente más cercanos a la sensibilidad de los autores.

## 2.1. Ley d'Hondt

Es el sistema usado en España. El uso de éste junto con el reducido tamaño de las circunscripciones electorales, provoca que el español sea un sistema poco proporcional.

Otros países como Albania, Argentina, Austria, Bélgica, Brasil, Bulgaria, Chile, Colombia, República Dominicana, Croacia, República Checa, Dinamarca, Estonia, Finlandia, Hungría, Islandia, Israel, Japón, Países Bajos, Polonia, Portugal, Rumanía, Escocia, Serbia, Eslovenia, Turquía, Uruguay o Gales, entre otros, usan este sistema.

Como todo método de promedio mayor, se caracteriza por dividir a través de distintos divisores los totales de los votos obtenidos por los distintos partidos, produciéndose secuencias de cocientes decrecientes para cada partido y asignándose los escaños a los promedios más altos.

Tras escrutarse todos los votos, se calculan cocientes sucesivos para cada lista electoral. La fórmula de los cocientes es:

$$\text{cociente} = \frac{V}{s+1}$$

Donde  $V$  representa el número total de votos recibidos por la lista y  $s$  representa el número de escaños que cada lista se ha llevado de momento, inicialmente 0 para cada lista.

El número de votos recibidos por cada lista se divide sucesivamente por cada uno de los divisores, desde 1 hasta el número total de escaños a repartir. La asignación de escaños se hace ordenando los cocientes de mayor a menor y asignando a cada uno un escaño hasta que estos se agoten. A diferencia de otros sistemas, el número total de votos no interviene en el cómputo.

## 2.2. Fórmulas de resto mayor

En este sistema, tras escrutarse todos los votos, se divide el número de votos de cada lista entre un cociente que representa el número de votos requeridos para obtener un escaño. El resultado para cada partido se compondrá entonces de una parte entera y un resto fraccional. En primer lugar se asigna a cada lista un número de escaños igual a su parte entera. Esto dejará normalmente algunos escaños sin asignar. Entonces se ordenan los partidos en función de sus restos, y los partidos con mayores restos obtienen un escaño extra cada uno, hasta repartir todos.

Algunos de los sistemas de resto mayor son:

### a) Cociente Hare

Para  $n$  escaños con  $m$  votos se calcula el cociente mediante  $q = \frac{m}{n}$ , con  $q$  aproximado al entero más próximo.

Este cociente puede considerarse el más exacto desde el punto de vista matemático al ser más proporcional, por lo que favorece a los partidos pequeños.

### b) Cociente Droop

Para  $n$  escaños con  $m$  votos se calcula el cociente mediante la fórmula  $q = 1 + \frac{m}{n+1}$ , con  $q$  aproximado al entero más próximo.

### c) Cociente Imperiali

Para  $n$  escaños con  $m$  votos se calcula el cociente mediante la fórmula  $q = \frac{m}{n+2}$ , con  $q$  aproximado al entero más próximo. Favorece más a los partidos grandes.

Ejemplo:

Vemos las diferencias entre estas fórmulas con un ejemplo tomado de [2].

En él hay 8 partidos, A, B, C, D, E, F y G con los siguientes números de votos (en miles): A tiene 392, B tiene 311, C tiene 184, D tiene 73, E tiene 27, F tiene 12 y G tiene 2, para un total de 1000. Se reparten 21 escaños.

Los cocientes para las fórmulas de resto mayor presentadas serían en este caso:

$$\text{Hare: } q = \text{redondeo} \left( \frac{1000}{21} \right) = \text{redondeo} (47'6) = 48 ,$$

$$\text{Droop: } q = \text{redondeo} \left( 1 + \frac{1000}{22} \right) = \text{redondeo} (45'4) = 45 ,$$

$$\text{Imperiali: } q = \text{redondeo} \left( \frac{1000}{23} \right) = \text{redondeo} (43'4) = 43$$

Lo que da los siguientes repartos de escaños. Hare: 8, 6, 4, 2, 1, 0, 0; Droop: 8, 7, 4, 2, 0, 0, 0; Imperiali: 9, 7, 4, 1, 0, 0, 0. Nótese que cuanto menor es el cociente, más se favorece a los partidos grandes, ya que al dividir entre un número más pequeño pesa más su mayor número de votos. Por tanto el cociente Imperiali es el que más favorece a los partidos grandes y el cociente Hare es el más equitativo, con más partidos que acceden a los escaños.

### 3. Nueva fórmula electoral

En esta sección se desarrolla un método para el reparto de escaños basado en la fórmula de resto mayor con cociente Hare. Su principal aportación radica, más que en la forma de reparto del número total de escaños, en la forma en que distribuye dichos escaños en las circunscripciones: en el sistema electoral español se aplica la ley d'Hont en cada circunscripción para repartir escaños y los votos sobrantes, que no llegan a dar un escaño, se "tiran", lo que acarrea que a los partidos pequeños de implantación nacional, como Izquierda Unida, Ciudadanos o UPyD, cada escaño les "cuesta" un número de votos mucho mayor que a los partidos grandes (PP, PSOE) o a los partidos nacionalistas de implantación provincial (PNV, Coalición Canaria...). Nuestra propuesta es cambiar el orden a este modo de reparto. De esta forma, se propone asignar los escaños a nivel general de la manera más proporcional posible y luego "colorear" dichos escaños, es decir, distribuir los escaños de los partidos por las distintas circunscripciones según las proporciones de votos que obtuvieron en cada una de ellas, para conseguir un reparto justo por circunscripciones. Se entiende que un reparto justo por circunscripciones es aquél que cumple las siguientes condiciones:

- i) El número de escaños que se asigna a cada circunscripción es el que realmente le corresponde según la ley electoral.
- ii) Al repartir los partidos por circunscripciones, ningún partido puede quedar con un número de escaños distinto al que le correspondió al asignar los escaños a nivel general.
- iii) En cualquier circunscripción A en la que se reparten más (o igual número de) escaños que en una circunscripción B no puede haber ningún partido que tenga más porcentaje de votos en la circunscripción A que en la B, pero más escaños en la circunscripción B que en la A.

El procedimiento tiene entonces dos pasos:

- 1) Si  $m_i$  es el número de votos que obtuvo el partido  $i$  en las elecciones,  $m$  el número de votos totales que hubo en dichas elecciones y  $n$  el número de escaños totales que se repartían, se halla  $\frac{m_i n}{m}$  y al partido  $i$  se le da tantos escaños como la parte entera de este número (el

cociente de la división de  $m_i n$  entre  $m$ ). Los escaños que quedan se dan a los partidos para los que la parte fraccionaria de  $\frac{m_i n}{m}$  es mayor (los que obtienen mayor resto en la división de  $m_i n$  entre  $m$ . En caso de igualdad de restos para un solo escaño que repartir, se asigna el escaño al partido con mayor cociente).

Observación: El sistema de reparto del paso 1 es equivalente a un sistema de resto mayor con cociente  $q = \frac{m}{n}$ , que es como el cociente Hare sin redondear. A efectos prácticos es entonces equivalente al sistema de resto mayor con cociente Hare.

2) Se reparten los escaños del partido  $i$  entre las circunscripciones de la siguiente forma:

- a) Se ordenan de alguna manera las circunscripciones y se ordenan los partidos en orden creciente según el número de escaños obtenidos.
- b) Siguiendo el orden del apartado a), se hace una asignación inicial a cada partido de

número de escaños por circunscripción con la fórmula  $\left\lfloor \frac{n_i p_i}{\sum_j p_i^j} \right\rfloor$ , donde  $n_i$  es el

número de escaños asignados al partido  $i$  en el paso 1,  $p_i$  es el porcentaje del número total de votos que obtuvo el partido  $i$  en la circunscripción en que se están asignando escaños,  $p_i^j$  es el porcentaje de votos que obtuvo el partido  $i$  en la circunscripción  $j$  y  $\lfloor \rfloor$  representa la parte entera. Los escaños que quedan se dan a las circunscripciones para las que la parte fraccionaria de  $\frac{n_i p_i}{\sum_j p_i^j}$  es mayor. En caso de igualdad de partes

fraccionarias con un solo escaño que repartir, se asigna el escaño a la circunscripción con mayor parte entera.

Observación: El reparto de escaños en el apartado b se hace por porcentaje de votos, no por el número de votos como en el paso 1, para poder comparar de forma equitativa circunscripciones de distintos tamaños.

- c) Si en alguna circunscripción se ha repartido un número distinto de escaños del que la ley electoral le da, volver a repartir escaños a los partidos en esa circunscripción con la fórmula  $\left\lfloor \frac{n_i n_b}{n_r} \right\rfloor$ , donde  $n_i$  es el número de escaños asignados al partido  $i$  en el paso 1,  $n_b$  es el número de escaños que se le dio en b) a la circunscripción en que estamos y  $n_r$  es el número de escaños que realmente le corresponde a la circunscripción en que estamos. Los escaños que quedan se dan a los partidos para los que la parte fraccionaria de  $\frac{n_i n_b}{n_r}$  es mayor. En caso de igualdad de partes fraccionarias con un solo escaño que repartir, se asigna el escaño al partido con mayor parte entera, salvo si estamos en la última circunscripción, donde los empates se resuelven de la manera que más favorezca el que los partidos tengan el número de escaños asignados en el paso 1 (condición ii).

- d) Si tras el reparto de escaños por circunscripciones realizado en el apartado c) algún partido queda con un número de escaños distinto al que se le asignó en el paso 1, trasvasar escaños en alguna circunscripción (siguiendo el orden por circunscripciones de a) de un partido que haya salido con más escaños que los que les corresponden por el paso 1, a otro partido que haya quedado con menos escaños, hasta que todos los partidos tengan el número de escaños que realmente le corresponden, de forma que se siga cumpliendo la condición adicional de que partidos con más porcentaje de votos en una circunscripción no tengan menos escaños que partidos con menos porcentaje de votos en dicha circunscripción.
- e) Si después del reparto del apartado d) ocurre que hay un partido que en una circunscripción A tiene más porcentaje de votos pero menor número de escaños que en una circunscripción B, repartiéndose más escaños en la circunscripción A que en la B, trasvasar algún escaño de dicho partido de la circunscripción B a la A y trasvasar el mismo número de escaños de otro (u otros) partido de la circunscripción A a la B, para que las circunscripciones sigan teniendo el número de escaños que les corresponden, haciéndolo de forma que se cumpla, si es posible, la condición iii) y las establecidas en los apartados anteriores. Si no fuera posible, se omitiría este apartado e).

#### 4. Aplicación del método a las elecciones andaluzas

Vemos cómo se aplicaría el método de reparto de escaños expuesto en la sección anterior a un ejemplo real: las elecciones de la Comunidad andaluza que tuvieron lugar el año 2015. Los datos de números de votantes de cada partido, número totales de escaños a repartir, número de escaños en cada circunscripción y porcentajes de votos de los partidos en cada circunscripción, se obtuvieron de la página web oficial de dichas elecciones [3].

Seguimos los pasos del algoritmo para el ejemplo elegido. Como las leyes electorales suelen fijar un porcentaje mínimo de votos para considerar a los partidos, conocido como cláusula de exclusión, consideraremos a los seis partidos que obtuvieron mayor número de votos, aunque el procedimiento se puede hacer igual considerando a todos los partidos que obtuvieron votos:

1) El número de votos de los principales partidos fue el siguiente:

PSOE: 1408960, PP: 1063901, Podemos: 589902, Ciudadanos: 368861, IU: 273893, UPyD: 76636, por lo que el número total de votos de estos partidos es 3782153. El número de escaños que se repartieron fue 109: 12 en Almería, 15 en Cádiz, 12 en Córdoba, 13 en Granada, 11 en Huelva, 11 en Jaén, 17 en Málaga y 18 en Sevilla.

Entonces el número total de escaños que le corresponderían inicialmente al PSOE sería  $\left\lfloor \frac{109 \times 1408960}{3782153} \right\rfloor = 40$ . Siguiendo esta misma fórmula, los escaños iniciales para los demás partidos serían: PP: 30, Podemos: 17, Ciudadanos: 10, IU: 7, UPyD: 2. Quedan 3 escaños por repartir, que corresponden a los partidos con mayores partes fraccionarias, que son IU (del orden de 0.8), PP y Ciudadanos (del orden de 0.66, 0.63 respectivamente). En la tabla 1 se da el reparto final de escaños por el método expuesto comparado con el reparto de escaños que se dio en la realidad.

Tabla 1. Comparativa del número de escaños en las elecciones andaluzas según el método desarrollado y según el método actual.

Partido	Número de escaños con el nuevo método	Número de escaños reales
PSOE	40	47
PP	31	33
Podemos	17	15
Ciudadanos	11	9
IU	8	5
U P y D	2	0

2) Se distribuyen los escaños por circunscripciones:

a) Elegimos como orden para las circunscripciones el seguido en [3]: Almería, Cádiz, Córdoba, Granada, Huelva, Jaén, Málaga y Sevilla y ordenamos los partidos según el paso 1:

UPyD, IU, Ciudadanos, Podemos, PP y PSOE

b) Vemos el reparto de escaños por circunscripciones que da el apartado b) para el último partido, el PSOE. Sus porcentajes de votos en las circunscripciones según el orden de a) fueron: 32'84, 31'64, 35'97, 34'63, 40'96, 42'68, 30'11, 38'09. Por tanto su porcentaje total (suma de porcentajes) es 286'92 y el número de escaños que inicialmente corresponderían a Almería es  $\left\lfloor \frac{40 \times 32'84}{286'92} \right\rfloor = 4$ . Por la misma fórmula obtenemos el siguiente reparto inicial de escaños:

Almería: 4, Cádiz: 4, Córdoba: 5, Granada: 4, Huelva: 5, Jaén: 5, Málaga: 4, Sevilla: 5. Quedan 4 escaños por repartir, que van a Jaén (parte fraccionaria del orden de 0'9), Granada (parte fraccionaria del orden de 0'8), Huelva (0'7) y Almería (0'5). En la tabla 2 se refleja el reparto completo de escaños por circunscripciones que da este paso, junto con los porcentajes de voto obtenidos por cada partido:

Tabla 2. Reparto de escaños por circunscripciones tras el paso 2 b).

Partido circunscripción	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Jaén	Málaga	Sevilla	Total
PSOE	5 32'84	4 31'64	5 35'97	5 34'63	6 40'96	6 42'68	4 30'11	5 38'09	40 286'92
PP	5 36'99	3 24'02	4 27'33	4 30'02	4 26'45	4 29'08	4 28'34	3 22	31 224'23
Podemos	2 10'12	3 18'86	2 12'58	2 13'9	2 13'14	2 11'04	2 15'08	2 16'58	17 111'3

Tabla 2. Reparto de escaños por circunscripciones tras el paso 2 b).

Partido circunscripción	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Jaén	Málaga	Sevilla	Total
Ciudadanos	1 9'38	2 10'42	1 7'68	2 9'56	1 7'24	1 5'95	2 11,78	1 9'14	11 71'15
IU	1 4'18	1 6'69	1 10'01	1 6'09	1 6'25	1 5'73	1 7'37	1 7'02	8 53'34
UPyD	0 1'79	1 2'1	0 1'54	0 1'84	0 1'57	0 1'44	1 2'67	0 1'86	2 14'77
Total	14 95'3	14 93'73	13 95'11	14 96'04	14 95'61	14 95'92	14 95'35	12 94'69	

Obsérvese que el porcentaje total de votos no es el 100% en ninguna circunscripción, ya que no están contabilizados los porcentajes obtenidos por los partidos “residuales”, los que obtuvieron menos votos que UPyD

c) Vemos que en ninguna circunscripción coincide el número de escaños repartido con el número de escaños que corresponde a dicha circunscripción. Por ejemplo en Almería sobran 2 escaños, en Cádiz falta 1 ... Aplicamos para rectificar la fórmula de 2) c: el número de escaños que inicialmente le correspondería al PSOE en Almería sería  $\left\lfloor \frac{5 \times 12}{14} \right\rfloor = 4$ . De la misma forma obtendríamos que a IU y Ciudadanos no les correspondería ningún escaño, a Podemos 1 y al PP 4, por lo que quedan 3 escaños por repartir, que van a los partidos con mayores partes fraccionarias: IU y Ciudadanos con 0.8 y Podemos (0.7).

Cuando se llega a la última circunscripción, Sevilla, y se reparten inicialmente los escaños según las partes enteras, se observa que quedan 2 escaños por repartir y que a todos los partidos se les ha repartido el número de escaños que les corresponde, salvo al PP y al PSOE, que les falta uno, luego se les adjudica 1 escaño de los que quedan a cada uno y no hace falta hacer el paso 2 d). Se da además la circunstancia de que todos los partidos tienen la misma parte fraccionaria: 0.5, luego si se hubiera adjudicado los escaños sobrantes por mayor parte fraccionaria, también les hubieran correspondido al PP y al PSOE al deshacer el empate por número de escaños. En la tabla 3 se observa el reparto de escaños por circunscripciones tras el paso 2 c).

Tabla 3. Reparto de escaños por circunscripciones tras el paso 2 c) (reparto final).

Partido circunscripción	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Jaén	Málaga	Sevilla	Total
PSOE	4 32'84	5 31'64	4 35'97	4 34'63	5 40'96	5 42'68	5 30'11	8 38'09	40 286'92
PP	4 36'99	3 24'02	4 27'33	4 30'02	3 26'45	3 29'08	5 28'34	5 22	31 224'23

Tabla 3. Reparto de escaños por circunscripciones tras el paso 2 c) (reparto final).

Partido circunscripción	Almería	Cádiz	Córdoba	Granada	Huelva	Jaén	Málaga	Sevilla	Total
Podemos	2 10'12	3 18'86	2 12'58	2 13'9	1 13'14	1 11'04	3 15'08	3 16'58	17 111'3
Ciudadanos	1 9'38	2 10'42	1 7'68	2 9'56	1 7'24	1 5'95	2 11,78	1 9'14	11 71'15
IU	1 4'18	1 6'69	1 10'01	1 6'09	1 6'25	1 5'73	1 7'37	1 7'02	8 53'34
UP y D	0 1'79	1 2'1	0 1'54	0 1'84	0 1'57	0 1'44	1 2'67	0 1'86	2 14'77
Total	12 95'3	15 93'73	12 95'11	13 96'04	11 95'61	11 95'92	14 95'35	18 94'69	

e) Se observa que en ningún caso se dan las condiciones para aplicar este paso. Por ejemplo, el PSOE tiene en Sevilla más escaños que en Jaén teniendo menos porcentaje de votos, pero se justifica porque en Sevilla se reparten más escaños (18) que en Jaén (sólo 11). No hay por tanto que rectificar y el reparto de la tabla 3 es el reparto final de escaños.

## 5. Conclusiones

Las fórmulas para el reparto de escaños tras los distintos procesos electorales suelen estar envueltas en polémica, ya que en muchos países se adoptan fórmulas que, a pesar de ser proporcionales, tienen un sesgo que favorece a los partidos grandes y por tanto al bipartidismo.

Además, el sistema de reparto por circunscripciones aviva esta polémica, ya que los partidos medianos o pequeños que no tienen el voto muy concentrado se ven perjudicados, al perder muchos votos que no consiguen escaño en cada circunscripción.

Se han propuesto soluciones a estos dos problemas, tanto por determinados partidos políticos como desde la iniciativa privada (ver [4]), abogando por fórmulas de resto mayor más equitativas que la ley D'Hont vigente en España, como el cociente Hare y por una circunscripción única.

La novedad del presente trabajo es la de presentar un sistema de reparto de escaños que, "salvando" el sistema por circunscripciones y haciendo una distribución de escaños equitativa entre las mismas, resulta más proporcional y justo para los partidos pequeños que el que se sigue actualmente en España y otros países de la Europa Occidental.

Se ha aplicado además el sistema para revisar el reparto de escaños en las pasadas elecciones andaluzas, obteniéndose resultados interesantes: como se ve en la tabla 1, el reparto de escaños con nuestro método es más proporcional que el que se obtuvo en la realidad, rebajando el número de escaños que obtuvieron los partidos grandes, como el PP y el PSOE y

beneficiando a los partidos pequeños, como IU ó Ciudadanos, que tendrían un número de escaños más acorde con los votos obtenidos.

Es notable además constatar el hecho de que un partido como UPyD, que se quedó sin representación tras las elecciones andaluzas, tendría con el método expuesto dos escaños, por lo que seguiría teniendo representación parlamentaria.

Es cierto que el método creado no está exento de discusión. Se puede argumentar, por ejemplo, que el hacer un reparto de escaños más proporcional puede ser más justo que el sistema actual, por ser garante de las opciones políticas minoritarias, pero genera una fragmentación de las fuerzas políticas que puede llegar a ser contraproducente, por acarrear más situaciones de ingobernabilidad.

Este argumento es discutible, ya que también puede considerarse como ingobernable (ó al menos políticamente injusta) una situación en la que un partido, favorecido por el sistema de reparto de votos, obtenga una mayoría absoluta que le permita aplicar el rodillo parlamentario para aprobar sus propias leyes. La política al fin y al cabo tiene una gran parte de negociación, que resultaría favorecida en escenarios de mayor igualdad de fuerzas entre los partidos.

Volviendo al ejemplo de las elecciones andaluzas, con el reparto de escaños propiciado por el sistema D'Hont, el PSOE prácticamente obtuvo una mayoría absoluta que le permitió gobernar sin problemas. Con nuestro reparto de escaños, más proporcional, una coalición PP-Ciudadanos obtendría más escaños que el PSOE, lo que obligaría al PSOE a pactar con IU ó Podemos, lo que da más riqueza a la negociación política y la toma de decisiones.

Como línea futura de trabajo, se puede plantear la aplicación del método a las elecciones generales del 2015, para ver si el procedimiento tiene algunas carencias que no se hayan detectado en el ejemplo expuesto, más pequeño, y si en el caso de las elecciones generales, el reparto de escaños que propiciaría generaría más incertidumbre que el reparto que se dio, como pasa en las elecciones andaluzas, o si por el contrario nuestro reparto ayudaría a desatascar la situación actual de falta de acuerdo entre partidos.

## Referencias

- [1] Página web del programa del Frente Cívico:  
<http://www.frentecivicosomosmayoria.es/programa-base-del-frente-civico-somos-mayoria/>
- [2] Página web sobre la ley D'Hont: [https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema\\_d\\_27Hondt](https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_d_27Hondt)
- [3] Página web de las elecciones al parlamento de Andalucía 2015:  
<http://www.resultadoseleccionesparlamentoandalucia2015.es>
- [4] Página web sobre el reparto de escaños en las elecciones:  
<http://www.ciudadanoraso.com/electoral/index.php?metodo=hare>

**Sobre los autores:**

*Nombre:* Javier Rodrigo Hitos

*Correo Electrónico:* jrodrigo@upcomillas.es

*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Pontificia Comillas, España.

*Nombre:* Mariló López González

*Correo Electrónico:* marilo.lopez@upm.es

*Institución:* Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil y Naval. Universidad Politécnica de Madrid, España.

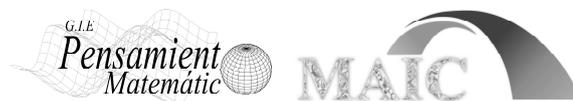
# Investigación

## Control centralizado y descentralizado de edificaciones mediante acristalamientos activos

### Centralized and decentralized control of buildings by means of water flow glazings

Belén Moreno y Juan A. Hernández

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 019–038, ISSN 2174-0410  
Recepción: 23 May'16; Aceptación: 1 Jul'16

1 de abril de 2017

#### Resumen

Los acristalamientos activos con agua se caracterizan por tener una cámara de agua que absorbe la energía solar y la transporta a un depósito de inercia o al resto del edificio. De esta manera, la envolvente del edificio se convierte en un elemento colector de energía. La gestión de la energía transportada y las estrategias de ahorro energético se articulan a través de un sistema de control. Generalmente, los sistemas de control de climatización de las edificaciones son sistemas centralizados y la estrategia de ahorro energético está diseñada *a priori*.

En este trabajo se definen los elementos básicos que tiene un sistema de control de control ya sea centralizado o descentralizado. Se definen un conjunto de termostatos simples y diferenciales que permiten programar la lógica de control en un lenguaje no informático y se explora la posibilidad de tener un sistema descentralizado basado en acristalamientos activos autónomos con inteligencia propia basada en un termostato simple. En el caso de un sistema de control centralizado, el sistema de control se implementa mediante un microcontrolador central que recibe los datos de todos los sensores y mediante un software empotrado decide las órdenes de actuación sobre el sistema. En el caso de un sistema con control descentralizado, el sistema de control está distribuido en cada uno de las componentes del sistema tales como los acristalamientos activos. Estos módulos disponen de un microcontrolador que mediante sus sensores propios decide con un lógica mucho más sencilla si el módulo debe circular y transportar energía. De cualquier forma, todos los microcontroladores reportan su estado a una unidad central que, posteriormente, se encarga de poner en la nube todos el estado del sistema a lo largo del tiempo.

Se estudia la necesidad de monitorizar el estado del edificio para poder evaluar los ahorros energéticos conseguidos y las estrategias emergentes en el caso de control descentralizado. Además, los datos de la monitorización permiten validar los modelos de simulación del comportamiento térmico del edificio.

**Palabras Clave:** control centralizado, control descentralizado, comportamiento emergente, ahorro energético, simulación, monitorización.

### Abstract

Water flow glazings are characterized by a water chamber which absorbs solar energy and transports it to a buffer tank. In this way, the envelope of the building harvests energy as a solar collector. Generally, control systems of buildings are centralized and energy strategies are previously designed.

In this work, basic elements of a decentralized or centralized control system are defined. Simple and differential thermostats are considered to program the logic of the control system. It is explored the possibility to have a decentralized control system based on intelligent water flow glazing modules. When considering centralized control systems, a central microcontroller unit reads different sensors and an embedded software controls the different parts of the system. When considering a decentralized control system, every module such as a water flow glazing has its own microcontroller to determine its flow rate. In any case, every microcontroller should report to a concentrator or hub its state. Later, this hub will upload periodically these data to the cloud.

It is shown the necessity to monitor the building to evaluate the energy savings as well as the emergent strategies associated to a decentralized control system. Besides, monitoring data allow to validate the simulation models for the thermal behaviour of the building.

**Keywords:** centralized control, decentralized control, emergent behaviour, energy saving, simulation, monitoring

## 1. Introducción

Generalmente, la climatización de un edificio se hace mediante un sistema centralizado en donde se recogen los valores de una serie de sensores y mediante una lógica de control se actúa sobre un conjunto de actuadores como pueden ser bombas de circulación o máquinas de frío o de calor. De esta manera, la lógica de control se articula desde un ordenador central como una serie de condiciones lógicas en cascada que se deben cumplir para encender o apagar el sistema de climatización. Si el edificio que se pretende climatizar es de una dimensión reducida, los resultados que se obtienen con un sistema de este tipo son aceptables. Mientras que si la dimensión y la complejidad del edificio es grande, la lógica de control se hace muy complicada y los resultados de confort y ahorro energético, generalmente, suelen ser deficientes.

En este trabajo se pretende sistematizar la climatización de un edificio mediante el control descentralizado y descentralizado. Aunque el control de la climatización centralizada es usual, en este trabajo se exponen los diferentes elementos de un sistema de control: sensores, actuadores y lógica de control. Posteriormente, se muestra cómo estas definiciones son válidas para los sistemas descentralizados y se expone la implementación de un sistema de control descentralizado. Es decir, se definen los componentes modulares, sus comunicaciones y sus reglas básicas de funcionamiento para que se enciendan y apaguen de manera autónoma.

Los sistemas de climatización ya sean centralizados o descentralizados disponen de software empotrado en una unidad central (sistemas centralizados) o en las diferentes componentes autónomas del sistema (sistemas descentralizados). Este software empotrado se encarga de leer los sensores, procesar su información mediante una lógica de control y determinar los valores de los actuadores.

Para poder analizar este comportamiento emergente debemos simular este tipo de sistemas descentralizados. Por una parte, simular la lógica de control de cada componente es algo muy sencillo puesto que se basa en copiar el mismo software empotrado a software simulación. Simular el comportamiento térmico de las componentes del sistema pasa por modelar los procesos de transferencia de calor e integrar numéricamente un sistema de ecuaciones. Esta puede llegar a ser una tarea mucho más complicada dependiendo de la componente considerada. De

cualquier forma, es necesario validar la herramienta de simulación mediante datos reales que se extraigan de una instalación piloto o instalación de pruebas.

El objetivo de este trabajo es clasificar y sistematizar el tipo de control de un sistema de climatización, definir los elementos de un sistema de control, definir las componentes modulares y la lógica de control ya sea en un sistema centralizado como en un sistema descentralizado.

## 2. Control de un sistema

Un sistema puede ser controlado de manera manual o de manera automática. La necesidad del control manual está asociada a situaciones imprevistas por el sistema automático o a la necesidad de la interacción del usuario con el sistema. La necesidad del control automático está asociada, generalmente, a la eficiencia del sistema y a la adaptación en tiempo real del sistema a las condiciones exteriores o interiores.

Atendiendo al control manual del sistema, éste puede clasificarse en:

1. Local. Se pretende controlar manualmente el sistema desde alguna interfaz gráfica de usuario que permita la interacción con el sistema en tiempo real.
2. Remoto. En este caso el usuario pretende controlar el sistema de forma remota y no se exige una interacción con el sistema en tiempo real.

La interfaz gráfica de usuario se implementa mediante una aplicación WEB y la comunicación está definida por un protocolo bidireccional HTTP. Esta interfaz permite al usuario: (i) definir la red de sensores, actuadores y elementos necesarios para el control, (ii) conocer el estado del sistema mediante una representación gráfica intuitiva y (iii) controlar el sistema manualmente mediante un "click" sobre los actuadores.

En el control manual se exige que el tiempo de latencia entre la orden emitida por el usuario y la acción ejecutada sea inferior a 100 mili segundos. Por lo tanto, es aconsejable que entre el sistema a controlar y el interfaz de usuario no exista ningún intermediario adicional y el protocolo de comunicación asegure los tiempos de latencia especificados. Generalmente, la interfaz de usuario se implementa como una aplicación WEB y se comunica con el sistema a través de la intranet de la propia edificación. En este caso el usuario actúa de cliente mediante cualquier navegador de páginas web y el sistema debe servir una página web. En la figura 1 se esquematiza el control manual local mediante un cliente (navegador) y un servidor de páginas web implementado en el sistema a controlar. El cliente para conocer el estado del sistema hace una petición de datos (GET) a la cual responde con el estado. Si el usuario en la aplicación web pulsa un actuador para encender o apagar una bomba, el cliente envía la información del botón pulsado (POST) y espera a que el servidor la procese y encienda la bomba.

En el control remoto no se exigen tiempos de latencia bajos y el tiempo que transcurre entre la emisión de la orden y la actuación del sistema pueden llegar a ser del orden de algunos minutos. Por el contrario, la principal dificultad que se suele encontrar en este tipo de sistemas es la dificultad para poder acceder desde el exterior a la IP del controlador del sistema. La razón suele estar asociada a que la IP del sistema no suele ser estática y por lo tanto puede ser desconocida, a problemas de seguridad que impiden abrir puertos específicos para acceder al sistema o a limitaciones impuestas por algún "proxy". Para evitar cualquier tipo de limitación anterior, se articula un servidor intermedio y se hace que el sistema actúa como cliente. Esta manera de proceder para el control remoto de nuestro sistema se esquematiza en la figura 1. en este caso, el sistema a controlar funciona como cliente enviando información (POST) de sus estado cada cinco minutos a un servidor conocido con IP fija y sin limitaciones de seguridad o puertos. Este servidor intermedio guarda el estado del sistema para cualquier cliente autorizado u usuario

que quiera conocer de forma remota el estado del sistema. De igual forma, si un usuario quiere actuar de forma remota en el sistema el servidor intermedio posibilita la acción. El usuario remoto mediante un navegador o "browser" (cliente) accede a la página web del servidor intermedio y pulsa un botón para encender una bomba. El navegador envía información (POST) al servidor intermedio. El servidor actualiza el estado con las nueva orden emitida y espera a que el sistema cada cinco minutos pide información (GET) del estado al servidor intermedio. Cuando la información de la orden de encender la bomba llega al sistema, el sistema la procesa y la bomba se pone a funcionar.

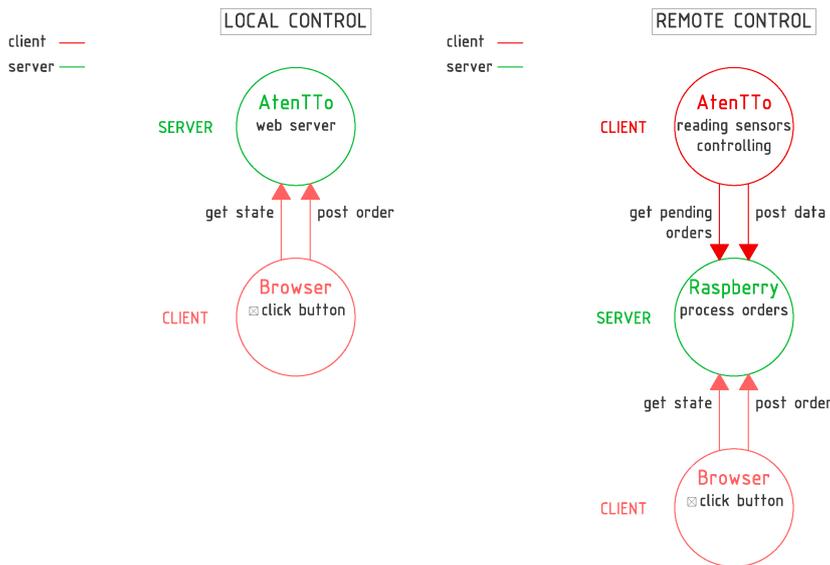


Figura 1. Control manual de un sistema: local y remoto.

Atendiendo al control automático del sistema, éste puede clasificarse en:

1. Centralizado. Existe un único microcontrolador que procesa las lecturas de los sensores y enciende o apaga los diferentes actuadores.
2. Descentralizado. Cada componente del sistema está gobernada por su propio microcontrolador que procesa lecturas de sus sensores y enciende o apaga el propio sistema.

En la figura 2 se representa esquemáticamente la arquitectura hardware asociada a un sistema centralizado y descentralizado. En los sistemas centralizados el microcontrolador lee la información de todos los sensores del sistema, la procesa y se encarga de enviar escribir las señales de los actuadores encendiendo o apagando las componentes del sistema. Entre sus ventajas está su sencilla operatividad, fácil instalación y coste reducido. Uno de sus problemas es que si el microcontrolador falla, el sistema deja de funcionar. Por otro lado, la determinación y la programación de las reglas o condiciones lógicas que controlan el sistema son muy extensas y difíciles de sistematizar.

En los sistemas descentralizados existe un microcontrolador por cada componente que se encarga de leer y procesar exclusivamente la información de sus sensores y actuadores. La realimentación entre las diferentes componentes se haya en las condiciones de contorno que comparten las diferentes componentes como pueden ser las condiciones climáticas interiores y exteriores y las temperaturas de entrada de los acristalamientos. Cada uno de los acristalamien-

tos activos del sistema cuenta con inteligencia propia y se puede encienden y apagan basados en unas reglas básicas.

Una de la ventajas de los sistemas descentralizados es que el software empotrado de las componentes modulares es mucho más sencillo que el software de la unidad central de proceso de los sistemas centralizados. Sin embargo, una de las desventajas de los sistemas descentralizados es el desconocimiento *a priori* del comportamiento emergente del sistema. Uno de los objetivos de este trabajo es simular el comportamiento emergente de un sistema descentralizado y analizar las estrategias emergentes desde el punto de vista de eficiencia energética.

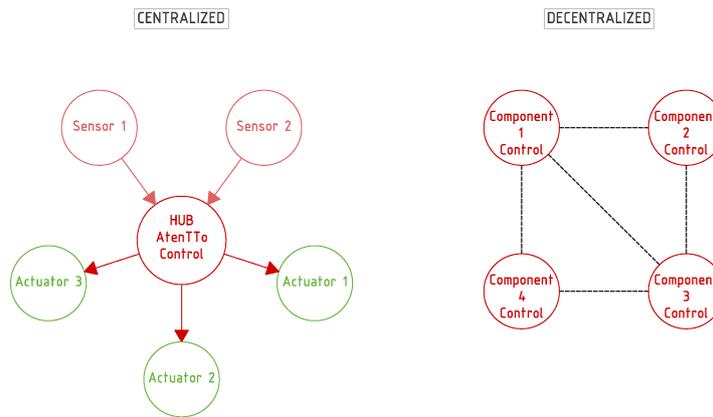


Figura 2. Control automático de un sistema: centralizado y descentralizado.

Con todos los datos centralizados, es muy fácil rediseñar el software empotrado de los controladores de cada acristalamiento con la idea de mejorar la eficiencia del conjunto. Las ventajas de un dispositivo distribuido son su seguridad de funcionamiento. Si una componente falla o se rompe, el sistema puede seguir funcionando casi sin percibir el fallo aislado. De manera espontánea, el sistema se reconfigura para dar un nuevo comportamiento.

Independientemente de que el sistema se encuentre descentralizado, todas las componentes del sistema o acristalamientos activos mandan mediante un enlace por radio frecuencia y de manera periódica la información de sus sensores y actuadores a una unidad central HUB o concentrador. Esta unidad central recopila toda la información del estado del conjunto y analiza el comportamiento global pudiendo así analizar la eficiencia energética del conjunto y alertar sobre posibles fallos o deficiencias en el comportamiento.

Es importante hacer notar que el comportamiento emergente del conjunto puede no ser el deseado. Es por esta razón, que debemos estudiar mediante simulación el comportamiento emergente del sistema para poder decidir sobre las reglas básicas de actuación de los acristalamientos activos. Para simular un sistema descentralizado, necesitamos dos tipos de software: (i) implementación del comportamiento físico de la componente y (ii) implementación de la lógica de control. Este último debe ser idéntico al software empotrado que tienen los microcontroladores de las componentes reales como los acristalamientos activos.

### 3. Elementos de un sistema de control

Todo sistema de control, ya sea centralizado o descentralizado, está formado por: un conjunto de sensores, un conjunto de actuadores y unas reglas de control que permiten actuar sobre el sistema de manera automática.

### 3.1. Sensores

Un sensor es un elemento del sistema capaz de medir una magnitud física mediante un efecto físico y transformarla en una señal eléctrica. El sistema de control en el que se encuentren los sensores vinculados, analiza el tipo de sensor y convierte la señal eléctrica en una magnitud física.

Las magnitudes físicas que miden estos sensores y que se consideran en este trabajo son: temperatura, humedad relativa, radiación solar, tensión y corriente eléctrica y consumo eléctrico. Desde el punto de vista práctico, los sensores se implementan mediante transductores que son dispositivos capaces de transformar o medir una energía asociada a un fenómeno físico a una señal eléctrica. De este manera, para definir un sensor se puede utilizar el fenómeno de la inducción electromagnética, mediante un transformador, para medir una corriente eléctrica. Por otra parte, existen fabricantes que encapsulan en dispositivos o en sensores diferentes fenómenos físicos. Mediante el "datasheet" suministrado por el fabricante se convierte la señal eléctrica a la magnitud física. De igual forma, existen en el mercado sensores que miden magnitudes analógicas como la temperatura y mediante un proceso interno la convierten en una señal digital con un protocolo determinado. Cualquiera de los sensores enumerados anteriormente se consideran en este trabajo.

Es importante hacer notar que una misma señal eléctrica no tiene porque estar asociada de manera directa a la magnitud de un sensor. Es decir, dependiendo la magnitud asociada a un sensor, éste puede tomar valores de diferentes transductores para dar una magnitud derivada de dos transductores. Por ejemplo, si queremos calcular la potencia eléctrica en el consumo de una línea debemos medir de manera separada dos transductores: la tensión de la red y la intensidad. Estas dos ondas suelen estar desfasadas y el valor del consumo real depende de la diferencia de fase de estas dos ondas. Así, se mide la intensidad y la corriente eléctrica por dos transductores diferentes y se define un sensor de potencia eléctrica a través de su expresión matemática en relación a la intensidad y la corriente eléctrica. Mientras que los transductores son elementos físicos, los sensores son abstracciones que se definen a través de las medidas de ciertos transductores. Es por esta razón que es importante definir las características de un sensor de la forma siguiente:

1. Etiqueta. La etiqueta es el nombre del sensor que nos permite identificar la magnitud medida. Es importante dotar de contenido semántico a las etiquetas para escribir el control del sistema de una manera mas sencilla. Por ejemplo, no conviene asignar etiquetas para la temperatura como  $T_{12}$  sino nombrar específicamente la temperatura que mide ese sensor en concreto.
2. Magnitud. La magnitud física del sensor considerado. Estas magnitudes pueden ser analógicas o infinitud de valores o digitales con solo dos posibles valores. Generalmente, los sensores digitales están asociados a interruptores o alarmas. Los sensores analógicos considerados en este trabajo pueden medir: temperatura, humedad relativa, radiación solar, intensidad y corriente eléctrica, consumo eléctrico.
3. Tipo. El tipo hace referencia al transductor físico asociado y al tipo de vinculación con el sistema. Así, existen los siguientes tipos:
  - a) RF22. Sensores inalámbricos que se vinculan de manera automática mediante radio frecuencia al concentrador o sistema de control.
  - b) OneWire. Sensores que se mandan su información por un cable con protocolo OneWire. El protocolo OneWire permite enganchar diferentes sensores OneWire en el mismo cable lo que permite la tomas de diferentes datos con un único cable. Estos sensores se vinculan de manera automática al concentrador o sistema de control.

- c) Analog. Sensores que suministran una señal eléctrica analógica. Estos transductores se conectan a el concentrador a través de puertos de lectura analógica. El concentrador dependiendo de su magnitud procesará la señal eléctrica para determinar el valor de la medida.
- d) Digital. Sensores que suministran una señal eléctrica digital. Estos transductores se conectan a el concentrador a través de puertos de lectura digital. En este caso, el concentrador transformará un nivel alto de voltaje de la señal digital en 1 y un nivel bajo en 0.
4. Dirección. La dirección de un sensor hace referencia a la ubicación hardware del mismo. Como hemos visto anteriormente, los sensores pueden ser cableados a sin cable. Para aquellos sensores analógicos con cable las direcciones posibles son: A0–A13 que son los 14 canales de lectura analógica que permite el concentrador. Sin embargo, si la magnitud de un sensor se deriva de dos transductores cableados en los canales A0 y A7, la sintaxis para la dirección de este sensor sería: A0:A7. Tanto la potencia eléctrica como el consumo eléctrico son magnitudes derivadas de la intensidad y la tensión eléctrica. Estos tipos de sensores admiten tanto una una dirección asociada a un canal (e.g. A7) como una dirección asociada a dos canales (e.g. A0:A7). En el primer caso se asume que la tensión eléctrica está en fase con la intensidad eléctrica y vale 230 v. Para los sensores digitales con cable, las direcciones posibles son: D30–D32 que son tres canales de lectura digital que permite el concentrador. Para los sensores de temperatura OneWire se reservan los puertos digitales D43–D50. En este caso, la dirección del sensor se determina de manera automática una vez los sensores hayan sido cableados a los puertos especificados. Para los sensores inalámbricos, las direcciones se determinan de manera automática siempre que los sensores inalámbricos hayan sido vinculados por software al concentrador.

Para facilitar definición de los sensores se ha diseñado una página WEB que permite modificar y seleccionar los diferentes sensores del sistema. En la figura 3 se muestran las características de los diferentes sensores que componen un sistema. En esta figura se muestra una tabla para los sensores donde las columnas son las características anteriormente descritas. Cada columna dispone de un menú desplegable que permite seleccionar la característica deseada. Por otra parte, cada magnitud lleva asociada un icono que permite entender a primera vista el valor de la variable medida.

Sensor	Show	Magnitude	Type	Address
Tp_IN	1	Temperature	OneWire	D46:28-16-15-81-4-0-0-91
Ts_OUT	4	Temperature	OneWire	D46:28-1-3C-C3-4-0-0-A3
Tp_OUT	2	Temperature	OneWire	D46:28-89-D0-81-4-0-0-F4
Ts_IN	3	Temperature	OneWire	D46:28-D5-F5-C3-4-0-0-6A
T_int	5	Temperature	OneWire	D46:28-D3-7F-C3-4-0-0-AE
T_ext	6	Temperature	OneWire	D46:28-FF-82-C3-4-0-0-2F
T_inside	7	Temperature	OneWire	D46:28-6B-7E-C3-4-0-0-C5
T_tank_bottom	23	Temperature	OneWire	D47:28-FF-82-6B-51-15-3-25
T_tank_middle	22	Temperature	OneWire	D47:28-FF-6E-65-51-15-3-CB
Aup	24	Temperature	OneWire	D47:28-FF-B5-68-51-15-3-78
T_tank_top	21	Temperature	OneWire	D47:28-FF-7D-7C-51-15-3-52
Adown	25	Temperature	OneWire	D47:28-FF-13-72-51-15-3-F4

Figura 3. Imagen de la aplicación WEB que permite introducir y seleccionar las características de los diferentes sensores que constituyen el sistema.

En la figura 4 y figura 5 se representan los iconos asociado tanto a las magnitudes físicas con-

tinuas: temperatura, humedad relativa, potencia eléctrica, consumo eléctrico y tensión eléctrica como a las magnitudes discretas: interruptor o alarma.

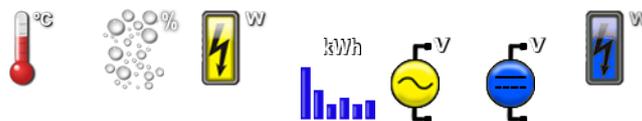


Figura 4. Diferentes iconos para sensores analógicos: temperatura, humedad relativa, potencia eléctrica, consumo eléctrico y tensión eléctrica.



Figura 5. Diferentes iconos para sensores digitales: botón o interruptor sin pulsar y pulsado, alarma inactiva y alarma disparada

### 3.2. Actuadores

Un actuador es un elemento del sistema dar una señal de apagado o encendido para un elemento del sistema como una bomba de circulación o una bombilla. El sistema de control determina el valor del actuador encendido (1) o apagado (0) y convierte la señal digital en una señal de tensión alta o baja. Esta señal de tensión alta o baja ataca una bobina de un relé y cierra un circuito para que una bomba funcione o una luz se encienda.

Las características que definen los actuadores son:

1. Etiqueta. La etiqueta es el nombre del actuador que nos permite identificar el dispositivo sobre el que actúa. Igual que ocurre con los sensores, es importante dotar de contenido semántico a las etiquetas para escribir el control mediante condiciones lógicas expresadas entre los valores de los sensores que determinan los valores de los actuadores.
2. Dispositivo. Esta característica define el dispositivo físico sobre el que actúa la señal eléctrica. Los dispositivos pueden ser: una bomba hidráulica, una luz, un calentador, el modo frío/calor de una bomba de calor. Cualquiera de estos actuadores asociados a estos dispositivos tiene el mismo comportamiento. Cuando el nivel de tensión eléctrica determinado por el sistema de control es alto, se ataca una bobina que cierra un circuito para accionar este dispositivo. La presencia de esta característica permite al sistema asociar iconos diferentes con contenido semántico que permiten programar el sistema en lenguaje no informático de una manera gráfica y sencilla.
3. Tipo. El tipo hace referencia a la señal física asociada con el actuador. Existen los siguientes tipos:
  - a) RF22. Actuadores inalámbricos que se vinculan de manera automática mediante radio frecuencia al concentrador o sistema de control.
  - b) X10. Actuadores que se operan mediante la red eléctrica con protocolo X10. El protocolo X10 permite utilizar la red eléctrica existente para enganchar diferentes actuadores distribuidos en el sistema.
  - c) Digital. Actuadores que se operan una señal eléctrica todo/nada. Existen 8 relés cuya bobina está vinculada a puertos digitales de escritura. El concentrador dependiendo de la lógica de control atacará a las bobinas de estos relés cerrando o abriendo un circuito. Es decir, estos actuadores son relés que pueden cerrar en el lado de alta cualquier tipo de tensión continua o alterna y con cargas de hasta 16 amperios.

4. Dirección. La dirección de un actuador hace referencia a la ubicación hardware del mismo. Los actuadores pueden ser cableados a sin cable. Para aquellos actuadores digitales con cable las direcciones posibles son: D22–D29 que son los 8 relés que permite controlar el concentrador. Para los actuadores inalámbricos, las direcciones se determinan de manera automática siempre que los actuadores inalámbricos hayan sido vinculados por software al concentrador.

De igual manera que en el caso de los sensores y para facilitar definición de los mismos, mediante una página WEB se puede modificar y seleccionar los diferentes actuadores del sistema. En la figura 6 se muestran las características de los diferentes actuadores que componen un sistema. En esta figura se muestra una tabla para los sensores donde las columnas son las características anteriormente descritas. Cada columna dispone de un menú desplegable que permite seleccionar la característica deseada. Además, cada actuador y su función del dispositivo que represente lleva asociado un icono que permite entender a primera vista el dispositivo gobernado por el actuador.

Actuador	Show	Device	Type	Address
R1	▼	Pump	Digital	D22
R2	▼	Pump	Digital	D23
R3	▼	Pump	Digital	D24
R4	▼	Pump	Digital	D25
Circulador	13 ▼	Pump	Digital	D26
Aerotermo	14 ▼	Pump	Digital	D27
Bomba	11 ▼	Pump	Digital	D28
Calor	12 ▼	HeatCoolMode	Digital	D29

Figura 6. Imagen de la aplicación WEB que permite introducir y seleccionar las características de los diferentes sensores que constituyen el sistema.

En la figura 7 se representan los iconos asociados tanto a los dispositivos físicos asociados:



Figura 7. Diferentes iconos para actuadores digitales: modo de frío o calor, calentador encendido o apagado, luz encendida o apagada y bomba circulando o parada.

Una vez definido la tabla de sensores y actuadores, la figura 8 muestra de manera compacta los sensores y actuadores definidos así como sus valores actuales. Mientras que los sensores analógicos muestran el valor de su magnitud sobre el mismo icono, tanto los sensores digitales como los actuadores digitales cambian de color al pasar de 0 a 1. En la primera fila de la figura 8 se muestran un conjunto de sensores de temperatura mostrando su valor actual. En la segunda fila de esta misma figura se muestran un conjunto de actuadores. El primer actuador está asociado a una bomba de circulación y se encuentra en verde porque la bomba está funcionando. El segundo actuador es una señal digital de 230 v. asociado a señales de mando de la bomba de calor. En este caso cuando la señal está a 230 v. significa que la bomba de calor debe servir frío.

Si esta señal estuviera a 0 v., la bomba de calor serviría calor y el icono asociado a este actuador cambiaría de aspecto.



Figura 8. Imagen de la aplicación WEB que permite mostrar en cada momento los valores de los sensores y actuadores.

### 3.3. Lógica de control en sistemas centralizados

Para llevar a cabo el control térmico de una instalación de climatización se propone un conjunto de termostatos simples y diferenciales, un conjunto de temporizadores y un conjunto de macros que permiten vincular diferentes actuadores mediante una única etiqueta. La característica fundamental es que el conjunto de termostatos actúa sobre los actuadores a partir de los valores de los sensores de temperatura y mediante unas consignas de temperatura prefijadas.

#### 3.3.1. Termostatos

Un termostato es un componente de un sistema de control que abre o cierra un circuito eléctrico en función de una temperatura. En el presente trabajo se definen termostatos como objetos software. Es decir, entidades software que mediante la información de los valores de temperatura de los sensores que tengan asociados determinan el valor de los actuadores que tengan asociados.

Desde el punto de vista software, un termostato es un objeto de la forma siguiente:

```
class Thermostat
{
public:
    String name;           // label to identify the name of the thermostat
    String sensor1;       // labels of the associated temperature sensors
    String sensor2;       // differential thermostat if sensor2!="
    String setpoint;     // desired temperature setpoint
    String delta;        // hysteresis band
    String mode;         // mode : cool / heat / off
    short int i1, i2;    // indexes of array of sensors

    float T_setpoint, dT;
    bool on;             // on/off
};
```

```

    void setup( Sensor [], short int );
    short int check( Sensor [], short int );
};

```

Los termostatos pueden tener asociados a uno o dos sensores de temperatura y pueden estar en diferentes modos de funcionamiento: modo frío, modo calor o inactivos. Si un termostato en modo calor tiene asociado un único sensor de temperatura, el termostato se enciende cuando la temperatura sea menor que una determinada consigna menos cierto  $\Delta T$  o banda histéresis y se apaga cuando la temperatura del sensor supere la consigna mas  $\Delta T$ . Si el termostato está en modo de frío, la lógica de control es la inversa. En el caso de que exista un segundo sensor de temperatura vinculado al termostato, el termostato se considera diferencial. Es decir, la temperatura de comparación es la diferencia de las temperaturas de ambos sensores. En el siguiente fragmento de código se muestra la lógica de control anteriormente descrita.

```

short int Thermostat :: check(Sensor sensors [], short int Ns )
{
    float T, T1, T2;

    T1 = sensors[i1].value;
    if (i2<0) T2 = 0;
    else     T2 = sensors[i2].value;
    T = T1 - T2;

    if (mode=="Cool")
    {
        if      (T > T_setpoint + dT)
            on = true;
        else if (T < T_setpoint - dT)
            on = false;
    }
    else if (mode=="Heat")
    {
        if      (T < T_setpoint - dT)
            on = true;
        else if (T > T_setpoint + dT)
            on = false;
    }
    else if (mode=="Off")
    {
        on = false;
    }
}

```

Como la idea es poner hacer una programación no informática, la creación de los diferentes termostatos así como la asignación de sus sensores asociados y el resto de sus características se puede hacer mediante una página WEB como se muestras en la figura. Los nombres de los termostatos pueden ser o bien etiquetas de actuadores o etiquetas de macros previamente definidas.

En la figura 9 aparece un botón con el símbolo + que al pulsarlo crea un nuevo termostato. De igual forma, el símbolo - permite eliminar un determinado termostato.

### 3.3.2. Macros

Las macros están caracterizadas por un nombre y representan la asociación de uno o más actuadores. La definición de la macro permite actuar con una sola orden para encender o apa-

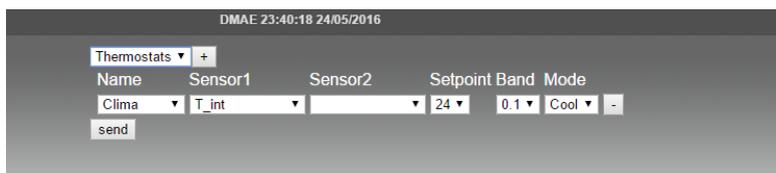


Figura 9. Parámetros que definen un termostato: sensores asociados, actuadores o macros asociadas, temperatura de consigna, banda de histéresis y modo de funcionamiento (frío/calor).

gar un conjunto de actuadores diferentes. Así, si la orden de un termostato debe arrancar dos bombas a la vez, se puede crear una macro que, mediante su nombre, asocie los dos actuadores correspondientes de las bombas. Posteriormente, se crea un termostato con el nombre de la macro y cuando el termostato se acciona, las dos bombas empiezan a funcionar a la vez. En la figura 10 se muestra una tabla que define la estructura de los actuadores y que permite crearlos desde una aplicación WEB.

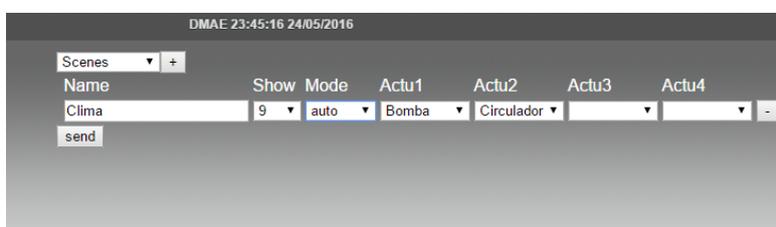


Figura 10. Parámetros que definen un termostato: sensores asociados, actuadores o macros asociadas, temperatura de consigna, banda de histéresis y modo de funcionamiento (frío/calor).

Los modos de funcionamiento de las macros pueden ser:

1. AUTO. La macro está gobernada por el termostato al que se encuentre vinculado.
2. MANUAL. La macro está gobernada por el usuario desde la aplicación WEB.
3. OFF. Todos los actuadores asociados a la macro se encuentran apagados.
4. DISABLE. La macro está desactivada y no permite actuar ni manual ni automáticamente sobre los actuadores asociados.

### 3.3.3. Temporizadores

Los temporizadores permiten programar en un determinado horario la climatización del edificio. Los temporizadores están definidos por la hora de inicio, la hora de finalización y por los días de la semana a los que se aplica. Los nombres de los temporizadores pueden ser actuadores o nombres de macros. En la figura 11 se representa una imagen de la aplicación WEB que permite introducir los valores anteriormente descritos. Además, de los parámetros anteriores, los temporizadores llevan asociado un modo de funcionamiento que puede ser: ON, OFF, DISABLE o SIMUL. Si el modo es ON, el temporizador activa la macro o el actuador en la banda temporal elegida. Si el modo es OFF, el temporizador desactiva la macro o el actuador en la banda temporal elegida. Si el modo es DISABLE, el temporizador está desactivado o como si no existiera. Finalmente, si el temporizador se encuentra en modo SIMUL, la activación del temporizador se realiza de manera aleatoria a lo largo del día.

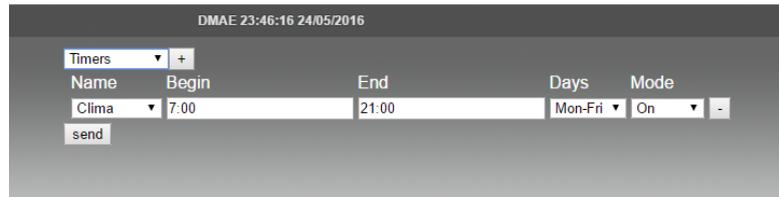


Figura 11. Parámetros que definen un temporizador: actuadores o macros asociadas, hora de inicio, hora de finalización, días de la semana a los que se aplica y modo de funcionamiento.

### 3.3.4. Software empotrado

La programación se realiza mediante el chequeo en cada momento de todos los termostatos y temporizadores definidos. En el siguiente fragmento de código se muestra como se lleva a cabo este chequeo.

```
find_indexes( macros[i].name, timer_names, N_timers, itimers, N_itimers );
macro_on = true;

for (j=0; j<N_ithermos; j++) macro_on = macro_on && thermostats[ithermos[j]].on;

check_timers = false;
for (j=0; j<N_itimers; j++)
    if (timers[itimers[j]].enforceable)
    {
        macro_on = macro_on && timers[itimers[j]].on;
        check_timers = true;
    }
```

En el código anterior, el índice  $j$  representa el índice de cada termostato o temporizador asociado a una determinada macro. Una misma macro puede tener asociado uno o más termostatos. Así, el valor de la macro viene determinada por condición de AND lógico entre todos los termostatos que gobiernen esa macro. Posteriormente, se evalúan las condiciones lógicas asociados a los temporizadores y se procede de igual manera con los temporizadores. Finalmente, se asigna el valor de la macro.

Por otra parte, se pueden definir diferentes macros que vinculen a un mismo actuador. Es decir, el valor del actuador depende de los diferentes valores de las macros asociadas. Así, el valor del actuador viene determinado por un OR lógico entre todas las macros en donde aparezca el actuador en cuestión. Por ejemplo, para el control de la temperatura interior tanto en invierno como en verano podemos definir dos macros de nombre: frío y calor. La primera macro puede llevar asociado un termostato de frío con una consigna de  $28^{\circ}$  C y la macros de calor un termostato de calor con una consigna de  $20^{\circ}$  C. Si las dos macros actúan sobre una bomba de circulación, la bomba se pondrá a funcionar siempre que la macro de calor o la macro de frío la activen mediante sus termostatos.

### 3.3.5. Bucle de control

Una vez se han definido todos los sensores, actuadores, macros, termostatos y temporizadores se procede a controlar el sistema. Es importante hacer notar que este tipo de control es centralizado. Es decir, con la información de todos los sensores de la instalación se decide mediante un conjunto de condiciones lógicas basadas en termostatos simples y diferenciales actuar sobre las bombas de circulación de la instalación. El bucle de control o algoritmo se implementa de la siguiente forma:

1. Sirve una página WEB y escucha las peticiones del usuario.
2. Procesa las peticiones de la página WEB tales como: cambio de consignas, planificación de horarios de funcionamiento, modificación de etiquetas de variables y volcado de datos.
3. Procede a la lectura de todos los sensores: temperatura, radiación solar, consumo eléctrico, etc.
4. Controla o decide los valores de los actuadores mediante las lecturas de los sensores y mediante los termostatos o programaciones temporales.
5. Escribe los valores de todos los actuadores.
6. Dependiendo de la velocidad de muestreo asignada, guarda en una tarjeta de memoria SD el estado de todos los sensores y todos los actuadores.

El usuario a través de una aplicación WEB tiene la posibilidad de interactuar en el sistema para modificar los sensores, actuadores y la lógica de control.

### 3.4. Lógica de control en sistemas descentralizados

Todo lo expuesto anteriormente es para control centralizado en el que una unidad central de proceso gobierna el sistema mediante un conjunto de sensores y de actuadores junto con una lógica de control asociada. Sin embargo, cuando no existe un control centralizado, cada parte del sistema es gobernada por sí misma. Es objeto de esta sección explorar el comportamiento emergente de este tipo de sistemas. Para llevar a cabo este objetivo, es necesario definir los agentes o elementos que tengan capacidad de control y, en consecuencia, se deban gobernar y las reglas básicas que controlan estos elementos. En el caso del control térmico descentralizado, la realimentación entre los diferentes elementos se lleva a cabo mediante las condiciones de contorno de las componentes.

Se considera un sistema de climatización formado un conjunto de acristalamientos activos, como el que se muestra en la figura 12, vinculados en paralelo a un circuito primario. Cada acristalamiento está gobernado por un microcontrolador propio que decide arrancar o parar el caudal del acristalamiento.

#### 3.4.1. Componentes o agentes que integran el sistema

El sistema modular de acristalamiento de fachada está formado por un vidrio de 3 metros de altura por 1.3 metros de anchura. Este vidrio dispone en su zona inferior de una conexión para la entrada y otra para la salida del agua. El flujo de agua a lo largo de la cámara se realiza desde el separador horizontal inferior hasta el separador horizontal superior donde el agua se recolecta y se envía de vuelta mediante el espaciador vertical a un intercambiador de calor de tubos. En el intercambiador de calor el agua cede el calor al circuito primario y vuelve a la ventana impulsado por una micro bomba de circulación. El sistema está diseñado para que sea capaz de transportar la energía solar absorbida por la cámara de agua con un caudal de diseño de 8 litros por minuto. Por otra parte, la pérdida de carga en todo el circuito primario se limita a 30 kPa (3m de columna de agua) lo que es equivalente a una potencia hidráulica de la bomba de circulación de 4 vatios. Todo este sistema hidráulico se completa un microcontrolador con un conjunto de sensores de temperatura y un relé que permite accionar la bomba de circulación.

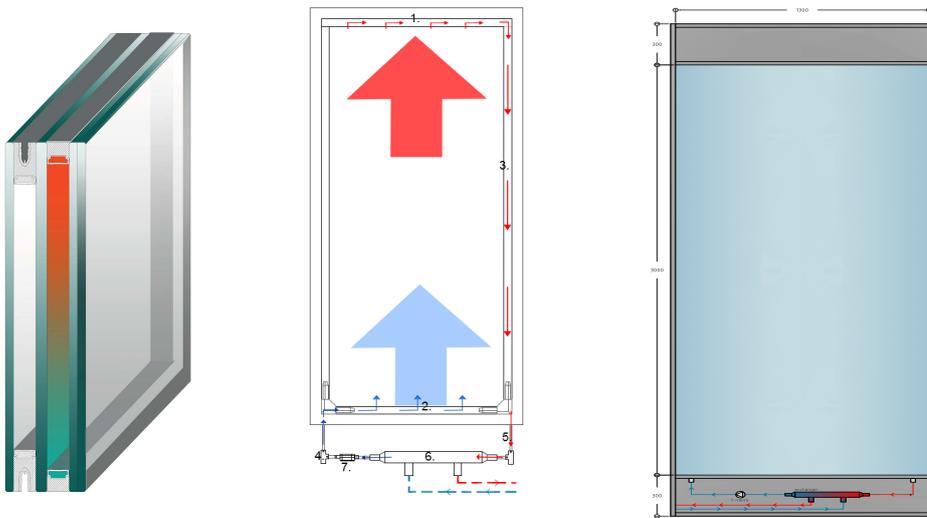


Figura 12. Sistema modular autónomo descentralizado compuesto por: acristalamiento, bomba de circulación, intercambiador de calor junto con un microcontrolador y sensores de temperatura y relé de actuación para la bomba.

### 3.4.2. Reglas básicas de control de un acristalamiento activo

En este apartado se definen las reglas básicas basadas en termostatos simples y termostatos diferenciales que permiten arrancar o parar la bomba de circulación de un acristalamiento modular. Estas reglas se implementan como software empotrado en el microcontrolador de cada módulo. El comportamiento emergente del sistema descentralizado es el resultado de la interacción entre los diferentes módulos con diferentes orientaciones y condiciones de contorno que comprenden la fachada.

Se consideran sensores de temperatura ubicados en las siguientes posiciones:

1. Cara interior superior e inferior del acristalamiento  $T_{heat}$  y  $T_{cool}$ .
2. Temperatura exterior e interior del acristalamiento  $T_{ext}$  y  $T_{int}$ .
3. Tubería de impulsión y retorno del circuito secundario  $T_{sin}$  y  $T_{sout}$ .
4. Tubería de impulsión y retorno del circuito primario  $T_{pin}$  y  $T_{pout}$ .

Las reglas simples se implementan mediante dos macros llamadas “frío” y “calor” que mandan la bomba de circulación. Además, cada macro lleva asociada dos termostatos diferentes. Así, la macro de “frío” lleva asociada los dos termostatos siguientes:

1. Termostato de frío basado en la temperatura interior  $T_{int}$  con consigna de  $28^{\circ}\text{C}$
2. Termostato diferencial de frío basado en  $T_{heat}$  y  $T_{pin}$  con una consigna de  $15^{\circ}\text{C}$  para enfriar el acristalamiento.

De igual forma, la macro “calor” lleva asociada los dos termostatos siguientes:

1. Termostato de calor basados en la temperatura interior  $T_{int}$  con consigna de  $20^{\circ}\text{C}$
2. Un termostato diferencial de frío basado en  $T_{heat}$  y  $T_{cool}$  con una consigna de  $5^{\circ}\text{C}$  para evitar gradientes de temperatura en el acristalamiento.
3. Termostato diferencial de calor basado en  $T_{heat}$  y  $T_{pin}$  con una consigna de  $5^{\circ}\text{C}$  para calentar el acristalamiento.

## 4. Monitorización de datos

Para evaluar la eficiencia del sistema y el comportamiento del mismo se deben monitorizar los sensores y los actuadores a lo largo del tiempo. El proceso de monitorización puede en tiempo real o en tiempo diferido. Generalmente, cuando se trata de monitorizar las instalaciones de climatización para medir su eficiencia o llevar a cabo su mantenimiento, la medida de datos en tiempo diferido es mas que suficiente.

En esta sección se pretende explicar las diferentes estrategias de monitorización así como los servicios derivados de los datos de la monitorización. Con respecto a la monitorización del sistema, definimos los siguientes estrategias de monitorización:

1. Local. Los datos de sensores y actuadores se guardan en una tarjeta de memoria SD en el microcontrolador.
2. Remota. Los datos locales de sensores y actuadores de un día se mandan a un servidor remoto que, posteriormente, los sube a la nube (e.g. Dropbox). Dependiendo de las necesidades del sistema, los datos se pueden enviar instantáneamente a un servidor remoto que los procesa en tiempo real para prestar algún servicio.

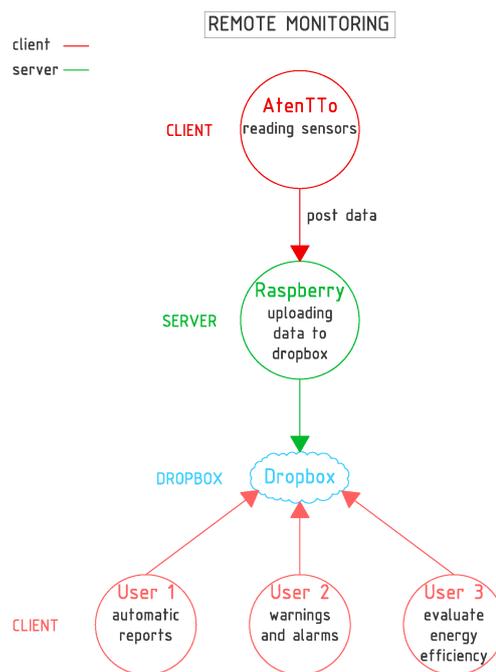


Figura 13. Parámetros que definen un temporizador: actuadores o macros asociadas, hora de inicio, hora de finalización, días de la semana a los que se aplica y modo de funcionamiento.

En el caso de que los datos se suban a la nube, se puede definir un mantenimiento predictivo basado en la monitorización remota que permite prestar los siguientes servicios:

1. Informes de la eficiencia del sistema.
2. Alertas y alarmas.

3. Informes sobre las actuaciones y la posibles mejoras relacionadas con los hábitos y con el uso.

En la figura 13 se muestra el esquema de la monitorización remota. El concentrador de datos del sistema envía diariamente la información (POST) de sensores y actuadores a un servidor prefijado. Este servidor, identifica la procedencia de los datos y los sube a la nube. En concreto, cada instalación lleva una etiqueta y los datos se almacenan en la nube clasificados por instalaciones y por fechas en diferentes carpetas. Una vez que los datos se encuentran en la nube, se puede desarrollar un cliente que pide información (GET) diariamente de las diferentes instalaciones para evaluar la eficiencia energética del sistema, informar sobre su comportamiento o dar alertas y pautas de mejora. Estos clientes pueden desarrollar servicios múltiples al usuario final de la instalación con la idea de conocer el estado actual y mejorar la instalación existente.

Se pretende que estos servicios sean automáticos y tengan memoria del uso y de la eficiencia de la instalación. Generalmente, estos sistemas se entienden como sistemas de inteligencia artificial. Es intención de los autores explorar la programación de servicios inteligentes basados en el comportamiento emergente de un conjunto de reglas simples.

## 5. Validación de la simulación mediante datos reales

Como hemos mencionado anteriormente, la simulación del comportamiento térmico de un sistema exige la modelización de cada componente físico del sistema. Por lo tanto, es requisito previo a la simulación del conjunto tener confianza en los modelos matemáticos elegidos. Es decir, comparar los resultados reales de componentes aisladas con los resultados de simulación de diferentes modelos matemáticos. En esta validación las condiciones de contorno se supondrán conocidas para desacoplar el comportamiento de una componente del comportamiento emergente o grupal. En esta primera parte de la validación no es necesario tener en cuenta las leyes de control ya sean centralizadas o descentralizadas.

Es importante hacer notar que las condiciones de contorno cambian dependiendo del sistema considerado. Es decir, si simulamos un acristalamiento aislado, las condiciones de contorno son los flujos de calor y radiación a ambos lados del acristalamiento (interior y exterior). Sin embargo, si simulamos un edificio en su conjunto las únicas condiciones de contorno son las que impone la climatología exterior. En este caso, las magnitudes interiores se determinan como solución del propio problema.

En resumen, cuando se trata de simular es necesario validar individualmente los modelos para cada componente por separado y, posteriormente, hacer una simulación global con todos los componentes y con sus reglas de control. La validación mediante datos reales de la simulación para un sistema centralizado o descentralizado es del mismo orden de dificultad. Mientras que para un sistema descentralizado el paradigma de programación con orientación a objetos es lo más apropiado, para simular un sistema centralizado la programación funcional es, probablemente, la más acertada.

Por otra parte, para poder llevar a cabo la validación mediante datos reales se deben medir todas las variables necesarias que intervengan en las condiciones de contorno. Por ejemplo, cuando se trata de validar el comportamiento térmico de un acristalamiento activo aislado es necesario conocer los niveles radiación directa y difusa exteriores e interiores. Eso exige medir la radiación directa y difusa a un lado y al otro del acristalamiento. Como hemos comentado anteriormente, esta validación no exige que el acristalamiento esté conectado a un sistema externo por lo que se puede validar con un ensayo real lo más simple posible. En concreto, un ensayo real muy simple es la determinación de la temperatura de estancamiento de la cámara de agua o temperatura que alcanza a lo largo del día si no existe circulación de agua.

Una vez realizada la validación de cada componente procedemos a validar el sistema en su conjunto. Por ejemplo, si el sistema considerado es una habitación adiabática con un acristalamiento activo en una de sus superficies, las condiciones de radiación interior no son condiciones de contorno del problema sino que son parte de la solución del propio problema. Si en el ensayo real medimos suficientes valores de temperatura y radiación directa y difusa, el ensayo podrá servir para validar diferentes componentes aisladas y, finalmente, para validar el sistema en su conjunto.

Para poner de manifiesto la metodología anteriormente expuesta, se considera un acristalamiento activo en una cubierta de 30 grados de inclinación con una orientación de 150 grados. En la figura 14 se representan los datos reales de la temperatura de estancamiento de la cámara de agua  $T_{heat}$  para los días 9 de mayo de 2012 y 26 de noviembre de 2013 en función de la hora del día. En esta misma gráfica se representan los valores de la temperatura interior  $T_{int}$  junto con la temperatura exterior  $T_{ext}$ . Se puede observar como mientras en el mes de mayo la temperatura alcanza los 90 °C, en el mes de noviembre la temperatura de estancamiento no supera los 40 °C.

En este caso para poder validar el modelo físico del acristalamiento, se considera un acristalamiento aislado y tanto la temperatura exterior como la temperatura interior constituyen condiciones de contorno junto con los valores de radiación solar directa y difusa interior y exterior. Los mismos datos reales pueden servir para validar el modelo térmico de la distribución de la radiación solar en el interior de una edificación. En este caso, las condiciones de contorno son la temperatura de la cubierta y los valores de radiación solar directa y difusa que atraviesan el acristalamiento. La solución de este problema consiste en determinar la temperatura interior así como la radiación difusa interior como solución de la distribución de la radiación solar exterior.

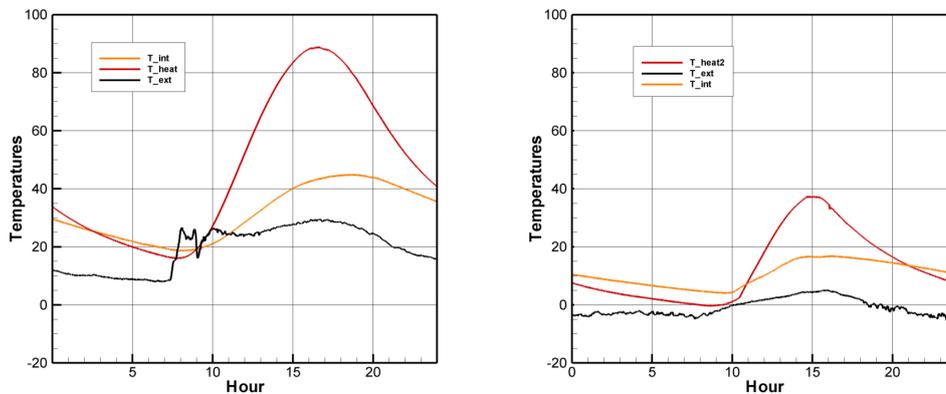


Figura 14. Temperaturas de estancamiento de la cámara de agua de un acristalamiento de cubierta de 30° dependiente y con 150° de orientación. Datos reales 9 de mayo de 2012 y 26 de noviembre de 2013

En la figura 15 se representan los datos reales de la temperatura del mismo acristalamiento cuando la cubierta intercambia calor un un depósito de inercia para los días 11 de mayo de 2014 y 26 de noviembre de 2013. En este caso se considera un termostato diferencial asociado a la temperatura de la cámara de agua  $T_{heat}$  y la temperatura de un depósito de inercia  $T_{dep}$  con una consigna de 10 °C y una banda de histéresis de 2 °C. Es decir, si la diferencia de temperatura entre la cubierta y el depósito de inercia es superior a 12 °C, el circulador se enciende y si la misma diferencia de temperatura es menor que 8 °C el circulador se para. Se observa en esta figura como se obtiene un temperatura para la cámara de agua en forma de diente de sierra. Para el 11 de mayo de 2014, la temperatura del depósito es prácticamente constante y igual a 40 °C por lo que la cubierta arranca cuando su temperatura sea superior a 52 °C y se para cuando sea inferior a 48 °C. Para el 26 de noviembre de 2013, la temperatura del depósito es prácticamente constante y igual a 20 °C por lo que la cubierta arranca cuando su temperatura

sea superior a  $32^{\circ}\text{C}$  y se para cuando sea inferior a  $28^{\circ}\text{C}$ .

De igual forma que en el caso de la validación de la temperatura de estancamiento, cuando se trata de validar el modelo matemático de un acristalamiento con circulación, tanto las magnitudes interiores como las magnitudes exteriores constituyen las condiciones de contorno.

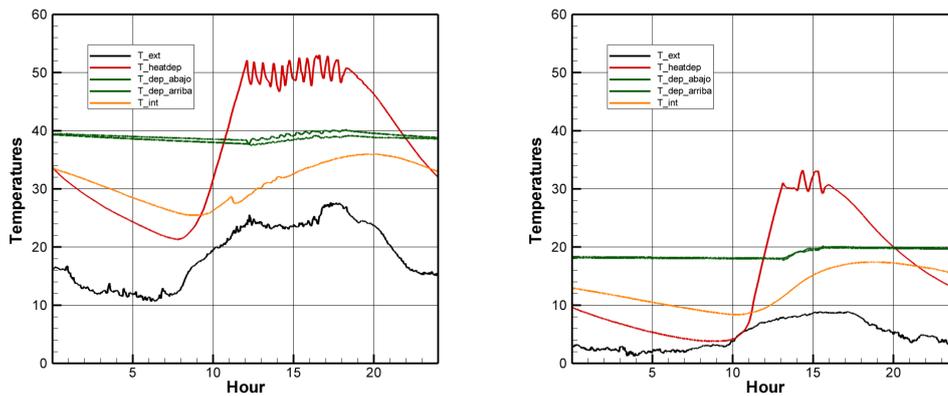


Figura 15. Temperatura en la cámara de agua para un acristalamiento de cubierta de  $30^{\circ}$  dependiente y con  $150^{\circ}$  de orientación controlado mediante un termostato diferencial. Datos reales 11 de mayo de 2014 y 18 de noviembre de 2014.

## 6. Conclusiones

El control de los sistemas de climatización puede ser centralizado o descentralizado. Aunque, generalmente, los sistemas de control son centralizados, los sistemas descentralizados pueden llegar a tener resultados emergentes no previstos que pueden ser atractivos para la eficiencia energética y para el confort del edificio. Independientemente de si el control es centralizado o descentralizado, se han definido los elementos básicos que contiene un sistema de control como son: los actuadores y los sensores. Para llevar a cabo la programación del control del sistema se han definido los termostatos, las macros y los temporizadores como elementos base que permiten realizar cualquier tipo de control. El control centralizado de un sistema complejo se puede llevar a cabo mediante un conjunto de termostatos y temporizadores. En el caso del control descentralizado, los termostatos y temporizadores se distribuyen entre los diferentes componentes que constituyen el sistema.

En el control descentralizado se espera un comportamiento emergente diferente del impuesto mediante las reglas simples de los termostatos. Sin embargo, el sistema se puede comportar de manera no deseada y se hace necesario simular previamente este comportamiento emergente. Para poder llevar a cabo esta simulación se requiere tener un modelo matemático fiable de cada componente del sistema y, posteriormente, implementar el control del sistema que debe coincidir exactamente con el software empotrado de las componentes reales. La fiabilidad o validación del modelo matemático solo se puede tener mediante la comparación de los resultados de la simulación con los datos reales. Por lo tanto, es necesario que el sistema además de un software empotrado de control tenga un software empotrado que informe del estado del sistema a lo largo del tiempo. Un servidor *ad hoc* se encargará de subir a la nube estos datos de sensores y actuadores. El disponer de datos reales de monitorización se puede utilizar con una doble vertiente: (i) validar modelos matemáticos de simulación y (ii) analizar la eficiencia del sistema a través del dato real generando informes y alertas.

## Referencias

- [1] DI MARZO SERUGENDO, G., *Autonomous systems with emergent behaviour*, Handbook of Research on Nature-Inspired Computing for Economics and Management, ISBN13: 9781591409847, 2007.
- [2] PARUNAK , H. VAN DYKE and VANDERBOK, R. S., *Emergent Behavior in Distributed Control Systems*, Proceedings of ISA Tech '97, Instrument Society of America, 1997.
- [3] AL-ASSADIA, S.A.K, PATELB, R., ZAHEER-UDDINC, M., and BREITINGER, J., *Robust decentralized control of HVAC systems using H-performance measures*, Journal of the Franklin Institute 341(7):543-567, 2004
- [4] LIANG,J. and DU, R., *Design of intelligent comfort control system with human learning and minimum power control strategies*, Energy conversion and management, vol. 49, no. 4, pp. 517-528, Apr. 2008.
- [5] BOBÁL, V., BÖHM, J., FESSL, J. and MACHÁČEK, J., *Practical Aspects of Selftuning Controllers: Algorithms, Implementation and Applications*. London, U.K.: Springer-Verlag, 2005.

### Sobre los autores:

*Nombre:* Belén Moreno

*Correo electrónico:* belen.moreno@upm.es

*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, E.T.S.I. Aero-náutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* Juan A. Hernández

*Correo electrónico:* juanantonio.hernandez@upm.es

*Institución:* Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, E.T.S.I. Aero-náutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid, España.

# Experiencias Docentes

## Crítica democrática, una asignatura pendiente

### Democratic criticism, a pending subject

Elena Misa Borrego y Juan Núñez Valdés

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 039-052, ISSN 2174-0410  
Recepción: 29 Abr '16; Aceptación: 1 Jun '16

1 de abril de 2017

#### Resumen

En esta comunicación, los autores presentan una reflexión sobre la enseñanza de contenidos transversales en educación política que pueden aplicarse a las unidades didácticas de Estadística de los últimos años de la E.S.O. y los cursos de Bachillerato. Se pretende a su vez hacer más interesantes al alumnado dichos contenidos, los cuales suelen ubicarse a final de curso, con las dificultades que ello conlleva, potenciando el trabajo en equipo, la investigación y el uso de las TIC's.

**Palabras Clave:** Política, Estadística, Enseñanza de las Matemáticas en la Secundaria.

#### Abstract

In this paper, the authors present a critical reflection about teaching cross curricular subject on political education that can be included in the Statistics teaching units during the latest years of the Secondary Education and the A-level. At the same time we expect to make more interesting these contents to the students, which are usually taught at the end of the academic year, strengthening team work, research and ICT's use.

**Keywords:** Politics, Statistics, Secondary Education, Mathematics Teaching.

## 1. Introducción

Como bien sabemos, las unidades didácticas dedicadas a la Estadística suelen situarse a final del curso lectivo en el que se imparten, lo cual, en numerosas ocasiones, implica la omisión de dichos contenidos curriculares debido a la escasez de tiempo dentro de la temporalización de los cursos de ciencias.

La nueva normativa, LOMCE, tiene intención de paliar este hecho, al menos durante el Bachillerato –Matemáticas I y II-, para poder asegurar que todos los graduados en Bachiller hayan cursado el tema de Estadística y Probabilidad, y lo hace dividiendo los contenidos entre ambos cursos. Como bien sabemos, con la anterior normativa LOE, los contenidos de Estadística y

Probabilidad estaban presentes en ambos cursos. De ahora en adelante la Estadística tiene exclusividad en el primer año y la Probabilidad en el segundo, recortando así una posible unidad didáctica del temario -si bien podría haber centros que hubiesen programado la inclusión de ambas materias en una misma unidad- de la programación del curso, en cuyo caso disminuiría a la mitad los contenidos de la misma y en consecuencia su número de sesiones.

Queremos asegurar por tanto que nuestros estudiantes cursen los contenidos correspondientes de esta rama de las Matemáticas, que por otro lado, y no menos importante, es la más aplicada a diario en el mundo de las tecnologías de la información y de la comunicación que habitamos, y cuyos contenidos básicos son necesarios para el buen curso de muchos de los estudios superiores de formación profesional y carreras universitarias.

Por otra parte estamos impartiendo clases a personas que en su mayoría se encuentran en un rango de edad entre 16-18 años (si consideramos que es la primera vez que cursan la asignatura) y por tanto, si no lo han hecho ya, están a punto de enfrentarse a su mayoría de edad, con todas las responsabilidades que como ciudadanos ello implica.

Entre dichas responsabilidades una de las más importantes, si no la que más, es la de ejercer su derecho al voto, es decir, la participación en todas las elecciones, referéndums y consultas que la democracia española pone en manos de esas nuevas generaciones de españoles. Es por ello que nos surge la pregunta, ¿están preparados nuestros estudiantes, aquellos que cursan la ESO, el Bachillerato o sus primeros años de universidad, para ejercer el voto de manera crítica y responsable? ¿Saben qué es y cómo funciona la democracia? ¿Qué saben sobre la historia política de nuestro país? ¿Qué leen sobre los distintos partidos políticos? ¿Cómo contrastan la información a la cual estamos constantemente bombardeados por los medios de comunicación? ¿Qué saben de los distintos sistemas electorales? ¿Han reflexionado sobre el sistema de circunscripciones de nuestro país? ¿Se han parado a verificar las frases de los políticos? Y una larga sucesión de preguntas relacionadas con el tema.

Como primera impresión puede resultarnos complejo abordar dichos temas desde nuestra clase de Matemáticas, pero es posible y necesario tratar muchas de estas cuestiones desde la enseñanza de la Estadística.

La Estadística se basa al fin y al cabo en el estudio de datos cuantitativos de la población o de cualquier otra manifestación de las sociedades humanas. Por tanto podemos usar los contenidos de la Estadística unidimensional para estudiar variables como cuáles fueron los partidos políticos votados en España en las últimas elecciones generales, el número de votos recogidos por cada uno de ellos o la cantidad de dinero total defraudado o invertido en Educación en las legislaturas en las cuales estuvieron en el poder.

Con el estudio de la Estadística bidimensional podemos proponer trabajos donde los estudiantes comparen dos de las variables estudiadas anteriormente, argumentando la posible relación entre ambas, calculando las rectas de regresión y demás herramientas contenidas en el temario, de forma que puedan obtener conclusiones puntuales (estimación de datos) y globales (reflexiones personales sobre la fiabilidad de la correlación). De esta forma estamos enseñando los contenidos del bloque de Estadística a la vez que se estudian los distintos sistemas electorales como forma de reparto de votos, las circunscripciones como herramienta de representación política y la forma de gobierno de nuestro país.

## 2. La Estadística en la política

Como la historia nos enseña, es conveniente indicar que el fundamento teórico de los sistemas electorales es bastante complejo desde el punto de vista matemático, dado que es muy complicado conseguir un reparto adecuado de los representantes de los partidos políticos en función de los votos emitidos por los ciudadanos. Por ello, los distintos países han optado por

sistemas de reparto que reflejen de la mejor manera posible las votaciones realizadas. Así, algunos países dan un mayor número de representantes de los que realmente les corresponden a los partidos más minoritarios en votos, al objeto de permitirles su representación, mientras que en otros países sucede exactamente lo contrario, beneficiándose de esa forma a los partidos más votados. Sin embargo no puede decirse que ninguna de esas dos situaciones sea del todo injusta, de hecho, dos matemáticos, Michel L. Balinski y H. Peyton Young, publicaron en 1982 un libro en el que estudiaban la forma de realizar el reparto de escaños más justo posible, el cual plantearon bajo la premisa de “un hombre, un voto”. Basándose en trabajos previos de Huntington y siguiendo las ideas del famoso economista Kenneth Arrow, estudiaron la manera de asignar representantes a los partidos en función del número de votos que éstos habían obtenido (Kenneth Joseph Arrow nacido en 1921, es un economista estadounidense de origen judío galardonado, junto a John Hicks, con el Premio Nobel de Economía, en 1972). Así, Balinski y Young (1982) demostraron que no existe ninguna forma de reparto que cumpla simultáneamente las siguientes cuatro premisas:

- ✓ P1: Verificación de la cuota. La diferencia entre el porcentaje de escaños obtenidos y el de votos recibidos no puede ser mayor a la unidad.
- ✓ P2: Monotonía respecto de los escaños. Si se incrementa el número de representantes a elegir, ningún partido podrá obtener menos de los que tenía antes del incremento.
- ✓ P3: Monotonía respecto de los votos. Si en dos elecciones consecutivas un partido incrementa sus votos y otro los reduce, no debe incrementarse el número de escaños del segundo y reducirse los del primero.
- ✓ P4: Homogeneidad. El número de representantes repartidos no debe cambiar si los votos de todos los partidos aumentan o disminuyen de forma proporcional.

De acuerdo con estas premisas, la mayoría de los sistemas de reparto de representantes vigentes en la actualidad se basan en tres métodos diferentes: métodos de divisor, métodos de cociente y métodos de mayoría relativa. Una información muy extensa, completa y detallada sobre estas cuestiones puede consultarse en (Pérez, 2012).

## 2.1. Métodos de divisor

Este tipo de métodos tienen su origen en una propuesta del presidente de los Estados Unidos Thomas Jefferson a finales del siglo XVIII para la elección de representantes a la Cámara de su país. Consiste en que si se fija el número de votos necesario para obtener un representante, el número de representantes de cada partido puede obtenerse mediante la operación  $n_i = \frac{V_i}{d}$ , donde  $n_i$  es el número de representantes de cada partido,  $V_i$  es el número de votos obtenido por cada partido y  $d$  es el número de votos necesario para obtener un representante (Jefferson despreció los decimales para calcular el número de representantes). De esta forma, queda únicamente sin determinar el número de representantes totales, que se obtiene mediante la suma de los obtenidos por todos los partidos.

Entre estos sistemas de divisor, se pueden citar los siguientes.

### 2.1.1. Ley D'Hondt

Es el sistema que se utiliza en muchos países europeos -entre ellos España-, sudamericanos e incluso en Japón. En este sistema se utilizan como divisores los números naturales  $1, 2, 3, \dots$ , hasta el número de representantes que ha de elegirse en cada circunscripción. Los cocientes se

calculan, por tanto, según la fórmula  $\frac{V_i}{n+1}$ , donde  $V_i$  es el número de votos obtenidos por cada partido y  $n$  es un índice que va desde 0 hasta el número de representantes a elegir menos 1.

### 2.1.2. Método Saint Lagué puro

Es un sistema utilizado también en varios países europeos, entre ellos Alemania. Es muy similar al D'Hondt. La diferencia entre ambos consiste en que el método de Saint Lagué utiliza como divisores los números impares: 1, 3, 5, ... La fórmula utilizada en este caso para realizar la tabla de asignación del número de representantes electos es  $\frac{V_i}{2n+1}$ .

### 2.1.3. Método de Saint Lagué modificado

Es idéntico al sistema Saint Lagué puro, excepto para la asignación del primer representante de cada partido, que se hace según el cociente  $\frac{V_i}{1,4}$ . Después, a partir del primer representante, se retoma la fórmula del método Saint Lagué puro, es decir  $\frac{V_i}{2n+1}$ .

## 2.2. Métodos de cociente

Estos métodos de reparto de representantes por cociente se basan en el mismo principio. En primer lugar se establece un divisor  $d$  para repartir los representantes. De esta manera, en una primera aproximación, cada formación política recibe un número de representantes que es igual al número de votos recibidos  $V_i$  dividido entre  $d$ , aproximándose el cociente por defecto. Después, se procede a repartir los puestos sobrantes entre los grupos políticos en función de los restos de las divisiones realizadas.

Entre estos métodos, están los siguientes:

### 2.2.1. Cociente Hare

El divisor utilizado es el resultado de dividir el número de votos totales  $V$  y el número de representantes a elegir en el proceso, aproximando  $d$  al entero más próximo. En este caso, se puede interpretar  $d$  como el número de votos necesario para conseguir un representante. Es un método muy parecido al propuesto por Jefferson.

### 2.2.2. Cociente Droop

En este caso, el divisor utilizado es  $d = 1 + \frac{V}{r+1}$ , aproximando  $d$  al entero más próximo. Los cálculos de los representantes por cociente y por residuo son los mismos que en cociente Hare.

### 2.2.3. Cociente Imperiali

En el caso de este cociente, usado en Italia hasta las reformas electorales de 1991, el divisor utilizado es  $d = \frac{V}{r+2}$ , aproximando  $d$  al entero más próximo. Los cálculos de los representantes por cociente y por residuo son los mismos que en el cociente Hare.

### 2.3. Método de la mayoría relativa

Este método se usa en circunscripciones mucho más pequeñas que las de los otros sistemas de forma que en cada circunscripción ha de escogerse un representante, que se asigna a la formación política que ha obtenido más votos en esa circunscripción. Esto produce que los partidos minoritarios sean eliminados salvo que sean los más votados en alguna circunscripción concreta en la que consigan algún representante. Por ello, este sistema favorece la composición bipartidista de los parlamentos.

De todos los métodos anteriormente citados, es claro que el que más le debe sonar a los alumnos de Secundaria y Bachillerato es el método basado en la Ley de D'Hont, así llamado en honor de su introductor en 1878, el jurista belga y profesor de derecho civil y de derecho fiscal en la Universidad de Gante, Victor D'Hondt (Gante, 1841-1901). Este método se aplica actualmente en muchos países, como por ejemplo Argentina, Austria, Bélgica, Brasil, Bulgaria, Chile, Colombia, Croacia, Ecuador, Eslovenia, España, Finlandia, Guatemala, Irlanda, Israel, Japón, Países Bajos, Paraguay, Polonia, Portugal, República Checa, Suiza, Turquía o Venezuela.



Figura 1. Víctor D'Hondt.

S. Ríos, D. Ríos y J.M. Laví también afirman en [2] que a pesar de la aparente desconexión entre ambas disciplinas, pueden encontrarse bastantes aplicaciones de las Matemáticas en la Política. De hecho, dichos autores contemplan la existencia de tres disciplinas matemáticas claves en el campo de la Política. Estas son las siguientes:

1. El Análisis de Decisiones, que apoya la toma de decisiones de un individuo en condiciones de incertidumbre y en presencia de objetivos múltiples y conflictivos.

Este Análisis proporciona una aproximación prescriptiva sobre cómo debe tomar decisiones una persona, o grupo de personas, en presencia de incertidumbre y objetivos múltiples, siendo a nivel conceptual una de sus fortalezas, precisamente, la forma tan sencilla en la que se pueden presentar sus ideas básicas. El aparato matemático que subyace en este análisis es también muy básico: el Teorema de Bayes y la distribución predictiva (la analítica predictiva es la aplicación de técnicas matemáticas avanzadas, tales como el Aprendizaje Automático para predecir datos que faltan). Otra de sus ventajas es su enorme potencial a la hora de justificar y debatir una decisión política. Así, en lugar de discutir acaloradamente sobre una base intuitiva, se tiene la posibilidad de discutir racionalmente sobre una base científica.

2. La Teoría de Juegos, que permite analizar situaciones de conflicto entre dos o más participantes, esencialmente desde una perspectiva predictiva.

Como es sabido, uno de los motores fundamentales de la política es el conflicto público. Por ello, es interesante considerar algunos de los conceptos principales de la Teoría de Juegos, la principal teoría análisis de conflictos, a saber la Teoría de Juegos, en la que los individuos o grupos se modelizan como actores que escogen entre un conjunto de alternativas para alcanzar sus objetivos, siendo las estrategias no dominadas y las estrategias en equilibrio sus dos conceptos clave.

3. El Análisis de Negociaciones, que intenta aconsejar a una parte involucrada en una situación de conflicto, teniendo en cuenta una descripción del comportamiento previsible de las otras partes.

La forma más general de resolver un conflicto es a través de la negociación. Una negociación puede definirse como un proceso de toma de decisiones en el cual las partes se comunican e intercambian ideas, argumentos y ofertas con la intención de satisfacer sus

necesidades y alcanzar sus objetivos educando e informando a sus contrincantes y cambiando las relaciones, posiblemente haciendo concesiones, para alcanzar un acuerdo.

Aunque existen numerosas variantes del problema de la negociación, éstas pueden ser distributivas, en las que debe repartirse un solo bien, o integrativas, en las que las partes combinan sus capacidades y recursos para crear valor y hacer una repartición más beneficiosa. Una negociación puede concluir en una solución satisfactoria para ambas partes, en una ruptura de las mismas o en una ruptura con acuerdo para intentar replantear las negociaciones nuevamente. En muchas ocasiones, la ruptura se acaba resolviendo con una votación o bien con un arbitraje de los diferentes métodos de negociación.

Entre los métodos de negociación están los métodos basados en la búsqueda de una sucesión de acuerdos mejores y los basados en concesiones, en los que las partes comienzan la negociación desde posiciones diferentes, y los participantes van modificando una propuesta ineficiente inicial, con la ayuda de un mediador, de forma que cada nuevo acuerdo sea conjuntamente mejor que el anterior hasta que no sean posibles más mejoras conjuntas.

Los métodos basados en la búsqueda de una sucesión de acuerdos mejores se denominan métodos SNT (Single Negotiating Text, término introducido por Fisher en 1978) y tienen como principal inconveniente la dependencia clara de la solución inicial. Los basados en concesiones, en los que las partes comienzan la negociación desde posiciones diferentes son muy habituales en negociaciones de compraventa y su principal inconveniente es que el acuerdo alcanzado puede no ser el mejor, solíéndose entonces utilizar métodos SNT para renegociar entre aquellas soluciones mejores que el acuerdo alcanzado. Puede consultarse [2] para más detalles.

### 3. Propuestas didácticas

El trabajo de los autores se ha centrado en la elaboración de una serie de actividades para el curso de 1º de Bachillerato relacionadas con la política. Se elige este curso académico por ser en el que mayor peso tiene la Estadística Descriptiva dentro de todo el currículo de la educación secundaria, aunque muchas de las actividades que se desarrollarán a continuación pueden ser llevadas a cursos inferiores de la secundaria.

Uno de los recursos utilizados en estas actividades para fomentar el uso de las TIC's es la consulta de bases de datos de organismos oficiales del Estado encargados de realizar los censos y estadísticas de interés nacional. Véase el Instituto Nacional de Estadística de España [www.ine.es](http://www.ine.es), el cual recoge los datos de nuestro país con un carácter oficial.

#### ✓ Actividad 1: El sistema electoral

Con esta actividad, modificación de otra planteada en [4], repasamos los parámetros estadísticos -pudiendo ser usada como actividad de introducción o como de repaso de conocimientos previos- y trabajamos la competencia en comunicación lingüística mediante la lectura y la redacción, la competencia social y cívica, ya que se comentan distintos modelos democráticos por países y se pondrá en relevancia la importancia del respeto de la libertad de opinión y voto, la competencia de aprender a aprender, ya que los propios alumnos deben realizar las búsquedas necesarias para responder a las preguntas planteadas mediante la investigación y por supuesto la competencia matemática, al estar trabajando con datos estadísticos.

Los alumnos deben de leer el siguiente texto, meditarlo e ir respondiendo a las siguientes preguntas en cursiva:

*¿Cómo habéis elegido al delegado de la clase?*

Tal vez se hizo una votación en la que cada alumno elegía a un compañero y el más vo-

tado fue nombrado delegado. Tal vez en cada papeleta se podían anotar un máximo de dos candidatos. Quizás se hizo una segunda vuelta para elegir entre los dos más votados.

*Hay un parámetro estadístico que designa al candidato más votado. ¿Cuál es?*

Hay muchas maneras de realizar una votación. Por ejemplo, para elegir la ciudad que organizará los Juegos Olímpicos se vota primero entre las ciudades candidatas y se elimina la que menos votos haya conseguido; se vuelve a votar y se retira de nuevo la que menos votos reciba; así hasta quedarse con la ciudad ganadora.

Los sistemas electorales para elegir a los gobernantes también son variados según los países. El sistema electoral español no es proporcional al número de votos; sigue la llamada ley D'Hondt. En otros países, como en Brasil, después de la primera elección puede realizarse una segunda vuelta en la que compiten los dos candidatos que más votos recibieron si ninguno de ellos obtuvo el 50 %.

*¿En qué otros países se realiza la segunda vuelta? ¿Para qué sirve?*

La estadística ha estudiado en profundidad cuál es el sistema electoral más justo y ha llegado a una conclusión: no hay un sistema electoral idóneo, todos tienen algún inconveniente que deja insatisfechos a algunos, y además dan lugar a situaciones paradójicas. Por ejemplo, en una primera vuelta pueden quedar ordenados los candidatos así:  $A > B > C$ , y en la segunda vuelta los que votaron a  $C$  se decantan mayoritariamente por  $B$  y gana éste. En nuestro sistema electoral se ha dado el caso de que el partido con más votos no sea el que más escaños recibe.

*Buscad al menos un caso en el que haya pasado esto.*

*¿Qué significa mayoría simple y mayoría absoluta?*

*En casi todas las votaciones el voto es secreto. ¿A qué crees que se debe?*

#### ✓ Actividad 2: Variables estadísticas

Se trata de una actividad de enseñanza-aprendizaje, ya que impartimos nuevos conceptos a los estudiantes a la vez que ellos los aplican directamente a su trabajo en equipo.

Esta actividad se aplica a 4ºESO y 1º de Bachillerato. Si estamos en Bachillerato los alumnos vienen de estudiar estos contenidos en la ESO, por lo cual podría considerarse como una actividad de repaso para afianzar los conocimientos previos. Aunque como comentamos en la introducción, es posible que algunos de estos parámetros no se hayan estudiado en secundaria, siendo en ese caso, al igual que para 4ºESO una actividad de aprendizaje. Trabajamos la competencia en comunicación lingüística mediante la redacción y exposición oral al resto de compañeros, la competencia social y cívica, ya que se trabaja sobre el concepto de democracia y ciudadanía, la competencia de aprender a aprender, ya que los propios alumnos deben realizar las búsquedas necesarias para responder a las preguntas planteadas, la competencia digital ya que necesitan de la búsqueda por internet y el manejo de la página web del Instituto Nacional de Estadística, y por supuesto la competencia matemática al estar trabajando con datos estadísticos.

Tras un repaso del concepto de variable estadística, así como de las diferencias entre variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas, el para qué sirven las muestras de población, las clases o intervalos y las marcas de clase, repasaremos también los distintos parámetros: frecuencias relativa, absoluta y acumulada, media aritmética, moda, mediana, rango, varianza y desviación típica de la siguiente manera.

Para repasar todos estos parámetros los estudiantes deben realizar tres estudios estadísticos distintos donde deben: en primer lugar calcular todas las variables expuestas en sus cuadernos, en segundo lugar y con la ayuda de una tabla estadística en Calc –o cualquier otra hoja de cálculo que posea el centro- corregir posibles fallos y por último presentar una gráfica que muestre los datos estudiados (diagrama de barras, histograma, etc).

Para ello la clase se divide en grupos de trabajo. El docente facilitará una copia de los datos a cada grupo para poder realizar el trabajo al comienzo de la siguiente sesión. Cada grupo debe realizar los siguientes trabajos en base a uno de los temas a elegir por sorteo:

- Variables cualitativas: partidos políticos votados en España en las últimas elecciones generales [www.interior.gob.es/informacion-electoral](http://www.interior.gob.es/informacion-electoral). Presidentes de partidos políticos entrevistados en la Radio Televisión Española en 2015. Los partidos y presidentes se nombrarán siguiendo las letras del alfabeto de modo que permanezcan anónimos. Los partidos se representan con letras mayúsculas y el presidente que corresponda a dicho partido tendrá la misma letra en minúscula.
- Variables cuantitativas discretas: número de escaños de cada partido en las últimas elecciones generales [www.interior.gob.es/informacion-electoral](http://www.interior.gob.es/informacion-electoral) y número de millones de euros defraudados en los casos de corrupción por cada partido (incluir como mínimo tres partidos de manera anónima).
- Variables cuantitativas continuas: inversión de los últimos dos gobiernos de España en Educación e inversión de los últimos dos gobiernos de la comunidad autónoma en Educación.

Evidentemente cada grupo tendrá una mezcla de los tres tipos de variables y necesitará del trabajo de los otros grupos para poder completar sus datos –cada grupo expondrá su trabajo al resto de la clase al final de la actividad-.

La siguiente actividad guarda relación con la anterior y es de aplicación al primer curso de Bachillerato o como ampliación en 4º de la ESO, ya que se introducen parámetros de estadística bidimensional.

#### ✓ Actividad 3: ¿Castigan los españoles la corrupción en las urnas?

Se trata de una actividad de enseñanza-aprendizaje, ya que impartimos nuevos conceptos a los estudiantes a la vez que ellos los aplican directamente a su trabajo en equipo.

Trabajamos la competencia en comunicación lingüística mediante la redacción y exposición oral al resto de compañeros, la competencia social y cívica, ya que se trabaja sobre el concepto de democracia y ciudadanía, la competencia de aprender a aprender ya que los propios alumnos deben realizar las búsquedas necesarias para poder responder a las preguntas planteadas, la competencia digital, ya que necesitan de la búsqueda por internet y el manejo de la página web del Instituto Nacional de Estadística, y por supuesto la competencia matemática al estar trabajando con datos estadísticos.

Con los datos sobre política de la actividad anterior vamos a comparar dos de las variables estudiadas anteriormente, que serán sorteadas entre los grupos -los datos que no se han estudiado en la actividad anterior son facilitados por el docente-. La clase sigue estando dividida en grupos de trabajo. Cada grupo debe estudiar la relación entre dos variables a elegir entre las siguientes:

- Número de votos obtenidos y dinero defraudado por cada partido político.
- Dinero invertido en educación y resultados PISA por países europeos.

Todas las variables continuas habrán sido discretizadas previamente.

El trabajo de cada grupo consiste en realizar una tabla estadística con ambas variables, la nube de puntos que las relaciona, calcular su centro de gravedad y su covarianza. Estudiar si existe realmente relación entre ambas, calcular las rectas de regresión, el coeficiente de determinación, el coeficiente de correlación, estimar dos valores no conocidos (¿son fiables? ¿por qué?), realizar un análisis argumentado sobre lo estudiado y exponerlo al resto de la clase.

✓ Actividad 4: Sistema electoral y circunscripciones

En la siguiente actividad, modificación de otra planteada en [4], seguimos trabajando de manera cooperativa por grupos. Se trata de una actividad de aprendizaje, ya los estudiantes conocen los contenidos matemáticos que necesitan aplicar para desarrollar la actividad.

Trabajamos la competencia en comunicación lingüística mediante el debate argumentado en clase, la competencia social y cívica, ya que se trabajan temas de relevancia social como el sistema electoral y las circunscripciones, tan a debate en la actualidad, y por supuesto la competencia matemática al estar trabajando con datos estadísticos.

El trabajo de cada grupo consiste esta vez en realizar la siguiente actividad y exponerla al resto de la clase en la última sesión. Los alumnos deben leer el siguiente texto e ir respondiendo de manera reflexiva a las siguientes preguntas:

El sistema electoral español, definido en la Constitución de 1978, está diseñado para favorecer a las mayorías y así obtener gobiernos más estables.

*Siendo esto así, ¿cómo explicaríais que en las elecciones de noviembre de 2015 no se pudiese formar gobierno?*

Esto se consigue a través del sistema D’Hondt, que es un método para repartir los escaños de modo aproximadamente proporcional al número de votos que ha obtenido cada una de las candidaturas. Se utiliza en muchos países. El sistema es el siguiente: para repartir  $N$  escaños, una vez escrutados todos los votos se calcula una serie de cocientes mediante la fórmula  $\frac{V}{n}$ , donde  $V$  representa el número total de votos recibidos por cada uno de los partidos, y  $n$  son los números enteros desde 1 hasta  $N$ . La asignación de escaños se hace tomando los  $N$  mayores cocientes.

Por ejemplo, en una localidad hay cuatro partidos: A, B, C y D. El número de escaños es  $N = 10$ . Al dividir el número total de votos entre 1, 2, 3, ..., 10, se obtiene la tabla 1.

Tabla 1. Resultados de las votaciones de los partidos A, B, C y D.

Partido	A	B	C	D
Votos	840	1060	360	400
Votos: 2	420	530	180	200
Votos: 3	280	353	120	133
Votos: 4	210	265	90	100
Votos: 5	168	212	72	80
Votos: 6	140	177	60	67
...	...	...	...	...
Votos: 10	84	106	36	40

Las celdas sombreadas corresponden a los escaños asignados. El partido B ha obtenido 5 escaños; el A ha obtenido 3, y el C y el D, 1 cada uno.

1. En unas elecciones generales en una provincia, los resultados de los cinco partidos más votados fueron los mostrados en la tabla 2. Entre estos, los 16 partidos restantes, los votos nulos y en blanco completaron un total de 624432 votos.
  - Determinad el porcentaje de votos que correspondió a cada uno de estos cinco partidos.
  - Representad en un diagrama de sectores los datos aportados.

Tabla 2. Resultados de los cinco partidos más votados de una provincia.

Partido	A	B	C	D	E
Votos	230728	194511	114783	27374	19484

- Si en esta provincia se adjudicaban 8 diputados, aplicad el sistema D'Hondt para determinar cuántos diputados correspondieron a cada partido.
- Representad en otro diagrama de sectores la distribución del número de diputados que corresponde a cada partido.
- Comparad el porcentaje de votos con el de representantes. ¿Qué concluís?
- En otra provincia, el partido X obtuvo 15 diputados con 1377996 votos, y el Y, con 1723370 votos, obtuvo 18. Comparad el número de votos por diputado de cada partido entre las dos provincias.
- Abrid un debate en la clase en el que cada uno exponga su opinión sobre el sistema electoral español. ¿A qué conclusiones llegáis?
- Debatid si son justas o no las circunscripciones realizadas en España argumentado vuestras opiniones.

✓ Actividad 5: ¿Nos mienten los medios?

La siguiente actividad comprende contenidos de estadística unidimensional presente en los cursos de secundaria, aunque el estudio de la tendenciosidad es sólo parte de los contenidos de 4º de la ESO y de Bachillerato. No olvidemos que dentro de la nueva normativa LOMCE encontramos contenidos de las asignaturas de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y a las enseñanzas aplicadas de 4º ESO que especifican: "Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación". Y por último en las cuatro asignaturas de Matemáticas de Bachillerato el siguiente criterio de evaluación: "interpretar de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones".

Se trata de una actividad de aprendizaje puesto que los estudiantes ya conocen los contenidos matemáticos que necesitan aplicar para desarrollar la actividad. Podría servir como repaso de contenidos estadísticos (unidimensionales) o como actividad de introducción y motivación para los cursos de Bachillerato, ya que implican el análisis de datos en los medios de comunicación, algo con lo que nuestros alumnos están muy familiarizados.

Con esta actividad estamos trabajando la competencia en comunicación lingüística mediante el debate argumentado en clase, la competencia social y cívica ya que se trabajan temas de relevancia social como es la manipulación de los medios de comunicación, la competencia de aprender a aprender puesto que desarrollamos la conciencia crítica del alumnado - buscamos que las nuevas generaciones sean capaces de detectar cualquier tipo de tendenciosidad dentro de la información que reciben-, y por supuesto la competencia matemática al estar trabajando con datos estadísticos.

Se reparten una serie de gráficas extraídas de medios de comunicación españoles para analizar su tendenciosidad y manipulación. De nuevo dividimos a los estudiantes en grupos, en esta ocasión cada grupo recibe una de las siguientes tres imágenes, extraídas de la televisión pública y de la prensa (figuras 2, 3 y 4).



Figura 2. Paro en Europa en 2010.

## ¿Quién ha ganado el debate?

Marias, 28 de Junio de 2011

**Rajoy:** 831 votos (20,2%)

**Zapatero:** 3551 votos (86,2%)

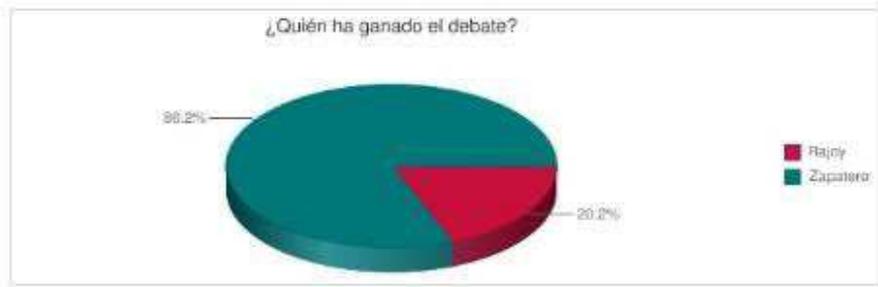


Figura 3. Datos sobre el debate del estado de la nación de junio de 2011.



Figura 4. Evolución del desempleo en España desde 2007 a 2014.

Posteriormente tienen que realizar un trabajo donde respondan a las siguientes cuestiones:

1. Cómo son los datos representados, ¿cualitativos o cuantitativos? ¿discretos o continuos? ¿por qué?
2. ¿A qué tipo de gráfica estadística corresponde? ¿Qué otros tipos de gráficos conocéis para representar este tipo de datos?
3. ¿Qué errores veis en la gráfica? ¿Errores de agrupación de datos, de área o de escala?
4. Con los datos aportados por la imagen realizad una representación rigurosa de los mismos en el mismo tipo de gráfico estadístico y en otro distinto de los expuestos en el punto 2.

Para concluir, uno de los grupos de cada tipo de gráfica deberá exponer el trabajo al resto de sus compañeros e iniciar un debate con el resto del aula sobre la tendenciosidad de la imagen y las consecuencias de su lectura errónea bajo la moderación del profesor o profesora.

#### 4. Reflexiones personales y conclusiones

En esta comunicación se han propuesto una serie de actividades sobre Política y Matemáticas, vinculadas a preguntas o cuestiones de vigente actualidad, para la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística en conexión con la vida real del alumnado. Nuestra intención era la de haber puesto en práctica dichas actividades en alguno de los centros de Secundaria y Bachillerato a los que uno de los autores de esta comunicación viene acudiendo de forma regular (una o dos veces por curso) desde hace ya algunos años, como parte de la fase de prácticas de la investigación sobre la enseñanza de las Matemáticas en los IES que se lleva a cabo en el grupo de investigación que dirige, al objeto de analizar y contrastar sus resultados.

Sin embargo, por razones de calendario de dichos centros, este último deseo no se ha podido llevar todavía adelante, motivo por el cual aún no podemos presentar ningún análisis de tipo cualitativo o cuantitativo de los resultados obtenidos, objetivo que nos planteamos realizar en un futuro cercano en uno de esos centros, para ver su utilidad.

En todo caso, los autores pensamos que:

1. Sería necesario incluir algunas nociones de Política en general, aunque fuesen básicas, y más concretamente del sistema democrático (monarquía parlamentaria) español en el último curso de Secundaria –para aquellos alumnos que no cursen posteriormente el Bachillerato– o en los de este último nivel del sistema educativo español.
2. Las actividades que proponemos son una buena forma de acercar la Estadística a los alumnos, al plantearles problemas con los que se van a encontrar no demasiado tiempo después de la finalización de su etapa de Secundaria y Bachillerato y en su posterior vida como ciudadanos.
3. Trabajar una de las competencias clave determinadas por la ley educativa, la competencia cívica, a través de la enseñanza de las Matemáticas. Dicha competencia se basa en el conocimiento crítico de los conceptos de democracia, justicia, igualdad, ciudadanía y derechos humanos y civiles, por lo cual hace necesaria la incorporación de contenidos de índole política a las aulas de secundaria y bachillerato.
4. Con ello se conseguiría, además, dotar de independencia al pensamiento de cada alumno, de forma que sus decisiones (en este caso, el sentido de sus votos en las elecciones en las que participe) no se vean influidas y mediatizadas, o al menos no totalmente, por la opinión de terceros, como podrían ser la familia, el entorno, los medios de comunicación, etc.

Se quiere que los alumnos sean capaces de incorporarse al derecho al voto con plena conciencia de la importancia que ello conlleva, así como de una base política que les permita entender el sistema en el que viven y analizar con espíritu crítico las propuestas de los distintos partidos políticos.

Por todo ello, reiteramos nuestra intención de llevar a la práctica esta propuesta, analizar los resultados obtenidos e incentivar al profesorado de los centros a realizar actividades en sus aulas de este mismo tipo o similares.

## Referencias

- [1] RUIZ MAYA PÉREZ, L. *“La estadística y la política”*. Diario El País. Madrid, 1981.
- [2] RÍOS GARCÍA, S., RÍOS INSÚA, D. y LAVÍ, J.M. *“Las Matemáticas de la Política”*, Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. Vol. 102, N°. 1, pp. 215–227, 2008.
- [3] ALCAIDE, F., HERNÁNDEZ, J. ET AL. *Unidad 12: Distribuciones bidimensionales. Matemáticas I para 1º de Bachillerato*. Madrid: Editorial SM. Serie Savia, 2015.
- [4] VIZMANOS, J.R., ALCAIDE, F. ET AL. *Unidades 13 y 14: Estadística unidimensional y Estadística bidimensional. Matemáticas opción B Pitágoras 4º de ESO*. Madrid: Editorial SM. Serie Conecta 2.0, 2011.
- [5] BLOG EL ARTE DE PENSAR. *Cuatro formas de mentir con gráficos de datos en una presentación*. Recuperado desde: <http://bit.ly/19d2hxd>, 2011.

### Sobre los autores:

*Nombre:* Elena Misa Borrego

*Correo electrónico:* elena.misa.borrego@gmail.com

*Institución:* Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

*Nombre:* Juan Núñez Valdés

*Correo electrónico:* jnvaldes@us.es

*Institución:* Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.



# Experiencias Docentes

## Didáctica con R. Menos cuentas y más pensamiento crítico

## Didactics with R. Less calculations and more critical thought

Alejandro Galindo Alba

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp.053-074, ISSN 2174-0410

Recepción: 23 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de abril de 2017

### Resumen

La estadística cada vez está tomando un papel más relevante en el desarrollo de la sociedad moderna. La crisis bursátil, las encuestas electorales, el manejo y clasificación de la información, la ciencia del dato o el Big Data son solo algunos ejemplos para entender la necesidad de tener una sólida cultura estadística para poder analizar nuestro entorno desde un punto de vista crítico y fundamentado.

Por todo ello, el objetivo de la siguiente comunicación es introducir una propuesta para la mejora de la didáctica de la estadística. Esta nos permitirá manejar un gran volumen de datos reales, evitar el uso de la calculadora, la visualización de gráficos y el análisis crítico de los resultados. Todo ello a través de un software libre, destinado hasta hoy a Estudios Superiores.

**Palabras Clave:** Cultura estadística, enseñanza y aprendizaje, investigación en educación estadística, R, software libre.

### Abstract

Statistics is starting to play a more relevant role in the development of modern societies. The stock market crash, election studies, management and classification of data, science of data or "Big Data" are only some examples that show how necessary is to have a solid statistical culture in order to analyse our environment with a critical point of view.

Due to of these reasons, the goal of the following paper is to make a proposal to improve Statistics didactics. That will allow us to handle a big volume of real data, make easier the interpretation of graphs, the critical analysis of results and reduce the usage of calculators. For that purpose we will use free software destined to superior studies nowadays.

**Keywords:** Statistics culture, teaching and learning, research in statistical education, R, free software.

## 1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar una nueva herramienta para aquellos docentes que deseen introducir una opción de mejora en la didáctica de las matemáticas; particularmente en la estadística.

Conseguiremos:

- Evitar el tedioso trabajo con la calculadora.
- Trabajar con gran cantidad de datos.
- Trabajar con datos reales.
- Facilitar la visualización de los datos mediante gráficas.
- Fomentar la reflexión y el análisis crítico.
- Eliminar el gasto en software.

Para ello trabajaremos con R; un potente software gratuito que nos permitirá relacionar la utilidad de la estadística y la realidad del día a día.

A la vez, al eliminar los gastos en software también eliminamos una posible brecha económico-social. Este software no necesita ser instalado en ordenadores último modelo, ya que funciona en ordenadores menos actualizados realizando de igual manera sus funciones. Las rentas familiares no son un problema para que un alumno pueda instalar el software en casa.

## 2. El currículo de estadística

La estadística forma parte del currículo de matemáticas y es importante por su presencia en la sociedad (prensa, radio, política, etc.), en la enseñanza (obligatoria y no obligatoria) y en la investigación científica de diferentes ramas. No podemos imaginar un estudio experimental sin tener en cuenta la estadística. De este modo se posiciona como una herramienta fundamental en la sociedad de la información y se trata de dar una cultura estadística para todos como apunta Gal (2002).

A pesar de ser una materia sumamente importante y de la cual estamos rodeados a diario, la estadística suele ser una materia olvidada por los profesores en la educación secundaria, siendo relegada frecuentemente al final del temario. Los conceptos estadísticos quedan pobres, quizás por una escasa preparación del profesor en cuanto a la materia.

Por ejemplo, Holmes (1980) destacaba su importancia en las siguientes cuestiones:

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.*
- Es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.*

- *Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.*
- *Ayuda a comprender los restantes temas de curriculum, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.*

Una visión más actual es la de Begg (1997), quien señala que la estadística es un buen camino para llegar a conseguir las capacidades de comunicación, procesamiento de la información, uso de nuevas tecnologías, trabajo cooperativo, que cada vez toman más peso en los nuevos currículos.

Las actitudes influyen decisivamente en el propio proceso de enseñanza y aprendizaje. Los profesores frecuentemente aíslan la estadística a un segundo plano, creando una actitud negativa hacia la misma. Esto lleva a los alumnos a no valorar la materia. Frecuentemente se la considera difícil, poco útil, se duda de su capacidad para aprenderla. Por lo tanto debemos tener en cuenta no solo la actitud de los estudiantes sino también las actitudes del profesorado. Quizás este bloqueo actitudinal viene heredado por su vínculo con las matemáticas.

Batanero (2002) por su parte, justifica la necesidad de la enseñanza de la estadística:

- *La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.*
- *Es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.*
- *Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.*
- *Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.*

### 3. La Estadística y R

Como señalaron Barriuso, Gómez, Haro y Parreño (2013), los alumnos adquieren las habilidades en el cálculo, pero no comprenden, en determinados casos, el sentido de lo que aprenden. Quizás les falta manipular los conceptos, es decir, verlos desde distintos ángulos para descubrir las relaciones que se dan entre ellos, para adquirir una comprensión más sólida de la estadística.

La tecnología y determinado software favorecen esta manipulación y la simulación de experimentos con mayor rapidez y fiabilidad. Si además este software es gratuito, facilitamos la accesibilidad al mismo tanto por parte de las administraciones como del alumnado, suponiendo un importante ahorro y eliminando a su vez posibles barreras económicas.

Por otro lado, acercar al alumno a este tipo de herramientas sin tener que esperar a llegar a estudios superiores les facilitará su manejo y comprensión en el futuro.

Para su demostración o inicio en su utilización, lo más interesante será aplicarlo a la estadística de las matemáticas de primero de Bachillerato; en ella se trata la estadística descriptiva bidimensional, la cual nos da bastante juego a la hora de plantear problemas, de ver la utilidad que tiene la estadística y de fomentar la visualización de los resultados mediante gráficas. Llevar esa materia a su aplicación en R nos permitiría trabajar con una gran variedad de datos, estudiar sus distribuciones unidimensionales, bidimensionales, distribuciones condicionadas, correlación de variables, regresión, estimación... y todo ello utilizando datos reales.

Desde un punto de vista más práctico, los alumnos podrían extraer datos reales de la página del Instituto Nacional de Estadística, volcarlos en R y utilizar las herramientas del programa para sacar conclusiones y demostrar la utilidad de su uso desde temprana edad.

### 3.1. Uso de las TIC en educación.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) juegan en este principio de siglo un papel fundamental en la educación. Tratamos con generaciones que no han conocido el mundo sin internet y para los cuales un mundo sin tecnología es algo prácticamente impensable. Gracias a estas herramientas están acostumbrados a obtener información con facilidad fuera y dentro de la escuela, tienen una sorprendente capacidad de procesamiento paralelo, son altamente multimediales y al parecer, aprenden de manera distinta (OECD-CERI, 2006). Es por ello que los docentes también debemos atender esa llamada y plantear posibles mejoras en nuestro desempeño relacionando nuestros conocimientos con esta nueva ola generacional.

La escuela de hoy día, por tanto, se enfrenta a una necesidad de transformación; de una evolución desde la educación instrumental a otra que prepare a los estudiantes para desenvolverse en la sociedad del conocimiento. Las nuevas generaciones, que en determinados momentos, pasaran por el sistema educativo como si de una cadena de montaje se tratase, se preparan para puestos de trabajo que hoy todavía no existen y deben aprender a renovar permanentemente una importante parte de sus conocimientos y habilidades (21st Century Skills, 2002).

Una de las grandes fortalezas de las TIC en el aula de matemáticas es la posibilidad de utilizar software específico para acompañar la construcción del aprendizaje. Por otro lado, la utilización del software libre se apuntala cada vez más como la alternativa más idónea para el uso de las TIC en el ámbito educativo tal y como señalan Bracho y Maz (2012).

Como hemos visto, la irrupción y el uso generalizado de las TIC en los últimos años, está produciendo cambios de enorme importancia en las distintas áreas donde nos desenvolvemos y la educación no puede ser una excepción a pesar de que la escuela sea una de las instituciones más resistentes al cambio según España, Luque, Pacheco y Bracho (2008). Esto, unido a estudios realizados sobre este tema, concluyen que los estudiantes experimentan un aprendizaje significativo cuando usan adecuadamente las TIC en sus procesos de aprendizaje. Además, en el caso de las matemáticas, estos recursos ponen en manos de los profesores y estudiantes herramientas que contribuyen a desarrollar nuevas capacidades cognitivas, facilitan la comprensión de conceptos matemáticos, ayudan en la realización de cálculos complicados y facilitan el análisis en los procesos característicos de la resolución de problemas según Caravalló y Zulema (2009).

### 3.2. Ordenadores y enseñanza de la estadística.

Los ordenadores han jugado un papel fundamental en el desarrollo de la Estadística; tanto por facilitar el acceso a ella, como por proporcionar diferentes software sin los cuales hoy día sería inimaginable la realización de análisis de datos.

Autores y profesores como Shaughnessy, Garfield, & Greer (1996) ya tomaron consciencia de la importancia del uso de ordenadores en la enseñanza de la Estadística. Incluso el Instituto Internacional de Estadística ya realizó en Austria en 1970 y en Cambera en 1984 una Round Table Conference sobre el uso de computadoras en la docencia de la estadística.

Esta herramienta ha facilitado el trabajo con mayor número de datos reduciendo las horas de estudio gracias a su velocidad. Esto, permite a los alumnos investigar otros aspectos de los estudios estadísticos, como la recolección y planificación de la muestra, el diseño experimental y el análisis e interpretación de los resultados; es decir, tal como señala Batanero (2001), estas herramientas permiten que los estudiantes establezcan una relación con la estadística de la misma manera que lo podría hacer un estadístico profesional. Además, se acerca al alumno al manejo de la informática en general a través de procesadores de texto y hojas de cálculo.

La propia Batanero (2001) clasifica los siguientes tipos de software para la enseñanza de estadística:

- Paquetes estadísticos profesionales, como por ejemplo: SPSS, STARTGRAPHICS, R, etc. Estos paquetes tienen una gran capacidad de tratamiento de datos y presentación gráfica.
- Software didáctico, como Fathom y Sampling Distributions.
- Software de uso general, como las hojas de cálculo EXCEL.
- Tutoriales.
- Software en Internet, material "on-line".

### 3.3. Software libre.

Ofrecer la posibilidad de ser copiado, modificado, usado y distribuido de forma libre son las principales características del software libre que encuentran Sanchez y Toledo (2009). Este no ofrece los obstáculos del software comercial, ni imposiciones sobre sus licencias.

En cuanto a la relación con su uso en los centros educativos, podemos destacar que supone un importante ahorro en costes; dinero que en las escuelas no suele abundar y que puede destinarse a otros recursos. Pensemos que cuando en un centro educativo se monta un aula de informática se nos presentan dos opciones. Por un lado, la podemos equipar con software privado, que no podremos copiar ni modificar, por lo tanto los alumnos no podrán llevárselo a casa y el cual nos acarreará elevados costes. Por otro lado, podemos equipar la sala con software libre: Este podremos copiarlo libremente sin incurrir en el infrincimiento de la ley, los alumnos lo podrán descargar en sus casas y estaremos exentos del costoso pago de las licencias.

Al eliminar los gastos en software también eliminamos una brecha económico-social. Este software no necesita ser instalado en ordenadores último modelo, sino que funcionan en ordenadores menos actualizados realizando de igual manera sus funciones. Las rentas familiares no son un problema para que un alumno se pueda llevar el software a casa.

### 3.4. R

R es el protagonista de esta propuesta didáctica. Es un software clónico del paquete S-Plus (no gratuito), diseñado especialmente para análisis estadísticos y gráficos por Ross Ihaka y Robert Gentleman.

En 1995 Martin Maechler convenció a sus creadores para que lo distribuyeran gratuitamente, pero hasta 1999 no llegaron las primeras versiones piloto que han ido evolucionando y añadiendo mejoras hasta la fecha.

Hasta hoy es uno de los paquetes estadísticos más utilizados en biomedicina, bioinformática, matemáticas financieras y series de datos bursátiles.

Existe mucha documentación relativa al uso del R en general. Puede consultarse las direcciones:

<http://www.cran.r-project.org/other-docs.html>

<http://www.cran.r-project.org/manuals.html>

En ellas se puede encontrar documentación en varios idiomas, entre ellos en español, sobre R y sus aplicaciones en el análisis estadístico.

Observación: al abrir R saldrá la línea de comandos, la cual comienza con el símbolo `>`. En los ejemplos de la comunicación se ha incluido este símbolo (el cual no debe ser tecleado si queremos ejecutar los ejemplos) para diferenciar los comandos de ejecución con las salidas que va devolviendo el programa.

Para la práctica en el aula se recomienda trabajar con la versión RStudio; facilitando así el manejo del programa a los estudiantes. En esta versión la pantalla de comandos, la consola y los gráficos aparecerán resumidos en una misma ventana tal y como se muestra en la figura 1:

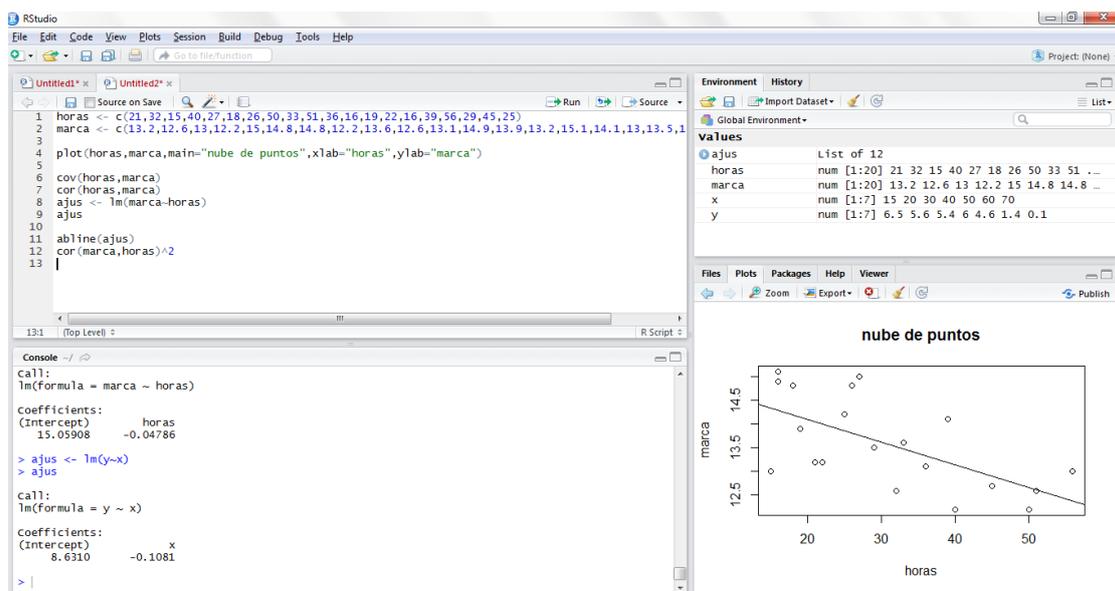


Figura 1. R-Studio.

## 4. Aplicación práctica

Siendo amplio el abanico de posibilidades para trabajar con R en la Educación Secundaria (obligatoria y post obligatoria), la investigación se enfocará en las matemáticas de 1º de Bachillerato.

### 4.1. Objetivos

Basándonos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre de 2015, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria definiremos los objetivos a conseguir de la siguiente manera:

- Encontrar valores representativos de un conjunto de datos utilizando medidas de centralización y dispersión.
- Representar e interpretar un conjunto de valores de dos variables mediante una nube de puntos.
- Distinguir si las variables de una distribución bidimensional tienen una relación de carácter aleatorio o funcional.
- Estimar el coeficiente de correlación lineal a partir de una nube de puntos.
- Analizar el grado de relación de dos variables de una distribución bidimensional conocido el coeficiente de correlación lineal.
- Determinar la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos utilizando distintos procedimientos.
- Estimar un valor de una variable conocido un valor de la otra.

### 4.2. Competencias

Las competencias, o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos del curso en el proyecto son cuantiosas. Las propuestas, para lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos, que se han querido destacar son las siguientes: competencia en comunicación lingüística, a través del uso del vocabulario específico, de la comprensión de los enunciados o de la identificación de las diferentes formas en las que pueden venir representados los datos en un enunciado; la competencia matemática, distinguiendo los elementos que intervienen en la regresión lineal y correlación, la relación de las variables, la interpretación de las representaciones gráficas y la interpretación de los resultados; la competencia digital, ya que debe hacer un uso ético y crítico de las Tics; las competencias sociales y cívicas, aceptando a todos los componentes y opiniones del grupo; la competencia cultural, representando e interpretando la información con relación a su entorno; la competencia aprender a aprender, comprendiendo las lagunas en el aprendizaje a la vista de los problemas que se tengan para realizar estimaciones; y el sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor, mostrando iniciativa al organizar las diferentes tareas o actividades a realizar, planificando su trabajo y mostrando iniciativa e interés por conocer y trabajar la curiosidad científica.

### 4.3. Recursos

Para el desarrollo de esta propuesta, el centro ha de contar con un aula equipada con ordenadores. Lo ideal es que cada alumno tenga su propio espacio y no sea necesario compartir los ordenadores para el trabajo individual.

El software se descargará de la página oficial y deberá estar instalado en cada equipo.

### 4.4. Metodología

Durante las sesiones se deberá crear un espacio de metodología activa que involucre tanto al docente como a los alumnos, donde estos puedan aprender a interpretar y visualizar los problemas de una manera autónoma y donde puedan ingeniar y experimentar técnicas propias para encontrar soluciones o rehacer las ya dadas. A su vez, se ha de buscar la colaboración entre ellos y el trabajo en grupo. Aprender a escuchar, discutir, argumentar y concretar objetivos comunes para un mismo logro, disfrutando y divirtiéndose, deberían ser parte de la metodología.

Para llevar esto a cabo, se trabajará con problemas que supongan un reto y un estímulo para el alumno; que le provoquen y le motiven. Problemas con un final poco frecuente o incluso con final abierto pueden provocar esa reacción que estamos buscando.

## 5. Fase de acción

### 5.1. Actividad 1

Esta actividad estará destinada a tomar contacto con la herramienta. Se entiende que los alumnos habrán recibido alguna clase previa de teoría y que aunque aún es pronto para dominar toda la terminología, sí le resultarán familiares términos como regresión, covarianza, correlación, etc.

El objetivo es que los alumnos vayan haciendo el ejercicio a la vez que el profesor, deteniéndose en cada paso y analizando los resultados obtenidos.

*Se midió el contenido de oxígeno, variable  $Y$ , a diversas profundidades, variable  $X$ , en el lago Wörthersee de Austria, obteniéndose los siguientes datos, en miligramos por litro:*

$X$	15	20	30	40	50	60	70
$Y$	6,5	5,6	5,4	6	4,6	1,4	0,1

*¿Podrías establecer una relación entre la profundidad del lago y el oxígeno observado a dicha profundidad?*

Para desarrollar este ejemplo con R, lo primero que tendremos que hacer es incorporar los datos al sistema con los siguientes vectores:

```
> x <- c(15,20,30,40,50,60,70)
```

```
> y <- c(6.5,5.6,5.4,6,4.6,1.4,0.1)
```

Toda la laboriosidad del cálculo de las medias, varianzas, desviaciones típicas, etc. de cada variable no sería necesario en nuestro caso, ya que podemos obtener la recta de regresión, que aquí denominaremos *ajus*, al ejecutar el comando

```
>ajus<- lm(y~x)
```

A continuación, para ver los resultados y los coeficientes de regresión solo debemos ejecutar el objeto creado en el paso anterior.

```
>ajus
```

```
Call:
```

```
lm(formula = y ~ x)
```

```
Coefficients:
```

```
(Intercept)      x
```

```
8.6310   -0.1081
```

De esta manera obtenemos la recta de regresión ajustada de Y sobre X, que tiene por coeficientes los conseguidos en el paso anterior y que es

$$y = 8,6310 - 0,1081x$$

Con estos sencillos pasos ahorramos las tediosas operaciones con la calculadora y obtenemos resultados fiables para todos los alumnos. Hasta el momento, observando el coeficiente de la x: -0,1081, podríamos ver que las variables profundidad y oxígeno no están incorreladas y que la relación que se produce entre ellas sería de sentido inverso, es decir, cuando una de las variables crece, la otra decrece. Visto desde el punto de vista aplicativo, mientras mayor sea la profundidad a la que nos encontremos en el lago, menor será la presencia de oxígeno.

Para visualizar este comportamiento, podemos pedirle a R una representación gráfica de la nube de puntos:

```
>plot(x,y,xlab="profundidad",ylab="oxígeno")
```

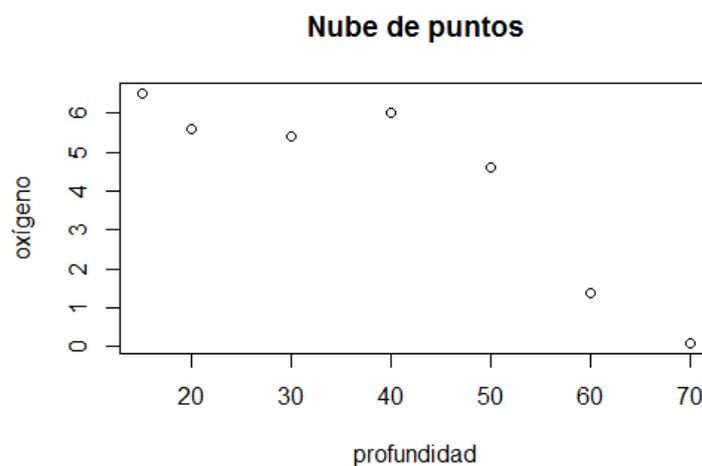


Figura 2. Nube de puntos (actividad 1).

Donde podríamos incluir la recta de ajuste para los datos ejecutando

```
>abline(ajus)
```

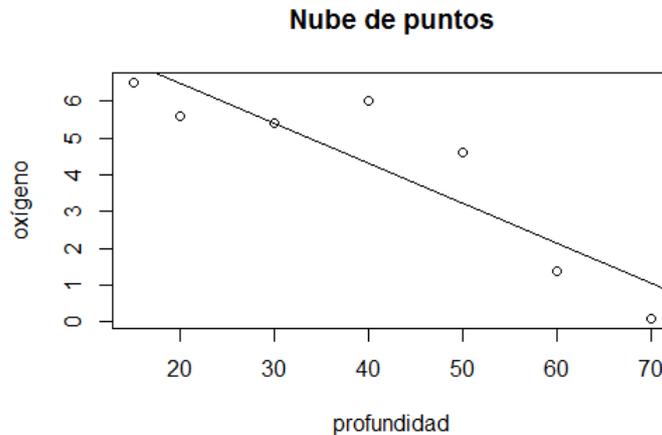


Figura 3. Recta de ajuste (actividad 1).

De esta manera, los alumnos podrán visualizar la relación entre las variables. Hecho que de otro modo sería no tan fácil de conseguir.

El inconveniente de la varianza como medida de relación es su dependencia de las unidades de medida de las variables. Por lo tanto, para trabajar con una medida adimensional la intensidad de relación lineal entre dos variables utilizaremos el Coeficiente de correlación lineal de Pearson.

$$r = \frac{Cov(x, y)}{S_x S_y}$$

Este coeficiente tiene el mismo signo que la covarianza y toma valores entre  $-1$  y  $1$ . Estos valores extremos reflejarían una relación lineal exacta entre las variables, lo que supondría que todos los puntos deben estar en una línea recta. Por lo tanto, cuanto más cercano a los extremos sea el valor del coeficiente mayor será la relación entre las variables, mientras que los valores cercanos a  $0$  indicarían una relación débil, por lo tanto no se podría explicar adecuadamente a la variable  $Y$  en función de  $X$  mediante la recta de mínimos cuadrados.

Para conocer su valor, ejecutamos

```
>cor(x,y)
```

```
[1] -0.8958494
```

El alumno, que ya sabía desde un principio que la relación entre las variables era de sentido inverso, puede observar ahora que dicha relación es bastante fuerte por la proximidad del coeficiente de correlación a  $-1$ .

Nos faltaría por conocer la fiabilidad del modelo, es decir, cómo de buenas son las predicciones, que calcularíamos mediante el modelo  $y = 8,6310 - 0,1081x$ .

El Coeficiente de Determinación es la herramienta que nos permite decidir si un ajuste es o no adecuado en sí mismo. Definido como

$$R^2 = \frac{\text{Cov}^2(x, y)}{S_x^2 S_y^2}$$

este coeficiente está comprendido entre 0 y 1, tratándose de un buen ajuste en aquellos casos donde  $R^2$  esté cerca de 1, y de un ajuste deficiente en aquellos en los que sea cercano a 0.

Este coeficiente también lo podemos expresar como el cuadrado del coeficiente de correlación.

$$R^2 = \frac{\text{Cov}^2(x, y)}{S_x^2 S_y^2} = \left( \frac{\text{Cov}(x, y)}{S_x S_y} \right)^2 = (r)^2$$

Y de esta manera lo ejecutaremos:

```
>cor(x,y)^2
```

```
[1] 0.8025461
```

En nuestro caso se observa un buen ajuste del modelo. Esto quiere decir, que las estimaciones que hagamos a partir de él serán fiables.

Por ejemplo, para estimar la cantidad de oxígeno a 65 metros de profundidad, tan solo tendremos que sustituir 65 en la expresión de nuestro modelo  $y = 8,6310 - 0,1081x$ . En R se podría realizar la operación

```
> 8.6310-0.1081*65
```

```
[1] 1.6045
```

(Sería quizás conveniente que los alumnos repitan este ejercicio con pocos datos de manera manual. De este modo comenzarán a contrastar las virtudes del método y a valorarlo en su medida).

## 5.2. Actividad 2

En esta tarea hemos aumentado el número de datos y los alumnos trabajarán por parejas. Las funciones y el camino serán iguales que en el primer ejercicio, pero no así el resultado del estudio y sus posibles interpretaciones.

A medida que se avanza en la actividad se abrirá el debate entre las parejas sobre la decisión a tomar en cada paso del proceso, debiendo llegar a un consenso entre ambos.

*En el centro de alto rendimiento "La Cartuja" de Sevilla se ha medido la marca que poseían 20 atletas en la prueba de 100 metros lisos y las horas semanales que, por término medio, le dedicaban a esta especialidad. Obteniéndose los siguientes resultados:*

Horas	21	32	15	40	27	18	26	50	33	51
Marca	13,2	12,6	13	12,2	15	14,8	14,8	12,2	13,6	12,6
Horas	36	16	19	22	16	39	56	29	45	25
Marca	13,1	14,9	13,9	13,2	15,1	14,1	13	13,5	12,7	14,2

¿Sería eficiente dedicar recursos económicos para conseguir un modelo matemático a partir del cual estimar con fiabilidad la marca de un atleta a partir de las horas que entrena a la semana? Razonar la respuesta. En caso de respuesta afirmativa, calcular dicho modelo y estimar la marca de un atleta que entrena 54 horas semanales.

Como en cualquier ejercicio, lo primero que deberíamos hacer es introducir los datos en R. Para ello, en lugar de emplear los términos X e Y, emplearemos el nombre propio de cada variable. Esto nos ofrecerá versatilidad y comprobar que no todo está “cerrado”.

```
> horas <- c(21,32,15,40,27,18,26,50,33,51,36,16, 19,22,16,39,56,29,45,25)
```

```
> marca <- c(13.2,12.6,13,12.2,15,14.8,14.8,12.2, 13.6,12.6,13.1,14.9,13.9,13.2,15.1,14.1,13,13.5, 12.7,14.2)
```

Y realizamos la representación gráfica de la nube de puntos

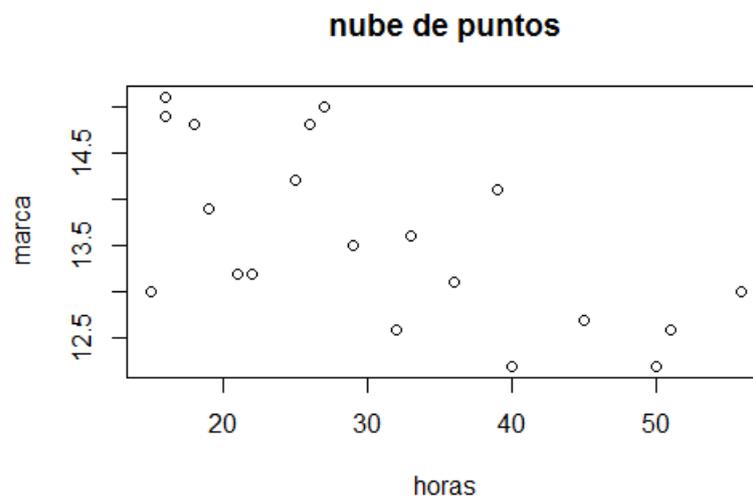


Figura 4. Nube de puntos (actividad 2).

Gracias a la importancia de la visualización gráfica, ya comenzamos a vislumbrar un posible comportamiento dependiente entre las variables. Para comprobar si las variables son o no incorreladas calcularemos la covarianza ejecutando

```
>cov(horas,marca)
```

```
[1] -7.650526
```

Comprobamos que la covarianza no es nula, luego las variables están correladas.

Mediante estos pasos se pretende que los estudiantes vayan estableciendo relaciones entre los conceptos teóricos y sus aplicaciones.

Hasta el momento habríamos podido comprobar que las variables no son incorreladas y que el sentido de su relación (que viene marcado por el signo de la covarianza) es de tipo inverso, es decir, cuando las horas aumentan las marcas mejoran.

En este punto los alumnos podrían pensar que ya es un buen momento para dedicar recursos económicos para conseguir un modelo a partir del cual predecir resultados. Y es el momento de incidir en la importancia del Coeficiente de Correlación, ya que es este el que nos marca la intensidad de la relación. Es decir, hasta el momento hemos encontrado que la relación existe, pero aún no sabemos cómo es de sólida.

Por lo tanto hay que calcular el coeficiente de correlación

```
>cor(horas,marca)
```

```
[1] -0.6304069
```

Al no ser un valor muy cercano a 1 o a -1, parece que la relación entre ambas variables, aunque existe, no es demasiado estrecha, por lo tanto no convendría desde un punto de vista económico emplear más recursos en el experimento. De cualquier modo se continuaría el ejercicio para mostrar otras curiosidades relevantes.

Si queremos obtener el modelo o recta de regresión de la marca sobre las horas entrenadas, ejecutamos

```
>ajus<- lm(marca~horas)
```

```
>ajus
```

Obteniendo la ordenada en el origen (15,05908) y la pendiente (-0,04785987)

Call:

```
lm(formula = marca ~ horas)
```

Coefficients:

```
(Intercept)  horas
 15.05908   -0.04786
```

La recta, por tanto, es

$$y = 15,05908 - 0,04785987x$$

Para añadirla a la nube de puntos ejecutamos la función abline

```
>abline(ajus)
```

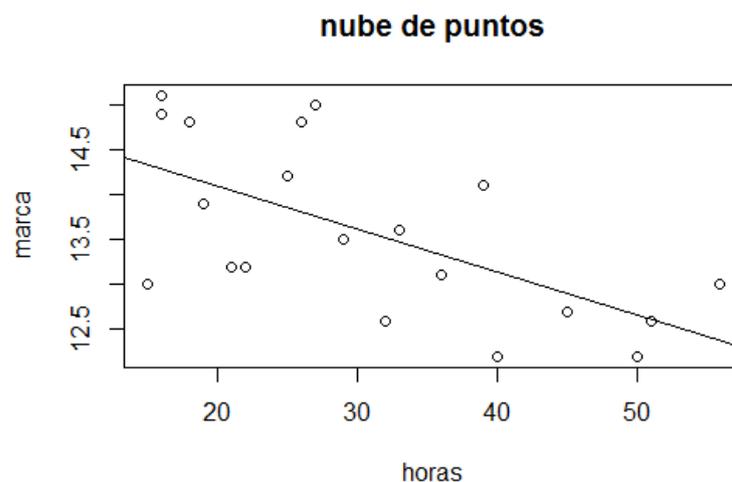


Figura 5. Recta de ajuste (actividad 2).

Es destacable la facilidad con la que hemos podido añadir la recta mediante la citada función.

Los alumnos podrían visualizar cómo la nube de puntos no parece demasiado concentrada alrededor de su recta de regresión. Esto debería comenzar a cobrar sentido, ya que vimos que las dos variables no presentaban una relación demasiado fuerte, lo que nos llevaría a pensar que las predicciones de las marcas que realicemos no serán muy fiables.

Una de las causas de esta falta de concentración de los datos puede deberse a que estamos estudiando una relación lineal entre las variables y éstas puede que se ajusten mejor a otro tipo de modelo como el exponencial. Este es al tipo de reflexión que podrá llegar el alumno. Si lo piensa un poco, verá que no tiene demasiado sentido el modelo propuesto, ya que un atleta, por muchas horas que entrene nunca llegará a hacer una marca negativa.

La fiabilidad del modelo y por tanto de sus predicciones las calculamos con el coeficiente de determinación:

```
>cor(marca,horas)^2
[1] 0.3974129
```

Como era de esperar obtenemos una fiabilidad bastante baja, por lo que no merecerá la pena realizar predicciones.

Con esta actividad, los alumnos podrán experimentar con los conceptos aprendidos en las clases de teoría; aplicándolos a un caso real del que tendrán que extraer sus propias conclusiones.

Con el aumento del tamaño de la muestra los alumnos empezarán a comprender la utilidad de la herramienta y valorarán el tiempo que se ahorra en realizar las operaciones de cálculo a mano. Además, el trabajo en parejas fomentará el debate y la resolución de dudas.

### 5.3. Actividad 3

Esta tercera tarea será la primera que comiencen a trabajar por sí solos. Ya deberían conocer las herramientas que han de utilizar en cada momento, y lo más importante: a reflexionar sobre los resultados obtenidos.

*Las calificaciones obtenidas, en dos asignaturas, por 17 alumnos de un centro escolar fueron las siguientes:*

X	3	4	6	7	5	8	7	3	5	4	8	5	5	8	8	8	5
Y	5	5	8	7	7	9	10	4	7	4	10	5	7	9	10	5	7

*¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de correlación poblacional entre ambas variables?*

### 5.4. Actividad 4

En esta tarea trabajaremos con un gran conjunto de datos perteneciente a R conocido como Fisher's iris data. Este recoge una muestra de 150 flores de tres especies diferentes de iris (iris setosa, versicolor y virginica) junto a sus variables longitud y anchura de sépalo (cm.) y longitud y anchura de pétalo (cm.).

Para acceder a los datos ejecutaremos directamente en R la función

```
>data (iris)
```

Una vez cargados podríamos ver los datos en la pantalla

```
>iris
```

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
...	...	...	...	...	...
146	6.7	3.0	5.2	2.3	virginica
147	6.3	2.5	5.0	1.9	virginica
148	6.5	3.0	5.2	2.0	virginica
149	6.2	3.4	5.4	2.3	virginica
150	5.9	3.0	5.1	1.8	virginica

Figura 6. Datos (actividad 4).

La salida es un data.frame con 150 filas (observaciones) y 5 columnas (variables) llamadas Sepal.Length, Sepal.Width, Petal.Length, Petal.Width y Species.

A partir de aquí dividiremos la clase en grupos de 3-4 personas como máximo. La mitad de los grupos deberá estudiar la posible relación entre la longitud y anchura de los sépalos y la otra mitad de grupos la relación entre la longitud y anchura de los pétalos, reflexionando sobre los resultados obtenidos y extrayendo las conclusiones oportunas.

Para ejemplificarlo trabajaremos con el caso de los pétalos. Para ello, lo primero que tendremos que hacer es seleccionar los datos correspondientes a nuestro estudio.

```
> x <- iris[,3] # Longitud del pétalo
```

```
> y <- iris[,4] # Anchura del pétalo
```

Ejecutamos de manera esquemática para la demostración:

```
>plot(x,y,main="nube de puntos (pétalo)",xlab="longitud",ylab="anchura")
```

```
>abline(ajus)
```

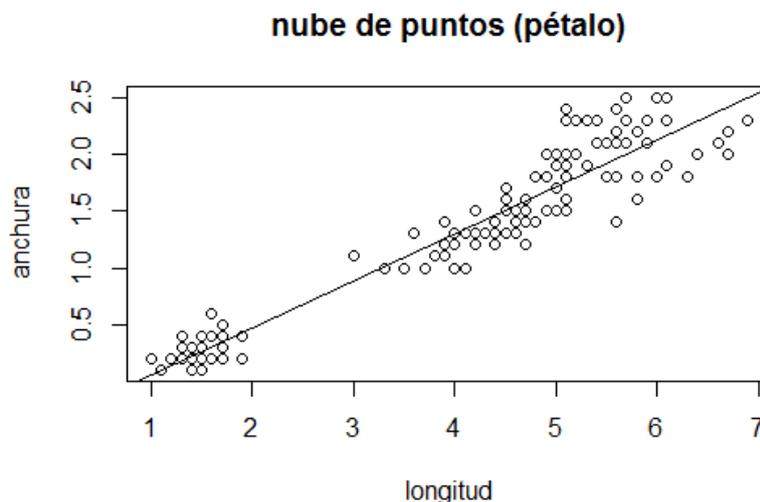


Figura 7. Recta de ajuste y nube de puntos (actividad 4).

```

>cov(x,y)
[1] 1.295609
>cor(x,y)
[1] 0.9628654
>ajus<- lm(y~x)
>ajus
Call:
lm(formula = y ~ x)
Coefficients:
(Intercept)      x
   -0.3631    0.4158
>cor(x,y)^2
[1] 0.9271098

```

Con este ejercicio no solo hemos seguido desarrollando los contenidos, sino que podemos volver a relacionarlo con la realidad de nuestro entorno y con otras materias (inglés y biología).

La agrupación se ha llevado a cabo para desarrollar el trabajo activo y colaborativo de los alumnos. Derivando este en posibles debates entre los grupos en vista de los resultados.

## 5.5. Ejercicios de Autoevaluación.

A continuación se presentan cuatro actividades de autoevaluación para trabajarlas en pareja durante las dos últimas sesiones de la programación.

### 5.5.1. Autoevaluación 1

Esta primera tarea daría la oportunidad de relacionar la asignatura con otras materias como Geografía, a través de los Pirineos; o la Física y Química, a través de datos como presión atmosférica o punto de ebullición. Así mismo, en ella se trabajarán con pocos datos los primeros conceptos que trabajamos con R.

*Se cree que existe una relación de tipo lineal entre el punto de ebullición del agua y la presión atmosférica del lugar en el que esta se pone a hervir. Para analizar esta hipótesis, se obtuvieron seis mediciones en Los Pirineos a seis alturas distintas en las que se observó una determinada presión atmosférica (en pulgadas de mercurio) X, anotándose la temperatura Y a la que comenzaba a hervir el agua (en grados Fahrenheit) en cada una de esas seis alturas. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:*

X	20,68	22,42	23,91	23,99	25,09	29'10
Y	195,1	198,2	201,3	201,7	204	211,1

- Determinar la recta de regresión y analizar si es significativa.
- Realizar el mismo estudio con los grados medidos en Centígrados.
- Dibuja su nube de puntos.

### 5.5.2. Autoevaluación 2

Esta segunda actividad está diseñada para afianzar lo trabajado en la actividad anterior, pero con cuestiones que invitan más a la reflexión y a la demostración de la asimilación de los contenidos.

Se cree que el tamaño de los asentamientos prehistóricos puede servir para predecir el tamaño de la población del lugar donde se produjeron. Por ello se quiere determinar la recta de regresión basándose en datos actuales y, con ella, hacer estimaciones de tiempos pasados. Con este propósito se obtuvieron los siguientes datos de Tamaño de Asentamientos en hectáreas (X) y Número de habitantes (Y) de los pueblos actuales del área en estudio:

X	0,7	1,1	1,2	1,3	1,7	2,0	2,4	3,1	3,2	3,4
Y	25	75	105	135	125	175	200	205	215	365

X	3,7	4,1	4,6	5,5	6,0	6,2	6,5	9,0	10,1	12,1
Y	305	255	505	275	195	635	655	315	735	855

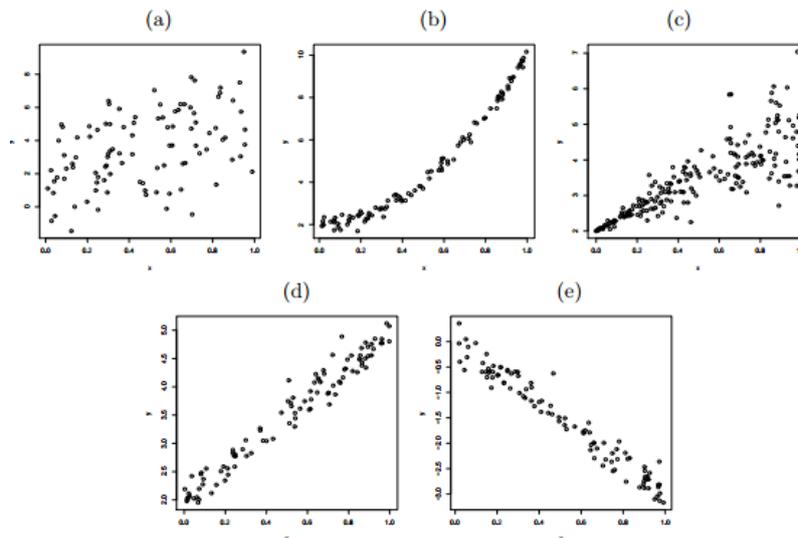
- ¿Podríamos determinar si existe relación entre el tamaño de los asentamientos y el tamaño de la población?
- ¿Podríamos intuir la relación sin realizar ningún cálculo numérico? ¿Cómo?
- ¿Qué intensidad tendría dicha relación?
- Determine la recta de regresión y analice si es significativa.

### 5.5.3. Autoevaluación 3

En esta actividad se pretende que los alumnos utilicen R como herramienta para la estimación e interpretación de modelos de regresión a través de la visualización de los gráficos.

Disponemos de un par de variables X e Y supuestamente relacionadas. A partir de una muestra de n individuos podemos visualizar la relación existente entre ambas. Responda a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué función de R hemos de utilizar para conseguir los gráficos de dispersión que se muestran abajo?
- ¿Qué conclusiones podrías emitir sobre la relación de las variables en vista de las gráficas de cada ejemplo?
- ¿Podrías plantear ejemplos reales en los cuales la relación entre las variables se ajusten a las gráficas?



#### 5.5.4. Autoevaluación 4

En este último ejercicio de autoevaluación se plantea un reto a los alumnos, ya que deberán de trabajar con tres variables de dos en dos. Se pretende que demuestren que son capaces de interpretar la relación entre las variables, la fiabilidad de las mismas y que son capaces de compararlas utilizando un lenguaje adecuado para la descripción de las situaciones.

*El conjunto de datos trees, incluido en R, proporciona las medidas de la circunferencia en base (inches), altura (ft) y volumen (cubic ft) de 31 cerezos negros recién talados.*

*Realice un estudio acerca de la posible relación entre las variables presentando un informe con las conclusiones.*

## 6. Conclusiones

Considero que la propuesta es arriesgada, comprometedora e innovadora; en donde quién sale ganando es el alumno por encima de todo. Arriesgada y comprometedora porque el profesorado que la imparta ha de tener la formación necesaria en programación en R para poder dirigir las clases con éxito; de otra manera sería inviable. También arriesgada porque hay que trasladar al grupo desde su aula al aula de informática, con el pertinente riesgo de distracción con los ordenadores, internet, fallos de conexión, etc.

Por otro lado, al empezar con las lecturas de bibliografía y búsqueda de información, no fue fácil encontrar casos que relacionaran la práctica de la estadística con R en educación secundaria; por eso me pareció una propuesta innovadora.

Con el manejo de R, no solo podremos dotar a los alumnos de una nueva herramienta con la que poder evolucionar en el aprendizaje de la estadística, sino que conseguiremos facilitar los cálculos de gran cantidad de datos para poder llegar de una manera más eficiente a los resultados; destinando de este modo el tiempo a trabajar reflexiones e interpretaciones de los resultados, a las posibles acciones a tomar en los estudios estadísticos y sin restarle importancia a la teoría.

Creo que es destacable el hecho de que los alumnos puedan conseguir fácilmente las gráficas, evitando así un problema tradicional en la enseñanza de la estadística. Esto nos permite el análisis visual de los datos, enriqueciendo los conceptos estudiados en las clases teóricas. Sin embargo, habría que ser cautelosos con esta herramienta para que no derive en un mal uso de la estadística.

Me parece un proyecto viable que requiere fundamentalmente de la implicación del docente. El alumno se dotará de unos recursos que le harán ver la estadística y todo lo relacionado con ella, desde un punto de vista crítico y analítico. Además, no lo olvidemos, utilizando un software libre, que elimina en todo momento una posible brecha social y económica, colocando a toda la comunidad educativa en igualdad de condiciones.

## 7. Propuestas de futuro

Una primera continuidad en el estudio la dirigiría hacia los primeros cursos de la etapa de secundaria. Por razones prácticas y demostrativas basé mi planteamiento en primero de Bachillerato, en el estudio descriptivo de dos variables, pero creo que sería interesante adelantar su aplicación a cursos anteriores.

De este modo también abriría otra línea de trabajo hacia su uso en la enseñanza de probabilidad, diseñando experimentos aleatorios, analizando el comportamiento de las variables, etc.

Sería interesante, en caso de que este proyecto se pudiera realizar, entrevistar a los alumnos que fueron formados en R y en una sólida cultura estadística, y estudiar los posibles beneficios que hayan encontrado con el paso del tiempo.

## Referencias

- [1] ARRIAZA, A. J., FERNÁNDEZ, F., LÓPEZ, M. A., MUÑOZ, M., PÉREZ, S., & SÁNCHEZ, A. *Estadística Básica con R y R-Commander*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, Cádiz, 2008.
- [2] BARRIUSO, J.M., GÓMEZ, V., HARO, M.J., & PARREÑO, F. *Introducción a la estadística con R*. Revista Suma. 72 (Marzo 2013), pp. 17–30., 2013.
- [3] BATANERO, Carmen. *Estadística y didáctica de la matemática: Relaciones, problemas y aportaciones mutuas*. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 95–120). Universidad de Alicante, Alicante, 2002.
- [4] BATANERO, Carmen. *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada, Granada, 2001.
- [5] Begg, A. *Some emerging influences underpinning assessment in statistics*. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education*. IOS Press, Amsterdam, 1997.
- [6] BOE. *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*, 2015.
- [7] CAMPBELL, S. *Flaws and Fallacies in Statistical Thinking*. Dover Publications, Nueva York, 2002.

- [8] CARAVALLLO, H. & ZULEMA, C. Z. *Herramientas para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Software libre*. En: Lapasta, L. (Ed.). II Jornadas de enseñanza e investigación educativas en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Plata, 2009.
- [9] ESPAÑA, F., LUQUE, C.M., PACHECO, M., & BRACHO, R. *Del lápiz al ratón. Guía práctica para la utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza*. Toro Mítico, Córdoba, 2008.
- [10] ESTEPA, A. *Algunas notas sobre la didáctica de la estadística*. Junta de Andalucía, Jaén, 1993.
- [11] FEBRERO, M., GALEANO, P., GONZÁLEZ, J. & PATEIRO, B. *Prácticas de Estadística con R*. Universidad de Santiago de Compostela, Compostela, 2012.
- [12] FLORES, P. *Conceptos y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Editorial COMARES, Peligros (Granada), 1998.
- [13] GAL, I. *Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities*. International Statistical Review, 70(1), 1–25, 2002.
- [14] GARCÍA, A. *Estadística básica con R*. UNED, Madrid, 2010.
- [15] HOLMES, P. *Teaching Statistics* 11-16. Sloug: Foulsham Educational., 1980.
- [16] IHAKA R. & GENTLEMAN R. (1996) *R: a language for data analysis and graphics*. Journal of Computational and Graphical Statistics 5: 299–314, 1996.
- [17] OECD-CERI, (2006). *21st Century Learning: Research, Innovation and Policy*. Center for educational research and innovation. 2006. Disponible en: <http://www.oecd.org/site/educeri21st/40554299.pdf> [Fecha de acceso 28 de enero de 2016]
- [18] PEÑA, D. *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, Madrid, 2008.
- [19] RICO, Luís. *La educación matemática en la educación secundaria*. I.C.E. Universidad de Barcelona, Barcelona, 1997.
- [20] ROJANO, T. *Incorporación de Entornos Tecnológicos de Aprendizaje a la Cultura Escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Revista Iberoamericana de Educación, 33, pp. 135-165., Méjico, 2003.
- [21] RUÍZ, J. *Posibilidades de las TIC en el área de Matemáticas*. En: *Las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, pp. 11-19. MAD S.L. Alcalá de Guadaíra, Sevilla, 2012.
- [22] SÁNCHEZ, J. M., & TOLEDO, P. *Software libre y educación*. En: *El software libre en los contextos educativos*, pp. 11-26. MAD S.L., Alcalá de Guadaíra, Sevilla, 2009.
- [23] SHAUGHNESSY, J. M., GARFIELD, J., & GREER, B. *Data handling*. En A. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education*, volumen 1, pp. 205-237. Dordrecht: Kluwer, A. P., 1996.
- [24] SHUMWAY, R. H., & STOFFER. D. S. *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples*. Springer Science+Business Media, LLC., New York, 2011.

**Sobre el autor:**

*Nombre:* Alejandro Galindo Alba

*Correo Electrónico:* alegalalb@gmail.com

*Institución:* Departamento de Análisis Económico y Economía Política. Universidad de Sevilla, España.



# Experiencias Docentes

## Aplicación de juegos didácticos como metodología de enseñanza: Una Revisión de la Literatura

## Application of educational games as a teaching: A Literature Review

Bryan Montero Herrera

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 075-092, ISSN 2174-0410

Recepción: 10 Abr'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

### Resumen

La sociedad ha evolucionado y esto también incluye a la educación, las metodologías tradicionales (conductistas) ya no generan el deseo de aprender sino más bien aburrimiento y desmotivación, por lo que son necesarias nuevas y mejores estrategias para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, uno de esos métodos es por medio de la aplicación de juegos educativos en el aula. Este trabajo ofrece un análisis de los diferentes temas relacionados con el juego en el aprendizaje permitiendo hacerse una idea del papel que pueden tener cuando son más las instituciones que hacen uso de ellos como una forma de enseñanza.

**Palabras Clave:** Educación, Juegos didácticos, Aprendizaje, Docentes, Estudiantes, Metodología.

### Abstract

The society has evolved and this also included the education, traditional methodologies (behaviorist) no longer generate a desire to learn but rather boredom and demotivation, hence new and better strategies are necessary to carry out the teaching-learning process, one of these is the application of educational games in the classroom. This work provides an analysis of different issues related with the play in learning, allowing an idea of the role they can have when there are more institutions that make use of it as a way of teaching.

**Keywords:** Education, Educational Games, Learning, Teachers, Students, Methodology.

## 1. Introducción

Con el paso de los años, los gustos y las actividades de la población se van modificando, tal y como lo propone Sarramona (2008) en su libro, “una característica de los tiempos presentes y futuros es la rapidez y la profundidad con que se producen los cambios técnicos y sociales” (p. 39), por eso resulta necesario que el profesorado no continúe con las metodologías que utilizaban hace años atrás, ya que la educación también debe hacerse anuente a los cambios que vive la sociedad.

Actualmente, la mayoría de las clases tienen como método pedagógico el tradicional, el cual se enfoca en el conductismo o también llamado enseñanza transmisiva, según Méndez (2005) los problemas que trae utilizar este tipo de método son:

*El infante aprende nociones que no comprende. El escolar puede considerarse un tonto, como consecuencia la pérdida de la autoestima. La pedagogía transmisiva estimula la competencia y menos la cooperación entre los alumnos. El estudiante no puede dudar del conocimiento que posee el profesor. Es difícil, que el alumno llegue a desarrollar el pensamiento crítico. La enseñanza incentiva al escolar a obtener notas buenas y el alumno que presenta un rendimiento bajo, se siente fracasado (p. 20).*

De la definición anterior se pueden tomar dos ideas importantes: la pérdida de autoestima y el fracaso, una enseñanza que esté centrada en libros o cuadernos no va a provocar en el estudiantado el entusiasmo necesario para aprender, más bien genera desmotivación y con ello las bajas notas que llevan al fracaso escolar, por tal motivo el Ministerio de Educación Pública (MEP) en Costa Rica decidió poner en práctica nuevas formas de aprendizaje para utilizar en las aulas, de ahí que se aplicara una “reforma curricular de gran cantidad de asignaturas que busca hacer las clases más activas e interesantes para los estudiantes y la capacitación docente en el marco de estas reformas” (Rodríguez, 2014, p. 1), un ejemplo sería el uso de los juegos como forma metodológica de enseñanza.

Pero ¿por qué es de tanta relevancia la metodología? A partir de la metodología es que logra el alumno o la alumna iniciar el aprendizaje de una materia, con la misma se pretende incentivar la motivación de continuar con este proceso educativo, además se promueve la aplicación de los conocimientos recién adquiridos y que se genere un cambio en el ambiente regular de las clases.

Los juegos didácticos como forma de enseñanza según Martín, Martín y Trevilla (2009) permiten aumentar la motivación de quienes participan dentro de los mismos, mejorando la tarea que estén llevando a cabo en ese momento. Además, Meneses y Monge (2001) enfocan su estudio, principalmente, en que los juegos, también pueden utilizarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje para cumplir con los objetivos planteados durante una determinada clase o tema, por lo tanto, la idea es demostrar que siempre las actividades van enfocadas a mejorar el rendimiento del alumnado.

La aplicación de juegos didácticos con objetivos y actividades bien definidas para las determinadas clases, y principalmente para mejorar el rendimiento académico mostrado en las diversas materias (ciencias, estudios sociales, matemática, inglés, español, entre otras), conlleva un recurso valioso para el estudiantado. Por lo tanto, los juegos son una herramienta que al profesorado le permite motivar y mantener la atención dentro de sus lecciones, García

(2013) opinaba que “el uso de estos recursos permite captar la atención de los/as alumnos/as y alumnas, generando en ellos el deseo de ser partícipes activos de las actividades, que con estos se desarrollan” (p. 8), es decir se logra un aprendizaje significativo con el uso de esta herramienta de enseñanza.

Los juegos didácticos dentro del marco educativo no tienen por qué verse como una pérdida de tiempo, más bien son una forma que permite llamar la atención de la población estudiantil y con esto mejorar sus notas y por consiguiente el rendimiento académico, además brindan la posibilidad de que los y las profesoras abandonen el método conductista.

El siguiente trabajo tiene por objetivo brindar una perspectiva en primera instancia de lo que son los juegos didácticos y con esto ir explicando diferentes puntos que ayuden a comprender mejor su implementación dentro del entorno educativo, de tal forma que puedan ser utilizados como una herramienta más en el proceso de enseñanza-aprendizaje y que permitan una mejora en el rendimiento académico por parte del estudiantado.

## 2. Definición de juego didáctico

Flores (2009) define los juegos didácticos como “una técnica participativa encaminada a desarrollar en los alumnos métodos de dirección y conducta correcta, estimulando así la disciplina con un adecuado nivel de decisión y autodeterminación” (p. 38). Esta es una definición que explica muy bien lo que es un juego didáctico, debido a que no solo se enfoca en lo que desarrolla en el estudiantado, sino que también abarca otros logros que se van a obtener al utilizarlos en el aula.

## 3. Antecedentes y características del juego

Para hablar de los orígenes del juego hay que dirigirse tal y como lo propone Delgado (2011) a épocas muy antiguas, donde excavaciones han permitido conocer juguetes y otros materiales que se utilizaban para el disfrute de la población. El juego está presente en cada una de las etapas de un ser humano, desde que nace hasta que envejece va a ser visto como una actividad agradable. Minerva (2002) establece que “el juego ha sido considerado como una actividad de carácter universal, común a todas las razas, en todas las épocas, y para todas las condiciones de vida” (p. 170), es decir acompaña al ser humano en cualquier momento.

A manera de ejemplo y para ampliar la idea que se comentaba en el párrafo previo, en el “antiguo Egipto los niños y las niñas tenían silbatos, figuras en miniatura y pelotas hechas de cuero y rellenas de afrecho” (Díaz, 2002, p. 18), con las cuales se divertían en sus tiempos libres. Ya tiempo después en la segunda mitad del siglo XIX, Montañés (2003), considera que la psicología de esa época ya comenzaba a notar la importancia del uso del juego en el desarrollo y la formación de la niñez, por la forma en que permite satisfacer las necesidades y resolver problemas.

Varios autores y autoras comentan sobre las características que tienen los juegos didácticos, se comenzarán con las que propone Calderón (2013) que son tres: espontaneidad, motivación y la estimulación de la imaginación, en este aspecto la oportunidad que brinda esta clase de actividad está fijada hacia una participación libre por parte del alumno o alumna, que al mismo tiempo le permita aumentar su motivación dentro de la clase y

fundamentalmente esté haciendo uso de sus destrezas, habilidades o imaginación para resolver los diferentes problemas que se le puedan presentar, puede ser desde “escondido hasta crucigramas; activan estrategias, ponen en práctica conocimientos adquiridos y llevan a experimentar situaciones de aprendizaje” (Calderón, 2013, p. 196).

Andrade y Ante (2010) definen varias características en torno a los juegos didácticos, entre las principales se pueden nombrar: “despiertan interés hacia las asignaturas, provocan la necesidad de adoptar decisiones, exigen la aplicación de los conocimientos adquiridos en las diferentes temáticas y constituyen actividades pedagógicas dinámicas” (p. 29). Si se analizan bien estas cualidades de los juegos se notan la gran variedad de aspectos positivos que trae un juego en la enseñanza.

Muñiz y Peláez (2010) consideran otras opciones que se podrían agregar a los juegos aparte de las que ya se mencionaron, toman en cuenta que “el juego es una actividad libre y el juego es desinteresado” (p. 28-29). Esto es lo que permite tener la seguridad que tanto los y las que participan lo estén haciendo por su propia voluntad y deseo de jugar y aprender.

## 4. Etapas del juego en el desarrollo infantil

Cada etapa es determinante para obtener un buen desarrollo cognitivo, físico o social por parte del estudiantado. Un elemento que debe estar presente en este desarrollo es el juego, a partir de esto Piaget (1962) conformó las siguientes etapas:

### 4.1 Etapa sensoriomotriz o de ejercicio (0-2 años)

En este estadio, Piaget opina que en los primeros meses (primer y segundo mes) el juego no va a estar de forma muy presente debido a la asimilación del niño o la niña a su entorno, pero una vez que aproximadamente se cumple el tercer mes empieza a aparecer el juego con acciones que se realizaban previamente, pero al poder moverse un poco más tienen la posibilidad de realizar más interacciones y relaciones con los objetos que están a su alrededor.

Un ejemplo que explica este mismo autor es que en los primeros meses al niño o niña cuando se le quita un juguete que tenía en ese momento generalmente se le olvida y no lo busca, ya a partir de los tres meses una vez quitado el objeto empiezan con la búsqueda del mismo.

Según Méndez (2008) “el niño en esta etapa, ha logrado construir la permanencia del objeto, del espacio y el tiempo, como esquemas motores de la acción del propio cuerpo” (p. 46), en esta ocasión se hace énfasis en la memoria que se va desarrollando durante la niñez a partir de los sentidos como el tacto, olfato, visión o la audición y que resaltan la necesidad del uso de juegos sensoriales para desarrollar aún más estas capacidades durante esta etapa.

### 4.2 Etapa preoperatoria o del juego simbólico (2-7 años)

Para esta etapa, el desarrollo que se tiene en la niñez les permite tener la capacidad de recordar imágenes y poder codificar sus experiencias en símbolos, por tal motivo es que se recomienda el uso del juego simbólico, ya que “favorece el desarrollo del lenguaje, así como las habilidades cognoscitivas y sociales. Favorece además la creatividad y la imaginación” (Linares, 2009, p. 27).

La imaginación es una característica fundamental de este estadio, porque a esta edad se tiene mayor posibilidad de “simular situaciones, personajes, y objetos que no se encuentran presentes en el momento del juego” (Díaz, 2012, p. 30), esto porque los niños y las niñas al inicio realizan un juego individual y lo hacen en ocasiones de forma egocéntrica, donde solo ellos y ellas opinan debido a que no han tenido la posibilidad de interactuar con otros y otras de su misma edad. Pero una vez que esta interacción se da, el simbolismo que imaginaban se torna más real, por el hecho de tener que compartirlo con el grupo y escuchar las otras ideas que puedan ir surgiendo.

### 4.3 Etapa de operaciones concretas (7-12 años)

Conforme se va creciendo, la dificultad en las actividades va a ir aumentando para favorecer el desarrollo de todos y todas las que participan, pero también se viene a tomar en consideración las reglas como un elemento fundamental que pasa a formar parte de los juegos, porque tienen por objetivo aumentar el pensamiento reflexivo a la hora de dar una respuesta ante un determinado problema propuesto.

Al final de la etapa preoperatoria se explicaba que hay un aumento en las relaciones que comparte un niño o niña con los demás que están a su alrededor a través del juego, este avance es relevante para todos los procesos que vienen después como parte del aprendizaje del estudiantado, ya que Abarca (1992) decía que “los niños van dejando atrás su egocentrismo e intuición para dar paso a la reflexión” (p. 70), esto va a ser necesario no solo para escuchar, sino también para tomar en cuenta las opiniones o reflexiones de los demás y las demás incluida principalmente la del profesorado.

### 4.4 Etapa de operaciones formales (12 años en adelante)

Ya en este estadio la capacidad para razonar y pensar va a permitir formar juegos con un nivel mayor en dificultad, como también juegos donde ellos y ellas deban dar opiniones más concretas en relación a las situaciones que se les presentan. Las actividades no pueden ser básicas, sino que deben involucrar un nivel de exigencia más elevado para acaparar la atención de los y las participantes.

Montañés et al (2000) opinaban que el desarrollo cognitivo de cada alumno y cada alumna les permite hacer una mayor cantidad de relaciones y ver en los objetos una mayor funcionalidad de lo que antes podían apreciar para las tareas que debían realizar:

*El juego se convierte entonces en una especie de montaje de elementos que toman formas distintas. Si el mismo trozo de madera, en el transcurso de la etapa anterior, servía para representar un barco, un coche, etc., puede ahora servir para construirlo, por la magia de las formas lúdicas recurriendo a la capacidad de montar varios elementos y de combinarlos para hacer un todo (p. 248).*

## 5. Papel del docente y el estudiantado durante los juegos didácticos

Para que se pueda dar de buena manera un aprendizaje, es necesario contar con ciertos elementos fundamentales como profesor, profesora, alumno, alumna, padres y madres de familia y finalmente las condiciones del aula en las que se está llevando a cabo la enseñanza.

En materia educativa, el elemento principal es el alumnado, sobre él es que este proceso está dirigido y por eso es importante darles las herramientas y los materiales más apropiados para que poco a poco vayan adquiriendo los conocimientos necesarios y de mayor interés por su propia cuenta, por eso es que Bolaños y Molina (1990) explicaban que el docente debe lograr motivar a su estudiantado, para que ellos y ellas se hagan responsables de su propio aprendizaje.

Las poblaciones de ahora se caracterizan por ser más activas que las pasadas, esto quiere decir que cuentan con más recursos tecnológicos que les permiten estarse enterando por su propia cuenta de cualquier información.

López (2008) resaltaba que las clases pasivas no son tan recomendadas, ya que el profesor o profesora se encarga de todo y los y las estudiantes sólo deben escribir la materia. Por su parte esta misma autora propone lo siguiente para tomarlo en cuenta en las aulas “el estudiante deja de ser una parte pasiva y pasa a convertirse en parte activa en el proceso de aprendizaje. No encaja en el nuevo Espacio Europeo que un estudiante sea un mero transcriptor de apuntes de una materia” (p. 7).

El hecho de que la población estudiantil repita una y otra vez la materia para repasarla o aprendérsela no quiere decir que la están comprendiendo del todo, para Woolflok (2006) “conocer un objeto, un suceso, no implica simplemente observarlo y hacer una copia o una imagen mental de ellos. Conocer un objeto es actuar sobre él” (p. 41), esto quiere decir que la materia falta ponerla en práctica para conocer con qué fines es que se puede utilizar, debido a que de ahí es de donde las y los alumnos van a comenzar a hacer las relaciones necesarias para que los aprendizajes se vuelvan significativos.

Euceda (2007) y Labrador y Morote (2008) sobre el papel del y la docente en los juegos didácticos, los veían como un motivador o también llamado iniciador, el cual debe encargarse de transmitirle a cada uno y a cada una de sus estudiantes la alegría y las ganas necesarias para que disfruten de la actividad, de igual forma es necesario que sea flexible para tomar en cuenta las sugerencias que puedan dar sus discentes y que se note que su opinión es tomada en cuenta y así vayan adquiriendo esa confianza para poder opinar dentro de las clases.

Continuando con esta misma autora, también establece que “el docente requiere seleccionar el tipo de juego, de acuerdo a los objetivos y la importancia del docente en la participación y dirección del juego” (p. 54), darle mayor atención a que la actividad que se desee proponer esté acorde con los contenidos vistos, si no, no tendría el mismo efecto. Algo que la autora no menciona y que sería necesario conocer es que la actividad debe estar acorde con el nivel del estudiantado, es decir no muy fácil porque se aburren y tampoco muy difícil porque se pueden desmotivar.

En este proceso de enseñanza-aprendizaje las tareas que debe cumplir el estudiantado vienen a marcar la diferencia en que una actividad alcance los fines deseados o no. Alcaraz et al (1993) establecían que “en cuanto al alumno, lo más significativo es probablemente la responsabilidad que asume en cuanto al aprendizaje” (p. 138), lo que ellos buscan más que todo es que exista ese deseo por parte de los y las estudiantes de llevar la materia al día, para que cuando llegue la oportunidad de trabajar con los juegos didácticos se puedan aprovechar de la mejor forma, para lograr reforzar ese aprendizaje.

Además, Alcaraz et al (1993) también llegan a la conclusión de que la participación activa del alumno o alumna va a depender en parte de la metodología que se esté aplicando en ese momento, ya que debe cumplir con las metas propuestas en materia de motivación y participación constante por parte de todos y todas, ya que conlleva a un mayor intercambio de ideas por las opiniones tan diversas que se pueden manejar en ese momento y con esto el estudiantado refuerce lo aprendido.

Cabe destacar un aporte de Calderón (2013), ella propone que “la importancia pedagógica del juego radica en su capacidad de mediar entre el educando y los contenidos a través de la interiorización de significados y sus niveles de aplicación” (p. 197), si un juego didáctico se realiza, y el estudiantado no aprende o no refuerza algo, es sólo visto como un juego, pero si logra causar algún cambio a nivel de lo aprendido, sí cumplió con su objetivo previo y sí puede considerarse como un juego didáctico.

Entre otras condiciones que se pueden agregar para con la población estudiantil están: mantener el orden durante el transcurso de la actividad, respetar la opinión de las compañeras y los compañeros, respetar los tiempos de participación, entre otras, así el juego será más grato.

Con el paso de los años tanto la educación como la metodología van modificándose dependiendo de las circunstancias, a continuación, se va a comentar sobre las teorías del juego desde diferentes puntos de vista por parte de los autores y las autoras.

## 6. Teorías del juego didáctico

Resumiendo lo que explicaban Rubin, Fein y Vandenberg (1983) en su libro, consideraban que existen cuatro teorías que fundamentan el uso del juego didáctico, la primera está relacionada con el excedente de energía, en el caso de los alumnos y las alumnas el estar sentados en clases va en contra de todo su desarrollo, debido a que ellos y ellas requieren estar en movimiento para liberar toda esa energía que tienen acumulada, la misma (energía) provoca que en clases se encuentren distraídos o inquietos, pero al jugar se libera, lo que permite que la concentración otra vez esté presente en el aula y además es una actividad placentera para todos y todas.

Las otras teorías (teoría de la relajación), tercera (teoría de la práctica) y cuarta teoría (teoría de la recapitulación) van a estar relacionadas, debido a que si los y las estudiantes están estresados o estresadas durante el transcurso de la lección, lo más probable es que no logren poner atención durante la clase y en ocasiones hasta distraigan a los demás y las demás con tal de relajarse.

En este punto es donde entra la tercera teoría de la práctica, la cual aparte de permitir una relajación va a traer otros beneficios que serían la adquisición o el repaso de conocimientos, el desarrollo de habilidades o el aprendizaje de las mismas, y por su parte la cuarta teoría se une con las dos anteriores al permitir el aspecto social, es decir, un aprendizaje va a ser más fuerte cuando hay una interacción entre los diversos niños y niñas y se logran escuchar sus opiniones y armar una idea general para que todos y todas comprendan de una mejor forma y sientan que aportaron algo para el aprendizaje.

Para De Borja (1980) existen dos teorías que resume como trans-personales y psicológicas, la primera coincide con la que propuso Rubin et al (1983) sobre el excedente de energía, pero en el caso de la segunda se involucra más con el comportamiento de la persona, ya que esto refleja la evolución que pueden ir teniendo a nivel individual, y dependiendo del tipo de juego didáctico que se utilice, puede ayudar a notar si faltó por mejorar o reforzar algún tema o habilidad necesaria para los demás problemas que vendrán más adelante.

Para ir finalizando se comentará la teoría del juego como ejercicio complementario apoyada por Pacheco (2005), la misma hacía referencia a que “el juego es útil para conservar y renovar conocimientos o destrezas, desde esta perspectiva el juego posibilita aprender nuevas cosas y perfeccionar los conocimientos previos a tal punto que pueden realizarse por automatismo” (p. 263), esta última cita explica de buena forma el motivo por el cual debe hacerse un uso de los juegos didácticos en clases, cada uno de los y las maestras puede encontrar en esta metodología una forma de aprender que sea divertida y eficaz para la población estudiantil, además de que también puede funcionar como un medio para repasar contenidos que no quedaron muy claros o sólo para reforzarlos.

## 7. Mediación pedagógica del juego didáctico

Antes de comenzar explicando cuál es la mediación pedagógica del juego didáctico dentro del aula, es importante primero conocer qué es en sí la mediación pedagógica, para tal fin se utiliza una definición que aporta Rodríguez (2008) “por mediación pedagógica entendemos la actitud, el comportamiento del profesor que se hace de facilitador; incentivador o motivador del aprendizaje, que se presenta con la disposición de ser un puente entre el alumno y su aprendizaje...” (p. 110). De la definición anterior queda claro que la mediación viene a ser en sí los elementos que permiten enlazar el aprendizaje con el estudiantado, de forma tal que resulte de una manera más sencilla.

La evaluación del juego didáctico como un medio pedagógico ya ha sido estudiada e investigada por varios autores, para esta ocasión se comienza citando a Lázarus (1883), él mismo es mencionado por López (1989) y sostenía que “los individuos tienden a realizar actividades difíciles y trabajosas que producen fatiga, de las que descansan mediante otras actividades como el juego, que producen relajación” (p. 19). En esta oportunidad la mediación pedagógica que brinda el juego está enfocada plenamente a que sirva como un medio para relajarse, esto con el fin de que los y las estudiantes disfruten de sus clases y permita llevarse a cabo el aprendizaje.

En la actualidad se pueden desarrollar dos tipos de clases con el alumnado, la primera sería la clase tradicional (dominante en la actualidad) mientras que la segunda sería la clase lúdica, la diferencia entre estas dos clases radica según lo explicado por Berger (2007) en el

simple hecho de que la segunda clase permite explorar, discutir y debatir, es decir otra mediación pedagógica que brinda el juego está relacionada con formar su propio aprendizaje, ya que los juegos se elaboran con el objetivo de resolver un problema, pero para llegar a dicha respuesta requieren de todo un proceso previo, este proceso permite utilizar los conocimientos que se pusieron en práctica y fortalecer así el aprendizaje llevado a cabo en ese momento.

Pero ¿por qué no se recomienda utilizar el método tradicional dentro de un aula? Esta mediación pedagógica que utiliza el docente para facilitar la comprensión de lo estudiado se basa principalmente en la repetición y no en la comprensión del por qué se hace de esa forma, al hacer siempre los ejercicios del libro no se fomenta la innovación educativa ni por ende la motivación, ya que un ejercicio se va a resolver generalmente de la misma forma que el anterior, por lo tanto, el juego fomenta esos mismos ejercicios pero con implementos o dinámicas completamente diferentes.

Aunado a las mediaciones pedagógicas desarrolladas previamente, también pueden identificarse otras características que aportan los juegos como sería la estimulación de la creatividad, el desarrollo de componentes sociales, afectivos, entre otros. Para ampliar esta idea se toma una cita de López (1989) donde se especifica cuáles son los beneficios que trae consigo a nivel pedagógico el uso del juego dentro del aula:

*La creatividad, la solución de problemas, al desarrollo del lenguaje o de papeles sociales; es decir, con numerosos fenómenos cognoscitivos y sociales. Tiene, entre otras, una clara función educativa, en cuanto que ayuda al niño a desarrollar sus capacidades motoras, mentales, sociales, afectivas y emocionales; además de estimular su interés y su espíritu de observación y exploración para conocer lo que le rodea (p. 21).*

¿Pero utilizando el juego dentro del aula se verán algunos beneficios en materia educativa? ¿En verdad puede ser utilizado como ese puente que necesita el docente entre el conocimiento y la consecución del aprendizaje? Para responder a estas dos preguntas se resumirán los postulados de Barrale y Díaz (2006) y de López (1989). Para Barrale et al (2006) el juego resulta una “alternativa nueva en la educación” (p. 54), es importante recordar que es una actividad para la educación, por lo tanto, debe tener una planificación previa para que el objetivo que persigue permita comprender el contenido de esa clase y lograr el aprendizaje deseado, un ejemplo bien claro que aportan estas autoras es que “no podemos plantear un juego de competencia si queremos formar actitud de solidaridad y participación” (p. 54).

Por su parte para López (1989) hablar de juego y aprendizaje es hablar de una misma cuestión, esto porque “en el juego aprende con una facilidad notable porque están especialmente predispuestos para recibir lo que les ofrece la actividad lúdica a la cual se dedican con placer” (p. 24), como se mencionó, el juego forma parte importante del desarrollo, por tal motivo el aprendizaje se refuerza de manera significativa cuando hay una actividad lúdica que permita cumplir con dicho proceso.

Además, esta misma autora recalca que “la atención, la memoria y el ingenio se agudizan en el juego, y todos estos aprendizajes, que el niño realiza cuando juega, serán transferidos posteriormente a situaciones no lúdicas” (p. 24), al igual que López (1989), Mujina (1975) apoyaba la idea de que el juego permite ampliar la memoria y la atención.

Ya se mencionaron varios autores que, aunque compartan ideas o principios diferentes coinciden en un punto clave y es que los juegos constituyen una parte del desarrollo de todas las personas y que además por medio de sus diferentes actividades se van a lograr la adquisición de nuevos conocimientos y el reforzamiento de lo aprendido con anterioridad.

Partiendo de la explicación brindada en torno a los juegos, ahora se explicará el porqué de la importancia de los mismos durante las clases.

## 8. Importancia del juego didáctico

Como se mencionó, el juego tiene gran cantidad de ventajas y aspectos a favor para poder formar parte del aprendizaje que se lleva a cabo dentro de las aulas, además los y las discentes aman jugar y este mismo tipo de metodología permite un desarrollo en diversas áreas como la cognitiva, social, física y la emocional, además de otras que agregan Marín, Ramos, Montes, Hernández y López (2011) que serían las actitudes sociales que incluyen “iniciativa, responsabilidad, respeto, creatividad, comunicabilidad, entre otros” (p. 63).

Bodrova y Deborah (2003) pensaban que los juegos didácticos no solamente buscan facilitar el desarrollo de competencias sociales, sino que también promueven el aprendizaje de destrezas y de aspectos pre-didácticos. Continuando con esta idea Bloom (1971) encontró en su investigación que el 95% de la enseñanza se enfoca en procesos mentales de bajo nivel (estructuras muy repetitivas que se vuelven tediosas para los estudiantes), de ahí que la tarea de los docentes y las docentes sea planear juegos que supongan un reto, una solución, un análisis (procesos mentales de alto nivel) para su población educativa.

Calderón (2013) comenta que generalmente las y los docentes manejan una noción de que los juegos sólo pueden ser utilizados a nivel de preescolar y primaria, ya que en secundaria no tendrían el mismo impacto, pero también opina que esa idea no es del todo cierta, debido a que los juegos pueden variar sus instrucciones o su dificultad para que sean atractivos para el estudiantado de mayor edad. Si la clase resulta atractiva para quienes asisten diariamente esto permite incentivarlos e incentivarlas más hacia el proceso de aprendizaje y así crear un ambiente más interactivo, a estos resultados han llegado estudios como el Gosen y Washbush (2004), Proserpio y Gioia (2007) y Zantow, Knowlton y Sharp (2005).

Cada uno de los y las profesoras que se encargan del proceso de enseñanza, pueden notar o han notado que cuando se obliga a sus estudiantes a realizar alguna acción o tarea en contra de su voluntad esta no se va a efectuar de la misma manera que si se hiciera con gusto, es a partir de esta idea en donde se utiliza el juego para buscar ese gusto hacia la materia por parte de la población estudiantil ya que “el niño encuentra en la actividad lúdica un interés inmediato, juega porque el juego es placer, porque justamente responde a las necesidades de su desenvolvimiento integral” (Gavilánez et al, 2010, p. 18).

Actualmente la sociedad le está dando un papel importante a la adquisición de conocimiento y la educación se ha basado en ese hecho fundamental para buscar que en la enseñanza los contenidos se abarquen y profundicen más. Aunque esta es una iniciativa importante, se debe buscar un equilibrio entre lo que se quiere enseñar y la forma de hacerlo para que resulte satisfactorio para ambos (profesor-alumno) y que el aprendizaje sea más eficiente y productivo.

Si se definiera cuál es la función principal del docente, se llegaría a la conclusión de que es servir para la transmisión de conocimientos, pero si se ponen a pensar, es necesario que aparte de pasar esas ideas se debe buscar crear una voluntad propia en los y las discentes, de querer aprender por sí solos y que esos aprendizajes pasen a formar parte de su diario vivir de tal forma que se vuelvan significativos, Covington (2000) comentaba que lo alegre, lo creativo y lo analítico del juego puede cumplir con estos objetivos que son tan importantes a nivel de la educación.

¿Por qué utilizar los juegos en el ámbito educativo? De la Torre (2005) responde muy bien a esta pregunta al explicar que, por medio del empleo de juegos en la enseñanza, los contenidos que se verán van a ser más fáciles de asimilar y de recordar, esto también permite al profesorado conocer un poco más a sus estudiantes en cuanto a su manera de pensar, opinar y resolver preguntas, ya que cada uno o una lo hace de una forma diferente.

Cada estudiante es un ser único a la hora de llevar a cabo su aprendizaje, por eso Gavilánez y Zavala (2010) proponen que la psicología cognitiva insiste en el papel del juego en el desarrollo personal. Estos autores citan un estudio publicado por O'Connor y Seymour (1992) donde llegan a las conclusiones de que "la memoria almacena un 90% de aquello que hace, un 10% de lo que lee, un 20% de lo oído y un 30% de lo visto" (p. 15-16). Si se analizan bien los juegos, se nota que dentro de una misma actividad se pueden combinar el hacer, el leer, el oír y el ver, por lo tanto, se beneficia en todos los sentidos a cada una y cada uno de los implicados o las implicadas en el proceso educativo.

Hablar de rendimiento académico y de cómo afecta o cómo no afecta la utilización de metodologías novedosas a la población estudiantil es un tema difícil, debido a que hay una serie de factores que se pueden controlar dentro del entorno educativo, pero hay otros que se escapan por completo de las manos de los y las docentes, algunos por ejemplo son: problemas económicos que aquejan a las familias, la responsabilidad de los mismos padres y madres de familia, como también el ambiente que rodea a la institución.

Los juegos didácticos involucran a todos los entes del proceso de enseñanza-aprendizaje, de una manera positiva y con perspectiva futura en la continuidad de la educación formal, de ahí que investigaciones realizadas por Chang, Wu, Weng y Sung (2012), Ke (2008) y Kebritchi, Hirumi y Bai (2010), obtuvieran resultados con diferencias significativas en el rendimiento académico del estudiantado en la materia de matemática.

Si algo queda claro es que las metodologías novedosas pueden generar un cambio dentro de las aulas, pero, es importante que haya una colaboración por parte del personal docente, es decir, que estén anuentes a capacitarse en temas o formas de enseñanza que de alguna u otra forma pueden generar cambios positivos dentro de las aulas, con el fin de llamar más la atención de la población estudiantil que asiste diariamente a los centros educativos.

## **9. Ejemplos que demuestran el uso de los juegos dentro del aula**

El uso de diferentes metodologías, para trabajar cada día en las aulas, ha generado que se realicen investigaciones que traten de demostrar la importancia de cada uno de esos métodos didácticos. Hasta la fecha se han expuesto varios estudios de trabajos finales de graduación

(TFG) e investigaciones, en los cuales se implementó la metodología del juego durante las clases, los mismos se van a exponer a continuación:

- Piedra (2002) lleva a cabo su TFG con un total de 65 estudiantes y 10 docentes del “Liceo de Aserrí”. La metodología que se utilizó fue aplicar un cuestionario tanto a docentes como a estudiantes, en el caso de los primeros (docentes), 9 de ellos tienen poco conocimiento de la técnica del juego para enseñar, de ahí que 6 opinaran que no lo usan por desconocimiento, mientras que otros 4 profesores no los usan por falta de tiempo. Por su parte, de los y las estudiantes se obtuvo como datos de interés que la mayoría del estudiantado (34 personas) nunca ha participado en un juego didáctico en clases y 63 de los 65 estudiantes opinan que las clases se deben mejorar.
- Para Piedra (2002) el hecho de que el profesorado no tenga la oportunidad de recibir capacitaciones en torno a los juegos, es lo que provoca que continúen con metodologías poco participativas a la hora de impartir sus clases, pero no se obvia la idea de que pueden generar una motivación en la población estudiantil a la hora de aprender.
- Solórzano y Tariguano (2010) desarrollan su TFG con un total de 42 estudiantes de tercer año de la Escuela Fiscal “Judith Acuña de Robles” ubicada en Ecuador, a la población que formó parte del estudio se les aplicó un cuestionario sobre juegos didácticos y su relación con la Matemática, de esos 42 estudiantes 27 respondieron que reciben la clase con desinterés, 10 han jugado en una clase de Matemática notando los cambios con las clases tradicionales, 40 proponen que sería bueno aprender esta materia mediante el juego y un total de 38 estudiantes prefieren recibir clases con materiales novedosos que con los mismos de siempre (ejercicios en la pizarra o del libro).
- Al final de su estudio Solórzano et al (2010) afirman que las y los docentes no hacen uso de los juegos didácticos para motivar al estudiantado con esa materia, una de las razones a las que se le atribuye este problema es por la falta de capacitación que han recibido para poder implementarlos dentro del aula, pero sí reconocen que son necesarios usarlos dentro del entorno educativo, ya que brindan la posibilidad de reforzar aprendizajes adquiridos previamente.
- Álvarez y Smith (2012) utilizan para su TFG un total de 35 estudiantes y 3 profesores del “Colegio Madre del Divino Pastor”, a los mismos y a las mismas les aplicaron un cuestionario de preguntas cerradas.
- Entre los datos más importantes obtenidos al final del estudio cabe resaltar que 15 estudiantes opinan que la falta de interés en las aulas se debe en gran parte a la forma en que se enseña, como también 33 resaltan que la motivación influye dentro del proceso de aprendizaje y esta a su vez en la mejora del rendimiento académico opinan 29 educandos. De la misma forma 2 docentes están de acuerdo con sus estudiantes en que la falta de motivación sí afecta el interés por aprender, a su vez 2

profesores apoyan la idea de que metodologías novedosas generan un efecto positivo en la población estudiantil, incrementando la motivación y mejorando el rendimiento académico por parte de los estudiantes y las estudiantes.

- Álvarez et al (2012) proponen varias conclusiones al final de su estudio, algunas de las que son necesarias explicar serían: aunque en la población exista un interés por aprender, el problema recae en que los métodos que se utilizan no son los más adecuados para poder motivar a la población estudiantil, de ahí la necesidad de buscar otras formas en las cuales se pueda transmitir el conocimiento con el fin de que se perciba de una mejor forma y otra de las conclusiones sería que tanto docentes como estudiantes concuerdan en que la implementación del juego dentro del aula permite que el aprendizaje sea más significativo y con eso se mejore el rendimiento académico.
- Un estudio elaborado por Chang, Evans, Kim, Norton y Samur (2015), estaba enfocado en analizar el aprendizaje que se obtenía a partir del juego llamado “Map App” en una población de 306 estudiantes de un sistema educativo de Virginia. De dicho total, había 77 estudiantes de sexto grado, 133 de séptimo año y 96 de octavo grado. Cabe resaltar que a todos los que formaron parte de este trabajo, los asignaron a una clase de matemática según el nivel que poseían: inclusión (78 estudiantes), regular (152 estudiantes) y avanzada (76 estudiantes), a su vez 171 fueron colocados en el grupo experimental y 135 en el control.
- La aplicación “Map App” consiste en un juego que permite resolver fracciones y que se conforma de cinco niveles donde al ir avanzando la dificultad también aumenta. El tratamiento para cada grupo fue de 20 días escolares, con una duración en cada intervención de 20 minutos, la diferencia estaba en que el grupo experimental estudiaba por medio de la aplicación mientras que el otro grupo era por medio de papel y lápiz. Al finalizar la investigación los autores encontraron diferencias significativas ( $p < .01$ ) a nivel general entre ambos grupos, siendo mejor en el experimental. También comparan cada uno de los grados académicos (6º, 7º y 8º) y encuentran que la mayor cantidad de cambios se alcanzaron en séptimo año en comparación con los otros dos niveles.

Continuando con esta misma investigación, concluyen que esta herramienta es una forma novedosa que permite al estudiantado llevar a cabo su aprendizaje, siendo mejor su aprovechamiento en el grupo de inclusión. Como se mencionó en ocasiones anteriores, facilita la comprensión de contenidos ya que hay un aumento en la motivación, similares resultados alcanzaron Ahmad y Latih (2010) y Lee (2009) cuando evaluaron la enseñanza de las fracciones por medio de algún tipo de juego.

Para ir finalizando con este apartado de ejemplos, se van a nombrar una serie de investigaciones que se mencionan en el artículo de Katmada, Mavridis y Tsiatsos (2014), donde se enfatizan en como los juegos académicos mejoran el rendimiento en la materia de matemática, uno de dichos estudios es el Pareto, Arvemo, Dahl, Haake y Gulz (2011), donde se encargaron de crear un juego que mejorara las habilidades de estudiantes en el área de aritmética, para esto utilizaron una población de 153 niños y

niñas repartidos entre tercer y quinto grado. Al final se encontró que no solo mejoraron su rendimiento en matemática, sino que aparte hubo un cambio positivo en la apreciación hacia la materia.

- Katmada et al (2011) nombran la investigación realizada por Ke y Grabowski (2007), en la misma se repasaba alguna materia de matemática, por medio de juegos didácticos de aventura en computadora. Se contó con la participación de 125 alumnos y alumnas de quinto grado durante las cuatro semanas de tratamiento, los mismos fueron asignados a uno de los tres grupos (juegos en grupo cooperativos, juegos en grupo competitivos y no juegos en grupo). Lo que halló este grupo de investigadores fue que los grupos que tuvieron juegos mejoraron su rendimiento académico y actitud (siendo mejor en el grupo de juegos cooperativos) en comparación con el grupo sin juegos.

El último estudio que se expondrá en este apartado proviene también del artículo de Katmada et al (2011) y tiene que ver con la discalculia, este término hace mención a “un trastorno en la adquisición de las habilidades matemáticas es un problema de aprendizaje que ha merecido poca atención, sobre todo si compara con la dislexia. La discalculia significa alteración para la capacidad de cálculo” (Buisán, Carmona, García, Noguer y Rigau, 2009, p. 114). Aclarado este concepto Wilson, Revkin, Cohen, Cohen y Dehaene (2006), aplicaron una metodología de juegos didácticos en computadora para trabajar por un tiempo de cinco semanas con una población 9 estudiantes que padecen discalculia. Al finalizar el tratamiento observaron que se presentó una mejora en el rendimiento en tareas de número como también la confianza en sus habilidades matemáticas.

## 10. Conclusión

Con la información que se brindó anteriormente sobre la implementación de los juegos didácticos como una forma de metodología para enseñar a nivel educativo, se demostró el papel que puede llegar a tener una vez que se incursionen dentro de las aulas para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desde hace mucho tiempo el juego se ha asimilado como una herramienta que forma parte no sólo en la vida de los niños y las niñas, sino que también en la edad adulta, el juego forma parte del diario vivir, siendo visto como una manera para recrearse, divertirse, desestresarse, aprender, entre otras.

Un proceso para aplicar una nueva metodología en el ámbito educativo requiere de tiempo y aceptación por parte de ambas partes (docentes y estudiantes), ya que es necesario que el uso de los juegos sea vistos por el alumnado como un medio que facilite o refuerce el aprendizaje de diferentes contenidos estudiados en las materias y no debe convertirse en un momento para hacer desorden y perder el tiempo, además el papel del profesor o profesora es el de elaborar actividades acordes con el nivel del sus dicentes, con el fin de que les permita participar de una manera activa dentro del juego y así mantenerlos motivados y motivadas para que se lleve a cabo el aprendizaje.

La mayoría de los trabajos expuestos demuestran que los resultados generalmente se obtienen a partir de cuestionarios que se les aplica a docentes, estudiantes o padres de familia, es importante que empiecen a realizarse estudios experimentales que demuestren los cambios a nivel de rendimiento académico que pueden producirse cuando se hace uso de los juegos didácticos como una forma de enseñanza en el proceso de aprendizaje.

## Referencias

- [1] ABARCA, S. *"Psicología del niño en la edad escolar"*. 1ª ed. San José, Costa Rica: EUNED. 1992.
- [2] AHMAD, W., and LATITH, N. *"Development of a Mathematics courseware: Fractions"*. Proceedings of the Fifteenth Asian Technology Conference in Mathematics, Kuala Lumpur, Malaysia, 17-21. 2010.
- [3] ALCARAZ, E., FUENTES DE LA ROSA, C., NICHOLAS, M., ECHEVARRÍA, C., ORTIZ DE URBINA, J., GONZÁLEZ, P., MONTES, P., SANTAMARÍA, C., y PÉREZ, M. *"Enseñanza y aprendizaje de las lenguas modernas"*. 1ª ed. Madrid, España: RIALP. 1993.
- [4] ÁLVAREZ, F., y SMITH, G. *"Propuestas Didácticas Innovadoras para la Enseñanza de la Física y de la Química en Décimo Año, en el Colegio Madre del Divino Pastor, Circuito 01, de la Dirección Regional de Educación de San José"*. Tesis de Licenciatura Universidad de Costa Rica. 2012.
- [5] ANDRADE, V., y ANTE, A. *"Las estrategias lúdicas en el proceso de aprendizaje en los niños y niñas de los primeros años de educación básica de las instituciones educativas "Dario Egas Grijalva", "Abdon Calderón" y "Manuel J. Bastidas" de la ciudad de San Gabriel Provincia del Carchi"*. Tesis de Licenciatura Universidad Técnica del Norte de Ecuador. 2010.
- [6] BARRALE, M., y DÍAZ, M. *"Enseñar y aprender sin stress: técnicas de dinámica de grupo. Sus implicaciones psicológicas y educativas"*. 1ª ed. Córdoba, Brujas: Editorial Brujas. 2006.
- [7] BERGER, K. *"Psicología del Desarrollo: infancia y adolescencia"*. 7ª ed. Madrid, España: Panamericana. 2007.
- [8] BODROVA, E., and DEBORAH, L., *"The Importance of Being Playful"*. The first years of school, vol. 60, n° 7, pp. 50-53. 2003. DOI: <http://webscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?sid=68eac553-f9a1-4cfd-995f-de404f76e729%40sessionmgr113&vid=7&hid=110>
- [9] BLOOM, B. (1971a). Mastery learning. In J. H. Block (Ed.), *Mastery learning: Theory and practice* (pp. 47-63). New York: Holt, Rinehart & Winston.
- [10] BOLAÑOS, G., Y MOLINA, Z. *"Introducción al currículo"*. 1ª ed. San José, Costa Rica: EUNED. 1990.
- [11] BUISÁN, N., CARMONA, C., GARCÍA, K., NOGUER, S., Y RIGAU, E. *"El niño incomprendido"*. 1ª ed. Barcelona, España: Amat Editorial. 2009. <https://books.google.co.cr/books?id=onG1b3yYU1sC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false>
- [12] CALDERÓN, K. *"La didáctica de hoy"*. 1ª ed. San José, Costa Rica: EUNED. 2013.

- [13] CHANG, K., WU, L., WENG, S., AND SUNG, Y. "Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning". *Computers & Education*, vol. 58, nº 2, pp. 775–786. 2012.
- [14] CHANG, M., EVANS, M., KIM, S., NORTON, A. AND SAMUR, Y. "Differential effects of learning games on mathematics proficiency". *Educational Media International*, vol. 52, nº 1, pp. 47-57. 2015. DOI: 10.1080/09523987.2015.1005427
- [15] COVINGTON, M. "La voluntad de aprender: guía para la motivación en el aula". 1ª ed. Madrid, España: Alianza Editorial. 2000.
- [16] DE BORJA, M. "El juego infantil: organización de ludotecas". 1ª ed. Barcelona, España: Oikos-tauis. 1980.
- [17] DE LA TORRE, F. "12 lecciones de pedagogía, educación y didáctica". 1ª ed. Distrito Federal, México: Ediciones Alfaomega. 2005.
- [18] DELGADO, I. "Juego infantil y su metodología". 1ª ed. Madrid, España: Paraninfo. 2011.
- [19] DÍAZ, F. "Didáctica y currículo: un enfoque constructivista". 1ª ed. Cuenca, España: Universidad Castilla- La Mancha. 2002
- [20] DÍAZ, M. "Las actividades recreativas y los juegos educativos como mecanismo para mejorar el aprendizaje de los escolares de las escuelas dirección I, Circuito 04, Dirección Regional de Educación Puriscal". Tesis de Licenciatura Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. 2012
- [21] EUCEDA, T. "El juego desde el punto de vista didáctico a nivel de educación pre-básica". Tesis de Maestría Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán de Honduras. 2007.
- [22] FLORES, H. "El juego como estrategia alternativa para mejorar la adquisición de la lecto-escritura en los alumnos del primer grado de educación primaria de la escuela "Manuel José Othón" ubicada en Jalpilla, Axta de Terrazas, S.L.P". Tesis de Licenciatura Universidad Tangamanga de México. 2009.
- [23] GARCÍA, C. "Utilización de estrategias y actividades lúdicas, por parte de docentes, padres y madres, para el logro de aprendizajes significativos y motivación de los/as alumnos/as de IV año de la Escuela La Trinidad del circuito 03 de la Dirección Regional de Educación de Sarapiquí en el 2013". Tesis de Licenciatura Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. 2013.
- [24] GAVILÁÑEZ, Y., Y ZAVALA, S. "Los juegos didácticos en el desarrollo del pensamiento". Tesis de Licenciatura Universidad Estatal de Milagro de Ecuador. 2010.
- [25] GOSEN, J., AND WASHBUSH, J. "A review of scholarship on assessing experiential learning effectiveness". *Simulation and Gaming*, vol. 35, nº 2, pp. 270–293. 2004. DOI: 10.1177/1046878104263544
- [26] KATMADA, A., MAVRIDIS, A., AND TSIATSOS, T. "Implementing a Game for Supporting Learning in Mathematics". *The Electronic Journal of e-Learning*, vol. 12, nº 3, pp. 230-242. 2014. <http://www.ejel.org/volume12/issue3>.
- [27] KE, F., AND GRABOWSKI, B. "Gameplaying for maths learning: Cooperative or not?". *British Journal of Educational Technology*, vol. 38, nº 2, pp. 249-259. 2007.
- [28] KE, F. "A case study of computer gaming for math: Engaged learning from gameplay?" *Computers & Education*, vol. 51, nº 4, pp. 1609–1620. 2008. doi:10.1016/j.compedu.2008.03.003

- [29] KEBRITCHI, M., HIRUMI, A., AND BAI, H. "The effects of modern mathematics computer games on mathematics achievement and class motivation". *Computers & Education*, vol. 55, nº 2, pp. 427-443. 2010.
- [30] LABRADOR, M. Y MOROTE, P. "El juego en la enseñanza de ELE". *Glosas Didácticas*, vol. 17, pp. 71-84. 2008. <http://www.um.es/glosasdidacticas/numeros/GD17/07.pdf>
- [31] LÁZARUS, M. *Concerning the fascination of play*. Berlín. Dummler. 1883
- [32] LEE, Y. "Enhancement of fractions from playing a game", *Crossing divides: MERGA 32*". *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics*, vol. 1, pp. 323-330. 2009
- [33] LINARES, A. "Desarrollo cognitivo: las teorías de Piaget y de Vigotsky". [Presentación con diapositivas]. 2009. [http://www.paidopsiquiatria.cat/files/Teorias\\_desarrollo\\_cognitivo.pdf](http://www.paidopsiquiatria.cat/files/Teorias_desarrollo_cognitivo.pdf)
- [34] LÓPEZ, I. "El juego en la educación infantil y primaria". *Revista Autodidacta*, vol. 19-37. 1989. <http://educacioninicial.mx/wp-content/uploads/2014/01/JuegoEIP.pdf>
- [35] LÓPEZ, M. "Dirección comercial: guía de estudio". 1ª ed. Barcelona, España: Universitat Autònoma de Barcelona. 2008.
- [36] MARÍN, Y., RAMOS, A., MONTES, J., HERNÁNDEZ, H. Y LÓPEZ, J. "Juego didáctico, una herramienta educativa para el autoaprendizaje en la ingeniería industrial". *Revista Educación en Ingeniería*, nº 12, pp. 61-68. 2011.  
[https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwihjuXQpf3LahVLox4KHbGhBRcQFggcMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.educacioneningenieria.org%2Findex.php%2Fedi%2Farticle%2Fdownload%2F128%2F115&usq=AFQjCNH4UbMrwBNu1MFwJ0Th4hNG5xHFOQ&sig2=tzYBV1Pq1KNfzW\\_fQfSDWQ&bvm=bv.118817766,d.dmo](https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwihjuXQpf3LahVLox4KHbGhBRcQFggcMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.educacioneningenieria.org%2Findex.php%2Fedi%2Farticle%2Fdownload%2F128%2F115&usq=AFQjCNH4UbMrwBNu1MFwJ0Th4hNG5xHFOQ&sig2=tzYBV1Pq1KNfzW_fQfSDWQ&bvm=bv.118817766,d.dmo)
- [37] MARTÍN, N., MARTÍN, V., Y TREVILLA, C. "Influencia de la motivación intrínseca y extrínseca sobre la transmisión de conocimiento. El caso de una organización sin fines de lucro". *Revista de Economía Pública, Social y Cooperativa*, nº 66, pp. 187-211. 2009. [http://www.ciriec-revistaeconomia.es/banco/6609\\_Martin\\_et\\_al.pdf](http://www.ciriec-revistaeconomia.es/banco/6609_Martin_et_al.pdf)
- [38] MÉNDEZ, Z. "Aprendizaje y cognición". 9ª ed. San José, Costa Rica. EUNED. 2005.
- [39] MÉNDEZ, Z. "Aprendizaje y Cognición". 10ª ed. San José, Costa Rica: EUNED. 2008.
- [40] MENESES, M., Y MONGE, M. "El juego en los niños: enfoque teórico". *Revista de Educación UCR*, vol. 25, nº 2, pp. 113-124. 2001. <http://www.redalyc.org/pdf/440/44025210.pdf>
- [41] MINERVA, C. "El Juego como Estrategia de Aprendizaje en el aula". Tesis de licenciatura Universidad de los Andes de Colombia. 2002.
- [42] MONTAÑÉS, J., PARRA, M., SÁNCHEZ, T., LÓPEZ, R., LARROTE, J., BLANC, P., SÁNCHEZ, M., SERRANO, J., Y TURÉGANO, P. "El juego en el medio escolar". *Revista Ensayos*, vol. 15, pp. 235-260. 2000
- [43] MONTAÑÉS, J. "Aprender y jugar: actividades educativas mediante el material lúdico-didáctico". 1ª ed. Cuenca, España: Universidad Castilla- La Mancha. 2003.
- [44] MUJINA, V. "Psicología de la edad preescolar". 1ª ed. Madrid, España: Pablo del Río. 1975.
- [45] MUÑIZ, M., Y PELÁEZ, M. "La utilización del juego como estrategia didáctica en el proceso de inter-aprendizaje para favorecer el desarrollo bio-psico-social de los niños y las niñas de kínder del Jardín de Infantes Richard Macay, año lectivo 2009-2010". Tesis de Licenciatura Universidad

- Laica Eloy Alfaro de Manabí de Ecuador. 2010.
- [46] O'CONNOR, J., Y SEYMOUR, J. "Introducción a la Programación Neurolingüística". 9ª ed. Barcelona, España: Urano. 1995.
- [47] PACHECO, R. "Educación Física y Recreación Infantil". 6ª ed. San José, Costa Rica: EUNED. 2005.
- [48] PARETO, L., ARVEMO, T., DAHL, Y., HAAKE, M. AND GULZ, A. "A Teachable-Agent Arithmetic Game's effects on Mathematics Understanding, Attitude and Self-Efficacy". Proceedings of the 15th International Conference on Artificial Intelligence in Education, Auckland, 2011. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6738, pp. 247-255.
- [49] PIEDRA, M. "Propuesta de capacitación para profesores de XI año utilizando las técnicas de juego para la enseñanza de los estudios sociales". Tesis de licenciatura Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. 2002.
- [50] PIAGET, J. "Play Dreams & Imitation in Childhood". 1ª ed. New York, Estados Unidos: Norton. 1962.
- [51] PROSERPIO, L., AND GIOIA, D. "Teaching the virtual generation". The Academy of Management Learning and Education, vol. 6, nº 1, pp. 69-80. 2007.
- [52] SARRAMONA, J. "Teoría de la Educación". 2ª ed. Barcelona, España: Planeta. 2008.
- [53] SOLÓRZANO, J., Y TARIGUANO, Y. "Actividades lúdicas para mejorar el aprendizaje de la matemática". Tesis de licenciatura Universidad Estatal de Milagro de Ecuador. 2010.
- [54] RODRÍGUEZ, J. "Comunidades virtuales de práctica y de aprendizaje". 1ª ed. Barcelona, España: Universitat de Barcelona. 2008.
- [55] RODRÍGUEZ, L. "Ciclo de Garnier en educación culmina con la deserción más baja de la historia". 2014.  
<http://www.mep.go.cr/noticias/ciclo-garnier-educacion-culmina-desercion-mas-baja-historia>
- [56] RUBIN, K., FEIN, G., Y VANDENBERG, B. Play. In E.M. Hetherington (Ed.), *Handbook of child psychology: Vol 4. Socialization, personality, and social development*. New York: Wiley. 1983.
- [57] WILSON, A. J., REVKIN, S. K., COHEN, D., COHEN, L. AND DEHAENE, S. "An open trial assessment of "The Number Race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia". Behavioral and Brain Functions, vol. 2, nº 1. 2006.  
<http://www.biomedcentral.com/content/pdf/1744-9081-2-20.pdf>.
- [58] WOOLFOLK, A. "Psicología Educativa". 9ª ed. México: Pearson. 2006
- [59] ZANTOW, K., KNOWLTON, D., AND SHARP, D. "More than fun and games: Reconsidering the virtues of strategic management simulations". The Academy of Management Learning and Education, vol. 4, nº 4, pp. 451-458. 2005.  
<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1523349/pdf/1744-9081-2-20.pdf>

### Sobre el autor:

Nombre: Bryan Montero Herrera

Correo Electrónico: bryan\_mh2005@hotmail.com

Institución: Universidad de Costa Rica.

# Historias de Matemáticas

## Matemáticas para entender los fenómenos sociales: los trabajos pioneros de Florence Nightingale

## Mathematics to understand social phenomena: the pioneering work of Florence Nightingale

Marta Macho Stadler

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 093–106, ISSN 2174-0410

Recepción: 20 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de abril de 2017

### Resumen

Florence Nightingale (1820–1910) es conocida, sobre todo, como fundadora de la enfermería moderna y por su contribución a la reforma de las condiciones sanitarias de los hospitales de campaña. Fue además precursora en la representación visual de la información: con sus técnicas evidenció que una buena utilización de la estadística puede llevar a mejoras en las prácticas médicas.

**Palabras Clave:** enfermería moderna, representación visual de la información, estadística, diagrama del área polar.

### Abstract

Florence Nightingale (1820–1910) is known primarily as the founder of modern nursing and for her contribution to the reform of the health conditions in field hospitals. She was also a pioneer in the visual representation of information: with her techniques she showed that a good use of statistics can lead to improvements in medical practices.

**Keywords:** modern nursing, visual representation of information, statistics, polar area diagram.

## 1. La vida de Florence

*“Florence Nightingale, la enfermera más famosa del mundo, dedicó a la India la mayor parte de sus noventa años de vida, aunque nunca pudo viajar a ese país que amó.*

*Florence era una enfermera enferma. Había contraído una enfermedad incurable en la guerra de Crimea. Pero desde su dormitorio de Londres escribió una infinidad de*

*artículos y cartas que quisieron revelar la realidad hindú ante la opinión pública británica.*

*Sobre la indiferencia imperial ante las hambrunas: Cinco veces más muertos que en la guerra franco-prusiana. Nadie se entera. No decimos nada de la hambruna en Orissa, cuando un tercio de su población fue deliberadamente autorizada a blanquear los campos con sus huesos.*

*Sobre la propiedad rural: El tambor paga por ser golpeado. El campesino pobre paga por todo lo que hace, y todo por lo que el terrateniente no hace y hace que el campesino pobre haga en su lugar.*

*Sobre la justicia inglesa en la India: Nos dicen que el campesino pobre tiene la justicia inglesa para defenderse. No es así. Ningún hombre tiene lo que no puede usar.*

*Sobre la paciencia de los pobres: Las revueltas agrarias pueden convertirse en algo normal en toda la India. No tenemos ninguna seguridad de que todos esos millones de hindúes silenciosos y pacientes seguirán por siempre viviendo en el silencio y la paciencia. Los mudos hablarán y los sordos escucharán."*

Florence, en *Espejos, una historia casi universal*, Eduardo Galeano, 2008

Florence Nightingale nació el 12 de mayo de 1820 –cada 12 de mayo, coincidiendo con el aniversario de su nacimiento, se celebra el *Día Internacional de la Enfermería*– en el seno de una familia acomodada en Florencia, en aquel momento capital del Gran Ducado de Toscana. Era hija de William Edward Nightingale (1794–1874) y Frances Smith (1789–1880); su hermana mayor, Frances (1819–1890) fue escritora y periodista.



Figura 1. Florence Nightingale en un billete de 10 libras.

Impulsada por lo que ella interpretó como una ‘llamada divina’, en 1837 anunció a su familia su decisión de dedicarse a la enfermería a partir de 1844, determinación que chocaba con las convenciones sociales de la época. A pesar de la fuerte oposición de su familia – fundamentalmente de su madre y su hermana– logró formarse como enfermera: en aquella época la profesión de enfermera –o cuidadora– estaba asociada a mujeres de la clase trabajadora; desde luego no estaba vinculada a una señorita culta como Florence, que además estaba destinada a casarse.



Figura 2. Doodle dedicado a Florence Nightingale en el 188 aniversario de su nacimiento (12 de mayo de 2008).

Durante los siguientes años, segura de su vocación y de manera autodidacta, se convirtió en una experta en hospitales y servicios sanitarios que visitaba en cada uno de sus viajes. En efecto, Florence fue una gran viajera, una costumbre de la época cuya función era instruir y cultivar a las mujeres del siglo XIX: Francia, Italia, Suiza, Grecia y Egipto fueron algunos de sus destinos. Los escritos en su diario de viaje son la prueba de su proceso de aprendizaje, de sus habilidades literarias y de su filosofía de vida. Florence registraba en sus notas detalles sobre estadísticas de población, hospitales e instituciones de caridad.



Figura 3. Algunos fotogramas de la película 'The lady with a Lamp' (1951).

En 1850, visitó la comunidad religiosa luterana de Kaiserswerth en Alemania. Allí observó al pastor Theodor Fliedner y a sus asistentes trabajando para los enfermos y marginados. Florence destacó esa experiencia como un acontecimiento decisivo en su vida. En esa institución recibió cuatro meses de entrenamiento médico que constituyeron la base para su trayectoria posterior; aunque las medidas de higiene no eran mejores que en otros lugares, la atención a los pacientes era meticulosa.

El 22 de agosto de 1853, asumió el cargo de superintendente en el *Instituto para el Cuidado de Señoras Enfermas* –eran mujeres sin techo– en Londres, puesto que ocupó hasta octubre de 1854. En esta institución realizó algunas mejoras como la instalación de agua caliente en las habitaciones, el emplazamiento de un ascensor o la inclusión de una campana de aviso en las habitaciones. Se encargó además de encontrar más casas de convalecencia para buscar trabajo a institutrices que salían del hospital.

Su padre le asignó un ingreso anual de 500 libras, lo cual le permitió, durante ese período, llevar una vida confortable y proseguir con su formación.



Figura 4. Florence Nightingale en 1854.

Entre octubre de 1853 y febrero de 1856 se desarrolló la guerra de Crimea, conflicto bélico entre el Imperio ruso –en aquel momento en manos de la dinastía de los Románov– y la alianza del Reino Unido, Francia, el Imperio otomano –al que apoyaban para evitar el excesivo crecimiento de Rusia– y el Reino de Piamonte y Cerdeña. La mayor parte del conflicto tuvo lugar en la península de Crimea, en el mar Negro. Las tropas británicas se movilizaron para la expedición a Crimea, en defensa de Turquía, contra la política de agresión del gobierno zarista.

Cuando llegaron a Londres las primeras noticias del conflicto, los ejércitos aliados estaban venciendo a los rusos pero, al mismo tiempo, las enfermedades estaban derrotando a los ejércitos británicos, que no disponían en el Mar Negro ni de médicos, ni de medicinas, ni de enfermeros suficientes. El desánimo se adueñó de los soldados, treinta mil que combatían sin una auténtica protección sanitaria: en las primeras semanas de conflicto, de cada cien muertos, ochenta eran víctimas de los deficientes tratamientos sanitarios.

En aquel momento, Sir Sidney Herbert –un antiguo conocido de la familia Nightingale– era el Secretario de Guerra en Gran Bretaña. Conocía las actividades de Florence como enfermera, y se puso en contacto con ella al conocer las terribles noticias que llegaban del frente: los hospitales militares carecían incluso de vendas para los heridos. Herbert solicitó

ayuda a Florence, a la que consideraba como la única persona capaz de llevar a cabo tal expedición.



Figura 5. 'Carga de la Brigada Ligera', de Richard Caton Woodville. Se trata de la batalla de Balaclava (guerra de Crimea). En primera instancia se aprecian los jinetes del 11<sup>o</sup> de Húsares y al fondo, los 17<sup>o</sup> de Lanceros.

El 21 de octubre de 1854, ella y un equipo de treinta y ocho enfermeras voluntarias – muchas de ellas inexpertas, y entrenadas personalmente por Florence– partieron hacia el frente. Fueron transportadas a través del mar Negro hasta la base de operaciones británica en Scutari –hoy en día, Üsküdar, en Estambul–: llegaron a principios de noviembre de 1854. ¿Qué encontraron allí? Los soldados heridos recibían tratamientos totalmente inadecuados por parte de un equipo médico superado por la situación, mientras que los mandos del ejército eran totalmente indiferentes ante esta situación.



Figura 6. 'Florence Nightingale recibiendo a los heridos en Scutari', de Jerry Barrett (National Gallery, Londres).

Los suministros médicos escaseaban, la higiene era deplorable y las infecciones proliferaban, derivando en muchas ocasiones en la muerte. No se contaba con equipamiento apropiado para procesar los alimentos de los pacientes y, además, la comida era insuficiente.

Durante el primer verano de Florence en Scutari, algo más de cuatro mil soldados perdieron la vida; fallecieron diez veces más soldados por enfermedades como tífus, fiebre tifoidea, cólera y disentería que por heridas en el campo de batalla. Las pésimas condiciones en el hospital y sus alrededores se debían al hacinamiento, a los deficientes desagües sanitarios y a la falta de ventilación.

En marzo de 1855, el gobierno británico destinó una comisión sanitaria a Scutari, casi seis meses después de la llegada de Florence. Ella ordenó la limpieza de los vertederos contaminantes y mejoró la ventilación del hospital. A partir de esas medidas el índice de mortalidad bajó rápidamente.

En pleno conflicto, un artículo en *The Times* publicado el 8 de febrero de 1855, describía a Florence y su labor de este modo:

*“Sin exageración alguna es un «ángel guardián» en estos hospitales, y mientras su grácil figura se desliza silenciosamente por los corredores, la cara del desdichado se suaviza con gratitud a la vista de ella. Cuando todos los oficiales médicos se han retirado ya y el silencio y la oscuridad descienden sobre tantos postrados dolientes, puede observársela sola, con una pequeña lámpara en su mano, efectuando sus solitarias rondas.”*

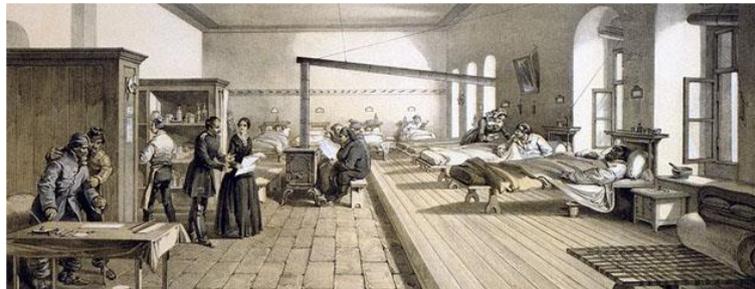


Figura 7. Aplicando reformas en los hospitales.

En realidad, durante la guerra, Florence no se percató de que la falta de higiene era una de las causas principales de la alta tasa de mortalidad: ella la achacaba a la mala nutrición, a la falta de suministros médicos y al agotamiento extremo de los hombres. Se dio cuenta de este dato al regresar a Londres, cuando comenzó a investigar los datos que llevaba meticulosamente anotados. A partir de entonces, comenzó a defender la importancia de la mejora de las condiciones sanitarias hospitalarias y, gracias a ello, ayudó a reducir las muertes en el ejército también en tiempos de paz, y ayudó a promover el correcto diseño sanitario de los hospitales.

En 1856, con la guerra ya terminada, Florence –que había enfermado de fiebre tifoidea en Crimea– solicitó audiencia a la Reina Victoria; comentó con ella sus experiencias de guerra y la convenció de la necesidad de subsanar las incorrecciones que había expuesto anteriormente, es decir, insistió ante la monarca en la necesidad de poner en marcha radicales reformas higiénicas en los centros hospitalarios.

En mayo de 1856 se expidió una Real Orden para establecer una investigación sobre los desastres de la guerra de Crimea: sus apuntes ayudaron a que las medidas preventivas pasaran por delante de las curativas, y se aplicaron numerosas y eficaces reformas.



Figura 8. Monumento conmemorativo de la guerra de Crimea en el centro, Florence Nightingale a la izquierda y Sidney Herbert a la derecha. Waterloo Place (Londres).

Al finalizar la guerra, Florence Nightingale –recibida como una auténtica heroína en su país– comenzó a ser conocida como *la dama de la lámpara* –*the lady of the lamp*– debido al poema *Santa Filomena* de Henry Wadsworth Longfellow, publicado en 1857:

*“Los heridos en la batalla,  
en lúgubres hospitales de dolor;  
los tristes corredores,  
los fríos suelos de piedra.  
¡Mirad! En aquella casa de aflicción  
Veo una dama con una lámpara.  
Pasa a través de las vacilantes tinieblas  
y se desliza de sala en sala.  
Y lentamente, como en un sueño de felicidad,  
el mudo paciente se vuelve a besar  
su sombra, cuando se proyecta  
en las oscuras paredes.”*

En 1860, Florence inauguró una *Escuela de Adiestramiento de Enfermeras* en el hospital St. Thomas y comenzó a trabajar y escribir sobre diferentes reformas sanitarias. En 1883, la reina Victoria le otorgó la *Real Cruz Roja*, y en 1907 el Rey Eduardo VII le concedió la *Orden del Mérito*, la primera vez que esta orden se dispensaba a una mujer. En 1908, se le entregaron las *Llaves de la Ciudad* de Londres, y en 1910 falleció mientras dormía.



Figura 9. Imagen de Florence Nightingale, ya mayor.

## 2. Florence y la enfermería

*“La observación indica cómo está el paciente, la reflexión indica qué hay que hacer, la destreza práctica indica cómo hay que hacerlo. La formación y la experiencia son necesarias para saber cómo observar y qué observar; cómo pensar y qué pensar.”*

Florence Nightingale: *Notas sobre hospitales* (1863)

El *Juramento Florence Nightingale* fue creado en 1893 en la escuela de enfermería Ferrand, del Hospital Arpar de Detroit. Es aquel con el que las enfermeras y enfermeros se comprometen a «Abstenerse de provocar daño alguno» y a «considerar como confidencial toda información que le sea revelada en el ejercicio la profesión, así como todos los asuntos privados de los pacientes».

*“Yo solemnemente me prometo a mí misma y delante de Dios y en presencia de esta asamblea que voy a pasar mi vida en pureza y voy a practicar mi profesión con toda mi fidelidad. Voy a abstenerme de cualquier cosa dañina y nociva y no voy a tomar ni administrar a sabiendas ninguna droga nociva. Voy a hacer todo lo que tenga a mi alcance para elevar al nivel de mi profesión y para mantener en confidencia todos los asuntos personales para que no salgan a la luz al igual que todos los asuntos familiares que lleguen a mi conocimiento en la práctica de mi vocación. Con toda lealtad haré un esfuerzo por prestar ayuda al médico en su trabajo y dedicarme a procurar el bienestar del personal bajo mis cuidados.”*

Extracto del *Juramento Florence Nightingale*.

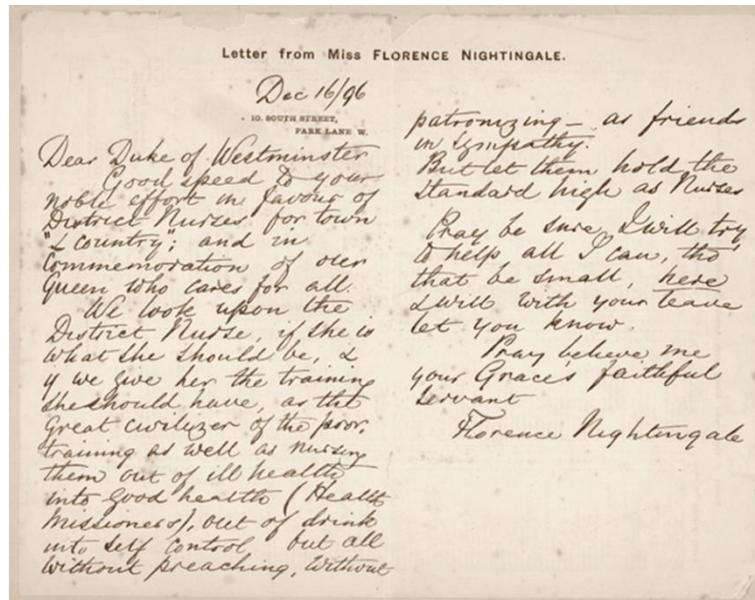


Figura 10. Carta de Florence Nightingale al Duque de Westminster hablándose sobre la importancia de las enfermeras.

En 1859 se publicaron las *Notas sobre Enfermería: Qué es y qué no es* –*Notes on nursing: What it is, and what it is not*– de Florence, un pequeño libro que sirvió como base del programa de estudios de la *Escuela Nightingale* y de otras escuelas de enfermería que siguieron el mismo modelo, a pesar de haberse escrito como guía para quienes ejercían cuidados de enfermería a domicilio. En el prefacio decía:

*“Cada día tiene mayor importancia el conocimiento de la higiene, el conocimiento de la enfermería, en otras palabras, el arte de mantenerse en estado de salud, previniendo la enfermedad, o recuperándose de ella. Se le reconoce como el conocimiento que todo el mundo debe tener –distinto del conocimiento médico, propio solamente de una profesión–.”*

Florence tuvo una influencia decisiva en la creación de la Cruz Roja Británica en 1870, y fue miembro de su *Comité de Damas*, interesándose por las actividades del movimiento hasta su fallecimiento. Henri Dunant, fundador de la Cruz Roja, manifestó en una visita a Londres en 1872:

*A pesar de que soy conocido como el fundador de la Cruz Roja y el promotor de la Convención de Ginebra, es a una dama que todo el honor de esa convención es debido. Lo que me inspiró a viajar a Italia durante la guerra de 1859, fue el trabajo de Miss Florence Nightingale en Crimea.*



Figura 11. Florence Nightingale con un grupo de enfermeras.

El año 2010 fue declarado *Año Internacional de la Enfermería* para reivindicar, entre otras, la relevancia histórica de Florence Nightingale en el centenario de su fallecimiento.

### 3. Florence, las matemáticas y la estadística

En 1840, Florence Nightingale rogó a sus padres que *'la dejaran estudiar matemáticas en vez del trabajo repetitivo y la práctica de cuadrillas'*. Su madre no lo aprobó, ella asumía que el destino de su hija era el del matrimonio, *¿qué utilidad tendrían las matemáticas para una mujer casada?* Su padre, a pesar de su gusto por las matemáticas y habérselo transmitido a su hija, le pidió que estudiara temas más apropiados para una mujer, tales como *historia o filosofía natural y moral*.

Florence expresó su preferencia por las matemáticas: *'Yo no creo que pueda tener tanto éxito en nada que requiera velocidad, así como en algo que solo requiera trabajo'*. Sus padres finalmente le dieron permiso.

Florence aprendió aritmética, geometría, álgebra –uno de sus tutores fue James Joseph Sylvester (1814–1897)– y, antes de dedicarse de lleno a la enfermería, tuteló a niñas y niños en esos campos, con un programa de aprendizaje concreto y bien planificado. En sus *planes de lecciones para la enseñanza de la aritmética y la geometría* (Museo Británico) incluía problemas basados en las vidas de sus alumnas y alumnos. En ellos mostraba en particular una especial preocupación por la educación de las niñas: *La aritmética de las niñas ha sido descuidada... su geografía debería ser aritmética*.

Florence ejemplifica el proceso de enseñanza y aprendizaje en sus notas de esta manera:

“¿Qué tan alto es un venado? ¿Es usted tan alta? ¿Qué tan alta es usted? Tres pies... ¿Cuánto es eso? Una yarda... ¿Es usted cuadrúpeda? ¿Qué tan lejos está la parte más nórdica de Europa del Ecuador? ¿Qué tan lejos tiene que caminar a la escuela? Dos millas... ahora, ¿si usted tuviera que caminar dos millas geográficas cada día, cuanto tendría que caminar para llegar al Ecuador?”

Como ya hemos comentado, Florence trabajó como enfermera en el hospital de campaña de Scutari durante la Guerra de Crimea. A su regreso a Londres, ordenó las notas que había ido tomando durante sus largos paseos nocturnos acompañada de su lámpara; demostraban que los soldados fallecían a causa de las deplorables condiciones sanitarias en el hospital y que, por tanto, eran muertes que se podían evitar. Sus conclusiones le llevaron a intentar convencer al Gobierno británico de la necesidad de realizar reformas higiénicas en los hospitales. Y para ello pensó que la mejor forma era hacerlo gráficamente, porque las tablas de números no son útiles para convencer. Como ella decía, tenía ‘que lograr a través de los ojos lo que no somos capaces de transmitir a las mentes de los ciudadanos a través de sus oídos insensibles a las palabras’.

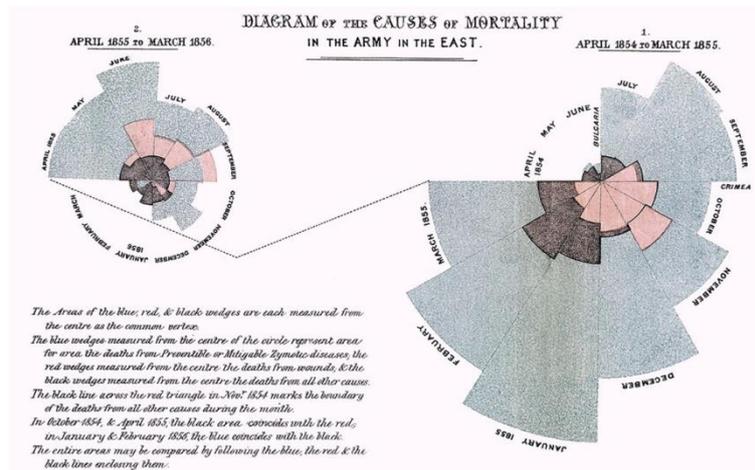


Figura 12. El Diagrama de la Rosa.

Con ese objetivo creó el *Diagrama de la Rosa* (ver figura 12) que, posteriormente, sería conocido en lenguaje matemático como el *diagrama del área polar*. En el propio diagrama, debajo, a la izquierda, se explicaba el significado de los colores y tamaños de las áreas:

“Cada una de las áreas azules, rojas y las secciones negras, están medidas utilizando el centro como vértice común. Las secciones azules medidas desde el centro del círculo representan, área por área, las muertes por enfermedades zoonóticas, desde prevenibles hasta mitigables. Las secciones rojas medidas desde el centro representan las muertes por heridas. Las secciones negras medidas desde el centro representan las muertes por otras causas.

La línea negra que cruza el triángulo rojo en noviembre de 1854, marca el límite de las muertes debidas a todas las otras causas durante ese mes. En octubre de 1854 y abril de 1855, el área negra coincidió con el rojo. En enero y febrero de 1855, el azul coincidió con

*el negro. Las áreas completas pueden compararse siguiendo las líneas limítrofes del azul, el rojo y el negro.”*

Florence no aceptaba el enorme número de bajas debidas a enfermedades infecciosas; el círculo de la izquierda en su diagrama demostraba que la situación podía cambiarse. Aparte de un bache en junio de 1855, la proporción de muertes por enfermedad –los sectores azules– fueron cayendo. ¿Qué sucedió? La respuesta estaba en las medidas que adoptó Florence para mejorar las condiciones higiénicas del hospital.

Lo extraordinario del diagrama de Florence es que evidencia, por un lado, que los hospitales pueden matar pero, a su vez, demuestra que, si se realizan las mejoras adecuadas, estas muertes masivas pueden evitarse. La claridad del *Diagrama de la Rosa* consiguió convencer al Gobierno británico de la necesidad de realizar reformas sanitarias.

*“Florence Nightingale fue la primera persona que utilizó los gráficos estadísticos para persuadir a las autoridades de que cambiaran sus estrategias; hasta entonces sólo se utilizaban para presentar información, sin intención de provocar un cambio en la acción.”*

Hugo Small, *Florence Nightingale, Avenging Angel*, 1999.

Desde el punto de vista estadístico fue un gráfico absolutamente novedoso para su época; en él se representan tres variables: el tiempo –cada sector es un mes–, el número de muertes –el área del sector– y la causa de la muerte –el color–. Hasta entonces, los gráficos más habituales, principalmente de barras y de sectores, representaban solo una o dos variables. El historiador de la ciencia I. Bernard Cohen comentaba sobre Florence: ‘*Fue pionera en la revolucionaria idea de que los fenómenos sociales pueden medirse y someterse al análisis matemático.*’

En sus últimos años, Florence realizó un exhaustivo informe estadístico acerca de las condiciones sanitarias en las zonas rurales de la India –ese país al que alude Eduardo Galeano en su precioso *Florence* reproducido al principio de este texto–, promoviendo la introducción de mejoras en la atención médica y del servicio de salud pública en ese país.

En 1858 y 1859 presionó al gobierno de Gran Bretaña –con éxito– para que se estableciera una Comisión Real para tratar la situación de la India. Dos años después redactó un informe para la comisión, donde completó su propio estudio de 1863. Después de diez años de reformas sanitarias, en 1873, Florence informó que la mortalidad entre los soldados en la India disminuyó de 69 a 19 por cada mil.

La aportación de Florence Nightingale al campo de la estadística fue reconocida con su nombramiento en 1858 como miembro de la *Royal Statistical Society*, siendo la primera mujer en acceder a ese cargo. Además, en 1874, se convirtió en miembro honorífico de la *American Statistical Association*.

Junto a Francis Galton (1822–1911) impulsó el proyecto de creación de una nueva Cátedra de Estadística en Oxford. En 1891, Florence propuso que en dicha cátedra se estudiara la importancia de la estadística aplicada a disciplinas como la educación, la criminología, los asilos y la India. Su propuesta no prosperó: los centros universitarios de la época no compartían el interés de Florence por la aplicación de la estadística a problemas sociales. El tiempo –sin duda alguna– ha dado la razón a Nightingale.

## Referencias

- [1] ULIARTE, Txaro. Exposición Centenario Florence Nightingale. Museo Historia de la Medicina <http://eueflo.blogspot.com.es/>
- [2] URKAREGI ETXEPARE, Arantza. Mujeres con ciencia. *Florence Nightingale, pionera estadística*. <http://mujeresconciencia.com/2014/05/12/florence-nigthingale-pionera-estadistica/>
- [3] WIKIPEDIA: [https://es.wikipedia.org/wiki/Florence\\_Nightingale](https://es.wikipedia.org/wiki/Florence_Nightingale)

### Sobre la autora:

*Nombre:* Marta Macho Stadler

*Correo Electrónico:* [marta.macho@ehu.eus](mailto:marta.macho@ehu.eus)

*Institución:* Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Uniberstsitea, España.



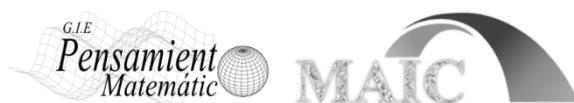
# Historias de Matemáticas

## Estudio estadístico sobre violencia de género

## Statistics study about violence against women

Concepción López Baissón y Lucía Inglada-Pérez

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 107-128, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Jul'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

### Resumen

En este artículo se aplican técnicas de estadística aplicada y análisis de datos a la presentación de un panorama actualizado sobre la violencia de género en Europa y específicamente en España: en particular, se analiza su evolución, visibilización, otros tipos de violencia también clasificada como de género y la influencia de factores como edad, nivel de estudios, situación laboral o presupuesto destinado a su prevención

**Palabras Clave:** Violencia de género, violencia machista, regresión lineal, análisis discriminante, análisis de conglomerados, dendograma.

### Abstract

In this paper, we apply both, statistical techniques and data analysis, to the current scenario about violence against women in Europe and specifically in Spain. In particular, we analyze its evolution, visibility, other kind of violence that are classified as gender violence and how other factors might influence, like age, studies level, work situation or prevention assigned budget in it.

**Keywords:** Gender violence, violence against women, lineal regression, discriminant analysis, cluster analysis, dendogram.

## 1. Introducción

La violencia de género es una lacra mundial, que ha empezado a visibilizarse hace relativamente poco tiempo. En nuestro país, se han empezado a registrar datos seriamente a partir de la Ley Integral sobre violencia de género de 2004. Aunque la creación del Instituto de la Mujer en 1983 ya había supuesto un gran impulso para la Igualdad entre hombres y mujeres, es en 2004 cuando se empieza a tratar la violencia de género como tal. El presupuesto destinado a su estudio y prevención desde entonces fue creciendo hasta 2009, año en que disminuyó drásticamente a consecuencia de la crisis económica y decisiones de tipo político. El principal objetivo de este trabajo es presentar un panorama actualizado sobre la violencia de género en

Europa y en particular en España, seleccionando algunas características que consideramos más relevantes y significativas en orden a un mayor conocimiento de la situación.

El tema es muy complejo y encontrar variables objetivas que midan este fenómeno es también muy difícil, ya desde 2006 se está intentando unificar desde varios organismos internacionales [1] con el objeto de hacer comparables los datos y poder evaluar convenientemente las distintas acciones que se van emprendiendo.

Las fuentes de datos objetivos son fundamentalmente tres: El observatorio de violencia de género, del Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad, que recoge el número de víctimas mortales (registradas como tales a partir de 2003) (1). El Consejo General del Poder Judicial aporta trimestralmente el número de denuncias, aunque solo disponemos de datos desde 2009 y el Instituto Nacional de Estadística elabora anualmente un registro de víctimas con medidas cautelares y órdenes de protección que elabora desde 2011 (2). Nos hemos centrado en estas tres variables, aunque en los últimos años los tres organismos han ampliado sus datos y están empezando a hacer un seguimiento en el tiempo de las circunstancias de las víctimas y su evolución. Recientemente el Ministerio del Interior ha implementado un sistema de seguimiento mensual de los casos de violencia de género (sistema VIOGEN).

Además de las víctimas registradas por alguno de los organismos anteriores y en la forma descrita, existe violencia tanto física, como sexual, como psicológica que no está registrada y en muchos casos no denunciada. Por ello se ha intentado obtener información a través de encuestas con preguntas como las siguientes ¿ha sufrido violencia física por parte de pareja y/o no pareja desde la edad de 15 años? Y se han realizado a nivel europeo (en 2012) por la “European Union Agency for fundamental Rights” sobre una muestra de más de 42.000 mujeres de los 28 países europeos (ref.3) y a nivel de España en 2014 por el Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad, sobre una muestra de más de 10.000 mujeres (4). El principal problema de los datos obtenidos con estas encuestas es el grado de concienciación de la persona encuestada para responder a preguntas de tipo tan íntimo y sensible y, aunque nos consta que el trabajo de campo se ha llevado a cabo por profesionales cualificados y formados específicamente para ello, es inevitable un sesgo relativo en las respuestas. La encuesta nacional habla de violencia “revelada” refiriéndose a este hecho. Aun así hay conclusiones muy valiosas a partir de ellas y que servirán para ir perfeccionando estudios posteriores.

Con los datos disponibles, analizaremos posibles relaciones con la edad de las víctimas, nivel de estudios, situación laboral etc. y a nivel europeo, compararemos en lo posible la situación de los distintos países, teniendo en cuenta variables como el “índice de igualdad”, el producto interior bruto por habitante (PIB), el nivel de educación en porcentaje sobre el PIB, nivel de desempleo y tamaño de cada país en número de habitantes.

## 2. Consideraciones técnicas

Definiremos en cada parte del trabajo la población objeto de estudio, aportando los niveles de significación de las distintas hipótesis, haciendo las correspondientes salvedades en los casos en los que el tamaño de la muestra no sea suficientemente grande y representativo.

Incluimos en este estudio algunas tablas de los datos utilizados, cuya inclusión consideramos interesante. Al final (en el apartado Tablas) aparecen los datos utilizados en los análisis de Conglomerados y Discriminante, procedentes de la encuesta europea 2012, junto con los correspondientes al índice de igualdad de los países europeos. Las tablas extraídas de la encuesta de España 2014 pueden consultarse en la publicación de referencia (4). Son básicamente porcentajes ya elaborados y los niveles de significación aparecen en las propias tablas.

En los apartados de número de denuncias y de víctimas con medidas cautelares y órdenes de protección, podría influir en el estudio el número de mujeres totales residentes en España durante esos años, pudiendo deberse a esta variable parte de las diferencias encontradas. Con los datos entre 2009 y 2015 (2), podemos afirmar que la variación es tan pequeña entre el máximo en el año 2012 y el mínimo en 2009 (apenas 360.000 mujeres entre 23,7 millones) que consideramos su influencia mínima y no procede su inclusión.

### 3. Resultados

Presentamos los resultados en dos bloques, el primero basado en los datos objetivos a los que nos hemos referido anteriormente, con las relaciones y variables que hemos considerado más interesantes de cara a explicar y conocer este fenómeno. Y un segundo bloque basado en los resultados de las encuestas. Estos últimos permitirán enfocar mejor posteriores estudios y obtener resultados y conclusiones imposibles de obtener de otra manera.

#### 3.1 Resultados bloque 1

##### 3.1.1. Número de víctimas mortales en España.

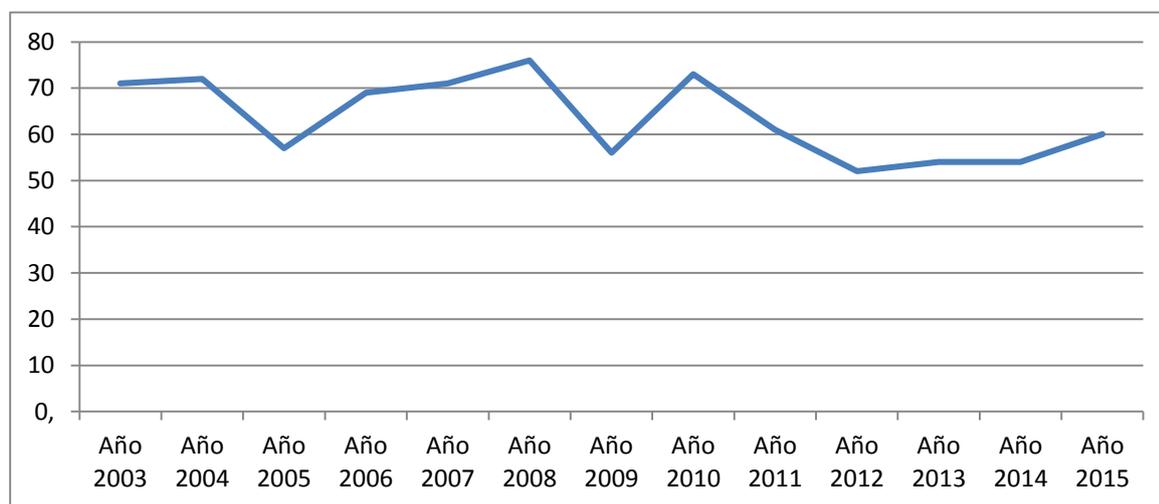


Figura 1. Número de víctimas mortales (Fuente: Observatorio de violencia de género - MSSSI)

Desde el año 2012 el número de víctimas permanece prácticamente constante (gráfico 1), con un repunte en 2015 (57) y nos tememos que seguirá aumentando en el año 2016, a juzgar por los datos del primer trimestre (9 en el año 2015 y 13 en el año 2016).

Tratamos de profundizar en los motivos que influyen en este “estancamiento” en el número de víctimas mortales y uno de ellos podría ser el descenso del presupuesto destinado a prevención integral contra la violencia de género por parte del estado (datos perfectamente desglosados por el Ministerio de Hacienda).

Disponemos también de datos de número de denuncias formuladas por las víctimas de violencia de género desde el año 2009. Se observa que en estos últimos cuatro años, del total de víctimas mortales (220), únicamente 51 (23,2%) de ellas había denunciado previamente.

### 3.1.2. Presupuesto y número de denuncias

Tabla 1. Presupuesto y número de denuncias.

Año	Presupuesto (millones €)	Número de denuncias
2009	40,80	135.539
2010	34,30	134.105
2011	32,40	134.002
2012	24,70	128.477
2013	22,50	124.893
2014	21,80	126.742
2015	23,70	129.193

Podemos representarlo gráficamente:

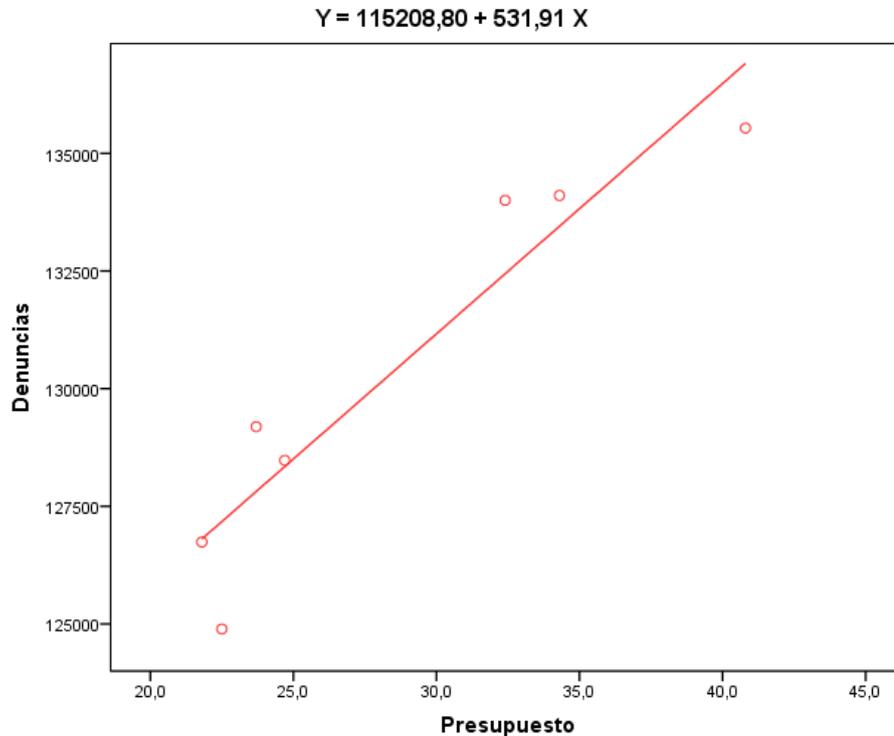


Figura 2. Regresión lineal: presupuesto (millones de euros) y número de denuncias

Tabla 2. Estadísticos descriptivos

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Presupuesto	7	21,8	40,8	28,60	7,29
Denuncias	7	124.893	135.539	130.421,57	4.122,50
N válido (por lista)	7				

El modelo de regresión lineal es significativo ( $p < 0,01$ )

Tabla 3. Coeficientes de regresión

	Beta	Estadístico t	Significación (p-valor)
constante	1125208,804	45,403	0,000
Presupuesto	531,915	6,140	0,002
R <sup>2</sup> = 0,884 (F=37,94; $p < 0,01$ )*			

Podemos afirmar que por cada millón menos de presupuesto, la estimación del número de denuncias también disminuye en 532. Esta información no es muy relevante, sobre todo teniendo en cuenta el número de datos disponibles. Sí lo es la relación existente entre las dos variables. ¿Significa eso que a mayor presupuesto mayor violencia? Evidentemente no, sino un mayor número de denuncias, que en un principio evitarían una mayor violencia final.

Hechos aparentemente contradictorios como éste, los iremos encontrando a lo largo de todo el estudio y darán lugar a una de las conclusiones más importantes del trabajo.

### 3.1.3 Serie de denuncias por trimestre

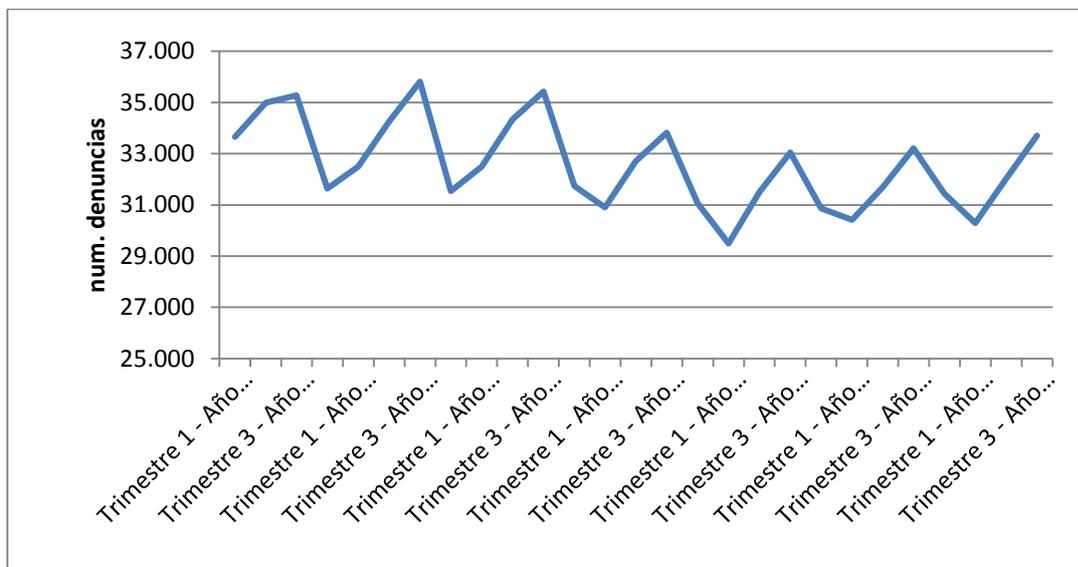


Figura 3. Número de denuncias por trimestre (Fuente: Consejo General del Poder Judicial)

Observamos un pico máximo todos los años en el tercer trimestre y un mínimo en el primero, mientras que si en google trends (por meses) hacemos una búsqueda por el término “violencia de género” en España, todos los años aparece un pico de búsqueda en el mes de Noviembre:

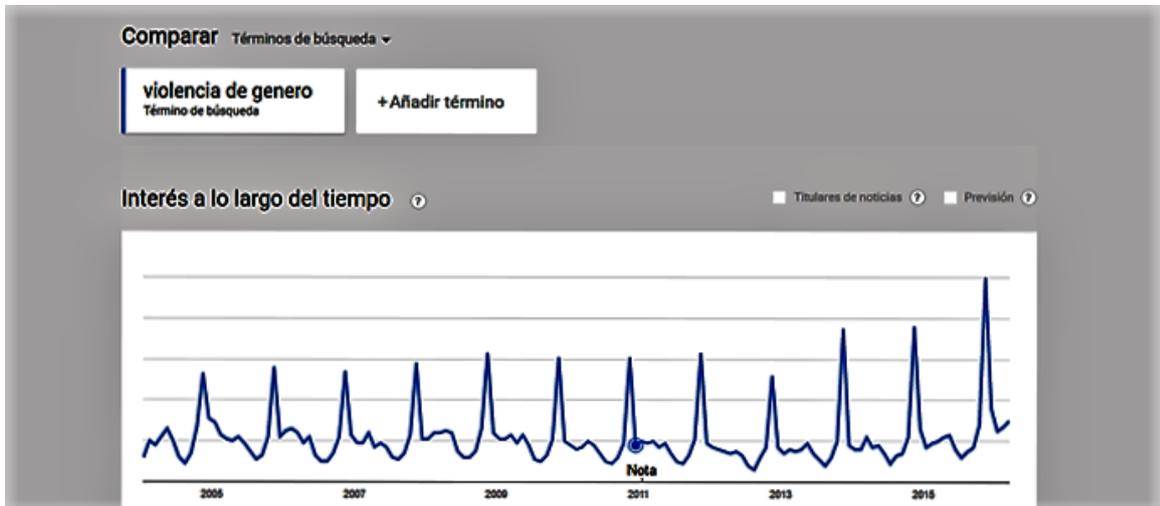


Figura 4. Búsquedas por el término “violencia de género” en España. Google trends

Una posible explicación del máximo de denuncias en el tercer trimestre podría ser el efecto “verano”, mientras que los máximos de búsquedas en Noviembre podrían constituir una serie retardada. Sería interesante analizar ambos hechos en un estudio posterior, que profundizara en sus causas, relaciones etc.

### 3.1.4. Víctimas con medidas cautelares y órdenes de protección por edad

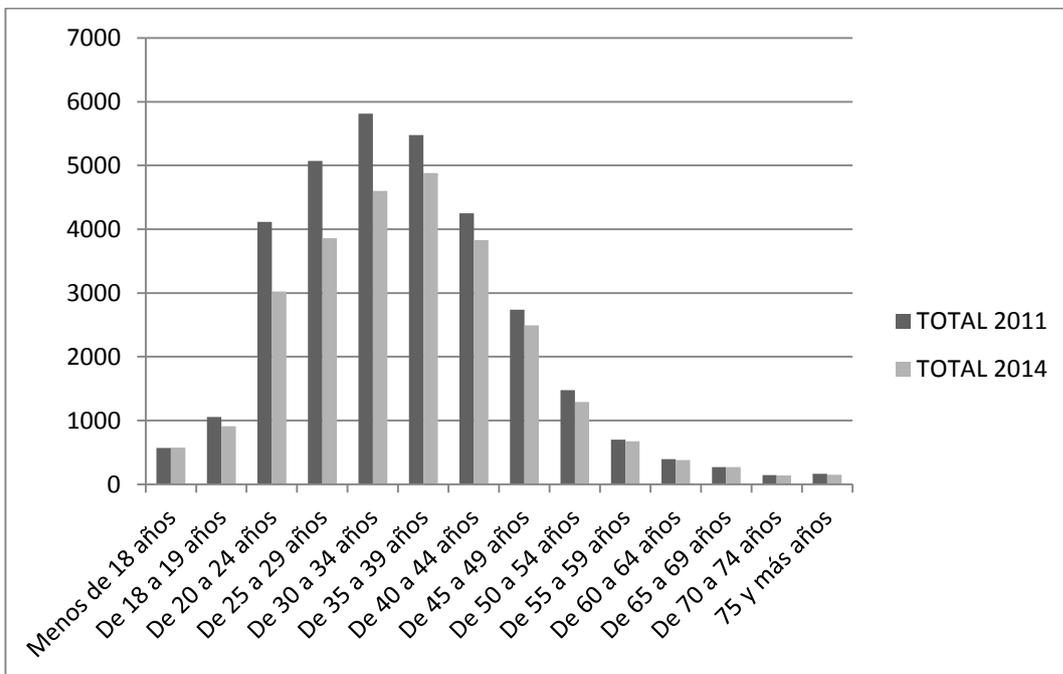


Figura 5. Número de víctimas con medidas cautelares y órdenes de protección por grupos de edad (Fuente: INE)

Tabla 4. Estadísticos de edad de las víctimas

Año	Media de edad	Desviación típica
2011	35,20	11,35
2014	35,90	11,12
Diferencia de medias:	0,70 (*)	

(\*) Diferencia de medias no significativa ( $p > 0,52$ ) (test de Student)

Concluimos que la edad de las víctimas con medidas cautelares y órdenes de protección se mantiene en 2011 y 2014 (gráfico 5 y tabla 4).

### 3.2. Resultados bloque 2. Encuesta España 2014

Los resultados de esta encuesta se encuentran recogidos en el documento de referencia 4.

#### 3.2.1. Denuncias de víctimas

Dado que de las víctimas mortales en los 4 últimos años, únicamente habían denunciado un 23,2% de ellas, la encuesta trata de profundizar en la proporción de denuncias en el colectivo general de víctimas, algunas de las características principales de dicho colectivo y los motivos para no denunciar en su caso.

Según la encuesta de 2014, el 26,8% de las mujeres que han sufrido violencia física y/o sexual y/o miedo, han acudido a la policía, más un 1,7% que fueron directamente al juzgado. Esto supone un total de 28,5%.

En todo lo que sigue relativo a esta encuesta, describiremos la población a la que se refieren los datos. Así en los dos apartados siguientes, la población estaría constituida por las mujeres que han sufrido violencia física y/o sexual y/o miedo desde los 15 años y han denunciado (en la policía o en el juzgado).

#### 3.2.2. Denuncias de víctimas por nivel de estudios

Es interesante observar la distribución por nivel de estudios de estas mujeres. Utilizamos datos ya elaborados (en porcentaje sobre el total de denuncias de cada grupo)

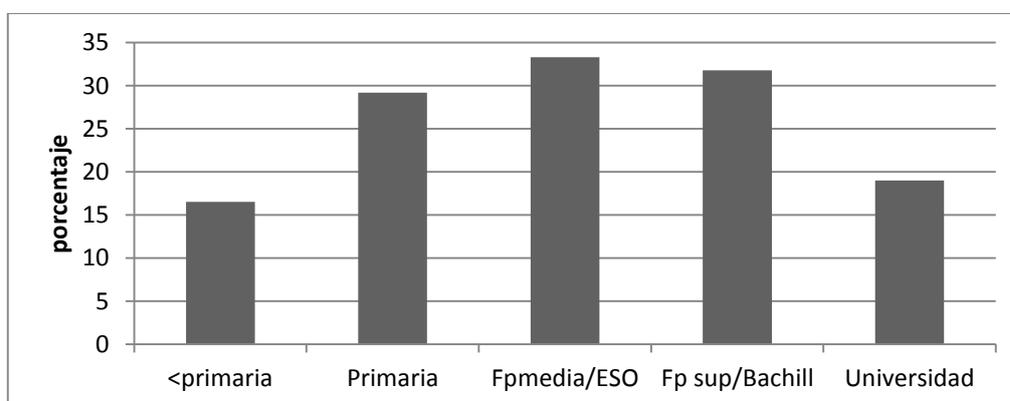


Figura 6. Porcentaje de denuncias de víctimas dentro de cada grupo de nivel de estudios

(Fpmedia se refiere a formación profesional media, ESO a educación secundaria obligatoria y Fp sup a formación profesional superior)

Las mujeres con estudios inferiores a primaria y las universitarias son las que menos denuncian. Las diferencias son significativas ( $p < 0,001$ )

### 3.2.3. Denuncias de víctimas por situación laboral

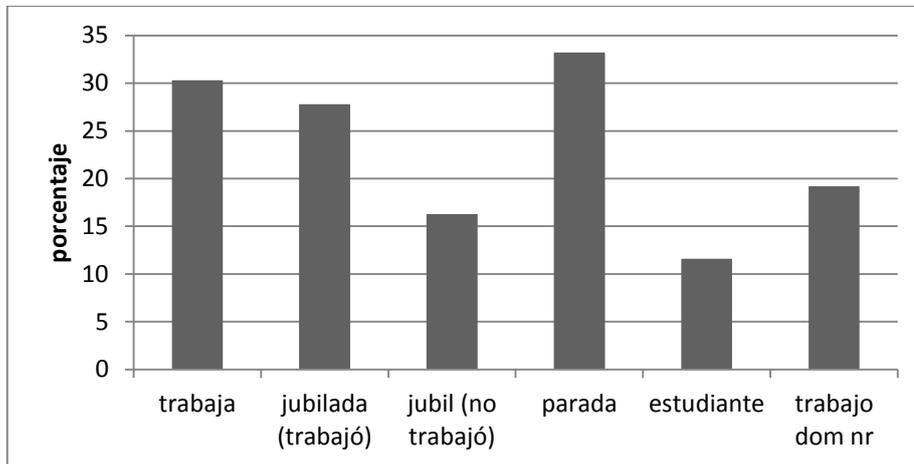


Figura 7. Porcentaje de denuncias de víctimas dentro de cada grupo de situación laboral.

*Trabaja se refiere a la población en activo, jubilada (trabajó) tuvo un trabajo y percibe una pensión, o bien jubilada pero sin haber trabajado. Trabajo dom.nr. se refiere a trabajo domiciliario no remunerado*

Las estudiantes, seguidas por jubiladas que nunca han trabajado, víctimas de violencia física, sexual o miedo, son las que menos denuncian. Las diferencias son significativas ( $p < 0,05$ ). La propia encuesta relaciona la situación laboral con la edad, debiéndose gran parte de las diferencias a esta última variable.

### 3.2.4. Motivos para no denunciar

Podríamos relacionar el hecho anterior con los motivos para no denunciar, que la encuesta propone como más habituales:

- Tuvo poca importancia/no era lo suficientemente grave/no se le ocurrió/pensó que podría resolverlo sola

- Miedo/ temor a más violencia contra sí misma o familiares cercanos

- Vergüenza o apuro/no quería que nadie lo supiera

En este caso, la población estaría constituida por las mujeres que han sufrido violencia física y/o sexual y/o miedo y que no han denunciado (ni en la policía ni en el juzgado). Los datos son los porcentajes del motivo correspondiente sobre el total de víctimas que no han denunciado en cada grupo.

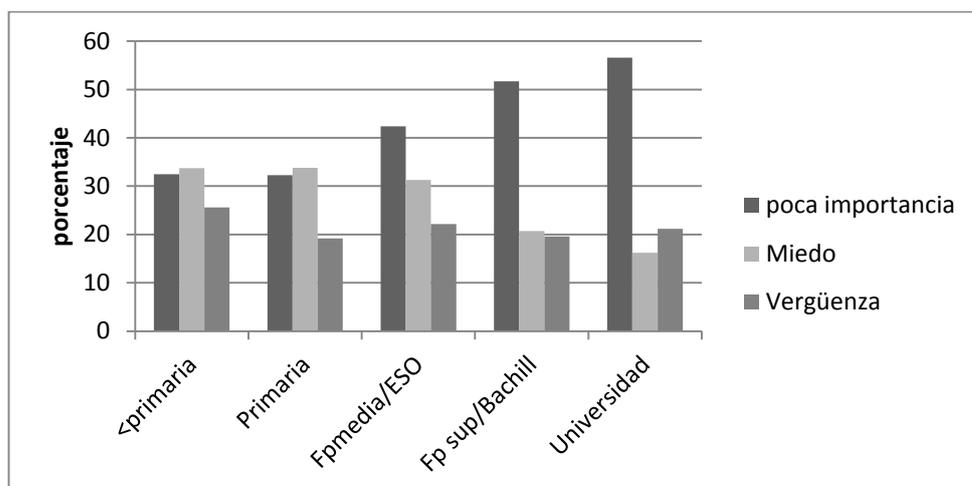


Figura 8. Porcentaje de motivos para no denunciar dentro de cada grupo de nivel de estudios.

Darle poca importancia en el caso de las mujeres universitarias puede ser una explicación al hecho de una menor denuncia, así como una combinación de todos los motivos en el caso de estudios inferiores a primaria. Las diferencias entre los distintos niveles de estudio son significativas para los motivos “poca importancia” y “miedo” ( $p < 0,001$ ). No lo son para el motivo “vergüenza”

### 3.2.5. Tipos de violencia

Otra parte importante del estudio se centra en el tipo de violencia y distingue:

- violencia física, tanto severa como moderada
- violencia sexual, entendida como la obligación de mantener relaciones sexuales contra su voluntad.
- violencia económica, a través del control relacionado con la economía doméstica, o de la merma de la propia independencia económica.
- violencia psicológica emocional, de insultos, menosprecio, intimidación o amenazas verbales.
- violencia psicológica de control, incluyendo actitudes relacionadas con los celos, vigilancia sobre horarios y actividades, o imposición de obstáculos para que pueda ver libremente a sus amistades o familiares.
- miedo

Nos centramos en la violencia física y/o sexual, violencia psicológica emocional y violencia psicológica de control. Es muy interesante observar cómo afectan los distintos tipos de violencia a los diferentes grupos de edad y de situación laboral.

La población en ambos casos es: mujeres que han sufrido algún tipo de violencia y los datos son los porcentajes ya elaborados del tipo de violencia sufrida sobre el total de víctimas de cada grupo.

Como se ve en el siguiente gráfico, la violencia de control afecta sobre todo a las mujeres más jóvenes, pudiendo ser una explicación un mayor uso de redes sociales e internet, mientras que la violencia emocional se mantiene prácticamente constante hasta los 54 años, descendiendo después. La violencia física o sexual sigue una distribución similar a la que ya habíamos visto en

víctimas con medidas cautelares y órdenes de protección, aunque con un notable incremento en los extremos (mujeres más jóvenes y más mayores).

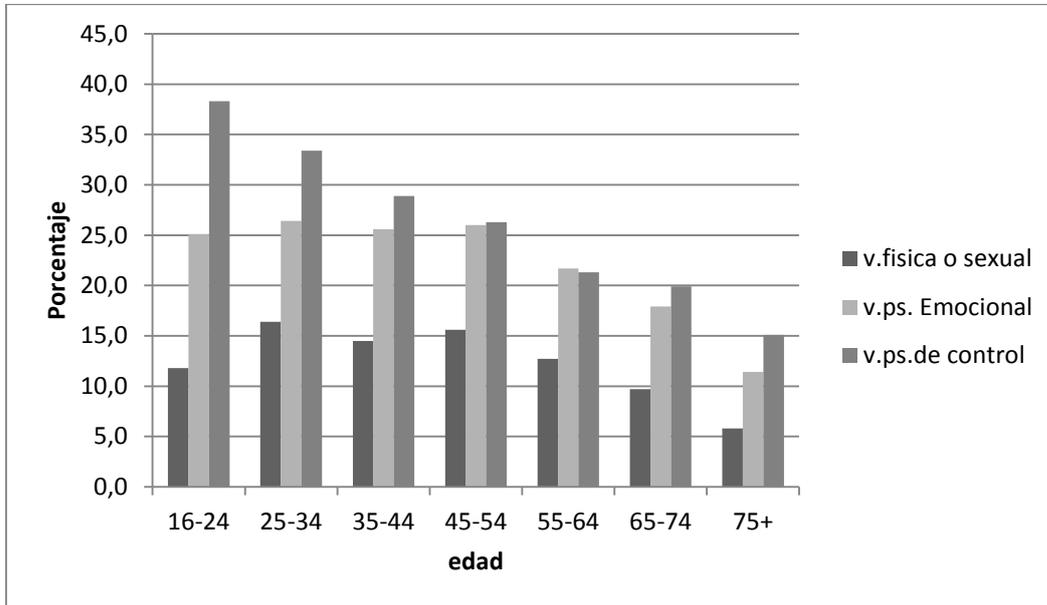


Figura 9. Porcentaje de tipo de violencia dentro del total de víctimas de cada grupo de edad.

Las diferencias entre grupos para todos los tipos de violencia, son significativas ( $p < 0,001$ ).

Considerando la situación laboral de las mujeres y suponemos que también por un motivo de edad, la violencia de control afecta más a estudiantes, mientras que los otros dos tipos de violencia (física o sexual y psicológica) y un alto porcentaje también de control, afecta más a las mujeres en situación de paro.

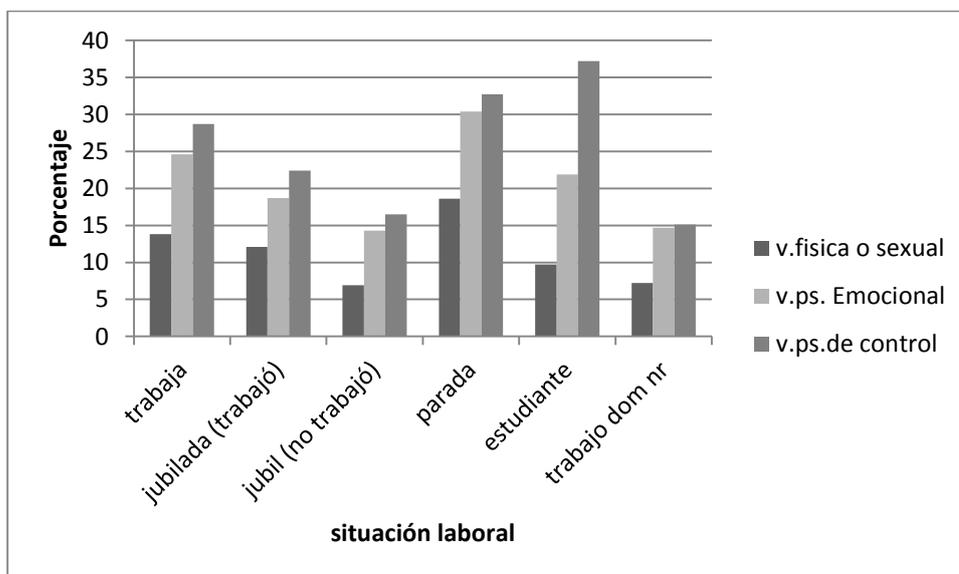


Figura 10. Porcentaje de tipo de violencia dentro del total de víctimas de cada grupo de situación laboral.

Trabaja se refiere a la población en activo, jubilada (trabajó) tuvo un trabajo y percibe una pensión, o bien jubilada pero sin haber trabajado. Trabajo dom.nr. se refiere a trabajo domiciliario no remunerado

Para todos los tipos de violencia, las diferencias son significativas ( $p < 0,001$ )

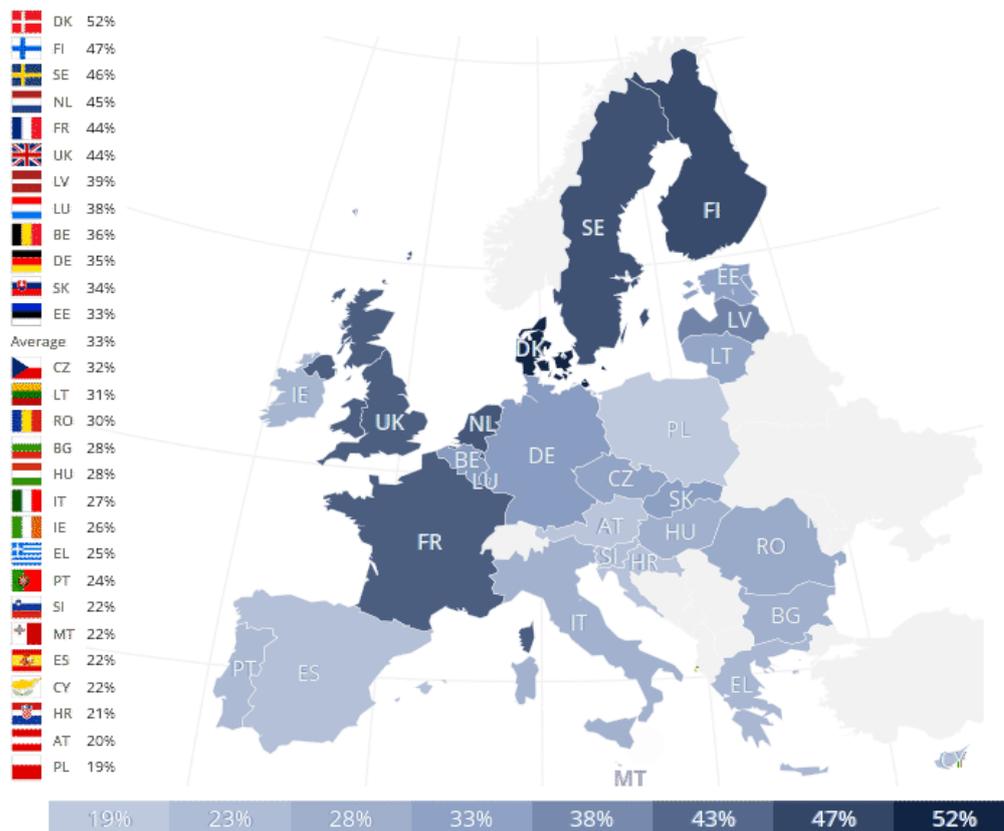
### 3.3. Resultados bloque 2. Encuesta Europa 2012

Un dato resumen de esta encuesta es el **33%** de mujeres europeas que ha experimentado violencia física y/o sexual desde los 15 años.

Con los datos ya elaborados de dicha encuesta tratamos de comparar los 28 países de la Unión Europea.

En un primer momento y considerando la variable “porcentaje de mujeres víctimas de violencia de género física y/o sexual por parte de pareja o no pareja desde los 15 años” vemos que gráficamente podemos observar tres niveles bastante definidos:

#### 1. Physical, sexual and psychological violence / Physical and/or sexual violence by a partner or a non-partner since the age of 15



© FRA - All rights reserved - FRA gender-based violence against women survey dataset, 2012 | Yes | All : All

Figura 11. Violencia psicológica, física y/o sexual por parte de pareja y/o no pareja desde los 15 años.

Con el fin de delimitar mejor dichos grupos, realizamos un Análisis de Conglomerados con los porcentajes de mujeres afectadas en cada país, considerando las siguientes variables:

- 1.- Violencia física y/o sexual por parte de pareja y/o no pareja desde los 15 años.

- 2.- Violencia psicológica por parte de pareja desde los 15 años.
- 3.- Cualquier forma de acoso sexual desde los 15 años (basado en 11 respuestas).

Los resultados del análisis por el método de k-medias, proporcionan tres grupos claramente diferenciados: Nivel alto de violencia (en adelante grupo 1), nivel medio (grupo 3) y nivel bajo (grupo 2). Debe señalarse que España se encuentra en este nivel.

Tabla 5. Cluster de pertenencia de cada uno de los países europeos

Cluster	Países
Gruo 1: Alto	Dinamarca, Francia, Luxemburgo, Países Bajos, Finlandia, Suecia, Gran Bretaña
Grupo 3: Medio	Bélgica, República Checa, Alemania, Estonia, Letonia, Lituania, Hungría, Eslovaquia
Grupo 2: Bajo	Bulgaria, Irlanda, Grecia, España, Croacia, Italia, Chipre, Malta, Austria, Polonia, Portugal, Rumanía, Eslovenia

Tabla 6. Centros de clústeres finales

	Clúster		
	1	2	3
Violencia física y/o sexual > 15 años (%)	45	24	34
Violencia psicológica > 15 años (%)	51	37	50
Acoso > 15 años (%)	74	40	50

Tabla 7. Distancias entre centros de clústeres finales

Clúster	1	2	3
1		42,431	26,650
2	42,431		19,088
3	26,650	19,088	

Utilizando un método jerárquico de agrupación en cluster centroide y distancia euclídea al cuadrado, obtenemos el siguiente dendograma:

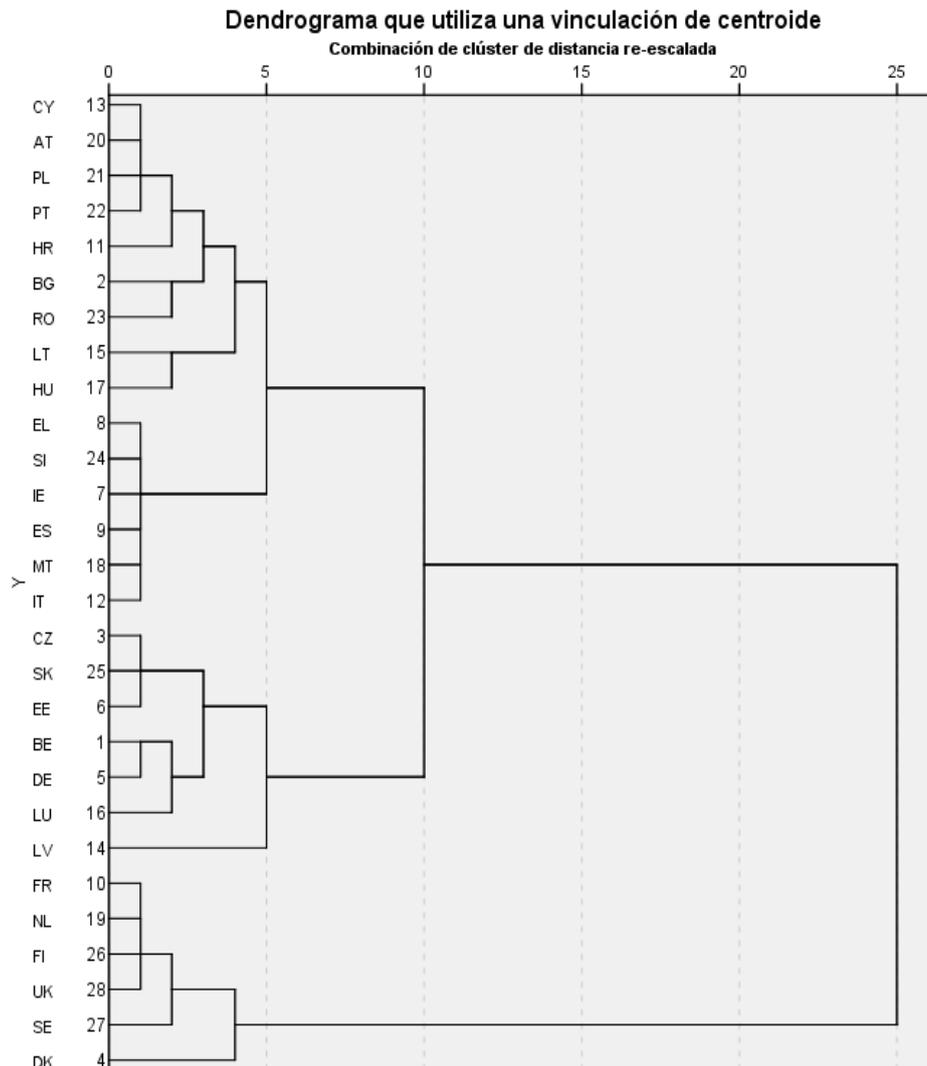


Figura 12: Dendrograma de clasificación

La clasificación de los países en los 3 cluster es la misma con los dos métodos (jerárquico y de k-medias) excepto en el caso de tres países: Lituania (LT), Luxemburgo (LU) y Croacia (HU).

El siguiente paso, una vez clasificados en los 3 niveles descritos los países europeos y eliminados aquellos países en los que no está clara su clasificación, consiste en hacer un Análisis Discriminante Descriptivo con otras variables, tratando de analizar si existen diferencias entre los grupos en cuanto a su comportamiento con respecto de ellas (hipótesis nula: no existen diferencias entre los grupos)

1.- Índice de igualdad de cada país en 2012. Elaborado por el EIGE (European Institute for Gender Equality) (5) sobre datos de igualdad entre hombres y mujeres en las siguientes áreas: trabajo, dinero, conocimiento, tiempo, poder y salud. Es un índice complejo, basado en porcentajes (hombres-mujeres) de mujeres empleadas, nivel de empleo, salario, nivel de estudios,

nivel de participación política, participación en las tareas del hogar, etc. y se elabora cada dos años.

2.- Porcentaje de mujeres que han visto u oído campañas contra la violencia de género recientemente. Los datos se han obtenido de la misma encuesta FRA 2012 (3)

3.- PIB por habitante

4.- Tasa de desempleo

5.- Gasto en educación (% sobre el PIB)

6.- Número de habitantes.

Los datos de las cuatro últimas variables se han obtenido del mismo informe del EIGE para 2012 (5): “Key contextual information”. Todos ellos están incluidos en la tabla 16 del apartado 8.

Obtenemos primero una matriz de dispersión gráfica, que relaciona todas las variables de estudio:

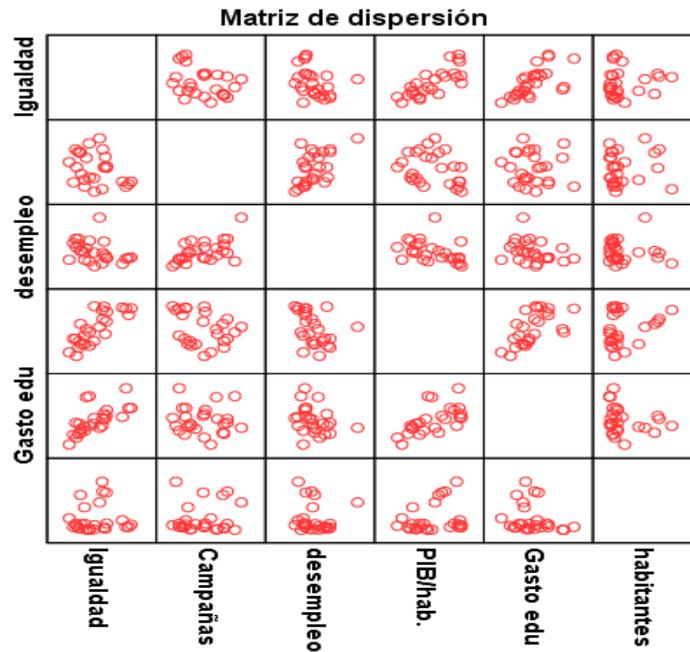


Figura 13. Matriz de dispersión de las variables para el análisis discriminante (igualdad, campañas, desempleo, PIB/habitante, Gasto en educación, habitantes)

Los principales estadísticos de cada variable y cada grupo, su matriz de correlaciones y un primer análisis de la diferencia de medias de grupo para una de ellas, son los siguientes:

Tabla 8. Estadísticas de grupo

Nivel	Media	Desviación estándar	N		
			No ponderados	Ponderados	
1 Alto	Igualdad	66,67	7,87	6	6
	Campañas	39,50	16,78	6	6
	Desempleo	7,70	1,44	6	6
	PIB/habitante	30083	2556,10	6	6
	Gasto en educación	6,67	1,14	6	6
	Número de habitantes	27,66	28,75	6	6
2 Bajo	Igualdad	45,33	7,69	12	12
	Campañas	57,58	17,78	12	12
	Tasa de desempleo	11,88	5,49	12	12
	PIB/habitante	21725	6758,58	12	12
	Gasto en educación	5,33	1,51	12	12
	Número de habitantes	16,94	20,10	12	12
3 Medio	Igualdad	48,42	7,88	6	6
	Campañas	33,83	9,62	6	6
	Tasa de desempleo	9,83	3,92	6	6
	PIB/habitante	22833	6561,61	6	6
	Gasto en educación	5,07	0,85	6	6
	Número de habitantes	18,70	31,20	6	6
Total	Igualdad	51,44	11,73	24	24
	Campañas	47,13	18,73	24	24
	Tasa de desempleo	10,33	4,62	24	24
	PIB/habitante	24091	6732,52	24	24
	Gasto en educación	5,60	1,39	24	24
	Número de habitantes	20,06	24,60	24	24

Tabla 9. Prueba de igualdad de medias de grupos

	Lambda de Wilks	Estadístico F	Grados de libertad df1	Grados de libertad df2	Significación p-valor
Igualdad	0,402	15,640	2	21	0,000
Campañas	0,663	5,344	2	21	0,013
desempleo	0,853	1,804	2	21	0,189
PIB/hab.	0,720	4,087	2	21	0,032
Gasto edu	0,789	2,804	2	21	0,083
habitantes	0,966	0,371	2	21	0,695

Con este primer análisis observamos que las variables igualdad, campañas y PIB/habitante no son iguales para todos los grupos (Lambda de Wilks,  $p < 0,05$ ).

Tabla 10. Matriz de correlaciones dentro de grupos combinados

	Igualdad	Campañas	desempleo	PIB/hab.	Gasto edu	habitantes
Igualdad	1,000	-0,192	-0,076	0,689	0,556	-0,181
Campañas	-0,192	1,000	0,481	-0,206	0,005	0,225
Tasa de desempleo	-0,076	0,481	1,000	-0,222	-0,188	0,041
PIB/Habitante	0,689	-0,206	-0,222	1,000	0,491	0,147
Gasto en educación	0,556	0,005	-0,188	0,491	1,000	-0,373
Número de habitantes	-0,181	0,225	0,041	0,147	-0,373	1,000

Realizamos entonces un análisis discriminante por pasos, en el que son seleccionadas únicamente las variables igualdad y campañas, obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 11. Variables entradas/eliminadas<sup>a,b,c,d</sup>

Escalón	Especificado	Lambda de Wilks							
		Estadístico	df1	df2	df3	F exacta			
						Estadístico	df1	df2	Sig.
1	Igualdad	,402	1	2	21,000	15,640	2	21,000	,000
2	Campañas	,290	2	2	21,000	8,566	4	40,000	,000

En cada paso, se entra la variable que minimiza la lambda de Wilks global.

- a. El número máximo de pasos es 12.
- b. La F mínima parcial para entrar es 3.84.
- c. La F máxima parcial para eliminar es 2.71.
- d. El nivel F, la tolerancia o VIN no suficiente para un cálculo adicional.

El programa extrae, utilizando como criterio de entrada de las variables la lambda de Wilks, un total de dos funciones distintas. Ambas funciones explicarían un 100% de la variabilidad presente en los datos.

Tabla 12. Autovalores

Función	Autovalor	% de varianza	% acumulado	Correlación canónica
1	1,520 <sup>a</sup>	80,5	80,5	0,777
2	0,368 <sup>a</sup>	19,5	100,0	0,518

Tabla 13. Coeficientes de función discriminante canónicas estandarizadas

	Función	
	1	2
Igualdad	0,954	0,357
Campañas	-0,167	1,005

Tabla 14. Matriz de estructuras

	Función	
	1	2
Igualdad	0,986	0,164
PIB/habitante	0,692	0,038
Gasto en educación	0,530	0,204
Número de habitantes	-0,210	0,162
Campañas	-0,350	0,937
Tasa de desempleo	-0,153	0,457

Aunque el análisis solo selecciona las variables igualdad y campañas, según la matriz de estructuras, la primera función discriminante está muy correlacionada con igualdad (0,986) y en un grado menor con PIB y gasto en educación y la segunda función con campañas fundamentalmente (0,937).

Los resultados de clasificación con estas dos funciones discriminantes proporcionan un 84% de casos clasificados correctamente, que pueden ser representados gráficamente:

Tabla 15. Resultados de clasificación<sup>a</sup>

			Pertenencia a grupos pronosticada			Total
			1	2	3	
Original	Recuento	1	5	1	0	6
		2	0	11	2	13
		3	0	1	5	6
	%	1	83,3	16,7	0,0	100,0
		2	0,0	84,6	15,4	100,0
		3	0,0	16,7	83,3	100,0

a. 84,0% de casos agrupados originales clasificados correctamente.

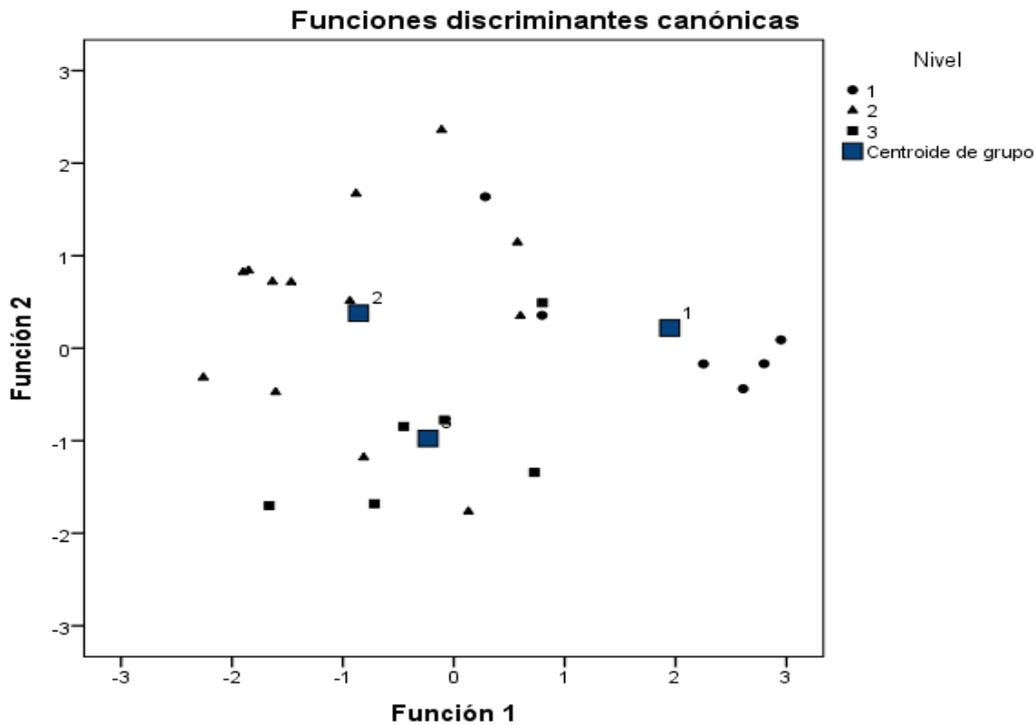


Figura 14: Funciones discriminantes canónicas.

Se aprecia por tanto la importancia de la igualdad (función discriminante 1) y de las campañas de prevención (función discriminante 2) en los niveles de violencia género. Curiosamente los grupos con mayor nivel de igualdad tienen también un mayor nivel de violencia, aunque entendemos que este hecho se debe fundamentalmente a una distinta percepción de lo que es violencia de género, tanto física como psicológica, así como de acoso, visibilizándose de una forma mucho más clara cuando hay un mayor nivel de igualdad. Sería muy interesante en posteriores estudios profundizar en este hecho y en las posibles influencias de otros factores. De hecho, ya se apunta la influencia de una mayor tasa de alcoholismo en los países nórdicos, así como la reacción violenta por parte de algunos hombres a la ocupación de espacios por parte de la mujer.

Las otras variables correlacionadas con la primera función discriminante, entendemos que ya están recogidas en el índice de igualdad, influyendo sobre todo en él, más que en la violencia propiamente dicha.

En el caso de las campañas de prevención y segunda función discriminante, los grupos 3 (medio) y 2 (bajo) están claramente separados, pudiendo afirmar que en un primer nivel de concienciación, las campañas pueden ser muy eficaces e imprescindibles. Podemos unir este hecho al mayor nivel de denuncias que se produce en España cuando se aumenta el presupuesto destinado a prevención.

#### 4. Conclusiones

1. La violencia de género afecta en mayor o menor medida a todas las edades, niveles de estudio, origen o situación laboral de las mujeres de todo el mundo. Según la

encuesta europea 2012, 1 de cada 3 mujeres europeas ha experimentado violencia física y/o sexual alguna vez en su vida.

2. El nivel de denuncia de las mujeres víctimas de violencia de género es muy bajo: 23,2% en el caso de víctimas mortales y un 28,5% de las víctimas “reveladas” según la encuesta de 2014 en España.
3. Es fundamental el presupuesto destinado a prevención integral de la violencia de género. Las campañas son imprescindibles para luchar contra ella.
4. Hay una gran falta de visibilidad del problema de violencia de género. Es revelador el resultado de la encuesta europea 2012 en cuanto a la relación entre niveles de igualdad y violencia revelada por la encuesta.
5. La prevalencia de la violencia psicológica, emocional y de control, afecta en una mayor medida a mujeres jóvenes. Sería interesante estudiar su tratamiento legal y la relación con los demás tipos de violencia.
6. A la luz de los resultados, sería imprescindible profundizar con otros estudios que deberían estar enfocados a tres aspectos fundamentales: avanzar en una definición de situaciones de violencia de género que pueda ser más comparable estadísticamente hablando, definición de los perfiles de los agresores (en este trabajo solo hemos considerado víctimas, pero entendemos que es tan importante o más, hacerlo con los agresores) y profundizar en el tema de las denuncias.

## 5. Webgrafía

- [1] Informes Anuales del Observatorio Estatal de Violencia sobre la Mujer (Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad): <https://goo.gl/uRWhfQ>
- [2] Estadística de violencia doméstica y violencia de género (INE): <https://goo.gl/kIDH40>
- [3] Estadística sobre violencia contra mujeres (European Union Agency for Fundamental Rights): <http://fra.europa.eu/en/vaw-survey-results>
- [4] Macroencuesta de Violencia contra la Mujer 2015 (Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad): <https://goo.gl/ylqhU3>
- [5] Estadísticas sobre el género (European Institute for Gender Equality): <https://goo.gl/11LVZr>

## 6. Programas estadísticos utilizados

- SPSS (Análisis descriptivo, Regresión lineal, Gráficos, Análisis discriminante, Análisis de conglomerados)
- Epidat 3.1 (Tablas de asociación)

- Excel (Análisis Descriptivo, Gráficos)

## 7. Tablas

Tabla 16. Coeficiente de igualdad, porcentaje de mujeres sobre el total de mujeres de cada país, que han experimentado violencia física y/o sexual, violencia psicológica, acoso desde la edad de 15 años, porcentaje de mujeres que han visto u oído recientemente campañas contra la violencia de género, tasa de desempleo, PIB por habitante, gasto en educación en porcentaje sobre el PIB y número de habitantes en millones. Año 2012 . (Fuentes: European Union Agency for Fundamental Rights, European Institute for Gender Equality)

País	Igualdad	Viol. >15	Viol.. psic>15	Acoso >15	Campañas	Tasa de desempleo	PIB/hab.	Gasto en educación	Habitantes (millones)
BE	58,2	36	44	60	50	7,6	30700	6,6	11,09
BG	38,5	28	39	24	49	12,3	12100	3,8	7,33
CZ	43,8	32	47	51	26	7,0	20700	4,5	10,51
DK	70,9	52	60	80	26	7,5	32100	8,8	5,58
DE	55,3	35	50	60	23	5,4	31500	5,0	81,84
EE	49,8	33	50	53	36	10,0	18300	5,2	1,33
IE	56,5	26	31	48	49	14,7	32900	6,2	4,58
EL	38,3	25	33	43	70	24,5	19500		11,12
ES	53,6	22	33	50	83	24,8	24400	4,8	46,82
FR	55,7	44	47	75	70	9,8	27700	5,7	65,29
HR	39,8	21	42	41	67	15,8	15600	4,2	4,28
IT	41,1	27	38	51	66	10,7	25600	4,3	59,39
CY	44,9	22	39	36	60	11,9	23400	7,9	0,86
LV	46,9	39	60	47	37	15,0	16400	5,0	2,04
LT	40,2	31	51	35	67	13,4	18300	5,2	3,00
LU	55,2	38	49	67	57	5,1	67100		0,52
HU	41,6	28	49	42	41	10,9	17000	4,7	9,93
MT	46,8	22	37	50	77	6,3	22100	8,0	0,42
NL	68,5	45	50	73	32	5,3	32500	5,9	16,73
AT	50,2	20	38	35	20	4,3	33100	5,8	8,41
PL	43,7	19	37	32	34	10,1	17100	4,9	38,54
PT	37,9	24	36	32	70	15,8	19400	5,3	10,54
RO	33,7	30	39	32	55	7,0	13600	3,1	20,10
SI	57,3	22	34	44	61	8,9	21400	5,7	2,06
SK	36,5	34	47	49	31	14,0	19400	4,1	5,40
FI	72,7	47	53	71	29	7,7	29400	6,8	5,40
SE	74,2	46	51	81	32	8,0	32200	6,8	9,48
UK	58,0	44	46	68	48	7,9	26600	6,0	63,50
EU-28	52,9	33	43	55	50	10,5	25500	5,3	18,07

NA: Datos no disponibles

## Referencias

- [1] FERRER PÉREZ, Victoria; BOSCH FIOL, Esperanza y RIERA MADURELL, Teresa. *Las dificultades en la cuantificación de la violencia contra las mujeres en la pareja: análisis psicosocial*, Psychosocial Intervention, Vol. 15 num. 2, 2006.
- [2] FUENTE FERNÁNDEZ, Santiago. *Análisis Discriminante*. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Autónoma de Madrid, 2011.
- [3] FUENTE FERNÁNDEZ, Santiago. *Análisis Conglomerados*. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Autónoma de Madrid, 2011.
- [4] MIGUEL LUKEN, Verónica. *Macroencuesta de violencia contra la mujer 2015*. Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad. Publicaciones. Colección Documentos núm. 22, 2015.

### Sobre las autoras:

*Nombre:* Concepción López Baissón  
*Correo electrónico:* clbaisson@gmail.com  
*Institución:* Profesional Freelance.

*Nombre:* Lucía Inglada-Pérez  
*Correo electrónico:* lucia.inglada@gmail.com  
*Institución:* Centro Nacional de Investigaciones Oncológicas, España.



# Historias de Matemáticas

## Precisión en las Reglas de Cálculo

### Precision on Slide Rules

Jorge Luis Victoria

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 129–148, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Oct'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

#### Resumen

Las reglas de cálculo logarítmicas han sido durante años el instrumento de cálculo preferido por ingenieros y técnicos, usándose ampliamente hasta el advenimiento de las calculadoras científicas portátiles. Hoy día las reglas de cálculo ya en desuso, están despertando un renovado interés entre grupos de educadores que redescubren sus muchos valores pedagógicos para la enseñanza de las matemáticas. A su vez, las reglas de cálculo son un perfecto ejemplo de matemáticas aplicadas, y el uso de las mismas en la enseñanza puede ser llevado todavía un paso más allá complementándolo con estudios sobre el instrumento en sí mismo. Uno de los términos universalmente asociados a las Reglas de Cálculo es el de “Precisión”, sin embargo generalmente fue usado de manera vaga y meramente intuitiva, por lo cual merece un estudio más detallado.

El presente artículo expone una breve reseña de los distintos aspectos que participan del concepto de precisión de una Regla de Cálculo. Se enfoca principalmente en analizar las particularidades del error de cálculo con escalas y su propagación, dada la especial naturaleza de la Regla de Cálculo y de su operación. Posteriormente propone una metodología general para evaluar y comparar desde lo teórico el desempeño de distintas escalas utilizadas en las Reglas de Cálculo, así como evaluar métodos diferentes de realizar el mismo cálculo. Finalmente el artículo presenta ciertas conclusiones generales a tener en cuenta al diseñar o utilizar Reglas de Cálculo.

**Palabras Clave:** Regla de Cálculo, Instrumento de Cálculo, Escala Logarítmica, Cálculo Analógico, Precisión.

#### Abstract

Logarithmic slide rules have been for years the calculation instrument preferred by engineers and technicians and widely used until the appearance of the pocket scientific calculators. Nowadays the no longer used slide rules, are arousing a renewed interest among groups of educators who are rediscovering its many pedagogical values for mathematics teaching. In turn, the slide rules are a perfect example of applied mathematics, and their use in education can still be taken a step further complementing it with studies about the instrument itself. One of the words universally associated with them

is "Precision", however it was generally used in a vague and intuitive form, so it deserves more detailed study.

The present article depicts a brief overview on the different aspects that participate of the concept of precision in a slide rule. It focuses on studying the particularities about error in calculations with scales and its propagation, given the special nature of the slide rule and its operation. Later, proposes a general methodology to evaluate and compare from a theoretical point of view, the performance of the different scales used in slide rules, and to evaluate alternative methods for the same computation. Finally this article presents some general conclusions to take into account when designing or using slide rules.

**Keywords:** Slide Rule, Calculating Instrument, Logarithmic Scales, Analogic Calculation, Precision.

## 1. Introducción

La regla de cálculo (RC) de manera genérica, nos permite realizar variadas operaciones matemáticas a través seleccionar un valor numérico en alguna de sus escalas desplazando la reglilla o el cursor, operar con otros valores seleccionados de igual manera en la misma u otra escala, repetir el proceso según necesidad, y finalmente leer el resultado del cálculo, también en la misma u otra escala.

La incertidumbre en las mediciones con instrumentos, es un tema ampliamente estudiado a través de los años. También son de dominio público las leyes que describen la propagación de errores de datos a través de fórmulas matemáticas y su impacto en el resultado final. Sin embargo no parece estar suficientemente documentado lo que sucede en el caso de las RC.

La particularidad de las RC estriba en que éstas combinan un funcionamiento como instrumento imperfecto de medición, con su capacidad de realizar cálculos y la correspondiente propagación de la incertidumbre a través de los mismos.

Exploraremos brevemente el concepto de precisión en las reglas de cálculo a través de varios ejemplos, poniendo el foco en la búsqueda de formas prácticas de evaluar las RC, sus escalas, sus métodos de cálculo, y de demostrar o rebatir muchos supuestos populares.

## 2. Precisión de una Regla de Cálculo

Por motivos históricos en el uso del vocablo y la particular naturaleza de la Regla de Cálculo (RC), en este texto utilizaremos simplemente la acepción amplia y coloquial del término "precisión", como la posibilidad de obtener resultados precisos y exactos en los cálculos con este instrumento.

A continuación veremos los grandes factores que afectan la precisión final en un cálculo realizado con RC:

### 2.1 Precisión Constructiva

El primer elemento a tener en cuenta es la precisión constructiva de la regla. Sólo lo introduciremos brevemente señalando sus elementos principales:

- Construcción sólida y estable

- Bajo y uniforme rozamiento para una colocación precisa de los valores.
- Estabilidad del cursor, y deslizamiento suave.
- Perfecta alineación entre las escalas de las diferentes partes del cuerpo de la regla, la reglilla, y en el frente y reverso de las mismas.
- Perfecta verticalidad del trazo del cursor y sincronización entre caras.
- Exactitud de las escalas.
- Legibilidad de las escalas y facilidad de interpolación visual.

## 2.2 Precisión Operativa

Supongamos que hablamos de una regla ideal con una perfecta calidad constructiva. Luego la precisión en un cálculo vendrá dada por varios factores operativos principales:

- La habilidad manual y visual del operador para colocar y leer valores en la regla.
- La capacidad del operador para interpolar correctamente valores no marcados directamente en las escalas.
- El rango de los valores y resultados: Al involucrar el cálculo escalas no lineales, la precisión lograda no es la misma para todos los valores.
- La acumulación de los errores en el encadenamiento de cálculos:

Para cada uno de estos factores, constructivos y operativos, los fabricantes han tratado de producir RC que faciliten su reducción. El principal elemento no mecánico de diseño de una RC son sus escalas, por lo tanto estudiaremos la forma teórica en que las escalas afectan o limitan la precisión alcanzada en los cálculos.

## 3. La incertidumbre en las Reglas de Cálculo

Como ya dijimos, la RC requiere un enfoque un poco particular al considerar la incertidumbre en sus resultados. No es exactamente la incertidumbre de lectura de un instrumento de medición. Tampoco es un mero análisis de propagación de incertidumbre de datos a través de una expresión matemática. La Regla de cálculo de alguna forma hace ambas cosas, mide y calcula simultáneamente, entonces veremos cómo analizar su incertidumbre operativa.

### 3.1 Hipótesis y convenciones

- Dada la alta calidad de las buenas reglas, consideraremos despreciables los errores de la regla en sí, y analizaremos solo los errores de operación.
- El error de interpolación lineal sobre escalas no lineales resulta insignificante para las escalas usadas en reglas normales.
- El uso de un índice de escala o de la línea de cursor (puntos exactos), conlleva un error despreciable en relación al error de ajustar valores intermedios cualesquiera en las escalas.

- Llamaremos *estimación* a todas las operaciones sobre una escala que introduzcan incertidumbre, a saber:
  - Ajustar el cursor a un valor en una escala.
  - Ajustar un valor en una escala móvil sobre la línea del cursor.
  - Ajustar un índice de escala sobre un valor de otra escala.
  - Leer en una escala un valor apuntado por el cursor o por un índice.
- El número de estimaciones es muy importante y usualmente lo llamamos  $n$ .
- Llamamos  $X_E$  a los valores  $X$  representados en una escala  $E$ .
- Llamamos  $p$  a la posición geométrica sobre la regla de un determinado valor de una escala (usualmente distancia al índice 1 de la escala C/D).
- Llamamos  $L$  a la longitud total de la escala.



Figura 1. Regla de bolsillo de alta calidad.

## 4. Incertidumbre Intrínseca

Denominaremos *incertidumbre intrínseca* a una medida de la incertidumbre en los cálculos realizados con una RC propiciada por las características de las escalas y de los métodos utilizados. Aquí la palabra clave es “propiciado”, y con el concepto de incertidumbre intrínseca cuantificaremos la dificultad que ofrece el instrumento a un operador, para obtener una mejor precisión en los cálculos.

### 4.1 Trazado de escalas

Veremos primero las ecuaciones del trazado de las escalas en la regla:

Hallaremos como ejemplo las expresiones para una regla ficticia con las escalas estándar  $B, S, C$  de una determinada longitud geométrica  $L$ .

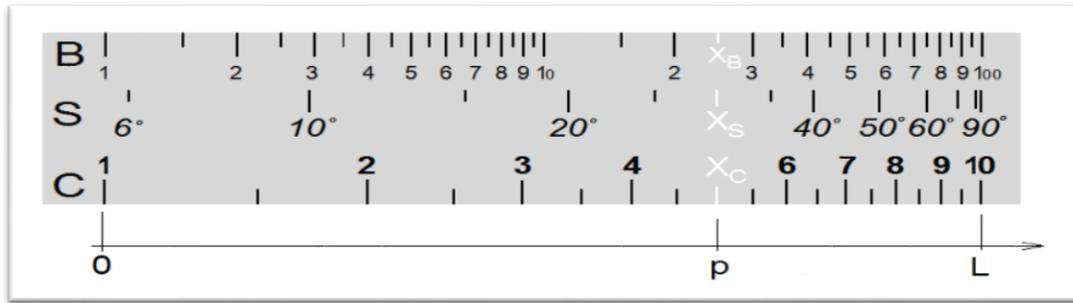


Figura 2. Tres ejemplos de escalas en una RC

**Escala base C / D:** Un punto cualquiera en la escala, etiquetado con el valor  $X_C$  deberá dibujarse en la posición  $p$ . Por la definición de la escala logarítmica esta posición será:

$$p = L \cdot \log X_C \tag{1}$$

Su inversa:  $X_C = 10^{\frac{p}{L}}$  [ 2 ]

**Escala de Cuadrados A / B:** Un punto cualquiera en la escala, etiquetado con el valor  $X_B$  deberá dibujarse en la posición  $p$ . Para referir esta escala a la escala base, recordamos la relación entre ambas escalas:

$$X_B = X_C^2 \rightarrow X_C = \sqrt{X_B} \tag{3}$$

$$p = L \cdot \log X_C = L \cdot \log (\sqrt{X_B}) = L \cdot \frac{1}{2} \log X_B$$

$$p = \frac{L}{2} \log X_B \tag{4}$$

**Escala de Senos S (ángulos):** Un punto de la escala etiquetado con el valor  $X_S$  deberá dibujarse en la posición  $p$ . Para referir esta escala a la escala base, recordamos:

$$X_S = \text{arcsen } X_C \rightarrow X_C = \text{sen } X_S$$

$$p = L \cdot \log X_C = L \cdot \log (\text{sen } X_S)$$

Como la función seno (primer cuadrante) toma valores entre 0 y 1, en la escala S se introduce un factor de década  $F_d = 10$ , de manera de ajustar los valores leídos a la década logarítmica correcta. En este caso a la década 1 – 10.

$$p = L \cdot \log(F_d \cdot X_C)$$

$$p = L \cdot \log (10 \operatorname{sen} X_S) \quad [ 5 ]$$

$$\text{Su inversa:} \quad X_S = \operatorname{arcsen} \left( 10^{\frac{p}{L}} \right) \quad [ 6 ]$$

Reemplazando los valores de las etiquetas  $X_C=5$  ,  $X_B=25$  ,  $X_S=30^\circ$  , en las expresiones [ 1 ][ 4 ][ 5 ] correspondientes al ejemplo de la *Figura 2*, para una escala de Longitud normal  $L=250$  mm. y para el factor de década de senos habitual  $F_d=10$ , comprobamos según lo esperado la perfecta alineación de las marcas:

$$p = 174.74 \text{ mm.}$$

**En general:** Cada valor  $X_f$  de la escala para  $f(x)$  (referido a  $x$  en la escala base) se representará en la posición  $p$  según:

$$p = L \cdot \log(F_d \cdot f^1(X_f)) \quad [ 7 ]$$

Inversamente, la función en sí: 
$$X_f = f \left( \frac{10^{\frac{p}{L}}}{F_d} \right) \quad [ 8 ]$$

De esta manera podemos representar en una RC cualquier función que nos pueda resultar útil, referida a la escala base. (Aunque no siempre habrá funciones inversas directas)

## 4.2 Incertidumbre intrínseca de las escalas

En la lectura o colocación de un valor en una escala, la incertidumbre vendrá dada por un desplazamiento del punto real respecto del ideal. Digamos como ejemplo que al colocar el cursor sobre un valor, en realidad lo estaríamos colocando algunas décimas de milímetro a un lado de la posición precisa, lo que equivale a utilizar un valor diferente.

No siendo las escalas lineales, el error producido por este desplazamiento no será constante a lo largo de toda la escala, sino será una función de la posición sobre ésta. Podemos cuantificar este concepto de “Incertidumbre” mediante un índice que indique la variación de los valores  $X_f$  de la escala  $f$  para un desplazamiento unitario, en función de la posición física  $p$ . De manera que en una escala de mayor incertidumbre intrínseca, un desplazamiento unitario del punto de lectura producirá un mayor error que en una escala de menor incertidumbre. Esto no es más que la derivada de los valores respecto de la posición.

Definimos la función Incertidumbre intrínseca  $I_f(p)$  de la escala  $f$  a:

$$\text{Incertidumbre intrínseca: } I_f = \frac{\partial X_f}{\partial p}$$

Este índice es un claro indicador de la “sensibilidad” de la escala a los errores de posicionamiento. (Siendo siempre pequeños entornos, la escala puede considerarse lineal).

#### 4.2.1 Incertidumbre intrínseca de la escala base

Para la escala base C tendremos sin duda una curva exponencial. Partiendo de la ecuación [ 2 ] de la escala C:

$$X_C = 10^{\frac{p}{L}} \rightarrow I_C = \frac{\partial X_C}{\partial p} = \frac{\partial \left(10^{\frac{p}{L}}\right)}{\partial p} = \frac{1}{L} \left(10^{\frac{p}{L}}\right) \ln 10$$

$$I_C = \frac{\ln 10}{L} \cdot \left(10^{\frac{p}{L}}\right) \quad \left[ \frac{1}{\text{mm}} \right] \quad [ 9 ]$$

Para otras décadas aplicar el factor de potencia de 10 apropiado.

Esta incertidumbre también la podemos expresar respecto de los propios valores de la escala C, reemplazando  $p$  en la última expresión, según [ 1 ].

$$I_C = \frac{\ln 10}{L} \cdot X_C \quad \left[ \frac{1}{\text{mm}} \right] \quad [ 10 ]$$

#### 4.2.2 Incertidumbre relativa de la escala base

Si lo que nos interesa es cuantificar la Incertidumbre relativa  $i$ , dividiremos la Incertidumbre absoluta por el valor de lectura de la escala:

$$i_C = \frac{I_C}{X_C} = \frac{\ln 10}{L} \quad [ 11 ]$$

- *La Incertidumbre relativa de la Escala Base (C) de una regla de cálculo es constante y sólo depende, inversamente, de la longitud de la escala.*

#### 4.2.3 Incertidumbre intrínseca de la escala de senos

Partiendo de la expresión de la escala de senos [ 6 ]:

$$X_S = \arcsen \left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)$$

$$\frac{\partial X_S}{\partial p} = \frac{\partial \left(\arcsen \left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)\right)}{\partial p} = \frac{1}{L} \cdot \frac{10^{\frac{p}{L}-1}}{\sqrt{1-\left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)^2}} \cdot \ln 10$$

$$I_S = \frac{\ln 10}{L} \cdot \frac{10^{\frac{p}{L}-1}}{\sqrt{1-\left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)^2}} \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right] \quad [ 12 ]$$

Más convenientemente, reemplazando  $p$  según [ 5 ], tendremos la incertidumbre en función del ángulo:

$$I_S = \frac{\ln 10}{L} \cdot \operatorname{tg} X_S \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right] \quad [13]$$

Lo que muestra a simple vista la tendencia a infinito de la incertidumbre de la escala de senos al acercarnos a 90°.

#### 4.2.4 Incertidumbre intrínseca de escalas LogLog

Para la escala LogLog, se deduce de igual manera:

$$LL_2: (e^{0.1x}) \rightarrow I_{LL_3} = \frac{\ln 10}{L} \cdot 10^{\frac{p}{L}-1} \cdot e^{10^{\frac{p}{L}-1}}$$

$$LL_3: (e^x) \rightarrow I_{LL_3} = \frac{\ln 10}{L} \cdot 10^{\frac{p}{L}} \cdot e^{10^{\frac{p}{L}}}$$

Etc.

#### 4.2.5 Gráficos de Incertidumbre de algunas escalas comunes

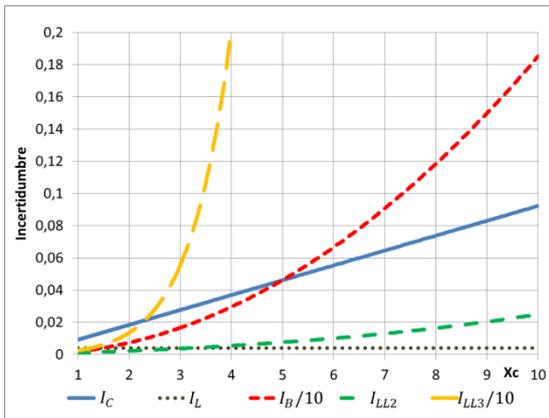


Figura 3. Incertidumbre escalas usuales

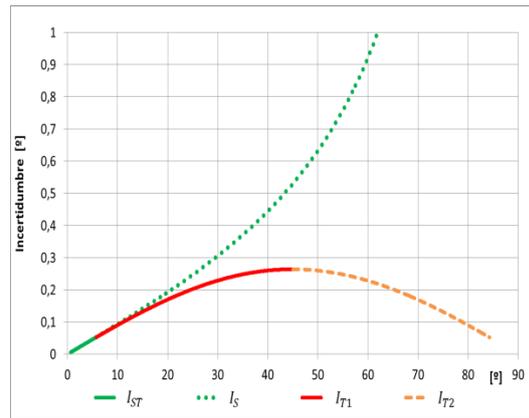


Figura 4. Incertidumbre escalas trigonométricas

En el gráfico de la incertidumbre absoluta, se aprecia la constancia de la escala logarítmica (que resulta lineal en la regla). También vemos la linealidad de la incertidumbre en la escala logarítmica base, C.

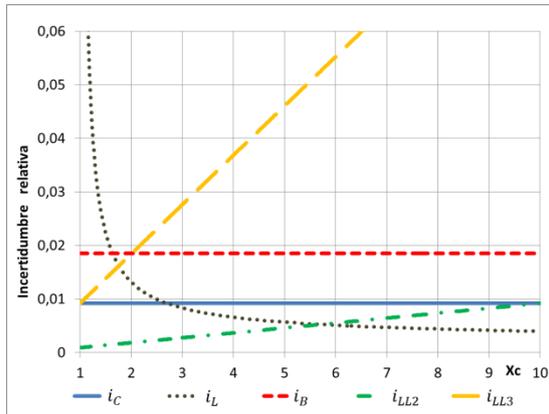


Figura 5. Incertidumbre relativa escalas usuales

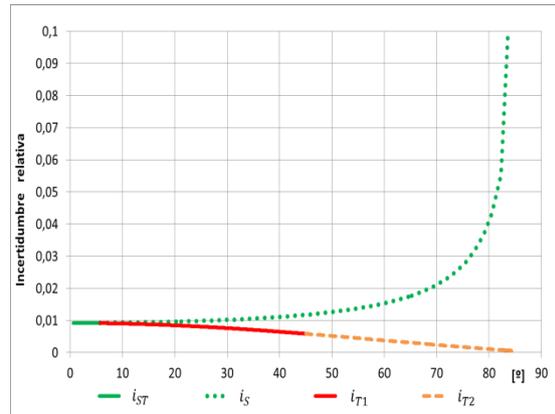


Figura 6. Incertidumbre relativa esc. trigonométricas

Observamos especialmente la ya señalada constancia de la incertidumbre relativa de las escalas logarítmicas; la base C, y la B que la duplica.

### 4.3 Incertidumbre Intrínseca de operaciones

De la misma manera que para las escalas, podemos elaborar un índice que valore cómo la RC propicia el error cuando se ejecuta una operación dada. En este caso la incertidumbre estará dada por las estimaciones sucesivas de valores en las escalas, en combinación con las operaciones realizadas, recordando que todas las incertidumbres son funciones de la posición dentro la escala.

#### 4.3.1 Incertidumbre Intrínseca de operaciones unitarias

Este es el caso de operaciones directas, como ser hallar el cuadrado o la raíz de un número, o el seno de un ángulo.

Tomemos este último caso. Hallar el seno de un ángulo implica colocar el valor del ángulo en la escala S y luego leer el seno en la escala base. Por ende tendremos que combinar la incertidumbre de la escala S con la de la escala C.

Llamaremos  $I_{SC}$  a la Incertidumbre de la escala de Senos leídos en la escala C, y para encontrarlo proyectaremos la Incertidumbre de la escala S sobre la escala C y la sumaremos a la Incertidumbre propia de la escala C para la lectura. De igual manera encontraremos la Incertidumbre de la escala C leída en la escala S de senos,  $I_{CS}$  para el caso inverso de hallar un ángulo.

$$I_{SC} = I_S \cdot \frac{\partial X_C}{\partial X_S} + I_C \quad y \quad I_{CS} = I_C \cdot \frac{\partial X_S}{\partial X_C} + I_S$$

Reemplazando y operando veremos que los índices de incertidumbre tanto para leer senos, como para leer ángulos combinando ambas escalas son exactamente el doble de los índices sencillos de la escala de lectura. (En completa concordancia con el análisis geométrico de la acumulación de los errores de posicionamiento).

$$I_{SC} = 2 I_C \quad y \quad I_{CS} = 2 I_S$$

- *La Incertidumbre intrínseca de una operación unitaria está dada sólo por la Incertidumbre de la escala de lectura multiplicada por dos.*

#### 4.3.2 Incertidumbre Intrínseca de operaciones encadenadas

Veremos qué sucede con la incertidumbre al realizar operaciones matemáticas. En primera instancia lo haremos sobre la misma escala, para lo cual tomemos por caso una simple multiplicación  $z = x \cdot y$ . Tendremos dos elementos básicos en la Incertidumbre final: La Incertidumbre de la propia multiplicación dada por la colocación de los factores, y la Incertidumbre en la lectura del resultado.

$$I_M = I_{x,y} + I_z$$

$$I_M = \frac{\partial(x \cdot y)}{\partial p} + I_z = y \frac{\partial x}{\partial p} + x \frac{\partial y}{\partial p} + I_z$$

Reemplazando  $x$  e  $y$  según [ 2 ]:

$$I_M = \left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right) \frac{\partial x}{\partial p} + \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right) \frac{\partial y}{\partial p} + I_z$$

Al trabajar sobre la misma escala C/D, la función de Incertidumbre y su derivada, será la misma para las tres variables. Entonces reemplazando las derivadas:

$$I_M = \left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right) \frac{\ln 10}{L} \cdot \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right) + \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right) \frac{\ln 10}{L} \cdot \left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right) + I_z$$

$$I_M = \frac{\ln 10}{L} \left\{ \left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right) \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right) + \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right) \left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right) \right\} + I_z$$

$$I_M = 2 \frac{\ln 10}{L} \left(10^{\frac{p_X + p_Y}{L}}\right) + I_z$$

Siendo  $p_X + p_Y = p_Z$  por el funcionamiento de la RC al multiplicar dos valores (suma de sus segmentos logarítmicos) podemos escribir:

$$I_M = 2 \frac{\ln 10}{L} \left(10^{\frac{p_Z}{L}}\right) + I_z = 2 I_z + I_z$$

$$I_M = 3 I_z$$

- *Por lo tanto, la Incertidumbre intrínseca de una multiplicación queda determinada únicamente por la Incertidumbre de la escala C/D en el punto de obtención del resultado, multiplicado por el número de estimaciones (n).*
- *En general, aunque intervengan escalas diferentes (como las escalas LL) la función Incertidumbre intrínseca de una operación estará dada por la Incertidumbre intrínseca de la escala de resultado ( $I_E$ ), multiplicada por la cantidad de estimaciones (n).*

$$I_{Op}(p) = n \cdot I_E(p) \quad [ 14 ]$$

Habrán expresiones equivalentes en función de los valores  $X_E$  de la escala.

- *Esta conclusión está en total concordancia con el análisis geométrico de los desplazamientos de la reglilla con sus correspondientes errores de posicionamiento.*

### 4.3.3 Incertidumbre de operaciones con transferencia

Para poder comparar métodos de cálculo en general, nos faltaría analizar los métodos que incluyen la lectura de un resultado intermedio en una escala y su recolocación en otra escala para continuar.

Estas operaciones, por su variedad, deben analizarse caso por caso. Entonces en este artículo desarrollaremos un caso a modo de ejemplo, y de paso analizaremos la conveniencia de dos métodos alternativos de realizar el mismo cálculo. Calcularemos con la RC:

$$z = \sqrt{a \cdot b}$$

Recordemos que las escalas A y B son idénticas entre sí, así como las C y D.

#### Método 1:

Multiplicar en las escalas de cuadrados A/B, y leer el resultado directamente en C.

- + Gran economía de estimaciones y movimientos.
- Operar la multiplicación en escalas menos precisas.

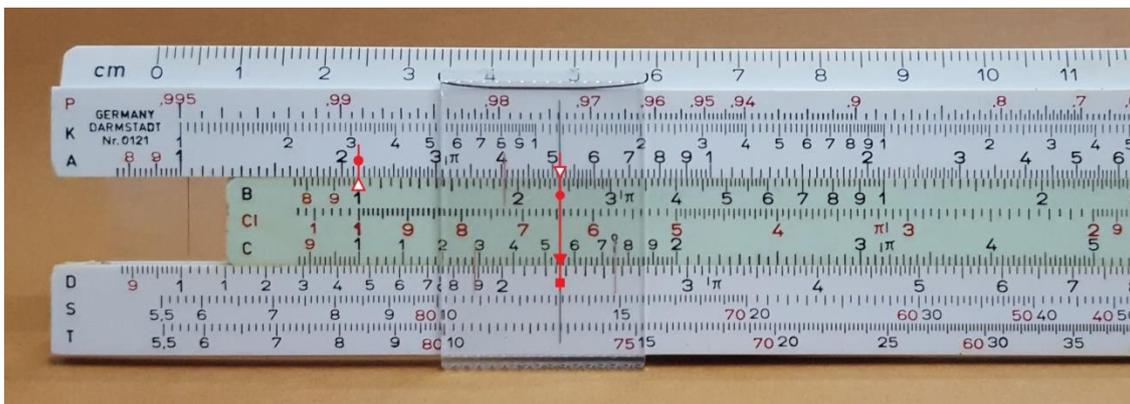


Figura 7. Método 1 : Raíz ( 2,15 x 2,40 ) = 2,27 (sin lectura del producto)

#### Método 2:

Multiplicar y leer el producto en las escalas C/D.

Luego colocar el producto en la escala de cuadrados A y leer el resultado en D.

- + Multiplicamos con mayor precisión.

- La lectura intermedia es incómoda, y podría empeorar la precisión.

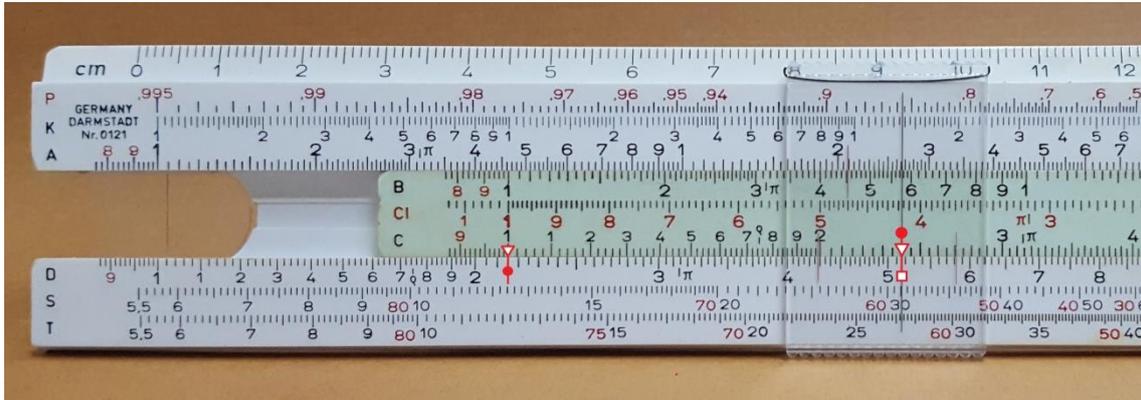


Figura 8. Método 2: Primer Paso,  $2,15 \times 2,40 = 5,16$

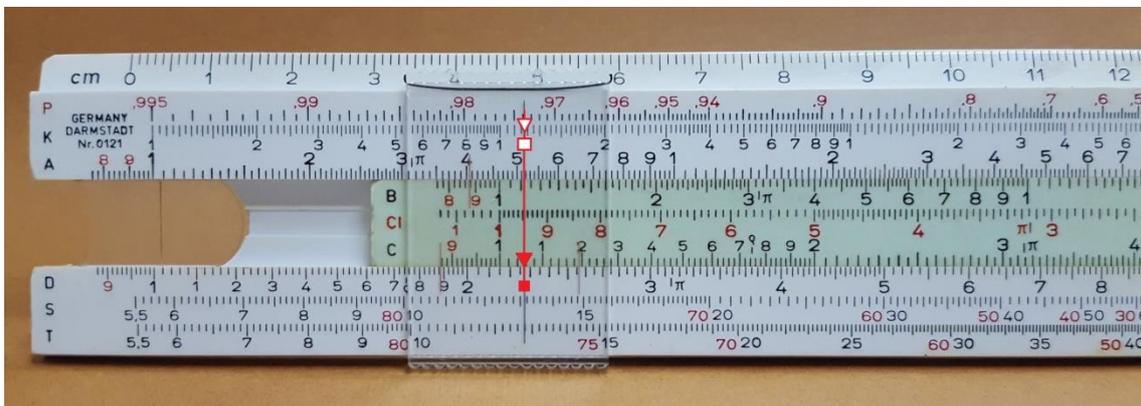


Figura 9. Método 2: Segundo Paso, Raíz  $(5,16) = 2,27$

El método 1 es una sencilla operación encadenada que consta de 3 estimaciones, leyendo finalmente sobre la escala C. Su función de incertidumbre será según la expresión [ 14 ] ajustada para valores de escala y  $n = 3$  :

$$I_{M1}(X_C) = 3 \cdot I_C(X_C)$$

Reemplazando  $X_C=z$  (resultado final) en [ 10 ], resulta para el método 1:

$$I_{M1}(z) = 3 \cdot \frac{\ln 10}{L} \cdot z \quad [ 15 ]$$

Para el método 2, primero tendremos que obtener la incertidumbre de la multiplicación en la escala C incluyendo la lectura. Esta incertidumbre se transfiere a la escala A y luego debemos propagarla sobre la escala C en su punto de aplicación. Y finalmente agregar la incertidumbre de la colocación del valor en A y de la lectura de la raíz en la escala C.

Para la multiplicación tendremos 3 estimaciones, y para la raíz tendremos 2. La proyección se hace sobre el punto  $X_C$ , y la función incertidumbre de la multiplicación se evalúa en  $X_C^2$ . Entonces:

$$I_{M2}(X_C) = \frac{\partial X_C}{\partial X_A} \cdot 3 I_C(X_C^2) + 2 I_C(X_C)$$

Siendo:  $X_c = \sqrt{X_A}$  y  $I_C(X_C) = \frac{\ln 10}{L} \cdot X_C$

$$I_{M2}(X_C) = \frac{\ln 10}{L} \cdot \left( 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{X_A}} X_C^2 + 2 X_C \right)$$

$$I_{M2}(X_C) = \frac{\ln 10}{L} \cdot \left( \frac{3}{2} X_C + 2 X_C \right)$$

$$I_{M2}(z) = 3.5 \cdot \frac{\ln 10}{L} \cdot z \quad [ 16 ]$$

Comparando [ 15 ] y [ 16 ] quedan definitivamente zanjadas las subjetividades sobre cuál método es preferible. El **método 1**, además de ser más cómodo, rápido y seguro, también es algo más preciso (14%).

#### 4.4 Incertidumbre Estadística de los cálculos

En todo lo hecho hasta aquí, consideramos incertidumbres máximas absolutas, lo cual en la práctica no sucede.

Para obtener un valor más realista de la incertidumbre, y del peso relativo del número de estimaciones sobre el mismo, se debe tener en cuenta el concepto estadístico del error. Por lo tanto la *estimación* de valores en la regla seguirá en cada caso una distribución normal centrada en el valor exacto, y el error en cada paso será en algunos casos aumentado y en otros reducido. (Suponiendo razonablemente que el operador no lee con sesgos)

El enfoque estadístico queda fuera del alcance de este texto, pero utilizando ciertas simplificaciones, podemos asumir que:

$$I_{Est} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (dx)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (dy)^2 + \dots}$$

Operando llegamos a que en operaciones encadenadas, el factor a aplicar para encontrar la incertidumbre estadísticamente esperable será  $\sqrt{n}$  en lugar de  $n$ . Tendremos entonces para un cálculo encadenado:

$$I_{Est} = \sqrt{n} \cdot I_E$$

Siendo  $n$  el número de estimaciones, e  $I_E$  la función de Incertidumbre intrínseca de la escala de lectura. Así, en la práctica se disminuye ligeramente la influencia de la cantidad de cálculos encadenados respecto de la incertidumbre final.

## 5. Evaluación comparativa de Escalas y Métodos

La Incertidumbre Intrínseca de escalas y métodos es una valoración objetiva que nos permite determinar la conveniencia en cuanto a su precisión posible, de un método de cálculo y sus escalas asociadas.

Haremos un ejemplo de evaluación de métodos y escalas para hallar senos de ángulos, y recíprocamente, usando los tres métodos más frecuentes encontrados en las RC: Con escalas S y C, con escalas S y P y con la menos usual escala trigonométrica diferencial de senos Sd y C.

### 5.1 Senos con escalas usuales (S y C)

Ya hemos visto la evaluación del procedimiento usando la escala S de senos (ángulos) estándar en 4.3.1.

Para facilitar la evaluación expresaremos la incertidumbre de la escala C [ 10 ] en función de  $X_S$ , recordando que  $X_C = 10 \cdot \text{sen } X_S$

$$I_C = \frac{\ln 10}{L} \cdot 10 \cdot \text{sen } X_S \quad [ 17 ]$$

### 5.2 Senos con escala pitagórica adicional (S y P)

La escala pitagórica expresa la función  $\sqrt{1 - X^2}$ . Por lo tanto, si colocamos en la escala C el valor correspondiente al coseno de un ángulo, obtendremos en P el valor del seno del mismo ángulo en virtud de la relación pitagórica. Esto es muy útil porque permite hallar con mayor precisión senos de ángulos grandes, para los cuales la precisión de la escala C decae mucho. Para hallar el seno de 70° por ejemplo, indicamos 30° en la escala de senos (ángulos), y luego leemos  $\cos(30^\circ) = \sin(70^\circ)$  en la escala P.

Para la escala pitagórica, seguimos el mismo proceso que con las escalas anteriores, comenzando con la expresión de la escala P respecto de la escala C/D:

$$X_P = \sqrt{1 - \left(\frac{X_C}{10}\right)^2} \quad \rightarrow \quad X_C = 10 \sqrt{1 - X_P^2}$$

La posición sobre la regla según [ 1 ] :  $p = L \cdot \log X_C$

$$p = L \cdot \left( 1 + \frac{\log(1 - X_P^2)}{2} \right)$$

$$X_P = \sqrt{1 - 10^{2 \cdot \left(\frac{p}{L} - 1\right)}}$$

$$I_P = \frac{\partial X_P}{\partial p} = \frac{-\ln 10}{L} \cdot \frac{10^{2 \cdot \left(\frac{p}{L} - 1\right)}}{\sqrt{1 - 10^{2 \cdot \left(\frac{p}{L} - 1\right)}}} \quad [ 18 ]$$

Mejor expresarlo en función de  $X_C$ , que es según [ 2 ]:  $X_C = 10 \frac{p}{L}$ ; y también podemos descartar el signo que no nos interesa.

$$I_P = \frac{\ln 10}{L} \cdot \frac{\left(\frac{X_C}{10}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{X_C}{10}\right)^2}} \quad [ 19 ]$$

Todavía sería mejor, dado que comparamos la performance para la obtención de senos de ángulos, expresar  $I_P$  en función del ángulo complementario.

Siendo:  $\frac{X_C}{10} = \text{sen } X_S = \text{cos } X_{\text{comp}}$

$$I_P = \frac{\ln 10}{L} \cdot \frac{\text{cos}^2 X_{\text{comp}}}{\text{sin } X_{\text{comp}}} \quad [ 20 ]$$

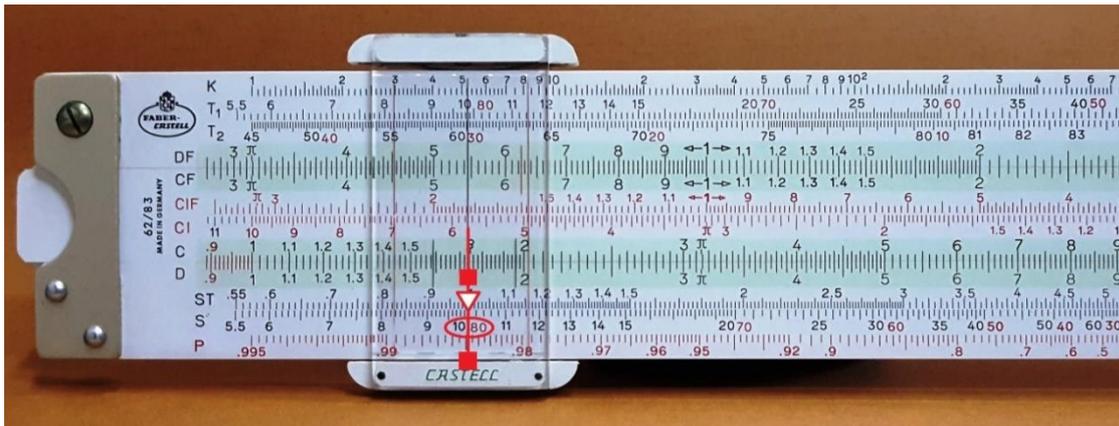


Figura 10. Escala Pitagórica:  $\text{Sen}(80^\circ) = P(10^\circ) = 0.9848$

### 5.3 Senos con escalas trigonométricas diferenciales (Sd y C)

La escala diferencial de senos, se construye según la expresión:

$$Sd = \frac{X}{\text{sen } X}$$

Luego, para obtener el seno de un ángulo, se despeja:

$$\text{sen } x = \frac{X}{Sd}$$

Siendo expresado  $X$  en grados sexagesimales.

Lo interesante del método es que la misma escala D se aprovecha de 1 a 9 con factor 10 para representar ángulos de  $10^\circ$  a  $90^\circ$  y simultáneamente de 1 a 10 para representar los senos de 0.1 a 1 (para la década base).

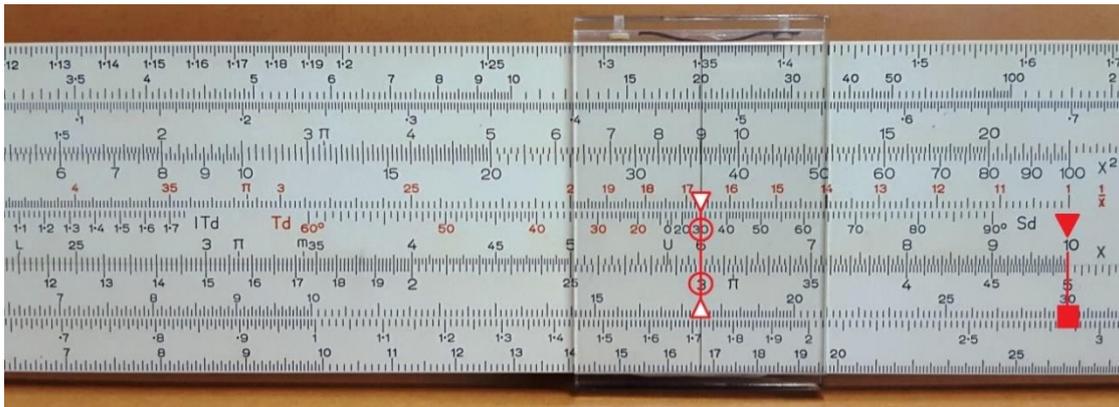


Figura 11. Escala de Senos Diferenciales:  $\text{Seno}(30^\circ) = 0,5$

Para operar, se coloca el ángulo en grados sobre D, luego se divide (resta de segmentos) por el valor en la escala Sd muy convenientemente colocada en la reglilla para facilidad operativa. Y finalmente se lee el  $\text{sen } X$  en la misma escala D sobre el índice de la reglilla.

Y ahora es dónde viene lo más práctico de nuestras conclusiones: Como hemos deducido en **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, la incertidumbre intrínseca de una operación sin lecturas intermedias, sólo depende de la escala de lectura final, y no de la de colocación del ángulo. De esta forma **no necesitamos** preocuparnos de la incómoda función Sd para nada, sólo nos interesa la escala D ya estudiada. Usaremos pues la expresión [ 17 ].

Sin embargo vemos que hay de por medio otra operación de colocación de valor en la escala Sd por lo que aquí  $n$  será igual a 3 en lugar de 2, empeorando potencialmente la precisión del valor obtenido.

### 5.4 Comparación de los tres métodos de obtención de Senos de ángulos

En el siguiente gráfico comparamos la Incertidumbre de los tres métodos: según [ 17 ] con  $n = 2$  para S y con  $n = 3$  para Sd, y según [ 20 ] con  $n = 2$  para P.

En la Figura 12 vemos claramente que el método con escalas S y P se comporta mucho mejor para ángulos grandes que el método usual con las escalas S y C. Incluso globalmente logramos algo más de precisión para estos ángulos que para los ángulos pequeños...

La posición de equilibrio se alcanza exactamente para los  $45^\circ$ , ángulo a partir del cual es conveniente usar la escala P con el ángulo complementario

En relación con el método de trigonómicas diferenciales, vemos que la precisión alcanzable es menor que con las escalas tradicionales debido a la introducción de la operación de división (salvo el pequeño entorno entre  $5.7^\circ$  y  $10^\circ$  que se obtiene en la década anterior a la normal, resultando más preciso).

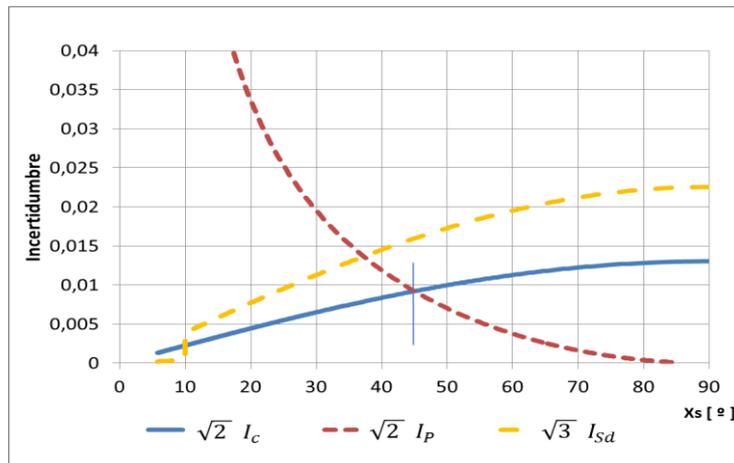


Figura 12. Incertidumbre estadística para hallar  $\text{sen}(x)$  por distintos métodos usuales.

### 5.5 Comparando métodos de obtención de ángulos dado su seno

Para el caso estándar, tenemos simplemente la función de incertidumbre de la escala S [ 13 ] con  $n = 2$ .

Para el cálculo con escala P, la ecuación y  $n$  serán los mismos, aplicada sobre los ángulos complementarios.

Para el cálculo con escala inversa Sd (ISd) , los ángulos se leen también sobre la escala C , por lo que corresponde evaluar la incertidumbre de la escala C transformada en escala de ángulos, y con  $n = 3$ .

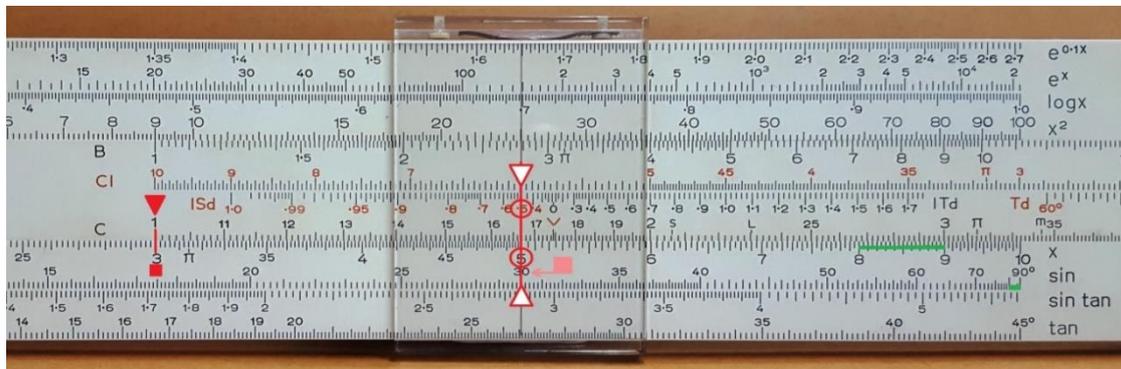


Figura 13. Escala Inversa de Senos Diferenciales:  $\text{arcseno}(0,5) = 30^\circ$

Operación: Con ayuda del cursor se alinea el valor del seno en la escala D y el mismo valor del seno en la escala ISd como en una división (resta de segmentos), el índice de la escala C apunta al ángulo sobre la escala D (multiplicar por 10 en esta década).

En la Figura 13. Escala *Inversa de Senos Diferenciales*:  $\text{arcseno}(0,5) = 30^\circ$  también observamos el ángulo  $30^\circ$  alineado con 0,5 en la escala S standard. La mayor incertidumbre de la escala S se ve muy claramente para el intervalo  $80^\circ - 90^\circ$  en ambas escalas (marcados en verde).

Graficando la incertidumbre para los tres métodos, obtenemos la Figura 14

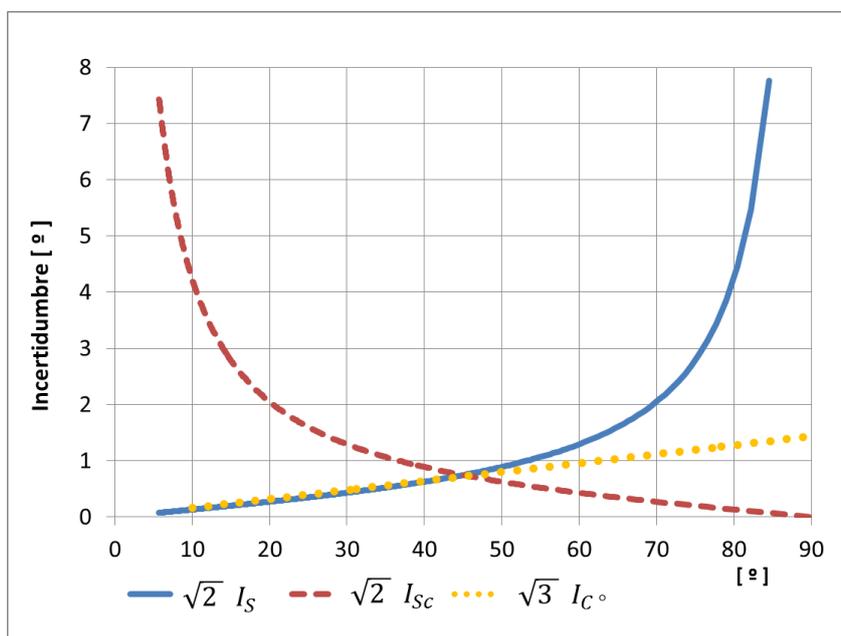


Figura 14. Incertidumbre estadística para hallar el arcoseno() por distintos métodos.

Vemos claramente que la menor alinealidad de la escala C por sí sola, permite al método de escala inversa de senos diferenciales, tener resultados mejores que una regla estándar al momento de hallar ángulos por sus senos. Especialmente para ángulos grandes, y a pesar de la penalización de un  $n = 3$ .

Sin embargo, siempre una regla con escalas S y P produce mejores resultados que las demás.

## 6. Conclusiones

El método de análisis de las escalas y operaciones a través de la incertidumbre intrínseca resulta muy útil para evaluar objetivamente la conveniencia de unas escalas y métodos sobre otros alternativos para mejorar la precisión. A su vez el método nos permitió demostrar algunos supuestos muy difundidos sobre las RC y rebatir otros con facilidad. Entre las conclusiones notables se destacan:

- La incertidumbre intrínseca es una función que varía a lo largo de la escala, y puede escribirse en función de la posición geométrica, de los valores de la escala, o de los valores de otra escala conveniente.
- La incertidumbre de una escala es inversamente proporcional a su longitud física.
- La incertidumbre relativa de una escala logarítmica es constante.
- La función incertidumbre máxima absoluta de una operación con RC sin lectura intermedia de valores está dada solamente por la **incertidumbre de la escala de lectura final**, multiplicada por la cantidad de *estimaciones n*. Esta conclusión es vital

porque nos permite prescindir del análisis de incertidumbre de las escalas que no son las que usamos para leer el resultado.

- Esta función incertidumbre se evalúa simplemente en el punto de lectura del resultado final (teniendo en cuenta los cambios de década pertinentes).
- La incertidumbre estadística en cálculos complejos será menor a la máxima, y varía según el factor  $\sqrt{n}$ .
- El número  $n$  de *estimaciones* suele ser un factor de gran influencia sobre la incertidumbre producida en cálculos complejos, por lo que es muy importante su reducción.
- Si la operación contiene lecturas intermedias, el cálculo de la incertidumbre total no es directo, y debe realizarse agregando la propagación clásica de incertidumbre a través de fórmulas, para los valores intermedios leídos y recolocados.
- La incidencia de las lecturas y colocaciones de valores intermedios en la incertidumbre de un cálculo complejo puede ser muy importante, y en general conviene que estas operaciones sean evitadas cuando sea posible.
- Queda suficientemente claro que las dificultades del problema de la precisión superan ampliamente la típica definición popular de “tres dígitos significativos”... Aunque por supuesto no queda invalidada como una rápida aproximación al promedio de precisión para una regla estándar.
- Conclusiones Operativas expuestas como ejemplo:
  - Las reglas con escala P son las más precisas para las funciones trigonométricas directas e inversas.
  - Las reglas con escalas trigonométricas diferenciales mejoran la precisión de una regla típica con escala S para las funciones inversas, pero son prácticamente idénticas para las funciones directas.
  - Para operaciones como  $z = \sqrt{a \cdot b}$  es algo más preciso multiplicar sobre las escalas cuadráticas A / B y leer la raíz en D.

## 7. Agradecimientos

Deseo agradecer al Ing. Santiago Higuera de Frutos por su estímulo y apoyo para la realización del presente artículo y su ayuda para la revisión y presentación del mismo. También quiero agradecer a los miembros de la agrupación ARC “Amigos de las reglas de cálculo”, y especialmente a su fundador Jorge Fábregas Zazza por su inmensa y desinteresada tarea.

## 8. Lectura Introductoria

- HIGUERA DE FRUTOS, Santiago. *Reglas de Cálculo*, Revista “Pensamiento Matemático”, Vol. VI, Núm. 2, Octubre, 2016.

- <http://www.reglasdecalculo.com> : Web de Jorge Fábregas Zazza donde se expone su vasta colección de reglas de cálculo y manuales en español, y cantidad de recursos útiles y links para interesados y coleccionistas, particularmente un cursillo introductorio sobre su uso en: <http://www.reglasdecalculo.com/teoriaypractica.htm>.

## Referencias

- [1] TAYLOR, John Robert. *An introduction to error analysis 2nd. edition*, caps. 3 y 5, University Science Books, California, 1997.
- [2] LINDBERG, Vern. *Uncertainties and error propagation*, <https://goo.gl/zz0QuJ>

### Sobre el autor:

*Nombre:* Jorge Luis Victoria

*Correo Electrónico:* [jorge.luis.victoria.rico@gmail.com](mailto:jorge.luis.victoria.rico@gmail.com)

*Profesión:* Profesional Autónomo.

# Juegos y Rarezas Matemáticas

## Schwarzschild y la trama de nuestro universo: cien años de perspectiva

## Schwarzschild and the structure of our cosmos: one century's anniversary

José Rojo Montijano

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 149–156, ISSN 2174-0410

Recepción: 23 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de abril de 2017

### Resumen

Con ocasión del centenario de la muerte de Karl Schwarzschild se revisa el influjo de la noción de agujero negro en la cosmología contemporánea, enfatizando las propiedades que emergen a partir de su métrica.

**Palabras Clave:** Karl Schwarzschild, relatividad general, agujeros negros.

### Abstract

In the centenary of de Karl Schwarzschild's death, we deal the influence of his metric in cosmology, focusing in the relativistic description of the notion of black hole.

**Keywords:** Karl Schwarzschild, General Relativity, black holes.

*“Even a room which must be dark needs at least a crack of lighth to know how dark it is”*  
[trad. “Incluso una habitación que debe estar oscura necesita al menos una grieta de luz  
para saber cuán oscura es”]  
(Louis Kahn)

## 1. Einstein y Schwarzschild

Cuando en 1905 Einstein presentó su Relatividad Especial, decidió tomarse radicalmente en serio esta afirmación: en nuestro universo ninguna señal se puede transmitir con una velocidad que supere a la de la luz. Tardó diez intensos años en lograr incluir la descripción de la gravedad en este contexto: el 11 de noviembre de 1915 presentó sus célebres ecuaciones de la Relatividad General.

El modelo gravitatorio newtoniano, hasta entonces cargado de éxitos, llamaba “gravedad” a esa fuerza cotidiana que tira de nosotros hacia el suelo en todo momento, explicando cómo las masas se atraen de modo que la trayectoria de un planeta como el nuestro resulta de la acción combinada de la propia inercia que lleva y de la atracción del Sol. Si por arte de magia nuestra estrella desapareciera en cierto instante, inmediatamente la Tierra modificaría su órbita elíptica alrededor del Sol, escapándose de él: la gravedad newtoniana se propagaría, pues, instantáneamente, “a toda velocidad”, en abierta contradicción con los postulados relativistas.

En el modelo de Einstein “espacio” y “tiempo” (que no transcurre igual en todas partes) están entrelazados, forman un tejido flexible, elástico, “el espaciotiempo”. Su geometría es curva y la gravedad es la curvatura del espaciotiempo. En Relatividad General la geometría del espaciotiempo asume un papel activo, dinámico, y se convierte, jugando con la materia y la energía, en actor protagonista de la física del universo. No es “inmutable” ni “plano”: puede deformarse, estirarse, expandirse, contraerse, curvarse y retorcerse. Y la forma en que lo hace está determinada por lo que hay en él. El Sol, por ejemplo, curva enormemente el espaciotiempo a su alrededor, como una masa depositada en una cama elástica; y los planetas siguen trayectorias, geodésicas, dictadas por esta geometría curvada.

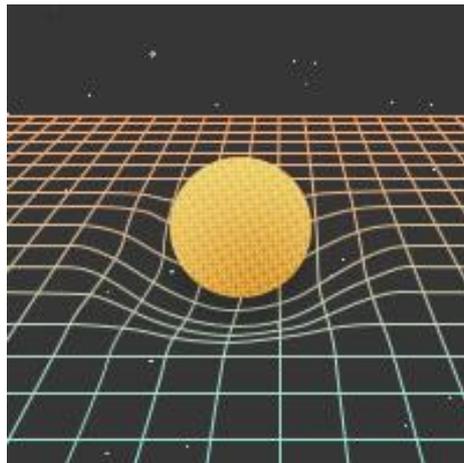


Figura 1

Si, como especulábamos, el Sol desapareciera por arte de magia, el espaciotiempo se distorsionaría y esta perturbación (una onda gravitatoria) comenzaría a propagarse a su alrededor, llegando a alcanzar la Tierra unos ocho minutos después (el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia entre el Sol y nuestro planeta). “La masa curva el espaciotiempo” es parte del mensaje que subyace en las ecuaciones de Einstein; y “la curvatura del espaciotiempo marca las correspondientes trayectorias a seguir por los objetos que contiene” es la contrapartida para completar la interpretación de esas fórmulas.

Se cumplen estos días cien años desde la publicación (en febrero de 1916) de un artículo de Karl Schwarzschild, “Sobre el campo gravitacional de una masa puntual según la teoría de Einstein”, donde aparece la primera solución exacta de las ecuaciones de la Relatividad General. El 18 de noviembre de 1915 Einstein había sido capaz de encontrar alguna solución aproximada a sus ecuaciones con la que explicar la precesión de la órbita de Mercurio (uno de

los temas no resueltos por la teoría newtoniana); y, con enorme sorpresa, a finales de diciembre recibió una carta del frente ruso en la que Schwarzschild le ayudaba en esa tarea con su solución exacta. De carácter afable y cordial, con una mente abierta a muchas manifestaciones culturales, el astrofísico alemán de origen judío Schwarzschild había mantenido desde su juventud (a los dieciséis años publicó un par de artículos sobre mecánica celeste) una prodigiosa actividad científica (que incluye artículos de astronomía, física e, incluso, de geometría y cosmología); una semana antes de morir el 16 de mayo de 1916, con cuarenta y dos años, tras una dolorosa enfermedad contraída en la Gran Guerra, escribió su artículo póstumo (sobre aplicaciones de “la hipótesis cuántica”). Sus últimos cargos antes de la guerra fueron los de director del Observatorio Astronómico de Postdam y profesor honorario de la Universidad de Berlín. No tuvo tiempo vital, pues, para desarrollar las implicaciones de “la solución de Schwarzschild” de la Relatividad General, que contiene una “singularidad” (donde las leyes físicas empleadas dejan de tener sentido y el propio espacio-tiempo se desvanece desapareciendo) y que hoy son vistas con las características del primer agujero negro matemático (“matemático”... pues las consecuencias “físicas” no se empezaron a apreciar y tomar visos de realidad hasta cuarenta años más tarde). Nos ha quedado asociado a su nombre “el radio de Schwarzschild de una masa”, que indica ese radio tal que una masa encerrada en un radio menor no deja escapar ninguna señal hacia el exterior: la propiedad característica de un agujero negro.

## 2. Agujeros negros en el universo: GW091415

El espaldarazo necesario para que soluciones matemáticamente posibles de las ecuaciones de la Relatividad General fueran merecedoras de apuntar a entidades reales del universo se dio cuando se comprendieron mecanismos de la naturaleza que las podían generar, como la implosión que se produce cuando una estrella muy masiva agota su combustible y resulta vencida por su propia gravedad, confinando su masa en una región demasiado pequeña. Hoy se piensa que existen miles de millones de agujeros negros de tamaño “mediano” (varias decenas de veces la masa solar) en el universo y que en la mayoría (si no en todas) de las galaxias hay un agujero negro supermasivo (de varios millones de masas solares) en su zona central, directamente involucrados en la evolución dinámica que se produce en su galaxia. Hoy, incluso, se especula con la posibilidad de que existan mini-agujeros negros y de que, quizá, se puedan generar pronto en un colisionador de partículas suficientemente potente.

El mundo mediático recoge estos días con gran interés el anuncio del pasado once de febrero de la primera detección directa de ondas gravitacionales en los interferómetros LIGO (en 1993 se había ya otorgado a Hulse y Taylor el premio Nobel por sus trabajos analizando indirectamente, con exquisito detalle, la presencia de ondas gravitacionales emitidas por sistemas binarios de estrellas de neutrones orbitando una sobre la otra, con un acuerdo tan grande con las predicciones de la Relatividad General que apenas deja lugar a dudas). La detección de ondas gravitacionales en la Tierra, que se produjo el pasado 14 de septiembre de 2015 (de ahí el acrónimo, GW091415), ha supuesto un enorme desafío científico y tecnológico: el efecto del paso de una de ellas estira el espacio en una dirección y lo contrae en la perpendicular (y viceversa) en un movimiento periódico; la distorsión en los interferómetros de LIGO es ¡menor que un núcleo atómico!...y, sin embargo, la señal buscada ha sido reconocida con transparencia, como un homenaje al trabajo enorme en Relatividad numérica realizado en los últimos años. Proviene de la Nube de Magallanes y se originó en una colisión

de dos agujeros negros “medianos”, fusionándose en un nuevo agujero negro, liberando en unos microsegundos una energía del orden de diez elevado a veinticuatro veces la energía solar... ¡hace unos mil trescientos millones de años! Neil Turok, director del Perimeter Institute for Theoretical Physics (Canadá), ponderando la nueva ventana abierta para escuchar señales del universo detectando ondas gravitacionales, destacaba la oportunidad que se nos brinda de entender mejor en las próximas décadas aquellos objetos del cosmos que no emiten luz (los agujeros negros, la materia oscura,...), señalando incluso al propio big bang: “usando ondas electromagnéticas no podemos ir más allá de unos cuatrocientos mil años después del big bang; el universo anterior era opaco a la luz... ¡pero es transparente al paso de las ondas gravitacionales!”

### 3. Luz y gravedad

Se suele conocer como “gravitational lensing”, GL, al efecto sobre la luz causado por la gravedad. Como las masas curvan el espaciotiempo, los caminos que sigue la luz al pasar cerca de ellas se alteran y, ante un observador, se produce un efecto visual que distorsiona las posiciones relativas de las fuentes luminosas. Einstein se ocupó por obtener el ángulo de deflexión de la luz al pasar rasante al Sol, y, tras haber completado las ecuaciones de la Relatividad General, dio con la fórmula “correcta” (el doble de la cantidad deducida en el modelo newtoniano). En 1919 una expedición dirigida por Eddington observó durante un eclipse la luz de un bien conocido grupo de estrellas cercanas (las Hyadas): el resultado coincidía con la predicción de Einstein. ¡La luz confirmaba la nueva teoría!

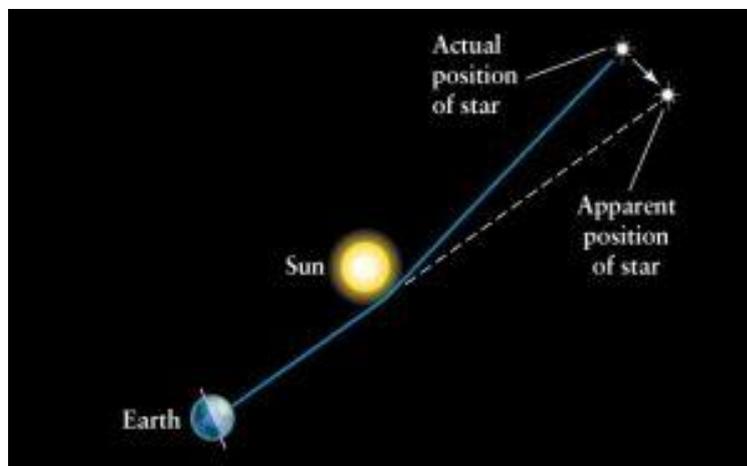


Figura 2

Desde entonces, los avances en la observación del universo profundo y en la comprensión del GL nos han ido desvelando un mundo “mágico”, abierto a multitud de “ilusiones ópticas”: aparición de imágenes múltiples de un mismo objeto, arcos e incluso anillos... La detección de “retrasos gravitacionales” (puesto que las imágenes pueden seguir caminos diferentes, la luz procedente de un mismo astro puede alcanzarnos en momentos distintos, con años incluso de diferencia) ha ayudado, por ejemplo, a confirmar la expansión del universo (teniendo en cuenta, chequeando el retraso, el ritmo de dicha expansión). El GL ha servido estos últimos años para calcular distancias, buscar exoplanetas...; incluso para

cartografiar la distribución de materia oscura (delatada por su efecto gravitatorio). Naturalmente, el GL ha de ser especialmente sensible a la presencia de un gran agujero negro, un objeto invisible que deforma en modo extremo el espaciotiempo alrededor de su horizonte.

#### 4. La sombra de un agujero negro, un nuevo test de la Relatividad

En la película “Interstellar” aparece un agujero negro supermasivo. La imagen que se muestra más abajo estudia cómo se piensa que podría ser su sombra: el “negro” de ese agujero negro, rodeada por un anillo brillante, producido por la materia muy caliente de su disco de acreción.

Gargantua, el agujero imaginario de la película, está demasiado lejos de nosotros; sin embargo, en la zona central de nuestra galaxia, la Vía Láctea, está Sagittarius A\*, un agujero negro de 4,1 millones de masas solares. Se estima que, vista desde la Tierra, su sombra es de unos 50 micro-arcos de segundo de anchura: como observar desde nuestra casa una uva situada en la Luna.

El actual proyecto EHT (“Event Horizon Telescope”), un conjunto de telescopios situados en distintos puntos de la Tierra, podría llegar a tener la resolución suficiente como para captar por primera vez la imagen del entorno inmediato del horizonte de Sagittarius A\*. Estos logros del futuro cercano, detectar las sombras de agujeros negros, supondrán no sólo coronar años de esfuerzo teórico y tecnológico: pueden ser también un nuevo test del rango de validez de la propia Relatividad General clásica.

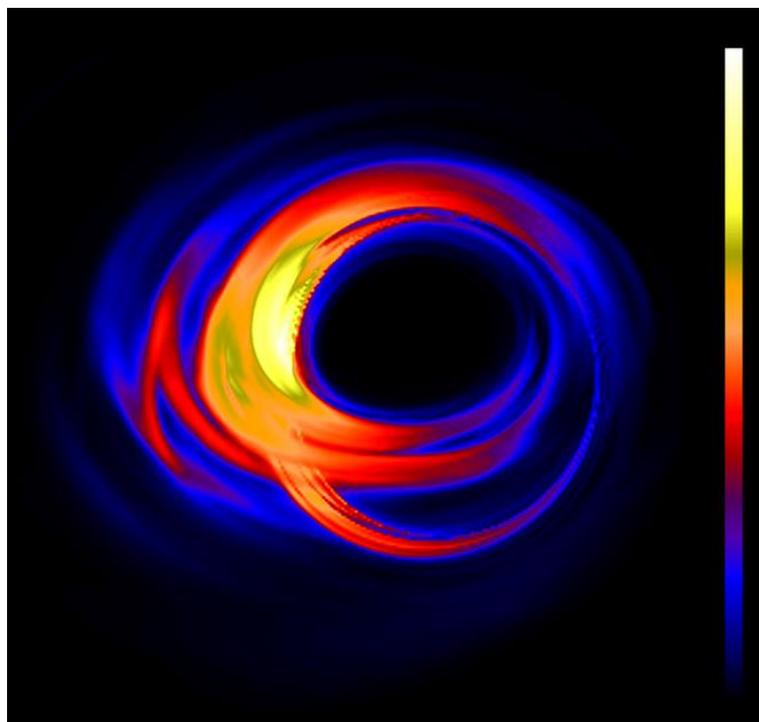


Figura 3

La teoría de Einstein es la mejor teoría de la gravitación de que disponemos hoy. Pero...está incompleta. Es una teoría geométrica y determinista que ignora los efectos cuánticos (discontinuos y probabilistas) que gobiernan el mundo subatómico. Junto a las singularidades del big bang y de los agujeros negros se entrelazan estos “mundos” de la Relatividad General y de la Mecánica Cuántica, de lo grande y lo pequeño: éste es el terreno de “la gravedad cuántica”, todavía por desarrollar satisfactoriamente.

Einstein modeló el espaciotiempo como un “continuo tetradimensional”. Y los éxitos grandiosos de su teoría tienen también los pies de barro: la “continuidad” puede quebrar, puede ser sólo resultado de una (muy buena) aproximación. ¿Y qué decir de la “tetradimensionalidad”?

Uno de los problemas de la Relatividad General es que no explica por qué la gravedad es mucho más débil que las demás fuerzas fundamentales. Según algunas teorías, el universo que percibimos, al que estamos acostumbrados, es una membrana tetradimensional en un espaciotiempo con más dimensiones. No vemos estas dimensiones extra porque la luz no se propagaría por ellas. Sin embargo, la gravedad, el reflejo de la geometría del espaciotiempo, sí: se difundiría también hasta el último rincón de ellas. Supongamos que existe otra dimensión espacial, adicional a las usuales: la gravedad podría penetrar y diluirse a lo largo de toda ella. No sería “tan” débil: es que estaría distribuyendo su trabajo por más dimensiones que las otras fuerzas de la naturaleza.

En los últimos años se está realizando un intenso estudio de las ecuaciones de Einstein en dimensiones superiores. Y se han encontrado sorpresas, por ejemplo, agujeros negros “matemáticos”, que no son posibles en un universo tetradimensional.

La Relatividad General de Einstein permite no sólo predecir agujeros negros (como los de Schwarzschild y Kerr), sino, también, el tamaño y la forma de sus sombras. ¿Y si observamos formas diferentes a las predichas? Curiosamente, las teorías con dimensiones extra predicen una forma diferente para los distintos tipos de agujeros negros que en ellas son posibles. De modo que, una vez más en la historia del pensamiento, el estudio de la luz y de las sombras parece ir de la mano del progreso en un mejor entendimiento de las leyes más básicas de nuestro universo.

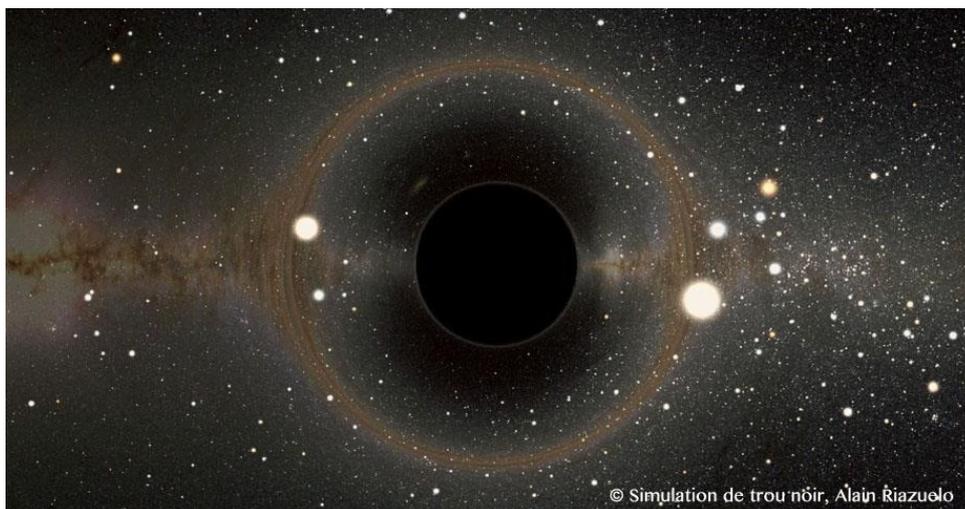


Figura 4

## 5. Anexo: ¿qué es un agujero negro relativista?

La métrica de Schwarzschild,  $g_s$ , se puede escribir en un sistema de coordenadas “polares”  $(t, r, \theta, \varphi)$  como

$$(1) \quad g_s = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2,$$

donde  $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  es la métrica usual de la 2-esfera unitaria.

En esta expresión se han presupuesto unidades geométricas (en las que  $c = G = 1$ ); en otro caso, la componente “temporal-temporal” de  $g_s$  hubiera aparecido como

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

De (1) se sigue inmediatamente que la métrica de Schwarzschild es estacionaria (invariante bajo traslaciones temporales) y, de hecho, estática. Además, como su parte angular,  $r^2 d\sigma^2$ , es la métrica de una 2-esfera de radio  $r$ ,  $g_s$  posee simetría esférica (es invariante bajo las transformaciones de  $O(3)$ ). Como es sabido, el teorema de Birkhoff afirma que si  $ds$  es una métrica relativista con simetría esférica, entonces  $ds = g_s$ .

La hipersuperficie  $r = r_s$  (“el horizonte”), donde  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  (“el radio de Schwarzschild”) juega un papel decisivo en la caracterización relativista del concepto de “agujero negro”.

Para un observador “en reposo” ( $dr = d\theta = d\varphi = 0$ ), sucede que

$$g_s = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \begin{cases} < 0 & \text{si } r > r_s \\ = 0 & \text{si } r = r_s \\ > 0 & \text{si } r < r_s \end{cases},$$

de donde podemos deducir que una “partícula” (un observador con masa) solo puede permanecer en reposo si está fuera del horizonte ( $r > r_s$ ), ya que las líneas del universo de las partículas son temporales:  $g_s < 0$ . En el horizonte ( $r = r_s$ ) una tal “partícula” sigue una geodésica nula (va a la velocidad de la luz). Más allá, al atravesar el horizonte ( $r < r_s$ ) ninguna partícula puede permanecer en reposo, pues debería avanzar con velocidad superior a la de la luz.

La definición intuitiva “standar” de agujero negro habla de una región cuya gravedad es tan fuerte que ni tan siquiera la luz puede escapar de ella. Este recurso a la “velocidad de escape” de un objeto respecto a cierto campo gravitatorio ya fue usado hace un par de siglos por Michell (y más tarde por Laplace) para especular con la posibilidad de que existieran regiones con campos gravitatorios lo suficientemente intensos para que la correspondiente velocidad de escape superara a la de la luz. Así que la caracterización intuitiva anterior de un agujero negro podría parecer anterior a la teoría de la relatividad general.

Sin embargo, las propiedades del horizonte de la métrica de Schwarzschild aportan un paso más allá que revoluciona esta descripción del concepto de agujero negro: se trata de una región del espacio-tiempo en la que éste se desploma sobre sí mismo, implosionando con una

velocidad superior a la de la luz, arrastrándolo “todo” en este proceso. Ésta es la verdadera razón que debemos a Schwarzschild de que la luz no pueda escaparse de la región acotada por el horizonte: en su interior el “espacio” se comprime más rápido que cualquier objeto, incluso que la propia luz, arrastrándolo hacia la singularidad, aún cuando éste esté apuntando hacia el exterior.

## Referencias

- [1] HAWKING, S. and ELLIS, G.R., *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, 1973.
- [2] O’NEILL, B., *The geometry of Kerr black holes*, A.K. Peters, 1994.
- [3] REALL, H., *Lectures on black holes*, <http://bit.ly/1Pg5qUc>, 2013.
- [4] ROJO, J., GARRO, J.C., ORTIZ, E. y CAÑADAS, G. *Luz y gravedad*, Revista Pensamiento Matemático, Volumen 0, Abril 2011.

### Sobre el autor:

Nombre: José Rojo Montijano

Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es

Institución: Universidad San Pablo CEU, España.

# Juegos y Rarezas Matemáticas

## Música, en clave geométrica, para una obra arquitectónica

### Music inspired geometry, for an architectural project

Ascensión Moratalla y David Guillén

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 157-164, ISSN 2174-0410

Recepción: 23 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de abril de 2017

#### Resumen

De las muchas formas que puede inspirar una obra arquitectónica la composición de una obra musical, proponemos en este trabajo una, que conjuga la esencia del diseño arquitectónico y la geometría.

**Palabras Clave:** Geometría, Arquitectura, Música, Didáctica de las Matemáticas.

#### Abstract

An architectural project could be used to inspire a musical production in many different ways. In this article, we propose an innovative way to create a musical piece that is inspired by the combination of the essence of architectural design and geometry.

**Keywords:** Mathematics, Music, Architecture.

## 1. Introducción

Este artículo es consecuencia de la reflexión sobre la relación entre las matemáticas y distintas expresiones artísticas, línea de trabajo que venimos desarrollando en el grupo de Innovación Educativa de la UPM, Didáctica de las Matemáticas, desde hace años. Es una manera de hacer confluir en la misma experiencia, diversas facetas del Conocimiento, buscando interrelaciones entre ellas y mostrando la belleza a la que llevan tales relaciones.

El trabajo aquí presentado se desarrolló en la asignatura de Geometría Afín y Proyectiva (GAP), correspondiente al primer curso de Fundamentos de la Arquitectura de la UPM del año académico 2015/16, siguiendo las directrices de un sistema educativo basado en los principios de Bolonia y centrado en el aprendizaje por competencias.

De acuerdo con las competencias recogidas en la Guía de Aprendizaje de esta asignatura, nos fijamos dos objetivos principales en la formulación del trabajo:

- Los alumnos desarrollan su capacidad de análisis y son capaces de extrapolar los conocimientos adquiridos a situaciones nuevas. Ser capaces de aplicar, en este caso en particular, las Matemáticas en otras áreas de Conocimiento.

- Los alumnos desarrollan su creatividad. La creatividad es un proceso complejo que se manifiesta en cualquier área del Conocimiento y sin duda en las Matemáticas. Según Penagos-Aluni, “una condición necesaria para el desarrollo de la humanidad, para la calidad de lo humano”.

Este proceso creativo va a exigir a los alumnos, por un lado, adquirir los conocimientos matemáticos necesarios para abordar el problema y por otro, superar una barrera interna o psíquica, al tener que aplicar las matemáticas a una situación tan poco habitual. En cuanto al profesor, le requiere impartir la asignatura con un enfoque adecuado, procurando una propuesta de trabajo que recoja los objetivos fijados y sea atractiva al alumno.

## 2. La propuesta de trabajo

Conscientes de la importancia de la geometría en el diseño arquitectónico, a lo largo del curso, se analizaron distintas obras de arquitectura en función de los contenidos de la asignatura de GAP. Con el estudio de los movimientos del plano y del espacio, se fueron desgranando los elementos mínimos de la composición geométrica de diferentes ejemplos constructivos, para pasar, posteriormente, al proceso inverso que consistió en elaborar modelos geométricos aplicando dichas isometrías a una unidad mínima generadora. Uno de estos ejemplos fue High-Rise Office Building (Doha, Qatar) del arquitecto Jean Nouvel, para cuyo recubrimiento utiliza mallas con figuras semejantes, basadas en un diseño poligonal (figura 1).

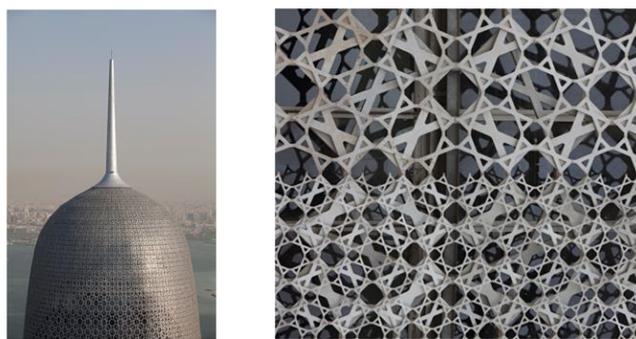


Figura 1. High-Rise Office Building

El proceso de conexión entre Matemáticas y otras áreas artísticas culminó en un trabajo individual, en el que se propuso obtener una imagen que recogiese, desde un punto de vista geométrico, la esencia de una obra arquitectónica elegida por el alumno. A partir de esa forma mínima y aplicando el conjunto de isometrías consideradas adecuadas, por el alumno, se elaboró un friso y se plasmó en clave musical los elementos intervinientes, dando como

resultado una melodía más que sorprendente, cuya base de inspiración fue el ejemplo arquitectónico.

El siguiente trabajo fue realizado por David Guillén alumno de la asignatura.

### 3. El trabajo

El Burj Al Arab Hotel (figura 2) es un hotel de lujo con 321 metros de altura situado en la costa de Dubai. Diseñado por el arquitecto Tom Wright de WS Atkins & Partners y construido entre 1994 y 1999. Se corona como el cuarto hotel más alto del mundo, una obra muy compleja sobre todo por su dificultad de construcción sobre una isla artificial a 270 metros del Golfo Pérsico.



Figura 2. Burj Al Arab Hotel.

Su singular silueta evocando un barco de la vela en mitad del océano, nos transporta a tierras lejanas, hasta Japón, en cuyo abecedario encontramos formas que se asemejan a los primeros bosquejos de Wright del Burj Al Arab (figura 3).



Figura 3

De entre todas las letras que componen el abecedario japonés, las letras “fu” y “ra”, a nuestro parecer, condensan la idea original del diseño (figura 4).

ア	カ	サ	タ	ナ	ハ	マ	ヤ	ラ	ワ		ガ	ザ	ダ	バ	パ
a	ka	sa	ta	na	ha	ma	ya	ra	wa		ga	za	da	ba	pa
イ	キ	シ	チ	ニ	ヒ	ミ		リ			ギ	ジ	ヂ	ビ	ピ
i	ki	shi	chi	ni	hi	mi		ri			gi	ji	ji	bi	pi
ウ	ク	ス	ツ	ヌ	フ	ム	ユ	ル			グ	ズ	ヅ	ブ	プ
u	ku	su	tsu	nu	fu	mu	yu	ru			gu	zu	zu	bu	pu
エ	ケ	セ	テ	ネ	ヘ	メ		レ			ゲ	ゼ	デ	ベ	ペ
e	ke	se	te	ne	he	me		re			ge	ze	de	be	pe
オ	コ	ソ	ト	ノ	ホ	モ	ヨ	ロ	ヲ	ン	ゴ	ゾ	ド	ボ	ポ
o	ko	so	to	no	ho	mo	yo	ro	o	n	go	zo	do	bo	po

Figura 4

Sin embargo, pensando en la estética del friso resultante, parece más interesante la letra ra. Así pues, la imagen elegida para recoger la esencia de este diseño arquitectónico sería la correspondiente a la figura 5.

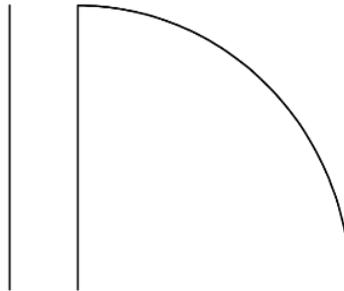


Figura 5

Para la composición del friso se necesita, además de la unidad generadora, un conjunto de movimientos del plano, adecuado. Considerando entonces, el siguiente conjunto de transformaciones:

$$\left\{ G^{\frac{\pi}{2}k}, k=0,1,2,3 \right\}$$

es decir, giros de centro el origen y ángulos proporcionales a  $\frac{\pi}{2}$ , que aplicados a la figura inicial nos genera el motivo de la figura 6.

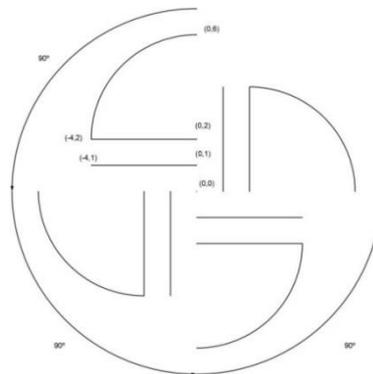


Figura 6

Las sucesivas transformaciones de la figura 6 utilizando las traslaciones del conjunto

$$\{T_{na}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

Dan como resultado el friso (figura 7).



Figura 7

La segunda parte del trabajo consiste en transportar estas isometrías a un plano musical. Es innegable la estrecha relación que mantiene la música con las matemáticas. No toda composición musical nos resulta agradable al oído, y curiosamente la música que más aceptamos es aquella regida por normas matemáticas en sus fundamentos.

Las proporciones matemáticas implícitas en la música han sido utilizadas, entre otros arquitectos, por Gaudí. En el templo de la Sagrada Familia, se pueden encontrar proporciones básicas como las que Pitágoras utilizó para hacer su escala musical, basada en el sistema de quintas. La proporción  $1/2$ , que en música da una octava, la proporción  $2/3$ , que da una quinta (la nota dominante de un acorde), y la proporción  $3/4$ , que da la cuarta (la subdominante, que en realidad es una quinta hacia abajo), son las proporciones que se pueden encontrar tanto en las grandes dimensiones del templo, en planta o sección, como en detalles mucho más pequeños (figura 8).

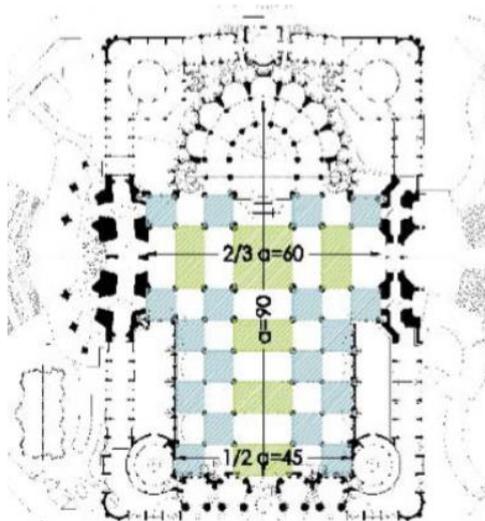


Figura 8

Esta relación de quintas queda reflejado en el círculo de quintas (figura 9).

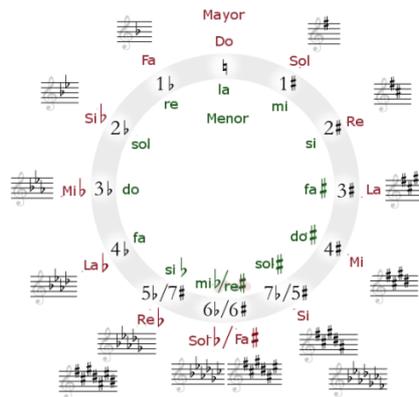


Figura 9

La traducción musical de la geometría del friso debe seguir unas normas como cualquier traducción de un idioma a otro, para conseguir una coherencia musical. Es evidente que si se realiza una traducción literal palabra a palabra de un idioma a otro, la traducción no será correcta. En este caso las líneas del módulo que genera el friso son interpretadas según su

Figura 10

forma. Las rectas horizontales como notas tenidas, las verticales como acordes generados por varias notas que suenan a la vez, y las curvas como subidas y bajadas rápidas recorriendo la escala. La traslación se interpreta como la repetición del mismo fragmento comenzando otra vez desde el principio. Consiguiendo así estirar el módulo del friso sobre una línea temporal, ya que la música se rige con una línea del tiempo.

Realizando estas técnicas de traducción matemática a música lógica, se obtiene como resultado la partitura que aparece en la figura 10.

En ella se pueden apreciar ciertas líneas ascendentes y descendentes análogas al friso, notas de larga duración y acordes. Todo sobre una base armónica basada en las proporciones matemáticas que el oído acepta con toda naturalidad.

Su ejecución se puede escuchar haciendo clic en la siguiente imagen (figura 11).



Figura 11

En el diagrama de la figura 12, se observa el dibujo que describe la música al pasar por las diferentes frecuencias. Al fin y al cabo el pentagrama sólo es una forma de representar gráficamente cada frecuencia (cada nota) de manera que su lectura resulte sencilla, ya que interpretar una pieza musical leyendo su diagrama de frecuencias sería algo incómodo.

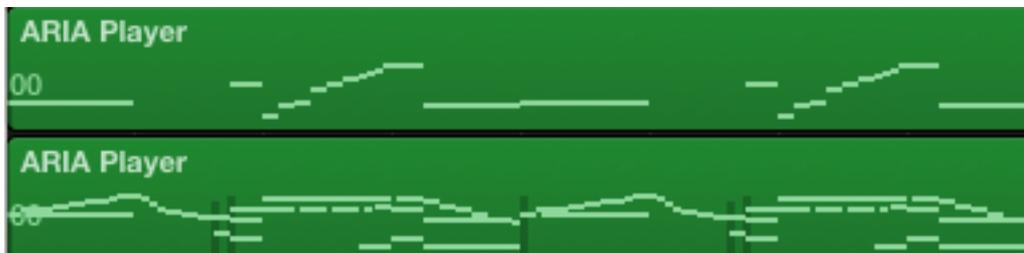


Figura 12

La matemática es una ciencia que nos ayuda a comprender el mundo que nos rodea. La música, al igual que la arquitectura, tiene componentes artísticos que curiosamente se amplifican con el uso de las matemáticas. Es por ello que este trabajo ha sido de una extraordinaria "sencillez compleja" al relacionar disciplinas tan diferentes en su expresión pero tan iguales en su composición.

## 4. Conclusiones

Tras la experiencia podemos afirmar que este tipo de planteamiento ayuda a conseguir los objetivos fijados sobre las competencias generales de Creatividad, Capacidad de Análisis e Imaginación así como la adquisición del Conocimiento Matemático en estudio.

Señalar que los alumnos, en un primer momento, mostraron su preocupación por aplicar conceptos geométricos y expresiones algebraicas en estas áreas de expresión artística. El paso de lo abstracto a lo concreto fue una barrera, que según iban obteniendo resultados, salvaron,

en general, de una forma más que satisfactorio, motivados por la curiosidad del resultado final.

## Referencias

- [1] <http://www.jeannouvel.com>
- [2] WRIGHT, Tom. *Burj al Arab hotel*, <http://wkkarchitects.com>
- [3] GUILERA, Llorenç. *Anatomía de la creatividad*, FUNDIT-Escola Superior de Disseny. Sabadell. 2011.
- [4] <http://www.sagradafamilia.org/es/geometria>
- [5] [https://es.wikipedia.org/wiki/Círculo\\_de\\_quintas](https://es.wikipedia.org/wiki/Círculo_de_quintas)

### Sobre los autores:

*Nombre:* Ascensión Moratalla  
*Correo Electrónico:* ascension.moratalla.delahoz@upm.es  
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* David Guillén  
*Correo Electrónico:* daguiba048@gmail.com  
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

### Grupo de Innovación educativa Didáctica de las Matemáticas:

*Nombre:* Ascensión Moratalla  
*Correo Electrónico:* ascension.moratalla.delahoz@upm.es  
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* Juana María Sánchez  
*Correo Electrónico:* juanamaria.sanchez@upm.es  
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* M<sup>a</sup> Agripina Sanz  
*Correo Electrónico:* mariaagripina.sanz@upm.es  
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* M<sup>a</sup> Carmen Ferreiro  
*Correo Electrónico:* mariacarmen.ferreiro@upm.es  
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* Vicente Moratalla  
*Correo Electrónico:* vicente\_moratalla@hotmail.com  
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

# Juegos y Rarezas Matemáticas

## Factores que determinan el nivel de ansiedad hacia la matemática en alumnos de nivel superior

## Determinant factors of the anxiety towards mathematics in college students

Arturo García-Santillán, Jutta Schnell y Jesica Ramos-Hernández

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 165-180, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Oct'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

### Resumen

La presente investigación tuvo como propósito la medición del nivel de ansiedad hacia las matemáticas en los alumnos de una escuela náutica en Veracruz, para lo cual se tomaron como fundamento los trabajos seminales de Fennema y Sherman (1976), así como los estudios recientes de García-Santillán, Escalera y Venegas (2013, 2014, 2015). Con este fin se utilizó la escala de Muñoz y Mato (2007) que mide cinco factores: ansiedad ante la evaluación, la temporalidad, la comprensión de problemas matemáticos, frente a los números y las operaciones matemáticas y ante situaciones matemáticas en la vida cotidiana. La encuesta se aplicó cara a cara a 202 estudiantes de los diferentes semestres de la escuela náutica Fernando Siliceo de la ciudad de Veracruz. La consistencia interna obtenida fue  $\alpha=0.947$  individual y 0.776 agrupada (Hair et. al, 1991). Este estudio se abordó desde el paradigma cuantitativo no experimental de corte transversal utilizando el análisis factorial exploratorio como técnica para la medición de los datos (KMO,  $X^2$ ,  $\alpha=0.05$ ).

**Palabras Clave:** ansiedad hacia las matemáticas, habilidades matemáticas, evaluación de las matemáticas, temporalidad hacia las matemáticas, situaciones matemáticas.

### Abstract

The following study aims to measure the level of anxiety towards mathematics on students of a nautical school in Veracruz and it is founded on the seminal work of Fennema y Sherman (1976) and the recent studies of García-Santillán, Escalera y Venegas (2013, 2014, 2015). To achieve this end, the instrument used was the scale of Muñoz and Mato (2007), which measures five factors: anxiety towards evaluation, temporality, numbers and maths operations, understanding of maths problems and mathematical situations in daily life. The poll was applied face to face to 202 students of different academic years of the Fernando Siliceo nautical school in the city of Veracruz. The internal consistency was  $\alpha=0.947$  individual and 0.776 grouped (Hair et. al, 1991). This study was approached from a transversal non-experimental quantitative paradigm using an explorative factorial analysis as data-gathering technique (KMO,  $X^2$ ,  $\alpha=0.05$ ).

**Keywords:** anxiety towards mathematics, mathematics abilities, evaluation of mathematics, temporality towards mathematics, mathematical situations.

## 1. Introducción

La educación es un tema que recibe gran atención por su lugar como pilar de la sociedad, pues es el fundamento requerido por todos para desarrollarnos en alguna actividad remunerada y proveer para uno mismo y nuestra familia, además de ser el elemento que permite el desarrollo de la población de un país y la clave para alcanzar un futuro promisorio.

Las matemáticas juegan un papel central en la educación, al ser un área de conocimiento utilizada de manera cotidiana en situaciones relativas a las finanzas y se encuentran presentes en una cantidad cada vez mayor de empleos relativos a la ingeniería, tecnología, diseño y animación, por mencionar las más populares.

Sin embargo, a pesar de su relevancia México presenta grandes limitaciones a este respecto, como lo demuestran los resultados proporcionados por PISA (Program for International Student Assessment) del año 2012 de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), en los cuales es posible observar la preocupante situación del país a este respecto.

Dicho informe indica que, si bien se ha incrementado 28 puntos en matemáticas, en comparación con el estudio de 2003, el 55% de los alumnos mexicanos no logró obtener el nivel de competencias básicas en matemáticas con un puntaje promedio de 413, lo que ubica al país por debajo de países como Portugal (487), España (484) y Chile (423); cabe señalar que el puntaje promedio de OCDE es de 494, lo que implica que México se encuentra casi dos años de escolaridad por debajo de este promedio.

Con base en lo anterior, sería posible afirmar que con los resultados del año 2012, serían necesarios más de 25 años para lograr el promedio mínimo de la OCDE en el campo de las Matemáticas y una de las razones para ello podría ser el nivel de ansiedad hacia esta materia, pues en el informe mencionado anteriormente se encontró que el 75% de los alumnos muestran preocupación hacia la materia, en especial las mujeres y es México quien presenta el índice de ansiedad más elevado de los países de la OCDE.

Por lo tanto, ¿será esta ansiedad la causa de ese bajo rendimiento en matemáticas?, ¿cuáles serán los factores que inciden en la obtención de resultados tan bajos en esta área del conocimiento? O ¿será acaso el formato de enseñanza de los profesores? De esta manera resulta evidente la necesidad de llevar a cabo estudios relativos a esta problemática que permitan obtener evidencia empírica de este fenómeno y ayuden a explicar el rezago de los estudiantes.

Para medir la ansiedad hacia las matemáticas, Fennema y Sherman (1976) llevaron a cabo estudios seminales donde proponen una escala de 108 factores correspondientes a nueve categorías para medir esta variable, descubriendo que la confianza se encuentra tan altamente relacionada al desempeño como las variables cognitivas.

Por otro lado, Tapia y Marsh (2004) desarrollaron un test llamado inventario de actitudes hacia las matemáticas (ATMI, por sus siglas en inglés) de 49 ítems relativos a las categorías de confianza, utilidad, gusto, motivación y expectativas de los padres y profesores, por

mencionar algunos ejemplos; estos autores encontraron que si los niveles de disfrute de los estudiantes aumentan, su nivel de ansiedad hacia las matemáticas disminuye.

Aunado a lo anterior, resulta pertinente mencionar que de manera reciente existen estudios que han encontrado una relación entre la ansiedad hacia las matemáticas y otras materias relacionadas como la estadística, y el desempeño de los estudiantes de diferentes niveles escolares, como es el caso de los llevados a cabo por García-Santillán en colaboración con otros autores en los últimos años (2014 y 2015), quienes han utilizado la escala de Muñoz y Mato (2007) en diferentes contextos académicos, demostrando la relación entre las variables de este instrumento de manera efectiva y confirmando que la ansiedad es un factor que dificulta el proceso de aprendizaje de las matemáticas y que la actitud hacia las matemáticas se relaciona con el desempeño en dicha materia, siendo la ansiedad hacia la evaluación, una variable que tiene un peso importante en la ansiedad hacia las matemáticas.

En el caso particular de esta investigación, la pregunta central sería: ¿existe una estructura de variables latentes que expliquen el nivel de ansiedad en alumnos universitarios de la escuela náutica Fernando Silíceo?, por lo que el objetivo sería identificar variables latentes que expliquen el nivel de ansiedad hacia las matemáticas en alumnos universitarios para obtener una mejor comprensión del fenómeno estudiado.

Además, se proponen las siguientes hipótesis:

H<sub>0</sub>: No existe una estructura de variables latentes que expliquen el nivel de ansiedad en alumnos universitarios.

H<sub>a</sub>: Existe una estructura de variables latentes que expliquen el nivel de ansiedad en alumnos universitarios.

Y de manera específica

H<sub>i</sub>: La ansiedad hacia la matemática de los alumnos universitarios puede ser explicada al menos por un factor.

A continuación se analiza y discute la literatura relevante que explica este fenómeno de la ansiedad desde su base seminal, permitiendo situarnos en la realidad teórica y empírica que sustenta la presente investigación.

## 2. Revisión de literatura

Primeramente se procederá a la definición del concepto de ansiedad hacia las matemáticas, la cual según Richardson y Suinn (1972) son “los sentimientos de tensión y ansiedad que interfieren con la manipulación de números y la resolución de problemas matemáticos en situaciones académicas y de la vida cotidiana” (p. 1), desarrollando la Escala de Medición de Ansiedad Matemática (MARS por sus siglas en inglés) y estableciendo en su investigación la confiabilidad y validez de dicho instrumento.

Bajo la perspectiva de Tobias y Weissbrod (1980) la ansiedad matemática es “el pánico, indefensión, parálisis y desorganización mental que surge en algunas personas cuando se les solicita resolver un problema matemático” (p.65), encontrando diferencias en el desempeño matemático entre hombres y mujeres debido a la ansiedad hacia esta materia.

De esta manera, es posible señalar que la problemática relativa a la ansiedad hacia las matemáticas se debe principalmente a que resulta un factor que previene a los estudiantes de alcanzar un buen desempeño en el proceso de aprendizaje como lo demostraron las investigaciones de Luo, Wang y Luo (2009), Venkatesh Kumar y Karimi (2010), Díaz, Herrera, Saucedo y Recio (2015) y García-Santillán, Escalera-Chávez, Moreno-García y Santana-Villegas (2015), quienes también descubrieron que los niveles de ansiedad resultan más elevados en el caso de las mujeres.

Sin embargo, cabe señalar que una investigación evaluativa con diseño transversal realizada a los alumnos de la licenciatura de Administración de la Universidad Autónoma del Estado de México demuestran que una dosis moderada de ansiedad conlleva a desempeños de alto rendimiento en el área matemática (Petritz, Barona, López, & Quiroz, 2010), por lo que no necesariamente un nivel muy bajo de ansiedad es sinónimo de alto rendimiento en esta materia.

Otros estudios demuestran que existen ciertas variables que inciden en la ansiedad hacia las matemáticas, como el de Pérez-Tyteca, Castro, Segovia, Castro, Fernández y Cano (2009), quienes al utilizar la escala de Fennema- Sherman (1976) encontraron, con un análisis estadístico-descriptivo de los datos, que no únicamente el género es un elemento a considerar sino también la rama del conocimiento que estudian los alumnos que fueron encuestados.

Heydari, Abdi y Rostami (2013) demostraron, gracias a una investigación de carácter correlacional que utilizó la escala MARS (Mathematics Anxiety Scale) y el test de personalidad NEO de cinco factores, que las características de personalidad de los maestros inciden en la ansiedad hacia las matemáticas, por ejemplo un maestro concienzudo, agradable, responsable y con alta flexibilidad y estabilidad emocional puede ser muy útil para reducir los niveles de ansiedad en los estudiantes.

Un ejemplo adicional de una variable externa relacionada con el objeto de estudio es presentado por Tapia y Marsh (2004), quienes desarrollaron el instrumento ATMI (Attitude Towards Mathematic Inventory) con los factores de ansiedad, confianza, valor, aprecio, motivación y expectativas de padres y maestros, descubriendo que, al menos en la muestra que ellos tomaron, la actitud de padres de familia y maestros hacia las matemáticas no incidía en los sujetos, sugiriendo que debería analizarse este caso con una muestra más representativa o verificar si existe variación de acuerdo a la edad de las personas.

Por otro lado, los resultados de Estrada y Díez-Palomar (2011) muestran un vínculo con el auto-concepto, es decir, el sentimiento de seguridad o inseguridad hacia las matemáticas, y la actitud que se tiene hacia ella; por lo tanto, el ser capaz de resolver un problema de Matemáticas ocasiona una actitud positiva que emana de ello. Estos autores crearon un instrumento propio partiendo de la Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS) de 1995 y complementando el cuestionario con preguntas relativas a profesión, género, edad, número de hijos y nivel educativo, esto para conocer el perfil de las personas participantes.

En el estudio realizado a maestros por Çathloğlu, Gürbüz y Birgin (2014), los datos analizados con el programa SPSS (Statistical Procedures for Social Science) demostraron que si bien, las actitudes y percepciones relativas a las matemáticas inciden en los niveles de ansiedad hacia dicha materia, variables como el nivel educativo de los padres, ingreso familiar y lugar de nacimiento no son relevantes, demostrando que algunas variables que el investigador puede considerar para el análisis en realidad son intrascendentes.

Incluso en un contexto académico en universidades reconocidas de México como la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), el Instituto Politécnico Nacional (IPN) y la Escuela Bancaria y Comercial (EBC), una investigación de corte transversal con alcance correlacional permitió observar que los alumnos de Posgrado en Administración, aun contando con varios años de experiencia en el campo laboral, presentan inseguridad y ansiedad ante aquellas situaciones relativas al empleo de las matemáticas (Cardoso, Cerecedo, & Ramos, 2012).

En un estudio de análisis factorial, García-Santillán, Edwards-Wurzinger y Tejada-Peña (2015) demostraron con el uso del instrumento de Muñoz y Mato (2007) que todos los factores evaluados se encuentran directamente asociados, por ejemplo si existe ansiedad hacia la evaluación, también se presenta ansiedad hacia la comprensión de problemas matemáticos, hacia los números y hacia las situaciones matemáticas de la vida cotidiana.

Como recomendación, Furner y Bernan (2003) sostienen en un artículo académico que los alumnos deben considerar las matemáticas como un esfuerzo humano para que aprendan su valor y conozcan las ventajas de aprender matemáticas tanto dentro como fuera del salón, pues no es algo que puedan evitar.

Muñoz y Mato (2008), posterior a su análisis correlacional de variables, concluyen en su trabajo que desarrollar ciertas actitudes forma parte implícita de los objetivos de enseñanza y que debe ser un objetivo de la educación, por lo que al demostrarse que las actitudes tienen una gran influencia en el aprendizaje de las matemáticas, los resultados de las investigaciones sobre actitud hacia las matemáticas deben emplearse para trabajar sobre esa línea y mejorar el aprendizaje de los estudiantes, ya que debe buscarse la formación integral de la persona.

Tezer y Bozkurt (2015) llevaron a cabo un estudio empleando como instrumentos la escala de ansiedad hacia las matemáticas desarrollada por Ikegulu en 1998 y la escala de actitud hacia las matemáticas de Baykul en 1990 para evaluar los niveles de ansiedad y actitud hacia las matemáticas de un grupo de estudiantes en necesidad de protección. De acuerdo a estos autores, la atmósfera de enseñanza y aprendizaje puede arreglarse de tal manera que los alumnos aprendan matemáticas con gusto y placer, por lo que en este sentido, resulta importante conocer las causas de ansiedad hacia las matemáticas y eliminarlas de la práctica educativa.

Con base en lo anterior se demuestra la apremiante necesidad de investigar el fenómeno de la ansiedad matemática, por lo cual a continuación se describirá el diseño metodológico, análisis y resultados de la presente investigación, además de discutirse las conclusiones obtenidas y proponer algunas recomendaciones y futuras líneas de investigación relativa al objeto de estudio que permitan incrementar el conocimiento de este ámbito y poder utilizar el mismo con el fin de mejorar los procesos educativos de la materia de matemáticas, la cual resulta de gran utilidad en la formación académica y personal del ser humano.

### 3. Diseño Metodológico

Para responder la pregunta de investigación y la correspondiente contrastación de las hipótesis, además de alcanzar el objetivo propuesto para el presente estudio, a continuación se diseña la investigación y se describe el método a utilizar.

Es un estudio no experimental dado que no manipula las variables independientes que modifiquen el efecto ( $y$ ), de corte transversal considerando que la investigación de campo se lleva a cabo durante la semana del 11 al 15 de enero de 2015.

La presente investigación se aborda desde el problema cuantitativo, iniciando como descriptivo considerando que las características descriptivas del objeto y sujeto de estudio serán descritas desde su perfil socio demográfico, para posteriormente con la contrastación de las hipótesis pasarlo al plano explicativo.

Para la investigación de campo se utiliza la escala de Muñoz y Mato (2007) denominada "test de ansiedad hacia las matemáticas", la cual permite identificar la relevancia de las variables estudiadas y su posible correlación para explicar la ansiedad de los alumnos hacia las matemáticas.

Este instrumento metodológico mide cinco factores: Ansiedad ante la evaluación (ANSIEVAL), ansiedad ante la temporalidad (ANSIETEM), ansiedad ante la comprensión de problemas matemáticos (ANSIECOM), ansiedad frente a los números y las operaciones matemáticas (ANSIENUM), ansiedad ante situaciones matemáticas de la vida real (ANSIESIT). Se aplicó a 202 alumnos del 1° y 2° año de la carrera, quienes constituyeron la muestra de una población de 743 estudiantes inscritos en el ciclo escolar 2015-2016 de la escuela Náutica Fernando Siliceo de la ciudad de Veracruz.

Criterios de inclusión:

- Alumnos inscritos que no adeuden materias
- Alumnos de nacionalidad mexicana
- Alumnos del primer y segundo año de la carrera
- Alumnos que respondieron la totalidad de la encuesta

Para la contrastación de las hipótesis que guían el estudio seguimos el procedimiento estadístico propuesto por García-Santillán et al. (2013, 2014, 2015) referente al análisis factorial exploratorio en una primera instancia para reducir el grupo de factores sujetos a estudio, el cual consiste en lo siguiente:

- a) Para validar la pertinencia de la técnica primeramente se calcula el test de esfericidad de Bartlett con KMO, la prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  con  $ngl$ ,  $sig. = 0.05$ .
- b) En un siguiente momento calcular la matriz anti-imagen para obtener los valores de adecuación muestral por variable (MSA), los cuales en teoría corren a la unidad, de ahí que valores inferiores a 0.5 deberán ser excluidos.
- c) Posterior a ello, calcular la matriz de correlaciones para identificar el valor del determinante, el cual en teoría debe ser cercano a 0.00, considerando que valores cercanos a cero dan evidencia de correlaciones altas, caso contrario, si el valor del determinante es cercano a uno o distante de cero, las correlaciones serán bajas.
- d) Calcular los pesos factoriales y sus comunales que permitan obtener el Eigenvalue (EGV) y con ello el porcentaje de la varianza explicada.

Finalmente, se establece la región de aceptación o rechazo de las hipótesis de prueba:

- Rechazar  $H_0$  si  $X_{2calculado} > X_{2}$

## 4. Análisis y discusión de los datos

Los datos obtenidos fueron analizados utilizando el software SPSS Statistics Data Editor versión 19, arrojando los siguientes resultados que se describen en líneas posteriores.

Inicialmente se verificó la confiabilidad de los datos obtenidos utilizando el coeficiente alfa de Cronbach, con la cual se mide las correlaciones entre los ítems que forman parte del instrumento y cuyo valor mínimo aceptable es de 0.70 (Oviedo & Campo-Arias, 2005), pues cuanto más cercano a 1 sea el resultado, mayor será la fiabilidad de la escala empleada. En el presente caso, tanto el coeficiente alfa de los ítems de manera individual (0.947) como agrupados en un conjunto de cinco dimensiones (0.776) arrojan resultados aceptables, por lo que es posible sostener que se confirma la validez del instrumento.

Tabla 1. Confiabilidad estadística por medio del Alpha ( $\alpha$ ) de Cronbach.

ANSIEVAL, ANSIETEM ANSIECOM, ANSIENUM, ANSIESIT	Individual	Agrupada
Número de casos	123	0.776
Casos excluidos	100%	100%
%	0	0
%	0.0%	0.0%
Total Items	24 ítems	5 ítems

Fuente: elaboración propia con datos de la muestra

A continuación se presentan las estadísticas descriptivas y el coeficiente de variación de cada una de las dimensiones analizadas en la tabla 2:

Tabla 2. Estadísticas descriptivas.

	Media	Desviación típica	N del análisis	CV = $DV/\mu$
ANSIEVAL	27,4703	9,11953	202	33.19%
ANSIETEM	9,8366	3,89770	202	39.62%
ANSIECOM	5,3614	2,36960	202	44.19%
ANSIENUM	5,9406	2,52085	202	42.43%
ANSIESIT	4,0050	1,40892	202	35.17%

Fuente: elaboración propia con datos de la muestra

Con el objetivo de encontrar la consistencia interna, se aplicó la prueba de esfericidad de Bartlett por medio del índice Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) de adecuación de la muestra, el cual fue de 0.812, lo que denota la existencia de correlación entre las variables al mantenerse en el rango aceptado ( $> 0.5$ ). También se utilizó la prueba  $\chi^2$  de Pearson con nivel de significación ( $p$

< 0.01). Se observa que los valores obtenidos fueron altos, al ser de 736,128 con 10 grados de libertad.

Tabla 3. KMO y test de Bartlett.

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		0.812
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	735.128
	gl	10
	Sig.	0.000

Fuente: elaboración propia con datos de la muestra

La tabla 4 muestra los valores de las correlaciones de las dimensiones analizadas, en la que se muestra que todos sus niveles son altos (> 0.05), por lo que todas se encuentran inter-relacionadas, lo cual implica que existe una consistencia entre el conjunto de variables del modelo, por lo que resulta adecuado el análisis factorial.

Con respecto al valor determinante obtenido (0.025), este es menor de 0.05, lo cual también brinda evidencia de que existen correlaciones significativas en el conjunto de variables estudiadas.

Tabla 4. Matriz de correlaciones

	ANSIEVAL	ANSIETEM	ANSIECOM	ANSIENUM	ANSIESIT
Correlación ANSIEVAL	1,000				
ANSIETEM	,808	1,000			
ANSIECOM	,715	,703	1,000		
ANSIENUM	,750	,698	,822	1,000	
ANSIESIT	,493	,365	,606	,525	1,000

a. Determinante = ,025

Fuente: elaboración propia con datos de la muestra

En la diagonal de la matriz de correlación anti-imagen de la tabla 5 se observan las medidas de adecuación muestral (MSA) por cada dimensión, los cuales deben tener un valor cercano a 1 para determinar si el modelo de análisis factorial empleado resulta pertinente en la explicación de los datos obtenidos. Los resultados se encuentran en un rango entre 0.790 y 0.842, los cuales resultan significativos y por tanto confirman que el análisis factorial es óptimo para la explicación del fenómeno estudiado.

Tabla 5. Matriz anti-imagen.

		ANSIEVAL	ANSIETEM	ANSIECOM	ANSIENUM	ANSIESIT
Correlación anti-imagen	ANSIEVAL	<b>,809<sup>a</sup></b>				
	ANSIETEM	-,584	<b>,790<sup>a</sup></b>			
	ANSIECOM	-,010	-,271	<b>,805<sup>a</sup></b>		
	ANSIENUM	-,285	-,071	-,536	<b>,842<sup>a</sup></b>	
	ANSIESIT	-,203	,223	-,370	-,033	<b>,817<sup>a</sup></b>

Fuente: elaboración propia con datos de la muestra

A continuación se procederá a examinar los factores y componentes, mostrando en la tabla 6 la matriz de componentes o pesos factoriales de las cinco dimensiones analizadas y las comunalidades, así como los eigenvalues que permitirán explicar el total de la varianza. Cabe señalar que al sumar el cuadrado de cada carga factorial obtenemos como eigenvalue 3.626.

Table 6. Matriz de Componentes, Comunalidades, Eigenvalue y Varianza total

	Componente 1	Comunalidades
ANSIEVAL	,894	,800
ANSIETEM	,853	,727
ANSIECOM	,910	,828
ANSIENUM	,902	,814
ANSIESIT	,677	,458
Eigenvalue		3.626
Varianza Total		.7252=72.52%

Fuente: elaboración propia con datos de la muestra

Finalmente, tenemos los datos de la varianza total explicada en la tabla 7, pues como se puede observar en la tabla 6 se obtuvo una varianza de 72.52%, lo que implica que si el Eigenvalue es mayor a 1 (3.626) se comprueba la existencia de un componente que explique dicha varianza.

El componente 1 muestra en sus datos que cada una de las dimensiones presenta un peso factorial  $>0.5$ , siendo ANSIECOM (ansiedad ante la comprensión de problemas matemáticos) la de mayor peso (0.910), seguida de cerca por ANSIENUM (ansiedad frente a los números y las operaciones matemáticas) con 0.902 y con menor peso factorial pero aún con un peso importante son ANSIEVAL (ansiedad ante la evaluación) con 0.894 y ANSIETEM (ansiedad ante la temporalidad), mientras que el valor más bajo es ANSIESIT (ansiedad ante situaciones matemáticas de la vida real) con un valor de 0.677.

Tabla 7. Varianza Total Explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	3,627	72,538	72,538	3,627	72,538	72,538
2	,694	13,877	86,415			
3	,329	6,589	93,004			
4	,204	4,088	97,092			
5	,145	2,908	100,000			

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

Fuente: elaboración propia con datos de la muestra

## 5. Conclusiones

La ansiedad hacia las matemáticas es una de las barreras que enfrentan los estudiantes en los diferentes niveles escolares, lo que incide de manera directa en su rendimiento académico. Asimismo, esta materia es de vital importancia en el desarrollo académico y profesional de los estudiantes, particularmente la población del presente estudio, pues durante su carrera la mayoría de las materias se encuentran relacionadas con las matemáticas (álgebra, estática, dinámica, por mencionar algunas).

En este nivel académico de educación superior investigado, los estudiantes presentan altos niveles de ansiedad hacia las matemáticas, lo cual según Cardoso et al. (2012) se debe a sus experiencias en la formación académica anterior, por lo que a pesar de haber cursado matemáticas durante varios años, tienen inseguridad y ansiedad hacia la materia en el curso actual.

Asimismo, es posible observar que el análisis factorial resultó una técnica viable en el procesamiento de la información y comprobó la pertinencia de las dimensiones analizadas en la ansiedad de los alumnos hacia las matemáticas, demostrando una correlación entre las variables.

Al igual que García-Santillán et al. (2015), los resultados muestran que la ansiedad hacia situaciones matemáticas de la vida cotidiana, es la dimensión con menor peso en el fenómeno, contribuyendo únicamente un 45.8% a la varianza, por lo que los estudiantes muestran poca ansiedad hacia la misma.

Lo anterior podría implicar que los alumnos muestran un mayor nivel de ansiedad en contextos académicos mientras que al enfrentarse a situaciones de la vida cotidiana donde se requiere conocimiento matemático, su ansiedad disminuye notablemente, lo cual es un elemento interesante debido a que como señalan Furner y Berman (2003), los estudiantes deben darse cuenta que las matemáticas tienen aplicaciones fuera del salón de clases y es necesaria en la vida cotidiana, lo que podría auxiliar en su percepción hacia la materia y

reducir su nivel de ansiedad al verla como una parte necesaria de su desarrollo humano en la sociedad y no únicamente como una exigencia en el contexto escolar.

Por otro lado, la ansiedad ante la comprensión de problemas matemáticos y la ansiedad frente a los números de operaciones matemáticas son los componentes que más saturación tienen (0.910 y 0.902 respectivamente) y contribuyen en un 82.8% y 81.4% a la varianza, si bien los componentes restantes, ansiedad hacia la evaluación y hacia la temporalidad también obtuvieron altos porcentajes (80% y 72.7%), lo que implica que la mayoría de las dimensiones inciden ampliamente en la ansiedad de los alumnos hacia las matemáticas.

La información obtenida del presente estudio resulta pertinente en el sentido en que la ansiedad hacia las matemáticas es un factor que previene el desarrollo de los alumnos y disminuye su rendimiento no únicamente en esta materia, sino en otras de la currícula, pudiendo llegar a truncar sus aspiraciones de finalizar sus carreras.

## 6. Recomendaciones y futuras líneas de investigación

Resulta necesario llevar a cabo estudios de esta naturaleza en otros contextos académicos, tanto en otras universidades públicas y privadas como en otros niveles escolares con el fin de encontrar las variables que inciden en la ansiedad de los alumnos a las matemáticas y con esta información desarrollar medidas para reducir estos factores y con ello, mejorar el desempeño matemático de los estudiantes.

Otros contextos donde incide la ansiedad hacia las matemáticas pueden tener lugar en organizaciones y un estudio en las mismas podría mostrar correlaciones entre la ansiedad hacia las matemáticas y el desempeño profesional y laboral en los diferentes niveles organizacionales.

De los resultados obtenidos, es posible considerar que para impulsar el desempeño académico de los alumnos no únicamente debe tenerse en cuenta los programas de estudio y la enseñanza de los mismos sino también aspectos psicológicos y emocionales que pueden facilitarles su desarrollo escolar y profesional.

También podría investigarse la manera en que la ansiedad hacia las matemáticas incide en los niveles de ansiedad de los alumnos no únicamente en esta materia sino en otras que requieren la aplicación de conceptos y operaciones matemáticas.

Otros aspectos que inciden en la ansiedad hacia las matemáticas podrían relacionarse con elementos externos de los contextos académicos, como es el caso de la situación y condiciones de trabajo de los maestros que imparten estas asignaturas, para conocer si inciden en los niveles de ansiedad en los alumnos y si es posible desarrollar estrategias que permitan reducirlos.

Cuando una persona tiene una actitud positiva hacia las matemáticas le gusta la materia, por lo que su proceso de aprendizaje de esta materia se desarrolla con gusto y no se percibe como una obligación, por lo que al conocer las razones de la ansiedad y quitarlas, se creará una atmósfera placentera en el aula (Tezer & Bozkurt, 2015).

## Referencias

- [1] CARDOSO, E., CERECEDO, M., & RAMOS, J. (Agosto-Diciembre de 2012). *Actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes de posgrado en Administración: un estudio diagnóstico*. Revista de Estudios y Experiencias en Educación, 11(22), 81-98.
- [2] ÇATLIOĞLU, H., GÜRBÜZ, R., & BIRGIN, O. (Abril de 2014). *Do Pre-service Elementary School Teachers still have Mathematics Anxiety? Some Factors and Correlates*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(48), 110-127.
- [3] DÍAZ, J., HERRERA, S., SAUCEDO, M., & RECIO, C. (2015). El curso de razonamiento lógico y la actitud matemática de los estudiantes. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, 1-12.
- [4] ESCALERA-CHÁVEZ, M., GARCÍA-SANTILLÁN, A., & VENEGAS-MARTÍNEZ, F. (2014). *Modeling attitude toward Statistical with structural equation*. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 1(10), 23-31.
- [5] ESTRADA, A., & DíEZ-PALOMAR, J. (2011). *Las actitudes hacia las Matemáticas. Análisis descriptivo de un estudio de caso exploratorio centrado en la Educación Matemática de familiares*. Revista de Investigación en Educación, 2(9), 116-132.
- [6] FENNEMA, E., & SHERMAN, J. (Noviembre de 1976). *Mathematics Attitudes Scales: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and Males*. Journal for Research in Mathematics Education, 7(5), 324-326.
- [7] FURNER, J., & BERMAN, B. (2003). *Math anxiety: Overcoming a major obstacle to the improvement of student math performance*. Childhood education, 170-175.
- [8] GARCÍA-SANTILLÁN, A., EDWARDS-WURZINGER, A., & TEJADA-PEÑA, E. (2015). *What Factors Explain the Anxiety Level Towards the Study of Mathematics among Elementary School Students?* Mediterranean Journal of Social Sciences, 6(4), 564-572.
- [9] GARCÍA-SANTILLÁN, A., ESCALERA-CHÁVEZ, M., MORENO-GARCÍA, E., & SANTANA-VILLEGAS, J. (2015). *Factors that Explains Student Anxiety toward Mathematics*. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12(2), 361-372.
- [10] HEYDARI, H., ABDI, M., & ROSTAMI, M. (2013). *The survey of relationship between the degree of mathematics anxiety in high school students and the personality characteristics of their mathematics teachers*. Procedia - Social and Behavioral Sciences (84), 1133 – 1137.
- [11] LUO, X., WANG, F., & LUO, Z. (Diciembre de 2009). *Investigation and Analysis of Mathematics Anxiety in Middle School Students*. Journal of Mathematics Education, 2, 12-19.
- [12] MORENO-GARCÍA, E., GARCÍA-SANTILLÁN, A., & CRISTÓBAL-HERNÁNDEZ, C. (2014). *Evaluation, temporality, numerical skill and daily mathematics operations, as factors that explain Anxiety toward mathematics on high school students*. Asian Social Sciences, 12(10), 79-89.
- [13] MUÑOZ, J., & MATO, M. (2007). *Elaboración y estructura factorial de un cuestionario para medir la "ansiedad hacia las matemáticas" en alumnos de educación secundaria obligatoria*. Revista galego-portuguesa, 14(1).

- [14] MUÑOZ, J., & MATO, M. (2008). *Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en los alumnos de ESO*. *Revista de Investigación Educativa*, 26(1), 209-226.
- [15] OECD. (2013). *Informe de Resultados de PISA 2012*.
- [16] OVIEDO, H., & CAMPO-ARIAS, A. (2005). *Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach*. *Revista colombiana de psiquiatría*, 34(4), 572-580.
- [17] PÉREZ-TYTECA, P., CASTRO, E., SEGOVIA, I., CASTRO, E., FERNÁNDEZ, F., & CANO, F. (2009). *El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria*. PNA: *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 4(1), 23-35.
- [18] PETRIZ, M., BARONA, C., LÓPEZ, R., & QUIROZ, J. (Octubre-Diciembre de 2010). *Niveles de desempeño y actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de la licenciatura en administración en una universidad estatal mexicana*. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(47), 1223-1249.
- [19] RICHARDSON, F., & SUINN, R. (1972). *The mathematics anxiety rating scale: psychometric data*. *Journal of Counseling Psychology*, 19(6), 551-554.
- [20] TAPIA, M., & MARSH, G. (2004). *An Instrument to Measure Mathematics Attitudes*. *Academic Exchange Quarterly*, 8(2).
- [21] TEZER, M., & BOZKURT, A. (2015). *Determining Attitudes and Anxiety Levels of Students in Need of Protection Towards Mathematics Course*. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* (186), 269 – 273.
- [22] TOBIAS, S., & WEISSBROD, C. (1980). *Anxiety and mathematics: an update*. *Harvard Educational Review*, 50(1), 63-70.
- [23] VENKATESH KUMAR, G., & KARIMI, A. (2010). *Mathematics Anxiety, Mathematics Performance and Overall Academic Performance in High School Students*. *Journal of the Indian Academy of Applied Psychology*, 36(1), 147-150.

#### **Sobre los autores:**

*Nombre:* Arturo García-Santillán

*Correo Electrónico:* arturogarciasantillan@yahoo.com.mx

*Institución:* Researcher Professor at UCC Business School. Universidad Cristóbal Colón, Veracruz, México.

*Nombre:* Jutta Schnell

*Correo Electrónico:* jutta.Schnell@hfwu.de

*Institución:* Hochschule für Wirtschaft und Umwelt Nürtingen-Geislingen, Deutschland.

*Nombre:* Jesica Ramos-Hernández

*Correo Electrónico:* jes.jrh@gmail.com

*Institución:* Doctoral student at UCC Business School. Universidad Cristóbal Colón, Veracruz, México.

## Anexos

## Anexo 1: Test de Muñoz y Mato (2007)

Items ( español)	Items ( Inglés)
1.- Me pongo nervioso cuando pienso en el examen de matemáticas del día anterior	1.- I become nervous when I think about the math exam of the day before
2.- Me siento nervioso cuando me dan las preguntas del examen de matemáticas	2.- I feel nervous when I receive the math exam questions
3.- Me pongo nervioso cuando abro el libro de matemáticas y encuentro una página llena de problemas	3.- I become nervous when I open the math book and I find a page filled with problems
4.- Me siento nervioso al pensar en el examen de matemáticas	4.- I feel nervous when thinking about the math exam
5.- Me siento nervioso cuando escucho cómo otros compañeros resuelven un problema de matemáticas	5.- I feel nervous when I hear how other classmates solve a math problem
6.- Me pongo nervioso cuando me doy cuenta de que el próximo curso aún tendré clases de matemáticas	6.- I become nervous when I realize I will still have math classes next course
7.- Me siento nervioso cuando pienso en el examen de matemáticas que tengo la semana próxima	7.- I feel nervous when I think about the math exam I have next week
8.- Me pongo nervioso cuando alguien me mira mientras hago los deberes de matemáticas	8.- I become nervous when someone watches me while I do the math homework
9.- Me siento nervioso cuando reviso el ticket de compra después de haber pagado	9.- I feel nervous when I check the purchase ticket after I paid
10.- Me siento nervioso cuando me pongo a estudiar para un examen de matemáticas	10.- I feel nervous when studying for a math exam
11.- Me ponen nervioso los exámenes de matemáticas	11.- Math exams make me nervous
12.- Me siento nervioso cuando me ponen problemas difíciles para hacer en casa y que tengo que llevar hechos para la siguiente	12.- I feel nervous when I get difficult problems to make at home that I have to bring done next class
13.- Me pone nervioso hacer operaciones matemáticas	13.- Doing math operations makes me nervous
14.- Me siento nervioso al tener que explicar un problema de matemáticas al profesor	14.- I feel nervous having to explain a math problem to the teacher
15.- Me pongo nervioso cuando hago el examen final de matemáticas	15.- I become nervous when doing the final math exam
16.- Me siento nervioso cuando me dan una lista de ejercicios de matemáticas	16.- I feel nervous when I get a list of math exercises
17.- Me siento nervioso cuando intento comprender a otro compañero explicando un problema de matemáticas	17.- I feel nervous when I try to understand another classmate explaining a math problem
18.- Me siento nervioso cuando hago un examen de evaluación de matemáticas	18.- I feel nervous when I do a math evaluation exam
19.- Me siento nervioso cuando veo/escucho a mi profesor explicando un problema de matemáticas	19.- I feel nervous when I see/hear my teacher explaining a math problem
20.- Me siento nervioso al recibir las notas finales (del examen) de matemáticas	20.- I feel nervous when receiving the final math grades (of the exam)
21.- Me siento nervioso cuando quiero averiguar el cambio en la tienda	21.- I feel nervous when I want to figure out the change at the store

<b>Items ( español)</b>	<b>Items ( Inglés)</b>
22.-Me siento nervioso cuando nos ponen un problema y un compañero lo acaba antes que yo	22.- I feel nervous when we get a problem and a classmate finishes before I do.
23.- Me siento nervioso cuando tengo que explicar un problema en clase de matemáticas	23.- I feel nervous when I have to explain a problem at math class
24.-Me siento nervioso cuando empiezo a hacer los deberes	24.- I feel nervous when I start to make the math homework



# Cuentos Matemáticos

## Parametrizando mundos de fantasía

### Parametric fantastic worlds

Patricia Minguito y Ascensión Moratalla

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 181–192, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Sep'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

#### Resumen

Este cuento ilustrado es una muestra de cómo la modelización matemática de superficies es una herramienta de gran interés pedagógico por las posibilidades que ofrece de fomentar la creatividad.

**Palabras Clave:** Matemáticas, superficies, curvas, parametrización, creatividad.

#### Abstract

This illustrated story shows how mathematic parametrization of surfaces can be a very interesting pedagogical tool, that offers lots of possibilities to develop students' creativity

**Keywords:** Mathematics, surfaces, curves, parametrization, creativity.

## 1. Introducción

El cuento ilustrado que presentamos es consecuencia del trabajo desarrollado por la alumna Patricia Minguito en la asignatura de Curvas y Superficies de la ETS de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid, correspondiente al segundo curso del grado Fundamentos de la Arquitectura.

Siguiendo las pautas que nos hemos marcado en el grupo de Innovación Educativa de la UPM Didáctica de las Matemáticas y de acuerdo a un sistema educativo basado en los principios de Bolonia y centrado en el aprendizaje por competencias, encontramos en la modelización matemática de superficies, una herramienta de gran interés pedagógico dentro de la enseñanza de la geometría de curvas y superficies, ya que permite desarrollar la creatividad de los alumnos a la vez que ayuda a comprender los conceptos geométricos intrínsecos a cada superficie. A lo largo del curso se modelizan numerosos ejemplos arquitectónicos y se abre la puerta a la experimentación.

## 2. El cuento

PARAMETRIZANDO

MUNDOS

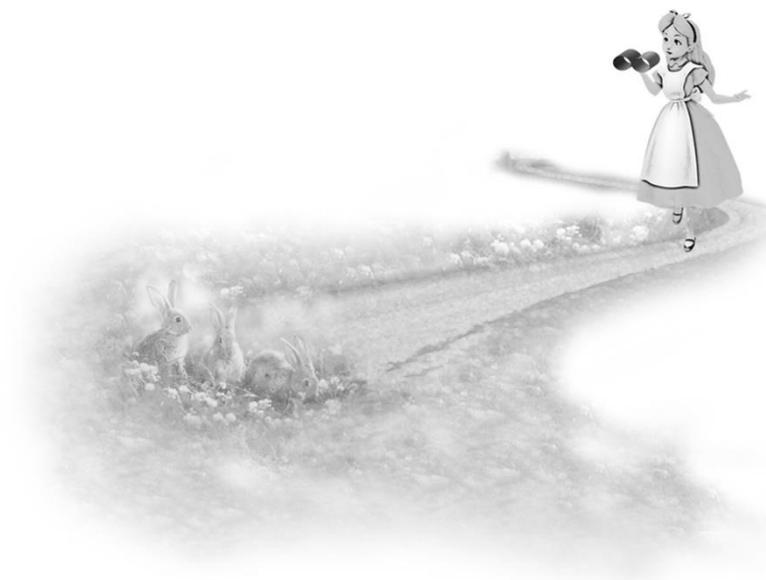
DE

FANTASÍA





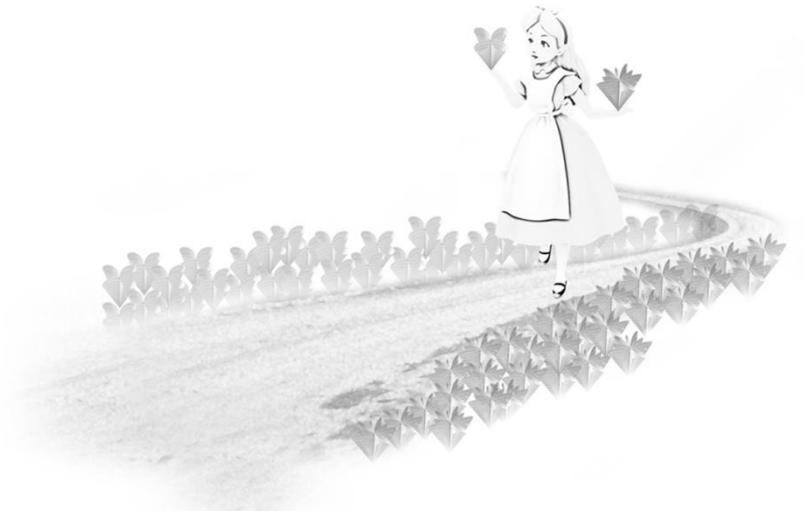
*EN EL PAÍS ILUMINADO POR LA LUZ DEL SOL, ALICIA ENCONTRÓ UN PARASOL.*



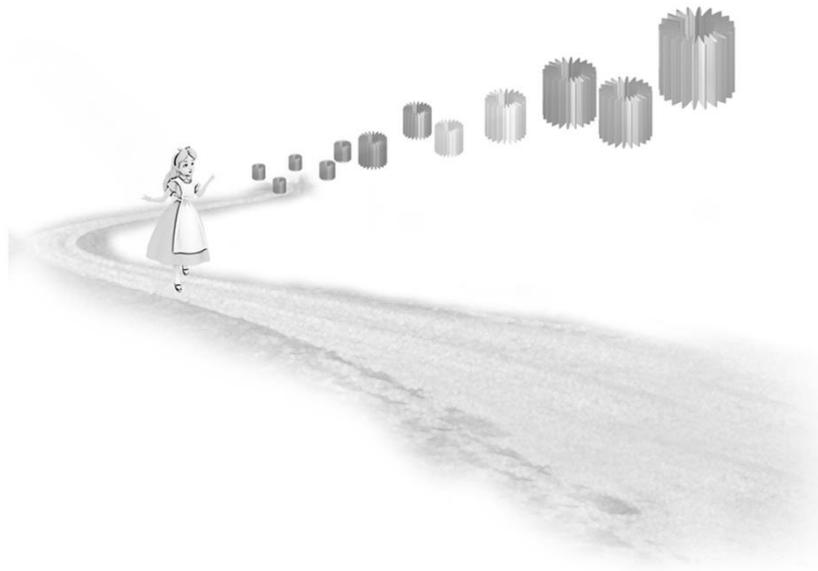
*CON UNOS PRISMÁTICOS DESCUBRIÓ UNAS CRIATURAS LLENAS DE ILUSIÓN.*



*A TRAVÉS DEL TÚNEL CORAZÓN, ALICIA APARECIÓ EN UNA NUEVA REGIÓN.*



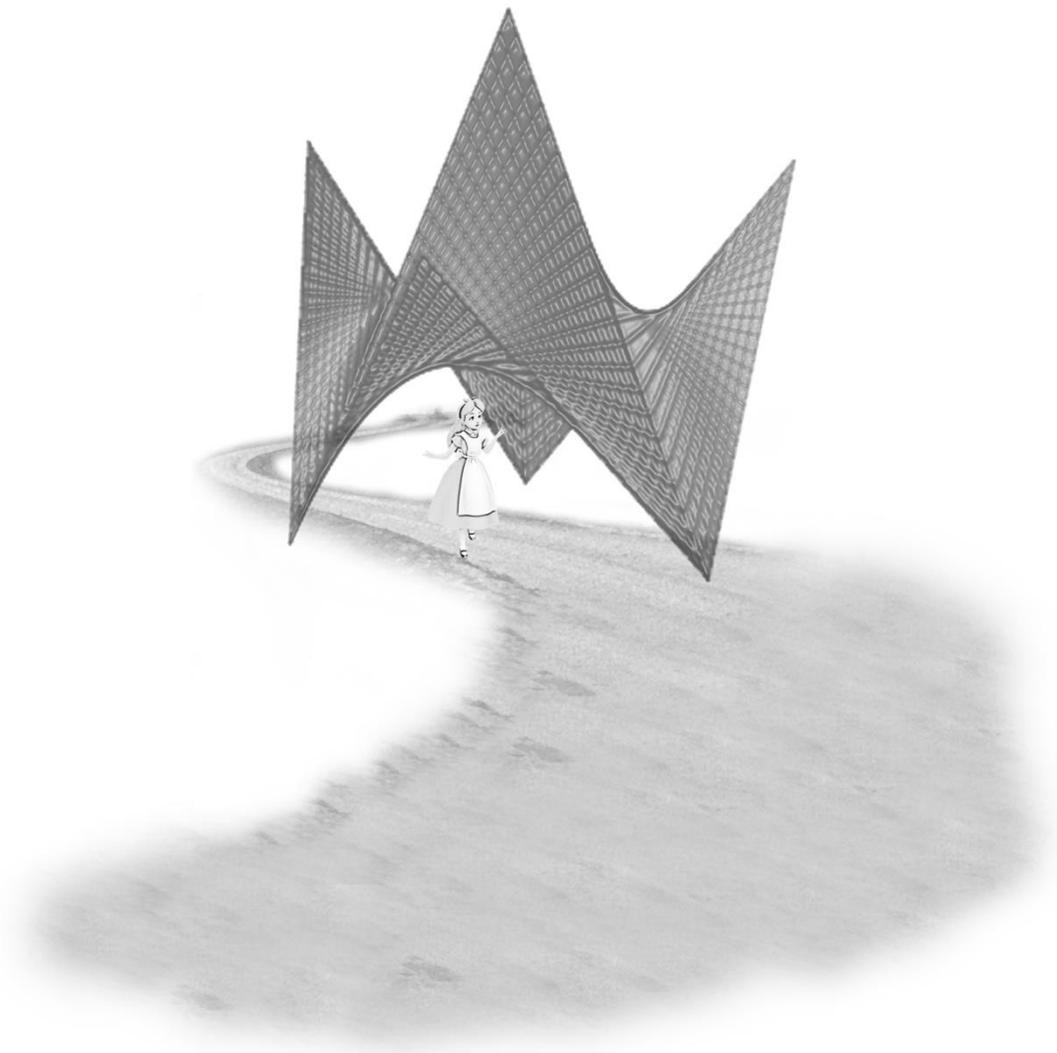
*EN PRIMAVERA RECORRIÓ UN SENDERO DE FLORES CON GRAN EMOCIÓN.*



LOS FAROLILLOS VOLADORES GUIARON A ALICIA EN UNA NUEVA DIRECCIÓN.



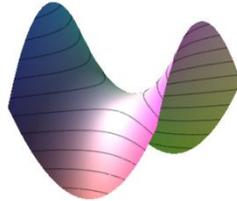
LAS MARIPOSAS DE LA ENSOÑACIÓN LA ACOMPAÑARON DURANTE ESTA ILUSIÓN.



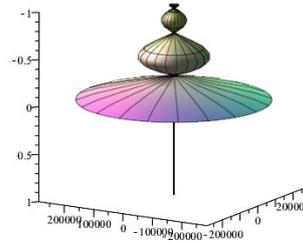
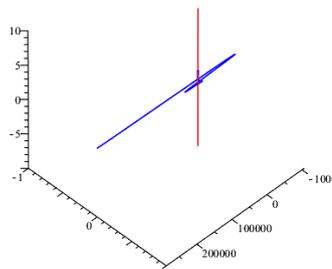
AL FINALIZAR ESTE VIAJE ENCANTADOR,  
ALICIA DESCUBRIÓ LA PARAMETRIZACIÓN  
DEL MUNDO PREFERIDO DE SU IMAGINACIÓN.

### 3. Las ecuaciones

A continuación, se especifica las ecuaciones correspondientes a las curvas y superficies utilizadas en las láminas anteriores, siguiendo la siguiente notación: las curvas vienen parametrizadas por la aplicación  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y las superficies por  $\varphi : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

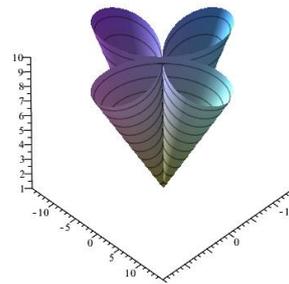
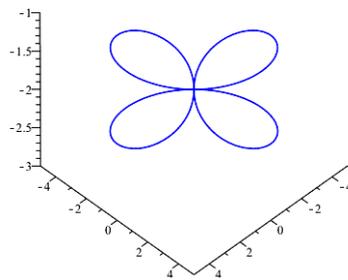


$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad u \in [-4, 4], v \in [-4, 4]$$



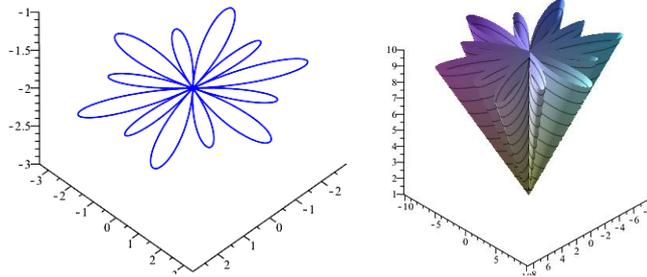
$$\alpha(u) = (e^{2u} \cos(6u), 0, \text{sen}(u)), \quad u \in [0, 2\pi], u \in [-10..10]$$

$$\varphi(u, v) = (e^{2u} \cos(v) \cos(6u), e^{2u} \cos(6u), \text{sen}(u)), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$$



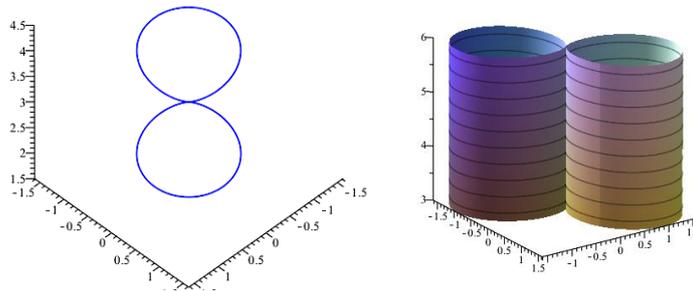
$$\alpha(u) = (-5 \cos(2u) \cos(u), -5 \cos(2u) \text{sen}(u), -2), \quad u \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi(u, v) = (5v \cos(2u) \cos(u), 5v \cos(2u) \text{sen}(u), 1 + 3v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0..3]$$



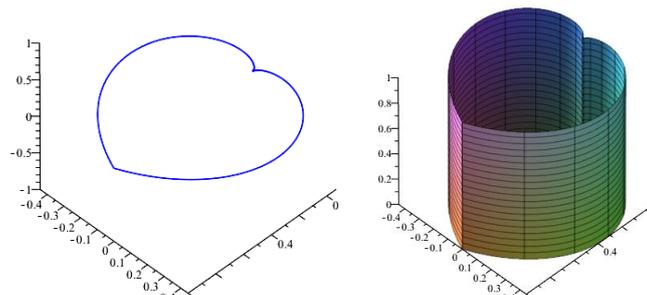
$$\alpha(u) = (-3\cos(6u) - 0.4\cos(u), -3\cos(6u) - 0.4\sin(u), -2), \quad u \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi(u, v) = (v(3\cos(6u) - 0.4)\cos(u), v(3\cos(6u) - 0.4)\sin(u), 1 + 3v), \quad u \in [0, 2\pi), v \in [0..3]$$



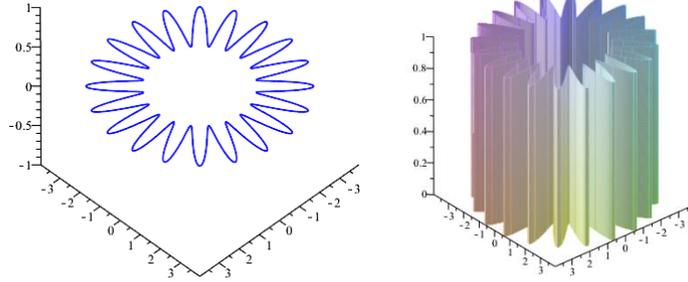
$$\alpha(u) = ((1 + \sin(2u))\cos(u), (1 + \sin(2u))\sin(u), 3), \quad u \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi(u, v) = ((1 + \sin(2u))\cos(u), (1 + \sin(2u))\sin(u), 3 + v), \quad u \in [0, 2\pi), v \in [0..3]$$



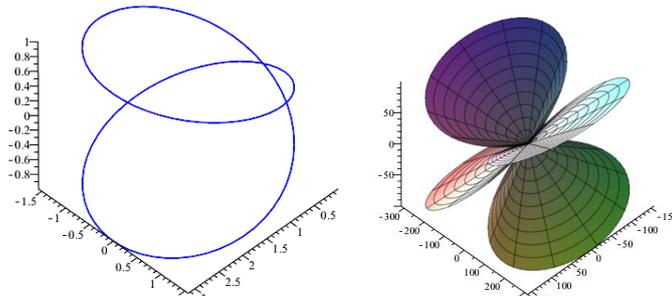
$$\alpha(u) = \left( \left( 1 + \sin\left(-\frac{u}{2}\right) \right) \cos(u), \left( 1 + \sin\left(-\frac{u}{2}\right) \right) \sin(u), 0 \right), \quad u \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi(u, v) = \left( \left( 1 - \sin\left(-\frac{u}{2}\right) \right) \cos(u), \left( 1 - \sin\left(-\frac{u}{2}\right) \right) \sin(u), v \right), \quad u \in [0, 2\pi), v \in [0..3]$$



$$\alpha(u) = ((-3 + \cos(20u))\cos(u), (-3 + \cos(20u))\sin(u), 0), \quad u \in [0, 2\pi)$$

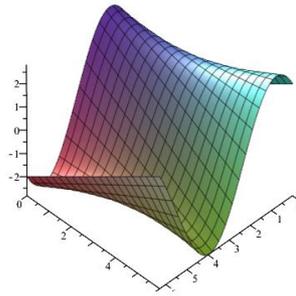
$$\varphi(u, v) = ((-3 + \cos(20u))\cos u, (-3 + \cos(20u))\sin(u), v), \quad u \in [0, 2\pi), v \in [0..1]$$



$$\alpha(u) = (\pi \cos(100u)\cos(u), \pi \cos(100u)\sin(u), \cos(100u)), \quad u \in [0, 2\pi)$$

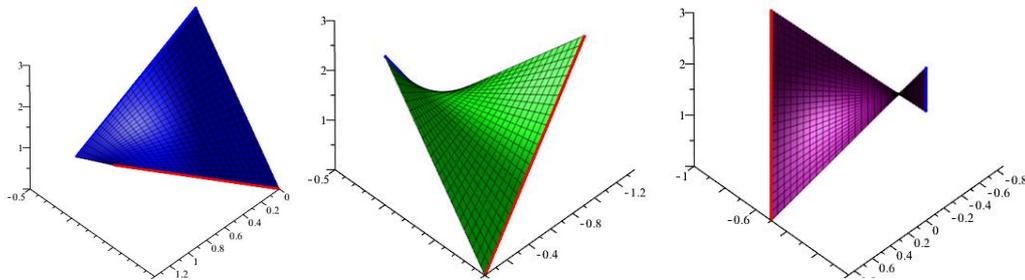
$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \pi \cos(100u)\cos(u) + v(-100\pi\sin(100u)\cos(u) - \pi \cos(100u)\sin(u)), \\ \pi \cos(100u)\sin(u) + v(-100\pi\sin(100u)\sin(u) + \pi \cos(100u)\cos(u)), \\ \cos(100u) - 100v \sin(100u) \end{pmatrix},$$

$$u \in [0, 2\pi), v \in [-1..1]$$



$$\alpha(u) = (u, 3, 2\text{sen}(u)), \quad u \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi(u, v) = (u, 3 - 3v, 2\text{sen}(u) - 2v \cos(u)), \quad u \in [0, 2\pi), v \in [-1..1]$$



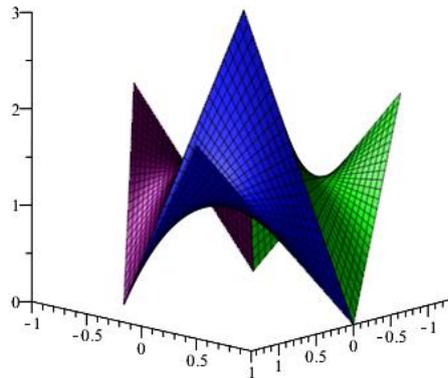
$$\varphi_1(u, v) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}u + v \left( \frac{\sqrt{3}}{2}u - u \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right), -\frac{u}{2} - v, 3 - 3u + v(3 - 5u) \right),$$

$$u \in [0..1], v \in [-1..0]$$

$$\varphi_2(u, v) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}u + v \left( \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2} - u \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right), -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u - v, 3u + v(5u - 2) \right),$$

$$u \in [0..1], v \in [-1..0]$$

$$\varphi_3(u, v) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2}v, -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, 3 - 3u + v(3 - 5u) \right), \quad u \in [0..1], v \in [-1..0]$$



Superficie resultante de la unión de los anteriores cuadriláteros alabeados.

#### **Sobre las autoras:**

*Nombre:* Ascensión Moratalla

*Correo Electrónico:* ascension.moratalla.delahoz@upm.es

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* Patricia Minguito

*Correo Electrónico:* patricia.minguito@gmail.com

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

#### **Grupo de Innovación Educativa Didáctica de las Matemáticas**

*Nombre:* Ascensión Moratalla

*Correo Electrónico:* ascension.moratalla.delahoz@upm.es

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* Juana María Sánchez

*Correo Electrónico:* juanamaria.sanchez@upm.es

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* M<sup>a</sup> Agripina Sanz

*Correo Electrónico:* mariaagripina.sanz@upm.es

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* M<sup>a</sup> Carmen Ferreiro

*Correo Electrónico:* mariacarmen.ferreiro@upm.es

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

*Nombre:* Vicente Moratalla

*Correo Electrónico:* vicente\_moratalla@hotmail.com

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.



# Cuentos Matemáticos

## La postal de Dido

### Dido's postcard

Franco Bagnoli

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 193–198, ISSN 2174-0410

Recepción: 23 Abr'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

#### Resumen

Dido resolvió el primer problema isoperimétrico de la historia, cortando una piel de toro, anudando las tiras y rodeando una porción de tierra donde construir Cartago. Pero su resultado puede mejorarse, y se puede demostrar cortando una postal de tal manera que sea posible que una persona pase a su través.

**Palabras Clave:** Dido, problema isoperimétrico, postal

#### Abstract

Dido solved the first isoperimetric problem of the history, cutting an oxhide in strips, tying them and surrounding with the resulting rope the portion of land where Cartago was to be built. However, her exploit can be improved, and one can show how by cutting a postcard in such a way that a person is able to pass through it.

**Keywords:** Dido, isoperimetric problem, postcard

El problema de Dido [1] es un clásico de las matemáticas, e incluso de la literatura y de la historia, dado que de acuerdo con Virgilio [2] Dido se suicidó después de haber sido abandonada por Eneas y a este hecho se remonta el enfrentamiento entre los romanos y los cartagineses.

La princesa Dido huyó con algunos fieles de su ciudad natal, Tiro, tras descubrir que el rey Pigmalión (su hermano, nada que ver con el escultor griego del mismo nombre) había matado a su marido. Después de un largo viaje aterrizó en la costa norte de África (Libia). Allí se encontró con el rey Iarba para comprar una parcela de terreno sobre la que construir una nueva ciudad. El rey, en respuesta, le dijo que podría tomar tanta tierra como pudiera encerrar en la piel de un toro. Virgilio no describe cómo Dido resolvió el problema.

Sin embargo, la tradición dice que la princesa, sin perder el ánimo, ideó una estratagema astuta para abarcar la mayor extensión de terreno posible. Dido ordenó que se cortara la piel en tiras finas, que después uniría por los extremos para formar una cuerda larga.

Con esta cuerda, la princesa rodeó una colina (sobre la cual construir la fortaleza), colocando los extremos de la cuerda en el mar. También parece que Dido descubrió que poniendo la cuerda en la forma de un semicírculo (o de un arco de círculo si la costa no es plana) se abarcaba la mayor superficie posible.



*Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in Historische Chronica, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.*

*Figura 1*

El problema de Dido en matemáticas consiste en encontrar la figura que tiene la mayor área de una superficie dado su perímetro, en el plano (la solución es un círculo) o en un semiplano (un semicírculo).

Aunque el problema puede parecer trivial, su solución requiere el conocimiento del cálculo de las variaciones [3] y conlleva una cierta complejidad técnica.

Ahora vamos a examinar el problema a través de los ojos de un físico. En primer lugar, podemos decir que la mejor manera de rodear la tierra con un perímetro determinado (la cuerda hecha de la piel), sin contar las costas, es... encontrar una península separada por un istmo de ancho igual al largo de la cuerda disponible. Así que no hay límite a la tierra que se puede abarcar. Por otra parte, no vivimos en un plano, sino en la Tierra, que es similar a una esfera. Si dibujamos una curva cerrada en una esfera, no está claro lo que es "interior" y lo que es "exterior". ¡Dido podría haber pedido toda la Tierra excepto la porción rodeada por su cuerda! Pero es probable que Iarba no estuviese de acuerdo.

El otro elemento muy importante en el que nadie se detiene es: ¿cuán larga puede ser una cuerda hecha de la piel de un toro?

Si aplicamos las leyes de la física, la cuerda más larga (dada una cierta masa) se puede hacer con una cadena polimérica, tipo un hidrocarburo o, también, una cadena de ADN o un microtúbulo proteínico o un nanotúbulo de carbono. Pero dudo que hace 3000 años la

tecnología fuese capaz de convertir de este modo una piel de toro, por no mencionar que estos filamentos son invisibles y extremadamente frágiles.

Suponemos entonces que hay que cortar la piel sin hacer transformaciones físicas o químicas. Para simplificar, digamos que la piel cubre 1 metro cuadrado (probablemente será tres o cuatro, pero solo cambia un factor), que es perfectamente bidimensional (aunque en realidad tiene un cierto espesor) y que se puede cortar al máximo en tiras gruesas de 1 milímetro (empresa no trivial). Se obtienen así 1.000 metros de cuerda, que, sin embargo, aun debe ser anudada (¡1000 nudos!).

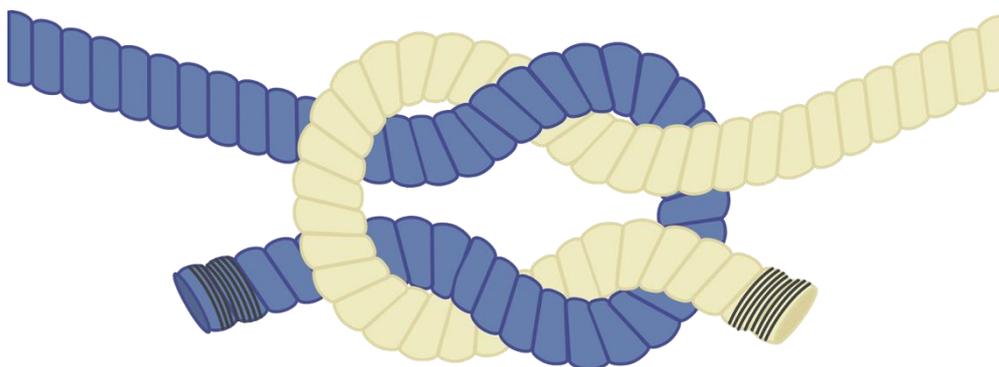


Figura 2

Usando simples nudos planos [4], he estimado que cada nudo "consume" un trozo de hilo largo de más o menos 10 veces su diámetro. Por lo que se pierden en total 10 metros de cuerda, que no parece mucho, pero consideramos que con 1.000 metros de cuerda solamente se rodea un círculo de unos 160 metros de radio.

¿Podríamos ahorrarnos los nudos? Sí, cambiando la manera de cortar la piel de toro. Para demostrar esto de una manera práctica, desafiamos a unos amigos a pasar a través de una puerta dibujada en una pequeña hoja de papel.

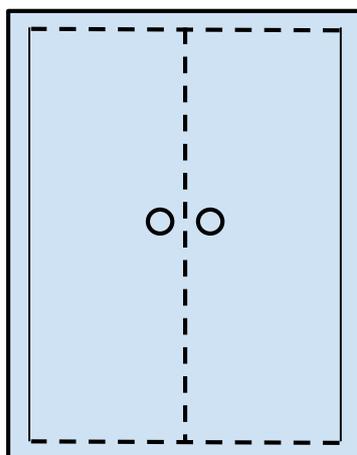


Figura 3

Dibujamos en 1/4 de una hoja A4 una puerta doble. Doblamos el papel por la mitad y cortamos a lo largo de las líneas de puntos (no cortar completamente a lo largo del pliegue, se deben dejar las dos extremidades intactas).

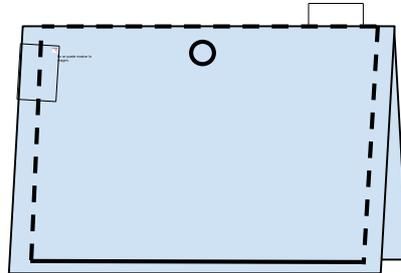


Figura 4

Desdoblado la hoja, la puerta ahora se puede abrir, pero será imposible pasar.

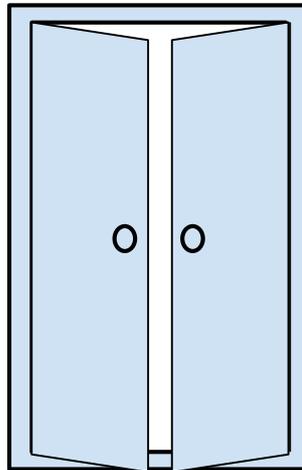


Figura 5

En este punto tenemos que doblar la hoja de nuevo y hacer más cortes de acuerdo con las nuevas líneas de puntos en la figura (las líneas parten de forma alternativa de la flexión y desde el borde).

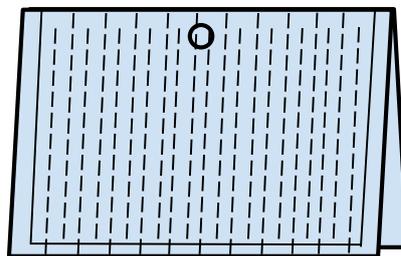


Figura 6

Esta vez la puerta se abrirá en forma de zig-zag y puede expandirse lo suficiente para pasar a través de ella.

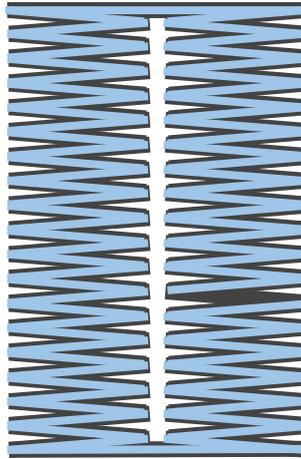


Figura 7

Acerca de alargar o acortar una cuerda: supongamos que tenemos una cuerda o una correa de 44.000 kilómetros de largo, es decir, la circunferencia de la Tierra, y que la hemos puesta alrededor del ecuador. Entonces alargamos la correa 1 metro, siempre manteniendo su forma circular. ¿Cuánto va a levantarse de la superficie de la Tierra?, ¿1 micra?, ¿1 mm?, ¿más?, ¿menos?

La relación entre la longitud de la circunferencia,  $C$ , y el radio,  $R$ , es  $C = 2 \pi R$  o  $R = C / 2 \pi$ . Aumentando  $C$  1 m,  $R$  se incrementa por  $1 / 6,28$  m o aproximadamente ¡16 cm! Dido, ahorrándose los nudos, podría haber ganado otro metro y medio de radio (para un círculo).

**Agradecimientos** Gracias a Rosa M. Herrera por su graciosa adaptación de mi "itañol" a un español correcto.

## Referencias

- [1] THOMSON, Sir William (Barón Kelvin), Popular Lectures and Addresses, Vol. II Geology and General Physics, Nature Series MacMillan and Co. (London) 1894;  
<http://math.arizona.edu/~dido/lord-kelvin1894.html>  
<http://www.math.uiuc.edu/~laugesen/dido-isoperimetry-history.pdf>
- [2] VIRGILIO, Eneida, Libro I, versos 365-369.
- [3] <https://mathematicalgarden.wordpress.com/2008/12/21/the-problem-of-dido/>
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Reef\\_knot](https://en.wikipedia.org/wiki/Reef_knot)

### Sobre el autor:

Nombre: Franco Bagnoli

Correo Electrónico: franco.bagnoli@unifi.it

Institución: Dpto. Física y Astronomía y CSDC, Universidad de Florencia (Italia). También INFN, sez. Firenze



## Críticas y Reseñas

### Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw M. Ulam

### Adventures of a Mathematician. Memories of Stanislaw M. Ulam

Santiago Higuera de Frutos

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 199–202, ISSN 2174-0410  
Recepción: 14 May'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

#### Resumen

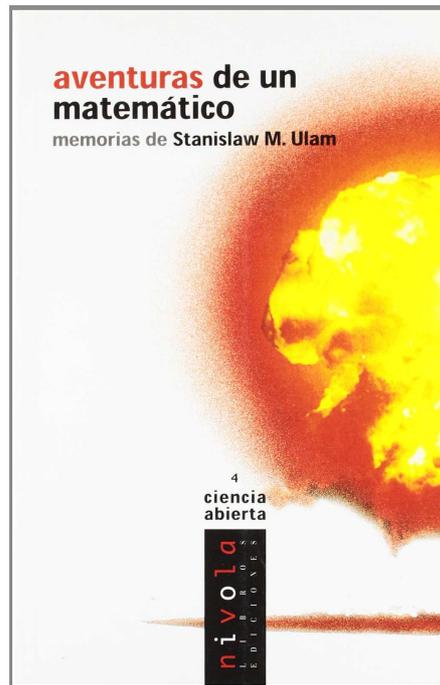
Este artículo hace una reseña del libro «*Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw M. Ulam*». Se trata de una autobiografía del matemático polaco Stanislaw M. Ulam, uno de los matemáticos más brillantes del siglo XX, fallecido en mayo de 1984. Ulam fue uno de los científicos que intervino en el *Proyecto Manhattan*, nombre en clave de un proyecto científico llevado a cabo durante la Segunda Guerra Mundial por los Estados Unidos con ayuda del Reino Unido y Canadá. El objetivo final del proyecto era el desarrollo de la primera bomba atómica antes de que la Alemania nazi la consiguiera. Ulam realizó diversas aportaciones a las matemáticas, entre las que destaca el desarrollo con John Von Neumann del Método de Montecarlo.

**Palabras Clave:** Biografías, Matemáticos, Historias Matemáticas, Ulam.

#### Abstract

This article is a review of the book «*Adventures of a mathematician*». The book is a biography of the Polish mathematician Stanislaw M. Ulam, one of the most brilliant mathematicians of the twentieth century, who died in May 1984. Ulam was one of the scientists who participated in the *Manhattan Project*, the codename of a scientific project carried out during World War II by the United States with the help of the United Kingdom and Canada. The final objective of the project was the development of the first atomic bomb before Nazi Germany got it. Ulam made several contributions to mathematics, most notably the development of the Monte Carlo method with John Von Neumann.

**Keywords:** Biographies, Mathematicians, Math History, Ulam.



## 1. Ficha técnica

**Título:** Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw M. Ulam

**Autor:** Stanislaw M. Ulam

**Editorial:** Nivola Libros Ediciones

**Colección:** Ciencia abierta

**Edición:** 1ª edición en castellano, septiembre 2002

**Título original:** Adventures of a Mathematician

**Traducción:** Ricardo García-Pelayo Novo

**ISBN:** 84-95599-43-0

**Páginas:** 313

## 2. El libro

El libro es una autobiografía del matemático polaco Stanislaw Marcin Ulam, nacido en Lviv el 13 de abril de 1909. Como se aclara al inicio del libro, el autor utiliza el nombre polaco de la ciudad, Lwów. Esta ciudad perteneció a Polonia de 1340 a 1772, pasando luego a formar parte del imperio austro-hungaro hasta 1918. La ciudad volvió a ser polaca en el periodo entre las dos guerras mundiales, fue anexionada a la Unión Soviética en 1945 y actualmente pertenece a Ucrania, bajo el nombre Lviv.

Ulam fue uno de los matemáticos más brillantes del siglo XX. Participó en el proyecto Man-

hatten y propuso el diseño Teller–Ulam de las armas termonucleares. También propuso la idea de propulsión nuclear de pulso y desarrolló un buen número de herramientas matemáticas en la teoría de números, teoría de conjuntos, teoría ergódica y topología algebraica.

Quizás, la contribución por la que es más conocido Ulam es por ser coautor, con John Von Neumann, del Método de Monte Carlo. Como el mismo cuenta en el libro, *'La idea de lo que se llamaría luego el Método de Monte Carlo se me ocurrió mientras estaba haciendo un solitario durante mi enfermedad. Me di cuenta de que, para tener una idea de la probabilidad de que salga un solitario (...), era mucho más práctico ir echando las cartas, o experimentando con el proceso y observar cuantas veces sale, que tratar de calcular todas las combinaciones, que crecen exponencialmente de tal manera, que, salvo casos muy elementales, no pueden estimarse'*

A lo largo del libro aparecen todos los grandes personajes de las matemáticas y la física del siglo XX, con los que tuvo ocasión de trabajar y compartir experiencias. John von Neumann, Robert Openheimer, Albert Einstein, Enrico Fermi, Niels Bohr, Richard Feynman, Edward Teller y muchos más son mostrados por Ulam con muchos detalles acerca de las vivencias y conversaciones mantenidas con ellos, lo que demuestra, entre otras cosas, su prodigiosa memoria.

Ulam falleció el 13 de mayo de 1984.

### 3. Estructura y contenido del libro

El libro abarca el periodo comprendido entre 1909 y 1972 y se divide en cuatro partes:

- *Parte primera: 'Cómo me convertí en matemático en Polonia'*, de 1909 a 1934
- *Parte segunda: 'Matemático en los Estados Unidos'*, de 1935 a 1943
- *Parte tercera: 'La vida entre los físicos'*, de 1943 a 1957
- *Parte cuarta: 'Los últimos quince años'*, de 1957 a 1972

La primera parte, titulada *'Cómo me convertí en matemático en Polonia'*, está dedicada a su juventud en Polonia. Es curioso conocer el ambiente de los cafés en los que se reunían los estudiantes y profesores de matemáticas y en los que llevaban a cabo una más que productiva iteración entre ellos: *'Era una colaboración de tal escala e intensidad que no la he visto nunca superada'*, afirma Ulam. Banach y Mazur estaban entre los habituales. De Banach dice, por ejemplo: *'Era difícil aguantar más tiempo o más copas que Banach en estas sesiones'*. Como el propio Ulam menciona, los logros de los matemáticos polacos en el periodo entre guerras constituyen un elemento importante de la actividad matemática mundial. También se mencionan en esta parte algunos de los viajes que realizó Ulam al extranjero, en concreto, sus estancias en el instituto Poincaré y en Cambridge, de la que dice que fue una de las mejores épocas de su vida.

La segunda parte, *'Matemático en los Estados Unidos'*, se dedica a su primera etapa en los Estados Unidos, a donde viajó animado por Von Neumann. Inició su andadura en Princeton. Es muy llamativo de esta etapa conocer de primera mano el trato que se daba a los profesores, nacionales y extranjeros, en las universidades de Estados Unidos. Los que conocemos un poco las universidades españolas leemos con sorpresa el trato exquisito y los sueldos y facilidades que se les proporcionaban para realizar su labor docente e investigadora. Nada que ver con lo que teníamos y seguimos teniendo por aquí. Con Von Neumann mantuvo a partir de entonces una relación de gran amistad hasta la muerte de Von Neumann. Describe a su amigo con pasión y nos permite intuir la personalidad de uno de los matemáticos más brillantes, sin duda, del siglo pasado. En esta parte aparecen las primeras menciones a Albert Einstein. De Princeton pasó a Harvard, en donde coincidió con Wiener. Al final de esta parte, el ascenso nazi en Alemania, la invasión de Polonia y la segunda guerra mundial hacen su aparición de manera dramática. La

falta de noticias de familiares y amigos así como la muerte de muchos de ellos tiñen el texto de la amargura con la que Ulam vivió aquellos años.

La tercera parte, *'La vida entre los físicos'*, relata su estancia en Los Álamos colaborando con el proyecto Manhatam. El proyecto Mahatam era el nombre en clave del proyecto que se desarrolló en Los Álamos (Nuevo Mexico) para desarrollar la bomba atómica antes de que consiguieran hacerlo los nazis. En esta parte se cuentan muchos detalles de como transcurría la vida de los científicos en las instalaciones habilitadas al efecto en Nuevo Mexico. También cuenta detalles acerca de los trabajos que llevaban a cabo, si bien, algunos de ellos continúan siendo secretos, como el mismo indica. Una vez más, Ulam nos cuenta conversaciones y reuniones con algunos de los personajes más brillantes en física y matemáticas del siglo XX. Von Neumann, Teller, Fermi, Oppenheimer, Feynman, Einstein, Bohr y otros van desfilando por las páginas del libro con un goteo constante de anécdotas y detalles curiosos acerca de las opiniones o la forma de trabajar de cada uno. Ulam permaneció en Los Álamos hasta la década de los 50, ya acabada la guerra mundial. Siguió colaborando, junto con Von Neumann, en el desarrollo de las primeras computadoras y del mencionado Método de Montecarlo. También intervinieron en el desarrollo de la bomba de fusión, la bomba H. Esta parte del libro se cierra en 1957, narrando la muerte de sus amigos Von Neumann y Fermi, lo que afectó enormemente a Ulam.

La cuarta parte del libro, *'Los últimos quince años'*, recogen de manera más breve el periodo que transcurre entre 1957 y 1972. En esta etapa narra el desarrollo de la idea de la propulsión termonuclear para vehículos espaciales, su nueva reincorporación como profesor y algunas reflexiones acerca de la ciencia y las matemáticas.

Las últimas páginas son una posdata que deparará al lector alguna sorpresa que no queremos desvelar aquí.

## 4. Crítica y opinión

El libro es ameno de leer y, en bastantes capítulos, apasionante. Ulam menciona los conceptos matemáticos en los que trabaja en cada etapa de su vida sin apabullar, aunque en algunos momentos es evidente el alto nivel de los temas que plantea. Sin duda lo que más llama la atención es la cantidad de personajes que van apareciendo por la obra y la cantidad de detalles y anécdotas que recuerda Ulam. La familiaridad con la que se retrata a Openheimer, a Von Neumann, a Fermi o a Feyman, entre otros, nos permite vislumbrar el ambiente en el que estuvo inmerso el protagonista de la obra.

En suma, se trata de un libro que hará las delicias de los amantes de las matemáticas y de la historia de la ciencia, en particular, de la historia de la ciencia en el periodo de la segunda guerra mundial.

### Sobre el autor:

*Nombre:* Santiago Higuera de Frutos

*Correo electrónico:* santiago.higuera@upm.es

*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid, España.

# Homenaje a Vera Spinadel<sup>1</sup>

## Tribute to Vera Spinadel

Camila Offenhenden, Nadia Horta y Omar Grandoso

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 203–210, ISSN 2174-0410

Recepción: 20 Feb'17; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

### Resumen

El pasado 26 de enero 2017 falleció la matemática argentina Vera Martha Winitzky de Spinadel, conocida por muchos de nosotros y participante en los **CONGRESOS INTERNACIONALES DE MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA Y ARQUITECTURA**, organizados por el Grupo de investigación MAIC (Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil) en E.T.S. Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid.

Como homenaje a esta matemática dedicada a Formas y Diseño, a Fractales y Caos, a los Números Metálicos y la Proporción Áurea en la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo de la Universidad de Buenos Aires durante 70 años, reproducimos el siguiente texto "Con la cabeza en las nubes: entrevista con Vera Spinadel" escrito por Camila Offenhenden, Nadia Horta y Omar Grandoso en la revista IF.

Su hija Laura Spinadel nos explica: "Sus palabras en esta entrevista son una enseñanza de una Maestra con Mayúsculas".

**Palabras Clave:** Matemática Spinadel, MAIC.

### Abstract

Last January 26<sup>th</sup>, 2017 Argentinian mathematician Vera Martha Winitzky of Spinadel died. She was known by many of us and participant in the **CONGRESOS INTERNACIONALES DE MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA Y ARQUITECTURA**, Grupo MAIC in E.T.S.I. Caminos UPM.

As a tribute and homage to this mathematician dedicated to Shapes and Design, to Fractals and Chaos, to Metallic Means and Golden Mean in the Faculty of Architecture, Design and Urbanism of the University of Buenos Aires for 70 years, we reproduce the following text "With the head in the clouds: interview with Vera Spinadel" published by Camila Offenhenden, Nadia Horta and Omar Grandoso in the magazine IF.

Her daughter Laura Spinadel explains: "My mother's words in this interview are the teaching from a Master with capital letter".

**Keywords:** Mathematician Spinadel, MAIC.

---

<sup>1</sup> El archivo contiene el texto completo ajustado a formato de esta revista que fue publicado en la Revista IF. Copyright Imágenes (© Jazmín Tesone). "Con la cabeza en las nubes: entrevista con Vera Spinadel" (© Camila Offenhenden, Nadia Horta y Omar Grandoso); texto publicado originalmente por revista IF, N° 9, Centro Metropolitano de Diseño (CMD), Buenos Aires, septiembre 2014 (páginas 22-27).

## 1. CoN la CaBEza EN las NuBEs



*Figura 1. Vera Spinadel considera que la creatividad y la matemática son el origen de todas las cosas.*

## **1.1 Vera Spinadel, alma máter de la armonía, los números y la forma. Desde la FADU, lidera el Centro de Matemáticas y Diseño y es el puente entre ambas disciplinas. Aquí nos explica cómo la matemática y el diseño tienen más cosas en común de las que imaginamos.**

Vera nos recibe en su oficina del cuarto piso del pabellón III de Ciudad Universitaria. Luego de saludarnos, nos lleva a la ventana y nos muestra el paisaje. Frente al cristal, señala las nubes, la costa del río de La Plata y los árboles. “Las nubes no son esferas ni las costas son líneas rectas. Entonces ¿cómo podemos estudiar sus formas?”, nos preguntó... “La matemática tiene la respuesta”, dijo.

Esta fue la primera lección de Vera Martha Winitzky de Spinadel (Buenos Aires, 1929) una matemática que llegó a la Facultad de Arquitectura y Urbanismo (la FAU, antes de incorporar la D de Diseño) allá por los años 50. Allí, encabezó la misión de mostrar porqué la “reina de todas las ciencias” abre un espacio inmejorable para la creación. A través de la matemática —según Spinadel— se pueden descubrir cosas nuevas, y el diseño tiene que explotar su perfil más matemático-científico si se quieren potenciar procesos aún más creativos. Luego de la charla, descubrimos que la proporción áurea y los números metálicos —su desvelo a lo largo de toda una vida— son su religión.

- *¿Cómo fueron sus comienzos?*

En 1947 cursaba en la Universidad de Buenos Aires la Licenciatura en Ciencias Físico-Matemáticas. Por entonces, ambas ciencias no estaban separadas ni eran disciplinas diferentes. En ese momento, la Licenciatura se dictaba en La Manzana de las Luces, y en ese mismo lugar se cursaba Arquitectura.

Mientras era ayudante ad honórem, el director de la cátedra me propuso ejercer como profesora adjunta en la Facultad de Arquitectura. Inmediatamente, pensé en todo lo que aún me faltaba si, siendo ayudante, quería convertirme en profesora adjunta. Entonces, respondí que sí. Así comencé con las clases en paralelo, en Exactas y en Arquitectura. Más tarde, la sede de Arquitectura se trasladó a Ciudad Universitaria. Mientras tanto era profesora adjunta, y gracias a la ayuda de la titular —que era doctora en Matemática— gané el concurso para la titularidad. En la actualidad soy profesora emérita con dedicación exclusiva.

En 1985, la Facultad de Arquitectura abrió las cinco carreras de diseño (Diseño Gráfico, Diseño Industrial, Diseño de Imagen y Sonido, Diseño de Indumentaria y Diseño de Paisaje) y se convirtió en un verdadero semillero de chicos, con distintos enfoques y demandas muy interesantes. Aunque, en mi opinión, los programas de estas carreras son anticuados. Una cosa es dibujar el plano y otra es construir un volumen. Hace poco, un grupo de alumnas de Diseño de Indumentaria vinieron a la oficina del Centro de Matemáticas y Diseño (CMyD) de la FADU y me dijeron: “¿Usted nos podría dar una clase de matemática?”. En ese momento me pregunté: “¿Por qué la matemática no formaba parte de la carrera de grado? Si bien el Ciclo Básico Común tiene matemática, es solo un repaso de lo que se dicta en la secundaria.

Las alumnas de Indumentaria se habían dado cuenta de que les costaba pasar del dibujo al objeto material, una modelización que luego alguien debía coser y modelar. El pasaje de las dos a las tres dimensiones no es nada fácil. Cuando me reúno con las autoridades de la Facultad, les propongo cambios, los impulso a actualizar los programas. ¡No se puede dejar a la informática de lado! Es necesario trasladar a los contenidos curriculares el impacto de la

tecnología, la realidad en la que los chicos de hoy están inmersos. Hay que aprovechar las posibilidades de la informática para hacer las carreras más reales.

- *¿Cuál fue su aporte desde la matemática?*

Al comienzo, los arquitectos aprendían la misma matemática que los ingenieros, sencillamente porque en aquel entonces todos los docentes de esta Facultad eran ingenieros. Sin embargo, esto era absurdo, porque en la práctica, cuando los arquitectos necesitaban calcular una estructura, llamaban a una empresa de ingeniería. Así comencé a pensar que había otros temas de la matemática más importantes e interesantes para aplicar en la arquitectura y el diseño. Lo primero que introduje fueron los grafos, que es una rama de la matemática discreta y utiliza diferentes conceptos, como la probabilidad, la geometría, el álgebra abstracta, la aritmética y la topología. Es decir, representaciones gráficas que surgen de las relaciones que puede haber entre distintos lugares, necesidades, condiciones urbanísticas, etc.

En 1998 se publicó mi libro *From the Golden Mean to Chaos* (De la proporción áurea al caos), en donde introducía mis primeras investigaciones sobre la familia de los números metálicos: el primero de ellos es el número de oro, después el de plata, el de bronce y así sucesivamente. Estos números irracionales -en especial el de oro- sirven como base de un sistema de proporciones que permite diseñar cualquier cosa.

En 1952 -cuando egresé como licenciada en Matemática- quería doctorarme y comencé a pensar en mi tesis. Para entonces, la matemática se había convertido en algo totalmente analítico, no había figuras. La geometría no existía, todo tenía que estar demostrado sobre la base de teoremas. Este enfoque había sido elaborado en los años 30 por un grupo de estudiantes de matemática de la Universidad de Nancy, que decidieron modificar la enseñanza incorporando fórmulas y cálculos, pero eliminando gráficos y representaciones geométricas.

Aunque lograron mucho prestigio en el mundo académico, ellos ocultaron sus nombres y publicaron sus estudios bajo un seudónimo, Nicolás Bourbaki, en honor a un general napoleónico que, por cierto, no tuvo mucho éxito. Así surgió la Serie Bourbaki, que todavía conservo en mi estudio. ¡Tuve que aprenderla! Aunque después de Bourbaki, empecé a interesarme por los sistemas dinámicos no lineales, es decir, aquellos que evolucionan con el tiempo, como la atmósfera o el crecimiento de los árboles. Es decir, sistemas que sí requieren un estudio a través de formas y figuras.

- *¿Cuál es la relación entre estos sistemas matemáticos no lineales y la naturaleza?*

Justamente, porque todo lo que hay en la naturaleza no es lineal: el brotar de las ramas y las hojas en un árbol, el comportamiento del clima, la forma de una costa o el dibujo de una nube. Si uno le preguntaba a los bourbakistas cómo se analizan matemáticamente esos problemas no lineales, ellos seguramente responderían que se toman como lineales (aunque no lo son), y se ajustan con un término de corrección, con una  $\epsilon$ .

- *¿Y con la teoría de los fractales?*

Tengo una anécdota curiosa sobre la historia de los fractales. En un congreso en los Estados Unidos, conocí a Benoît Mandelbrot, el inventor de los fractales. En su juventud, Mandelbrot vivió en Polonia con su familia. Como judíos polacos, reaccionaron frente al avance de Hitler y su padre decidió mudarse a París. Un tío de Mandelbrot vivía allí y,

justamente, era uno de esos estudiantes bourbakistas... casualidades de la vida. Cuando Mandelbrot llega a París, su tío le dijo: "¿Supongo que vas a dedicarte a la matemática?". A él no le entusiasma la idea.

La familia Mandelbrot no tenía dinero suficiente para vivir en la ciudad y pronto se mudaron a los suburbios. Allí, Mandelbrot fue educado por su madre en su casa de manera informal. Al poco tiempo, el tío nuevamente le preguntó: "¿Ahora sí vas a hacer una carrera de matemática?". Esta vez sí aceptó: terminó la carrera y se recibió. Como el enfoque de su tío no lo convencía y tampoco quería trabajar con él, consiguió que la empresa IBM lo contratara para trabajar -nada más y nada menos- en un laboratorio de avanzada en Nueva York. Cuando llegó, los directores no sabían bien qué ofrecer a ese matemático de perfil tan particular, y lo dejaron hacer lo que quisiera. Mandelbrot jamás tocó el botón de una computadora, no sabía usarla, pero tenía una intuición genial y sabía perfectamente qué se podía hacer con ella. Con frecuencia, se sentaba al lado de un operador y le indicaba qué hacer. De este modo descubrió los fractales, estos objetos geométricos cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite en diferentes escalas.

El padre de Mandelbrot era coleccionista de mapas y tenía ejemplares de todas las escalas. Cierta familiaridad con los atlas lo llevó a preguntarse: "¿Cómo se puede medir la frontera entre Portugal y España?". Si uno ve la línea divisoria en un mapa chiquito, se ve de una manera; en cambio, si se observa en un mapa de mayor detalle, se ve una línea más compleja. En la medida en que la escala aumenta, obtenemos valores mayores. De esta manera, descubrió que no solo el aumento de escala lo llevaría a una línea infinita, sino que además las formas y los dibujos que componían la línea de la frontera se repetían. Se trata de la misma autosemejanza que se puede ver en el famoso "hombrecito" de Mandelbrot, en el que a medida que nos acercamos podemos ver cómo se repite infinitamente la misma figura cada vez más pequeña.

Entonces ¿qué es lo que faltaba para analizar esos problemas no lineales que los bourbakistas resolvían con una  $\epsilon$ ? La respuesta es la parte gráfica, la representación gráfica y los fractales, que son formas expresadas matemáticamente.

- ¿Y cómo incide la teoría del caos?

La teoría del caos es un fenómeno que se produce cuando desaparece el orden en los sistemas dinámicos. Es común escuchar en el uso cotidiano expresiones como "¡qué caótico está el tránsito!", es decir, sin orden. En física, la teoría del caos se utiliza para estudiar escenarios más difíciles de predecir. La región caótica es aquella en la que las soluciones se obtienen cuando se cambia algún parámetro, por más pequeño que sea. El famoso aleteo de la mariposa en Tokio es capaz de generar una tormenta en Nueva York. Ustedes me pueden preguntar: "¿Y por qué se estudia el caos?" Justamente, porque el caos tiene lo que se denomina "atractores extraños". Sí se podría asegurar que en algún momento la trayectoria de un elemento pasa por el atractor extraño, aunque no se puede determinar cuándo. Es decir, si uno le pregunta a un meteorólogo cuándo va a llover, él le contestará que se siente y espere, que en algún momento ocurrirá. En este sentido, el diseño puede entenderse como un sistema dinámico cuando varía con el tiempo.

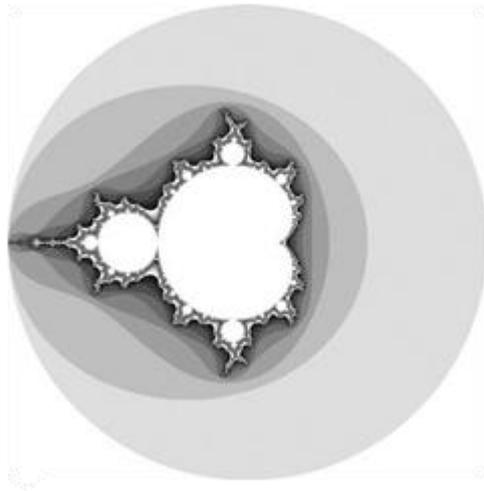


Figura 2. El conjunto de Mandelbrot es un tipo de representación que no sigue la concepción euclidiana de la geometría. En 1975, Mandelbrot lo denominó fractal, es decir, una estructura que se repite a diferentes escalas

¿Qué es lo que hizo Mandelbrot cuando estuvo en IBM? Preguntó si tenían registros de los precios de compra y venta de algún producto a lo largo de los años. La empresa le ofreció el registro del precio del algodón. Él se sentó al lado de su operador y le pidió que graficara los precios en un período de diez años, luego de cinco... y así descubrió que las curvas eran semejantes: es decir, tenían la misma forma. Este descubrimiento fue una revolución para la economía, porque siempre se había pensado que los precios eran impredecibles. Lo que descubre Mandelbrot es, justamente, la autosemejanza o fractalidad en esas curvas que definían la variación del precio del algodón.

- Otro vínculo entre el diseño y la matemática es la proporción áurea, que encontramos tanto en la arquitectura antigua como en el diseño de una tarjeta de crédito, un paquete de cigarrillos o, incluso, el de muchos logotipos. ¿Cómo se puede explicar su vigencia de los griegos a la actualidad?

Porque es armónica. Seguramente, los griegos conocían la fórmula, la veían matemáticamente. En mi opinión, la persistencia de la proporción áurea se debe a su belleza y armonía. Esta no es una condición privativa del número de oro: existen otros sistemas de proporciones -como el Cordovés (con  $v$ )- resultado de las investigaciones de un arquitecto español, Rafael de La Hoz, al que le encargaron un trabajo sobre las cúpulas de las iglesias de la región de Córdoba, España.

Él suponía que allí se iba a encontrar con la proporción áurea, que surge del pentágono, pero con lo que se encontró fue con una proporción diferente, que surge del octógono. Así descubrió un número irracional que se usó para el diseño de esas cúpulas y que se denomina número cordovés. Aquí, en la provincia de Córdoba, también se aplicó, por supuesto, en una iglesia.

- ¿El número de oro como la teoría de los fractales son productos de la observación de los fenómenos naturales?

Así es. De la naturaleza humana o vegetal, la naturaleza es increíble. Tanto en las proporciones del rostro -cuyas relaciones dan como resultado el número de oro- como en el crecimiento de los árboles o en la formación de las nubes: la naturaleza es el mejor ejemplo de la armonía.



Figura 3. En 2011, Spinadel publicó *Forma y matemática: la familia de números metálicos en el diseño* (Buenos Aires, Nobuko), un estudio sobre la armonía, los números y la forma. Desde 1998 preside la Asociación Internacional de Matemática y Diseño,

- *¿Podría pensarse, entonces, en la existencia de un plan maestro a partir del cual fue construido el universo?*

Sí. Evidentemente hay principios matemáticos que rigen la naturaleza. Cada día se descubren más cosas sobre el origen del universo. Aunque sería difícil decir que creo en Dios o en la teoría de la relatividad. Respecto a eso, mi respuesta siempre va a ser que creo en algo dinámico: creo que todas estas nociones se pueden modificar, cambiar, ampliar.

Y sí, creo que hay algo superior... llámenlo como quieran.



Figura 4. La familia de los números metálicos fue introducida por Spinadel en 1997. Se trata de un conjunto infinito de números irracionales cuyo miembro más importante es el número de oro. Siguen, el de plata, bronce, etc. Estos son clave en la investigación científica sobre la estabilidad del sistema micro y macro básicos que va desde la estructura interna de una célula hasta una galaxia.

## Referencias

- [1] OFFENHENDEN, Camila, HORTA, Nadia y GRANDOSO, Omar. “Con la cabeza en las nubes: entrevista con Vera Spinadel”, IF, N° 9, pág. 22–27, Centro Metropolitano de Diseño (CMD), Buenos Aires, septiembre 2014.

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

**Tu eres libre de:**

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

**Bajo la siguientes condiciones:**

**Atribución** Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

**No Comercial** No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

**Licenciar Igual** Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.



G.I.E

*Pensament  
Matemàtic*



MAIC

