

# Juegos y Rarezas Matemáticas

## Schwarzschild y la trama de nuestro universo: cien años de perspectiva

## Schwarzschild and the structure of our cosmos: one century's anniversary

José Rojo Montijano

Revista de Investigación



Volumen VII, Número 1, pp. 149–156, ISSN 2174-0410

Recepción: 23 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de abril de 2017

### Resumen

Con ocasión del centenario de la muerte de Karl Schwarzschild se revisa el influjo de la noción de agujero negro en la cosmología contemporánea, enfatizando las propiedades que emergen a partir de su métrica.

**Palabras Clave:** Karl Schwarzschild, relatividad general, agujeros negros.

### Abstract

In the centenary of de Karl Schwarzschild's death, we deal the influence of his metric in cosmology, focusing in the relativistic description of the notion of black hole.

**Keywords:** Karl Schwarzschild, General Relativity, black holes.

*“Even a room which must be dark needs at least a crack of lighth to know how dark it is”*  
[trad. “Incluso una habitación que debe estar oscura necesita al menos una grieta de luz  
para saber cuán oscura es”]  
(Louis Kahn)

## 1. Einstein y Schwarzschild

Cuando en 1905 Einstein presentó su Relatividad Especial, decidió tomarse radicalmente en serio esta afirmación: en nuestro universo ninguna señal se puede transmitir con una velocidad que supere a la de la luz. Tardó diez intensos años en lograr incluir la descripción de la gravedad en este contexto: el 11 de noviembre de 1915 presentó sus célebres ecuaciones de la Relatividad General.

El modelo gravitatorio newtoniano, hasta entonces cargado de éxitos, llamaba “gravedad” a esa fuerza cotidiana que tira de nosotros hacia el suelo en todo momento, explicando cómo las masas se atraen de modo que la trayectoria de un planeta como el nuestro resulta de la acción combinada de la propia inercia que lleva y de la atracción del Sol. Si por arte de magia nuestra estrella desapareciera en cierto instante, inmediatamente la Tierra modificaría su órbita elíptica alrededor del Sol, escapándose de él: la gravedad newtoniana se propagaría, pues, instantáneamente, “a toda velocidad”, en abierta contradicción con los postulados relativistas.

En el modelo de Einstein “espacio” y “tiempo” (que no transcurre igual en todas partes) están entrelazados, forman un tejido flexible, elástico, “el espaciotiempo”. Su geometría es curva y la gravedad es la curvatura del espaciotiempo. En Relatividad General la geometría del espaciotiempo asume un papel activo, dinámico, y se convierte, jugando con la materia y la energía, en actor protagonista de la física del universo. No es “inmutable” ni “plano”: puede deformarse, estirarse, expandirse, contraerse, curvarse y retorcerse. Y la forma en que lo hace está determinada por lo que hay en él. El Sol, por ejemplo, curva enormemente el espaciotiempo a su alrededor, como una masa depositada en una cama elástica; y los planetas siguen trayectorias, geodésicas, dictadas por esta geometría curvada.

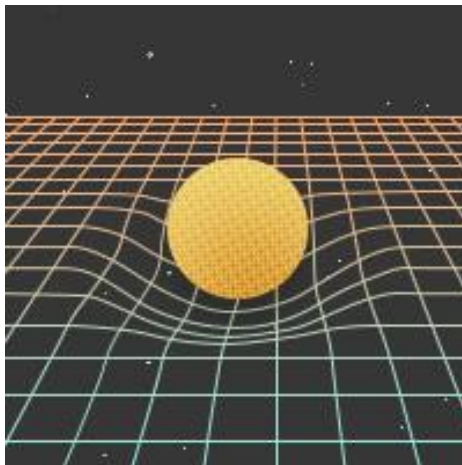


Figura 1

Si, como especulábamos, el Sol desapareciera por arte de magia, el espaciotiempo se distorsionaría y esta perturbación (una onda gravitatoria) comenzaría a propagarse a su alrededor, llegando a alcanzar la Tierra unos ocho minutos después (el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia entre el Sol y nuestro planeta). “La masa curva el espaciotiempo” es parte del mensaje que subyace en las ecuaciones de Einstein; y “la curvatura del espaciotiempo marca las correspondientes trayectorias a seguir por los objetos que contiene” es la contrapartida para completar la interpretación de esas fórmulas.

Se cumplen estos días cien años desde la publicación (en febrero de 1916) de un artículo de Karl Schwarzschild, “Sobre el campo gravitacional de una masa puntual según la teoría de Einstein”, donde aparece la primera solución exacta de las ecuaciones de la Relatividad General. El 18 de noviembre de 1915 Einstein había sido capaz de encontrar alguna solución aproximada a sus ecuaciones con la que explicar la precesión de la órbita de Mercurio (uno de

los temas no resueltos por la teoría newtoniana); y, con enorme sorpresa, a finales de diciembre recibió una carta del frente ruso en la que Schwarzschild le ayudaba en esa tarea con su solución exacta. De carácter afable y cordial, con una mente abierta a muchas manifestaciones culturales, el astrofísico alemán de origen judío Schwarzschild había mantenido desde su juventud (a los dieciséis años publicó un par de artículos sobre mecánica celeste) una prodigiosa actividad científica (que incluye artículos de astronomía, física e, incluso, de geometría y cosmología); una semana antes de morir el 16 de mayo de 1916, con cuarenta y dos años, tras una dolorosa enfermedad contraída en la Gran Guerra, escribió su artículo póstumo (sobre aplicaciones de “la hipótesis cuántica”). Sus últimos cargos antes de la guerra fueron los de director del Observatorio Astronómico de Postdam y profesor honorario de la Universidad de Berlín. No tuvo tiempo vital, pues, para desarrollar las implicaciones de “la solución de Schwarzschild” de la Relatividad General, que contiene una “singularidad” (donde las leyes físicas empleadas dejan de tener sentido y el propio espacio-tiempo se desvanece desapareciendo) y que hoy son vistas con las características del primer agujero negro matemático (“matemático”... pues las consecuencias “físicas” no se empezaron a apreciar y tomar visos de realidad hasta cuarenta años más tarde). Nos ha quedado asociado a su nombre “el radio de Schwarzschild de una masa”, que indica ese radio tal que una masa encerrada en un radio menor no deja escapar ninguna señal hacia el exterior: la propiedad característica de un agujero negro.

## 2. Agujeros negros en el universo: GW091415

El espaldarazo necesario para que soluciones matemáticamente posibles de las ecuaciones de la Relatividad General fueran merecedoras de apuntar a entidades reales del universo se dio cuando se comprendieron mecanismos de la naturaleza que las podían generar, como la implosión que se produce cuando una estrella muy masiva agota su combustible y resulta vencida por su propia gravedad, confinando su masa en una región demasiado pequeña. Hoy se piensa que existen miles de millones de agujeros negros de tamaño “mediano” (varias decenas de veces la masa solar) en el universo y que en la mayoría (si no en todas) de las galaxias hay un agujero negro supermasivo (de varios millones de masas solares) en su zona central, directamente involucrados en la evolución dinámica que se produce en su galaxia. Hoy, incluso, se especula con la posibilidad de que existan mini-agujeros negros y de que, quizá, se puedan generar pronto en un colisionador de partículas suficientemente potente.

El mundo mediático recoge estos días con gran interés el anuncio del pasado once de febrero de la primera detección directa de ondas gravitacionales en los interferómetros LIGO (en 1993 se había ya otorgado a Hulse y Taylor el premio Nobel por sus trabajos analizando indirectamente, con exquisito detalle, la presencia de ondas gravitacionales emitidas por sistemas binarios de estrellas de neutrones orbitando una sobre la otra, con un acuerdo tan grande con las predicciones de la Relatividad General que apenas deja lugar a dudas). La detección de ondas gravitacionales en la Tierra, que se produjo el pasado 14 de septiembre de 2015 (de ahí el acrónimo, GW091415), ha supuesto un enorme desafío científico y tecnológico: el efecto del paso de una de ellas estira el espacio en una dirección y lo contrae en la perpendicular (y viceversa) en un movimiento periódico; la distorsión en los interferómetros de LIGO es ¡menor que un núcleo atómico!...y, sin embargo, la señal buscada ha sido reconocida con transparencia, como un homenaje al trabajo enorme en Relatividad numérica realizado en los últimos años. Proviene de la Nube de Magallanes y se originó en una colisión

de dos agujeros negros “medianos”, fusionándose en un nuevo agujero negro, liberando en unos microsegundos una energía del orden de diez elevado a veinticuatro veces la energía solar... ¡hace unos mil trescientos millones de años! Neil Turok, director del Perimeter Institute for Theoretical Physics (Canadá), ponderando la nueva ventana abierta para escuchar señales del universo detectando ondas gravitacionales, destacaba la oportunidad que se nos brinda de entender mejor en las próximas décadas aquellos objetos del cosmos que no emiten luz (los agujeros negros, la materia oscura,...), señalando incluso al propio big bang: “usando ondas electromagnéticas no podemos ir más allá de unos cuatrocientos mil años después del big bang; el universo anterior era opaco a la luz... ¡pero es transparente al paso de las ondas gravitacionales!”

### 3. Luz y gravedad

Se suele conocer como “gravitational lensing”, GL, al efecto sobre la luz causado por la gravedad. Como las masas curvan el espaciotiempo, los caminos que sigue la luz al pasar cerca de ellas se alteran y, ante un observador, se produce un efecto visual que distorsiona las posiciones relativas de las fuentes luminosas. Einstein se ocupó por obtener el ángulo de deflexión de la luz al pasar rasante al Sol, y, tras haber completado las ecuaciones de la Relatividad General, dio con la fórmula “correcta” (el doble de la cantidad deducida en el modelo newtoniano). En 1919 una expedición dirigida por Eddington observó durante un eclipse la luz de un bien conocido grupo de estrellas cercanas (las Hyadas): el resultado coincidía con la predicción de Einstein. ¡La luz confirmaba la nueva teoría!

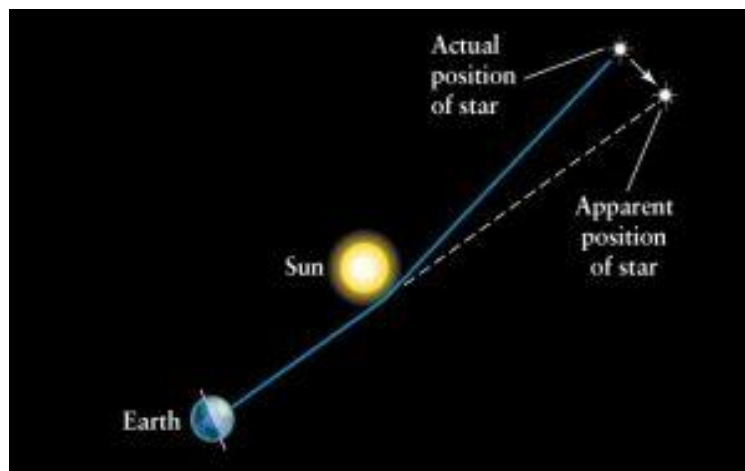


Figura 2

Desde entonces, los avances en la observación del universo profundo y en la comprensión del GL nos han ido desvelando un mundo “mágico”, abierto a multitud de “ilusiones ópticas”: aparición de imágenes múltiples de un mismo objeto, arcos e incluso anillos... La detección de “retrasos gravitacionales” (puesto que las imágenes pueden seguir caminos diferentes, la luz procedente de un mismo astro puede alcanzarnos en momentos distintos, con años incluso de diferencia) ha ayudado, por ejemplo, a confirmar la expansión del universo (teniendo en cuenta, chequeando el retraso, el ritmo de dicha expansión). El GL ha servido estos últimos años para calcular distancias, buscar exoplanetas...; incluso para

cartografiar la distribución de materia oscura (delatada por su efecto gravitatorio). Naturalmente, el GL ha de ser especialmente sensible a la presencia de un gran agujero negro, un objeto invisible que deforma en modo extremo el espaciotiempo alrededor de su horizonte.

#### 4. La sombra de un agujero negro, un nuevo test de la Relatividad

En la película “Interstellar” aparece un agujero negro supermasivo. La imagen que se muestra más abajo estudia cómo se piensa que podría ser su sombra: el “negro” de ese agujero negro, rodeada por un anillo brillante, producido por la materia muy caliente de su disco de acreción.

Gargantua, el agujero imaginario de la película, está demasiado lejos de nosotros; sin embargo, en la zona central de nuestra galaxia, la Vía Láctea, está Sagittarius A\*, un agujero negro de 4,1 millones de masas solares. Se estima que, vista desde la Tierra, su sombra es de unos 50 micro-arcos de segundo de anchura: como observar desde nuestra casa una uva situada en la Luna.

El actual proyecto EHT (“Event Horizon Telescope”), un conjunto de telescopios situados en distintos puntos de la Tierra, podría llegar a tener la resolución suficiente como para captar por primera vez la imagen del entorno inmediato del horizonte de Sagittarius A\*. Estos logros del futuro cercano, detectar las sombras de agujeros negros, supondrán no sólo coronar años de esfuerzo teórico y tecnológico: pueden ser también un nuevo test del rango de validez de la propia Relatividad General clásica.

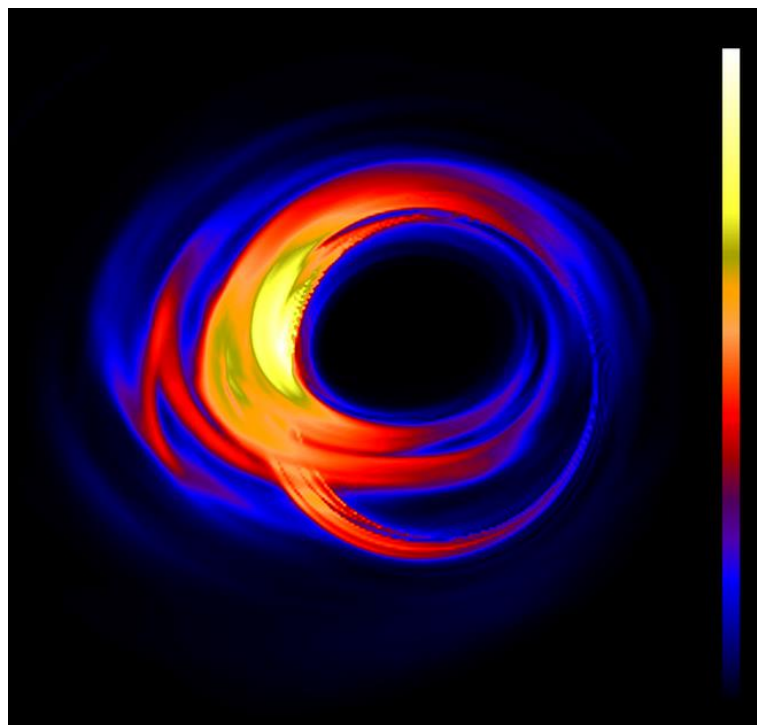


Figura 3

La teoría de Einstein es la mejor teoría de la gravitación de que disponemos hoy. Pero...está incompleta. Es una teoría geométrica y determinista que ignora los efectos cuánticos (discontinuos y probabilistas) que gobiernan el mundo subatómico. Junto a las singularidades del big bang y de los agujeros negros se entrelazan estos “mundos” de la Relatividad General y de la Mecánica Cuántica, de lo grande y lo pequeño: éste es el terreno de “la gravedad cuántica”, todavía por desarrollar satisfactoriamente.

Einstein modeló el espaciotiempo como un “continuo tetradimensional”. Y los éxitos grandiosos de su teoría tienen también los pies de barro: la “continuidad” puede quebrar, puede ser sólo resultado de una (muy buena) aproximación. ¿Y qué decir de la “tetradimensionalidad”?

Uno de los problemas de la Relatividad General es que no explica por qué la gravedad es mucho más débil que las demás fuerzas fundamentales. Según algunas teorías, el universo que percibimos, al que estamos acostumbrados, es una membrana tetradimensional en un espaciotiempo con más dimensiones. No vemos estas dimensiones extra porque la luz no se propagaría por ellas. Sin embargo, la gravedad, el reflejo de la geometría del espaciotiempo, sí: se difundiría también hasta el último rincón de ellas. Supongamos que existe otra dimensión espacial, adicional a las usuales: la gravedad podría penetrar y diluirse a lo largo de toda ella. No sería “tan” débil: es que estaría distribuyendo su trabajo por más dimensiones que las otras fuerzas de la naturaleza.

En los últimos años se está realizando un intenso estudio de las ecuaciones de Einstein en dimensiones superiores. Y se han encontrado sorpresas, por ejemplo, agujeros negros “matemáticos”, que no son posibles en un universo tetradimensional.

La Relatividad General de Einstein permite no sólo predecir agujeros negros (como los de Schwarzschild y Kerr), sino, también, el tamaño y la forma de sus sombras. ¿Y si observamos formas diferentes a las predichas? Curiosamente, las teorías con dimensiones extra predicen una forma diferente para los distintos tipos de agujeros negros que en ellas son posibles. De modo que, una vez más en la historia del pensamiento, el estudio de la luz y de las sombras parece ir de la mano del progreso en un mejor entendimiento de las leyes más básicas de nuestro universo.

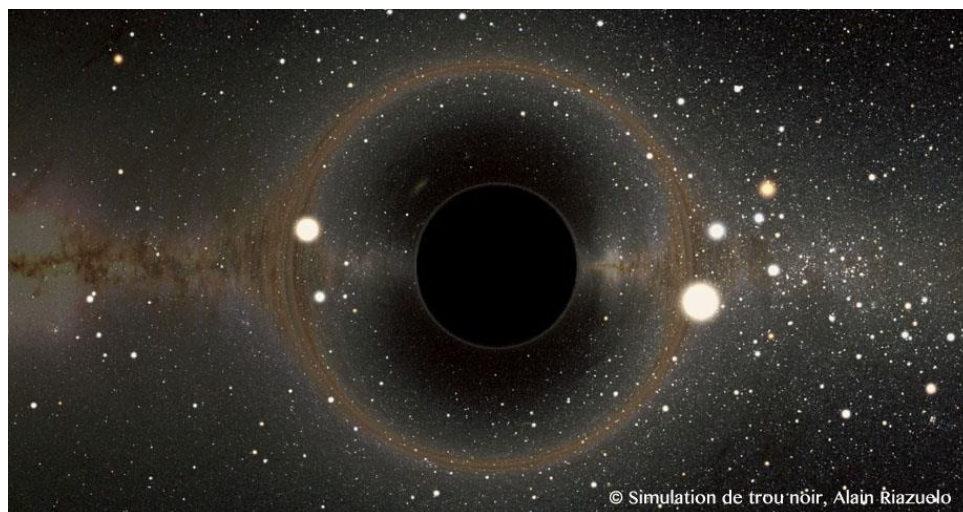


Figura 4

## 5. Anexo: ¿qué es un agujero negro relativista?

La métrica de Schwarzschild,  $g_s$ , se puede escribir en un sistema de coordenadas “polares”  $(t, r, \theta, \varphi)$  como

$$(1) \quad g_s = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2,$$

donde  $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  es la métrica usual de la 2-esfera unitaria.

En esta expresión se han presupuesto unidades geométricas (en las que  $c = G = 1$ ); en otro caso, la componente “temporal-temporal” de  $g_s$  hubiera aparecido como

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

De (1) se sigue inmediatamente que la métrica de Schwarzschild es estacionaria (invariante bajo traslaciones temporales) y, de hecho, estática. Además, como su parte angular,  $r^2 d\sigma^2$ , es la métrica de una 2-esfera de radio  $r$ ,  $g_s$  posee simetría esférica (es invariante bajo las transformaciones de  $O(3)$ ). Como es sabido, el teorema de Birkhoff afirma que si  $ds$  es una métrica relativista con simetría esférica, entonces  $ds = g_s$ .

La hipersuperficie  $r = r_s$  (“el horizonte”), donde  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  (“el radio de Schwarzschild”) juega un papel decisivo en la caracterización relativista del concepto de “agujero negro”.

Para un observador “en reposo” ( $dr = d\theta = d\varphi = 0$ ), sucede que

$$g_s = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 \begin{cases} < 0 & \text{si } r > r_s \\ = 0 & \text{si } r = r_s \\ > 0 & \text{si } r < r_s \end{cases},$$

de donde podemos deducir que una “partícula” (un observador con masa) solo puede permanecer en reposo si está fuera del horizonte ( $r > r_s$ ), ya que las líneas del universo de las partículas son temporales:  $g_s < 0$ . En el horizonte ( $r = r_s$ ) una tal “partícula” sigue una geodésica nula (va a la velocidad de la luz). Más allá, al atravesar el horizonte ( $r < r_s$ ) ninguna partícula puede permanecer en reposo, pues debería avanzar con velocidad superior a la de la luz.

La definición intuitiva “standar” de agujero negro habla de una región cuya gravedad es tan fuerte que ni tan siquiera la luz puede escapar de ella. Este recurso a la “velocidad de escape” de un objeto respecto a cierto campo gravitatorio ya fue usado hace un par de siglos por Michell (y más tarde por Laplace) para especular con la posibilidad de que existieran regiones con campos gravitatorios lo suficientemente intensos para que la correspondiente velocidad de escape superara a la de la luz. Así que la caracterización intuitiva anterior de un agujero negro podría parecer anterior a la teoría de la relatividad general.

Sin embargo, las propiedades del horizonte de la métrica de Schwarzschild aportan un paso más allá que revoluciona esta descripción del concepto de agujero negro: se trata de una región del espacio-tiempo en la que éste se desploma sobre sí mismo, implosionando con una

velocidad superior a la de la luz, arrastrándolo “todo” en este proceso. Ésta es la verdadera razón que debemos a Schwarzschild de que la luz no pueda escaparse de la región acotada por el horizonte: en su interior el “espacio” se comprime más rápido que cualquier objeto, incluso que la propia luz, arrastrándolo hacia la singularidad, aún cuando éste esté apuntando hacia el exterior.

## Referencias

- [1] HAWKING, S. and ELLIS, G.R., *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press, 1973.
- [2] O'NEILL, B., *The geometry of Kerr black holes*, A.K. Peters, 1994.
- [3] REALL, H., *Lectures on black holes*, <http://bit.ly/1Pg5qUc>, 2013.
- [4] ROJO, J., GARRO, J.C., ORTIZ, E. y CAÑADAS, G. *Luz y gravedad*, Revista Pensamiento Matemático, Volumen 0, Abril 2011.

### Sobre el autor:

Nombre: José Rojo Montijano

Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es

Institución: Universidad San Pablo CEU, España.