Historias de Matemáticas

Los métodos infinitesimales para el cálculo de cuadraturas y cubaturas

Infinitesimal methods to calculate quadratures and cubatures

José María Ayerbe Toledano

Revista de Investigación

Volumen VIII, Número 1, pp. 031–056, ISSN 2174-0410
Recepción: 5 Sep'17; Aceptación: 1 Feb'18

1 de abril de 2018

Resumen

En este artículo se estudian los métodos infinitesimales para el cálculo de cuadraturas y cubaturas desarrollados por Cavalieri, Torricelli, Fermat y Pascal en la primera mitad del siglo XVII, incluyendo algunos ejemplos que ilustrarán al lector sobre su aplicación. Estos métodos fueron haciéndose cada vez más parecidos a nuestros actuales métodos de integración e iluminaron el nacimiento del Cálculo Infinitesimal, que se produjo a finales de siglo.

Palabras Clave: Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Indivisibles, Cuadraturas, Cubaturas, Métodos infinitesimales.

Abstract

In this paper we study the infinitesimal methods to calculate quadratures and cubatures developed by Cavalieri, Torricelli, Fermat and Pascal in the first middle of XVII century. Several examples to ilustrate the methods are given. These methods played an important role in the birth of Infinitesimal Calculus what happened at the last years of the century.

Keywords: Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Indivisibles, Quadratures, Cubatures, Infinitesimal methods.

1. Introducción

En los inicios del siglo XVII están desarrollando su trabajo científicos como Stevin, Galileo o Kepler que necesitaban, para sus estudios de mecánica o astronomía, los métodos de Arquímedes. Todos ellos querían evitar, sin embargo, las dificultades técnicas del método de exhaución, para lo que comenzaron a desarrollar diversos procedimientos de corte infinitesimal que, pese a su evidente falta de rigor, permitían por un lado confirmar los resultados obtenidos por los geómetras clásicos y, por otro, abordar nuevos problemas que hasta entonces no habían podido ser resueltos. Fue precisamente esta fertilidad en las aplicaciones lo que dio alas al desarrollo de estos nuevos métodos.

Esto propició un uso del infinito sin las cortapisas impuestas por la concepción aristotélica, permitiendo de esta forma que las cantidades infinitesimales e infinitamente grandes se convirtieran en herramientas potentísimas para el tratamiento de los problemas que hoy incardinamos en el campo del cálculo infinitesimal: máximos y mínimos, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad, rectificaciones de curvas, cálculo de tangentes,… Por lo que se refiere específicamente al cálculo de áreas y volúmenes, o en términos clásicos, al estudio de las cuadraturas y las cubaturas, los primeros trabajos sistemáticos los realizó Kepler en su obra *Nova stereometria doliorum vinarorum* de 1615, pero fueron muchos los matemáticos que durante este siglo desarrollaron diferentes procedimientos para abordar este tema.

En este artículo nos vamos a centrar en los antecedentes de lo que hoy llamamos cálculo integral que se desarrollaron en la primera mitad del siglo XVII. Para ello estudiaremos con cierto detalle los procedimientos de Cavalieri, que amplió y sistematizó los introducidos por Kepler, los desarrollos aritméticos de Pascal y, muy especialmente, los trabajos de Fermat que, hacia mediados de siglo, fue el primero, junto con Torricelli, en demostrar la cuadratura básica para exponentes racionales, es decir, la igualdad que actualmente escribimos en la forma

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}}dx = \frac{a^{(p/q)+1}}{(p/q)+1} \qquad (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$$

En todos los casos hemos procurado poner de manifiesto las ideas originales que iluminaron a estos grandes matemáticos en sus investigaciones, tratando de no desvirtuar la significación histórica de sus resultados, pero en general hemos utilizado la notación actual con objeto de facilitar la comprensión de los conceptos.

2. El método de los indivisibles de Cavalieri

Cavalieri (1598-1647) nació alrededor de 1598 en Milán e ingresó en 1615 en la orden de los Jesuatos, cuya sección masculina fue disuelta en 1668. Probablemente con motivo de ese ingreso tomó el nombre de Buenaventura. En el periodo 1616-1620 Cavalieri fue discípulo de Benedetto Castelli, notable matemático que colaboró con Galileo y que fue profesor en las universidades de Pisa y Roma. Tan satisfecho estaba Castelli con su alumno que, a partir de 1617, lo puso en contacto con el propio Galileo con quien Cavalieri sostuvo una intensa correspondencia. De hecho, Cavalieri envió a Galileo más de cien cartas entre 1619 y 1641 y, aunque Galileo no las respondió todas, sí que lo hizo ocasionalmente. No obstante, la mayor parte de esas cartas se han perdido.

En 1619 Cavalieri solicitó una plaza en la universidad de Bolonia, que no obtuvo, lo que él mismo atribuyó al hecho de que los Jesuatos no eran muy populares en Roma. No obstante, probablemente gracias a la influencia de Galileo, aparte naturalmente de a sus propios méritos, la plaza le fue finalmente concedida en 1629, al tiempo que pasaba a ocupar el cargo de prior en el monasterio Jesuato de Bolonia. Aunque en principio la plaza de profesor era sólo para un periodo de tres años, Cavalieri la fue renovando sucesivamente hasta su muerte acaecida en 1647.

Cavalieri publicó diez libros de matemáticas y una tabla de logaritmos. De hecho fue el primer matemático italiano que apreció en todo su valor los logaritmos. No obstante, la obra que lo hizo famoso en los círculos matemáticos fue su *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* o, en castellano, *Geometría de los continuos por indivisibles presentada por métodos nuevos*, de 1635 (en adelante la *Geometría*). Tan importante fue considerada en su tiempo que se reimprimió en 1653. También sobre indivisibles publicó en 1647 *Seis ejercicios geométricos* o, en latín, *Exercitationes geometricae sex*. Ambas obras se hicieron muy populares entre los matemáticos de la época e inspiraron a muchos de ellos a buscar sus propios procedimientos para el cálculo de áreas y volúmenes basándose, de manera más o menos directa, en el método de Cavalieri.

La principal razón por la que la *Geometría* de Cavalieri atrajo la atención de sus colegas fue, sin duda, porque la mayor parte de ellos estaban muy interesados en los problemas de cuadraturas y cubaturas, pero el número de publicaciones sobre el tema era muy escaso en aquellos años. No obstante, en [1, pág. 294] se hace notar que los matemáticos de la época que estudiaron a fondo la Geometría fueron posiblemente muy pocos, a pesar de que la existencia del libro era bien conocida. Esto se refleja en el hecho de que, aunque la obra de Cavalieri es citada en la mayor parte de los trabajos sobre este tópico que se realizaron a lo largo del siglo XVII, su contenido casi nunca es descrito en profundidad. Quizás uno de los motivos por los que la Geometría fue tan poco estudiada, en comparación con el conocimiento que había de la existencia de la obra, sea la dificultad que presentaba su lectura por la forma tan confusa en que estaba escrita. En este sentido Maximilien Marie, uno de los principales historiadores de la ciencia del siglo XIX, señaló en [6, vol. 4, pág. 90] que

> *si se estableciera un premio para el libro de lectura más difícil, la Geometria de Cavalieri sería un serio candidato a ganarlo.*

Cavalieri adopta los indivisibles de la filosofía escolástica, es decir, son entes de dimensión menor respecto del continuo, del cual forman parte. Así, los puntos son los indivisibles de las líneas, las líneas lo son de las figuras planas y las secciones planas de los sólidos, pero Cavalieri no utiliza esta definición, ni ninguna otra, porque para él los indivisibles son una manera de hablar para referirse a los elementos que constituyen las figuras, lo que le permite compararlas y deducir, de áreas o volúmenes conocidos, las áreas o volúmenes de figuras planas o sólidos nuevos.

Cavalieri presentó en su *Geometría* dos métodos basados en los indivisibles que llamaremos, utilizando la terminología de [1], métodos colectivo y distributivo, respectivamente, aunque en realidad Cavalieri nunca usó esos nombres. Los seis primeros libros, de los siete que componen la *Geometría*, desarrollan el método colectivo y el último el método distributivo. En el primer libro Cavalieri clarifica algunas de sus asunciones sobre figuras planas y sólidos. En el Libro II introduce el método colectivo de los indivisibles y prueba los teoremas fundamentales sobre colecciones de líneas. Estos teoremas son aplicados en los Libros III, IV y V para la obtención de cuadraturas y cubaturas de secciones cónicas. El Libro VI está dedicado a la cuadratura de la espiral, pero contiene también resultados relativos a cilindros, esferas, paraboloides y esferoides. Finalmente el Libro VII presenta una nueva aproximación al método de los indivisibles, el llamado método distributivo.

Los *Exercitationes*, por su parte, se componen de seis libros. En el Libro I Cavalieri ofrece una versión reducida y simplificada del método colectivo y en el Libro II realiza una nueva presentación del método distributivo. El Libro III recoge las reacciones de Cavalieri a las duras críticas que su método había recibido por parte de Guldin, de lo que hablaremos más adelante, y el Libro IV generaliza el método colectivo de indivisibles, aplicándolo a curvas algebraicas de grado superior a dos, obteniendo un resultado equivalente a la cuadratura básica

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad n = 3,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ y } 9$$

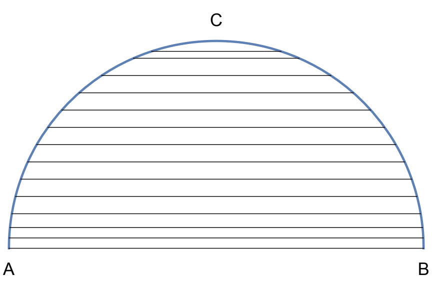
El Libro V está dedicado a la aplicación del método de los indivisibles para la determinación de centros de gravedad y en el Libro VI se ofrece una miscelánea de todo lo anterior.

La idea de Cavalieri se basa en la asunción, demostrada en el teorema I.1 de la *Geometría*, de que, dada una figura plana y cerrada [o un sólido acotado] y una dirección fija, la figura tendrá dos rectas tangentes [o dos planos] paralelas a la dirección fijada de modo que cualquier recta paralela [o plano] situada entre las dos tangentes [que Cavalieri llama tangentes opuestas] cortará a la figura en un segmento [o en una superficie], mientras que cualquier recta paralela [o plano] que no esté situada entre las tangentes opuestas no tendrá puntos en común con la figura.

El concepto fundamental de la teoría de Cavalieri es el de "Omnes lineae", "todas las líneas", que es introducido en la definición II.1 de la *Geometría*:

> *Dada una figura plana, se consideran dos planos perpendiculares al plano de la figura entre los que ésta está exactamente contenida [que podemos encontrar siempre en virtud del teorema anterior]. Si uno de los dos planos se mueve paralelamente hacia el otro hasta coincidir con él, entonces las líneas que durante el movimiento forman la intersección entre el plano móvil y la figura dada, considerada en conjunto, se llaman omnes lineae de la figura, tomada una de ellas como regula [directriz].*

Así, dada la figura $F = ACB$, si tomamos como regula la dirección AB, todas las líneas o indivisibles de la figura F respecto de la regula AB, que denotamos por $O(F, l)$, es el conjunto de segmentos de la figura F paralelos a AB.



Parece claro que la noción de "Omnes lineae" está inspirada en la idea intuitiva de considerar una figura plana o un sólido como compuesto por infinitésimos. Muchos matemáticos, desde Demócrito en la antigua Grecia, habían usado ya esta idea como punto de partida para el cálculo de cuadraturas y cubaturas. En el caso de Cavalieri el antecedente inmediato es, sin duda, Kepler, pero no está claro si conoció su trabajo con anterioridad al desarrollo de su propio método. No obstante, debemos huir de una interpretación del concepto de "Omnes lineae", en la formulación de Cavalieri, como una suma de segmentos. En este sentido, se afirma en [1, pág. 308] lo siguiente:

> *La mayor parte de los historiadores de la matemática han descrito el concepto de "Omnes lineae" de Cavalieri como una suma de segmentos [...]. Esta interpretación es desafortunada, pues ni la definición de Cavalieri ni sus aplicaciones de "todas las líneas" implican el concepto de una suma.*

Mas adelante veremos que la idea de las colecciones de líneas como sumas es más propia de Torricelli, lo que podría explicar la confusión al respecto.

A partir de aquí, Cavalieri ya puede plantearse la relación entre las cuadraturas y las colecciones de líneas, lo que hace en el teorema II.3 de la Geometría:

> *La razón entre las figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas respecto de la misma regula.*

Esta relación entraña, como condición preliminar, que la razón entre dos colecciones de líneas exista, lo cual conceptualmente no es trivial ya que se trata de colecciones de infinitas líneas. Para resolver este problema Cavalieri consideró las "Omnes lineae" como una nueva categoría de magnitudes a la que podía ser aplicada la teoría de magnitudes de Eudoxo recogida en Los Elementos de Euclides. Con este planteamiento Cavalieri demuestra en el teorema II.1 de la *Geometría* lo siguiente:

> *Las colecciones de líneas de figuras planas son magnitudes que tienen razón unas con otras.*

Recordemos que la definición 4 del Libro V de *Los Elementos* de Euclides nos dice que dos magnitudes guardan razón entre sí cuando, multiplicadas, pueden superar una a la otra. Por tanto, lo que hace Cavalieri en la demostración de este teorema es probar que dadas dos colecciones de líneas correspondientes a dos figuras planas F_1 y F_2, se verifica que existe un número natural n tal que $nO(F_1, l) > O(F_2, l)$. Para ello supone que las dos figuras tienen la misma altura y después argumenta que, como dos líneas l_1 y l_2 de F_1 y F_2 que están a la misma distancia de las bases guardan razón entre sí, es decir, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 l_1 > l_2$, es posible encontrar un múltiplo de $O(F_1, l)$ mayor que $O(F_2, l)$. Cavalieri soslaya el hecho de que para encontrar ese múltiplo necesita obtener el supremo de una colección infinita de números, que podría ser infinito, lo que supone un error en el razonamiento imposible de superar.

Otro teorema que presenta la misma debilidad argumental es el teorema II.2, que afirma lo siguiente:

> *Si dos figuras son iguales [tienen el mismo área] también lo son sus colecciones de líneas.*

En la prueba Cavalieri superpone las figuras y elimina la parte común. Una vez hecho esto, vuelve a superponer las partes residuales de cada figura y de nuevo elimina la parte común. Así, continúa el proceso

> *hasta que las partes residuales [de las figuras] son superpuestas unas con otras,*

de donde deduce que sus respectivas colecciones de líneas son iguales. El problema que plantea la demostración de Cavalieri es que el proceso de superposición de una figura sobre otra podría ser infinito. Esto es lo que ocurriría, por ejemplo, si se tratase de un círculo y un cuadrado de igual área, por lo que su discurso argumental tiene serios puntos débiles. Cavalieri no hizo ningún comentario al respecto de esta posibilidad en la Geometría, pero está claro que no le pasó inadvertido el hecho ya que lo comentó en una carta posterior a Torricelli y en su obra *Exercitationes*. Parece que pensó que podría darse una demostración correcta de su teorema, incluyendo el caso de que se produjera un proceso infinito, utilizando el método de exhaución, pero la realidad es que él nunca la detalló.

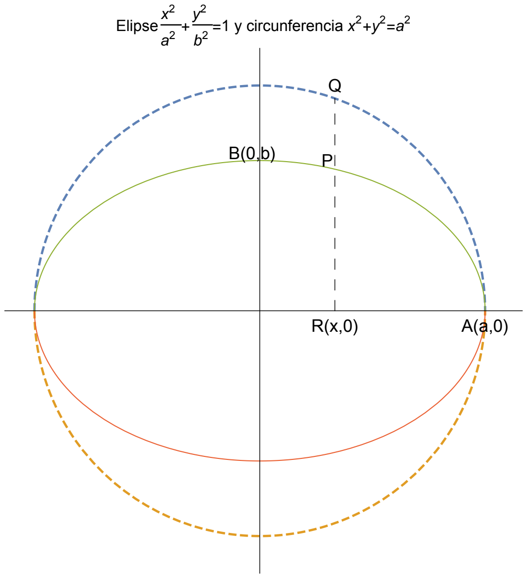
A continuación Cavalieri reduce el problema de obtener la razón entre dos áreas a hallar la razón entre sus colecciones de líneas, para lo que utiliza, como uno de sus instrumentos más útiles, el teorema II.4, conocido como principio de Cavalieri:

> *Si dos figuras planas tienen la misma altura y si las secciones determinadas por dos líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las figuras planas también están en la misma razón.*

Vamos a aplicar este principio para obtener el área de la elipse a partir de la del círculo. Este resultado se debe a Arquímedes que, en su obra Sobre conoides y esferoides, lo demostró de manera impecable utilizando el método de exhaución (Ver, por ejemplo, [5, pág. 259-262]). De forma independiente fue obtenido también por Kepler, siguiendo esencialmente el procedimiento detallado aquí.

Ejemplo 2.1. *El área de la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es igual a* πab.

En efecto:



Se verifica que $RP = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $RQ = \sqrt{a^2 - x^2}$. Tomando como regula la dirección del eje de ordenadas se tiene que

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{b}{a}$$

de donde resulta, según el principio de Cavalieri, que la razón entre el área de la elipse y el área de la circunferencia es $\frac{b}{a}$. Por tanto, el área de la elipse se obtiene multiplicando por dicha cantidad al área de la circunferencia. Sigue que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab. □

Para tratar con sólidos, Cavalieri introduce en la definición II.2 de su Geometría las colecciones de planos, concepto que generaliza el de "omnes lineae". En dimensión tres el principio de Cavalieri se enunciaría de la siguiente forma:

> *Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones determinadas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces los volúmenes de los sólidos están en esta misma razón.*

Veamos cómo, aplicando este principio, puede obtenerse fácilmente el volumen del cono a partir del de la pirámide:

Ejemplo 2.2. *El volumen de un cono de radio de la base r y altura h es* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

En efecto: Consideremos una pirámide de base cuadrado de lado 1 y altura h y un cono de la misma altura y radio de la base r. Sean P_x y C_x las secciones de la pirámide y del cono paralelas a la base y a una distancia x de los vértices respectivos. Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{l}{1} = \frac{x}{h} = \frac{r'}{r}$$

siendo l el lado de P_x y r' el radio de C_x.

Así obtenemos que el área de P_x es $l^2 = \frac{x^2}{h^2}$ y el área de C_x es $\pi r'^2 = \pi r^2 \frac{x^2}{h^2}$, de donde sigue que la razón entre ambas magnitudes es igual a πr^2. Por tanto, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que el volumen del cono es el de la pirámide multiplicado por dicha constante, de donde se deduce que el volumen del cono es $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. □

Es sorprendente la estrecha similitud que existe entre la aplicación del principio de Cavalieri y el método mecánico de Arquímedes que, naturalmente, Cavalieri no podía conocer ya que, como es bien sabido, está recogido en su libro El método que estuvo perdido hasta su descubrimiento por Heiberg en 1906. Pero, como señala González Urbaneja [4, pág. 99-100],

> *Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso mecánico de la palanca para sumar sus indivisibles, el álgebra le facilita esta operación y le proporciona una potencialidad de generalización inviable en el marco de la geometría griega.*

Cavalieri además generaliza sus "omnes lineae" definiendo otros "omnes conceptos", como por ejemplo, todos los cuadrados de líneas de una figura F dada, $O(F, l^2)$ o, en general, todas las potencias de orden n de líneas de una figura dada F, $O(F, l^n)$, obteniendo al aplicarlos a una figura triangular resultados equivalentes a nuestra cuadratura básica

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ y } 9$$

y conjeturó que este resultado podría extenderse a cualquier $n \in \mathbb{N}$, con lo que inició un importante proceso de generalización.

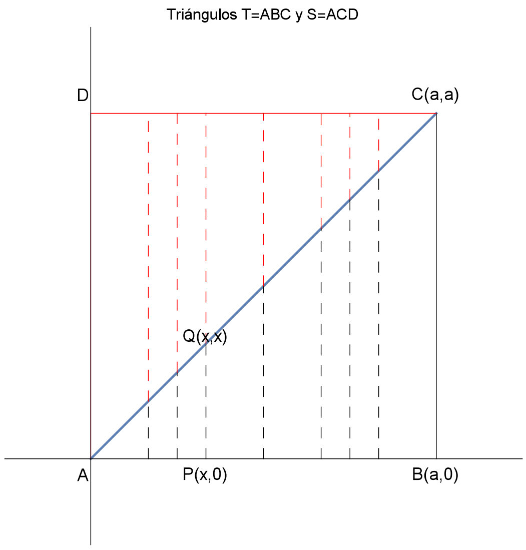
Veamos la esencia del razonamiento de Cavalieri en los dos primeros casos. El caso $n = 1$ es el resultado correspondiente al teorema II.19 de la Geometría, que está formulado en los siguientes términos:

> *Si se dibuja una diagonal de un paralelogramo, el paralelogramo es el doble de cada uno de los triángulos determinados por la diagonal.*

La demostración que recogemos a continuación se ajusta a la original de Cavalieri, utilizando un cuadrado en lugar de un paralelogramo cualquiera.

Teorema 2.3. $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$.

Demostración. Sea T el triángulo ABC en el que el lado AC está sobre la recta $y = x$ entre el origen de coordenadas A y el punto B de coordenadas $(a, 0)$.



Entonces, si tomamos el segmento BC como regula, la colección de todas las líneas del triángulo T es el conjunto de segmentos paralelos a BC incluidos dentro del triángulo, cuya longitud en cada punto x es $l(x) = x$. Así

$$O(T,l)_{BC} = \{l(x) : l(x) \text{ es un segmento en } T \text{ paralelo a } BC \text{ y } x \in [0,a]\} = [\text{omn}.x]_0^a$$

Cavalieri probó que las colecciones de líneas de los triángulos T y S, donde S es el triángulo de vértices ACD, son iguales. Para ello basta observar que coinciden las longitudes de los segmentos de cada triángulo que son simétricos respecto del segmento central (ver los segmentos en rojo y negro de la figura). De esta circunstancia se deduce que la razón entre las colecciones de líneas del triángulo T y del cuadrado Q de vértices $ABCD$ es $1/2$. Así, de acuerdo con el teorema II.3 de la *Geometría*, sigue que la razón entre las áreas $a(T)$ y $a(Q)$ del triángulo y del cuadrado también será $1/2$ y, como $a(Q) = a^2$, se concluye que

$$a(T) = [\text{omn}.x]_0^a = \frac{a^2}{2}$$

esto es, obtenemos la fórmula que hoy escribimos en la forma

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

que es la cuadratura básica para el caso $n = 1$. □

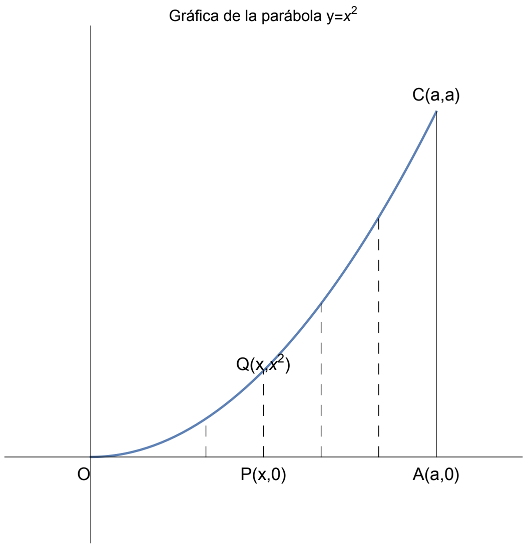
La cuadratura básica para $n = 2$ la recoge Cavalieri en el teorema II.24 de la *Geometría*, que enuncia de la siguiente forma:

> *Consideremos un paralelogramo y dibujemos en él una diagonal. Entonces, "todos los cuadrados" del paralelogramo será el triple de "todos los cuadrados" de cualquiera de los triángulos determinados por la diagonal, cuando uno de los lados del paralelogramo es tomado como regula común.*

Vamos a ver una demostración de este resultado utilizando en lo fundamental las ideas de Cavalieri, pero simplificando su farragoso procedimiento en aras de una mayor claridad.

Teorema 2.4. $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

Demostración. En este caso queremos calcular el área encerrada por la parábola $y = x^2$ entre el origen de coordenadas O y el punto $A(a,0)$. Si utilizamos el segmento AC como regula, la colección de todas las líneas de la figura curvilínea OAC es el conjunto de los segmentos incluidos en dicha figura paralelos al segmento AC, cuya longitud en cada punto x es $l(x) = x^2$.



Obtenemos entonces que el área buscada es

$$O(OAC,l)_{AC} = \{l(x) : l(x) \text{ es un segmento en } OAC \text{ paralelo a } AC \text{ y } x \in [0,a]\} = [\text{omn}.x^2]_0^a$$

que es la expresión que hoy escribimos como $\int_0^a x^2dx$.

Para calcular $[\text{omn}.x^2]_0^a$ vamos a buscar un sólido, de volumen conocido, que podamos relacionar con la expresión que queremos calcular. Para ello tomemos una pirámide de base cuadrada de lado y altura iguales a a. Observemos que la colección de todos los planos de este sólido, tomando como regula el plano de la base, es el conjunto de todas las secciones obtenidas al cortar la pirámide por planos paralelos a la base, cada una de las cuales es un cuadrado. Si llamamos x al lado de cada uno de estos cuadrados, sabemos que cada cuadrado tiene área x^2. Ahora bien, como el volumen de la pirámide es la colección de todos los cuadrados al variar x desde 0 hasta a, obtenemos que el volumen de la pirámide es también $[\text{omn}.x^2]_0^a$.

Sigue, por tanto, que el área encerrada por la parábola coincide con el volumen de la pirámide de base cuadrada de lado y altura iguales a a y, así, obtenemos que

$$O(OAC,l)_{AC} = [\text{omn}.x^2]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

o, en términos modernos, que $\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$. □

Mediante razonamientos parecidos a estos, pero con creciente dificultad calculística, Cavalieri va obteniendo la cuadratura básica para los casos $n = 3, 4, 5, 6$ y 9 e inicia así un camino que fue seguido inmediatamente por otros ilustres matemáticos de esta primera mitad del siglo XVII como veremos a lo largo de este artículo.

Para finalizar esta pequeña introducción al método de Cavalieri no queremos dejar de insistir en la falta de rigor del procedimiento y de sus fundamentos teóricos. De hecho, la publicación de la Geometría en 1635 fue el final de un largo proceso. Así, en 1627 el manuscrito estaba ya casi listo para la imprenta y, sin embargo, tardó todavía ocho años en aparecer. Como se señala en

[1, pág. 296] este largo periodo no puede ser explicado por los cambios que Cavalieri introdujo en el texto definitivo, sino que otras razones debieron retrasarlo. Cavalieri mismo manifestó que fueron sus obligaciones docentes, su deseo de publicar libros de texto y sus problemas de salud los que motivaron el retraso. Sin embargo, podría haber otra razón más: Cavalieri estaba esperando la aprobación de su método por parte de Galileo, aprobación explícita que nunca tuvo lugar. En efecto, cuando en 1634 estaba ya todo preparado para la impresión, se produjo un nuevo retraso debido a que Cavalieri decidió incluir un séptimo libro. La inclusión de este último libro pudo estar motivada precisamente por el deseo de convencer a Galileo de la bondad de su método. Así, el 22 de julio de 1634 Cavalieri le escribe:

> *Ya que la impresión de los cinco primeros libros de mi Geometría está ya terminada, me gustaría enviártelos para que los mires cuando puedas; eso me haría un gran favor y te agradecería me dijeras lo que piensas sobre mis fundamentos de los indivisibles. Sospechando que este concepto de todas las líneas o planos pudiera causar dificultades a muchos, he decidido más tarde componer el séptimo libro en el cual muestro las mismas cosas de una forma diferente, también diferente de la de Arquímedes.*

Probablemente la referencia a la dificultad que podría causar a muchos el concepto de los indivisibles esconde la verdadera razón de Cavalieri para crear un segundo método, que no es otra que convencer a Galileo. Pero, ¿cuál es la diferencia entre los dos métodos de indivisibles? Quizás la mejor descripción de esa diferencia la hace el propio Cavalieri en el Libro I de *Exercitationes*. Para ello consideró dos figuras de la misma altura y con una regula común. A continuación trazó todas las rectas paralelas a esa regula en ambas figuras. Estas líneas pueden ser comparadas de dos formas, o colectivamente, esto es, considerando la colección de todas las líneas de una figura y comparándola con la colección de todas las líneas de la otra, o distributivamente, es decir, considerando separadamente las líneas de cada figura que están a la misma distancia de la base y comparándolas dos a dos. En Exercitationes Cavalieri llamó a estos dos procedimientos el primer y el segundo método de indivisibles, pero muy bien podría haber adoptado los nombres recogidos en [1] que hemos utilizado nosotros. En cualquier caso Cavalieri siempre consideró el método distributivo como suplementario al colectivo y nunca como una teoría independiente, motivo por el cual, quizás, no se molestó en ponerle un nombre distinto.

Aunque Galileo nunca fue muy explícito en relación con su opinión sobre las ideas de Cavalieri, está claro que no era muy entusiasta al respecto. Así Cavalieri escribe en una carta a Galileo, fechada el 23 de octubre de 1635, en la que posiblemente responde a otra perdida de éste, lo siguiente:

> *Siento que mi Geometría resulte tan dificultosa y laboriosa como dices. Esto es mi culpa, ya que me he explicado mal, pero el tema en sí mismo es muy difícil... Por tanto, pienso que deberías ser indulgente conmigo; el hecho de que no tenga a nadie aquí con quien discutir estas materias es la razón por la que me pareció fácil lo que una discusión me hubiera mostrado que era dificultoso.*

En cualquier caso Cavalieri era muy consciente de las dificultades conceptuales de su método. El problema fundamental estaba, como ya hemos indicado, en el tratamiento del concepto clave en su teoría, el de "omnes lineae" o conjunto de indivisibles de una figura dada. Ya hemos señalado que él consideraba las colecciones de líneas como una nueva categoría de magnitudes a la que podía ser aplicada la teoría de magnitudes de Eudoxo pero, dado que "todas las líneas" de una figura dada son infinitas en número, Cavalieri dudaba desde el principio sobre la piedra angular de su teoría que no es otra que la existencia de razón, en el sentido de Eudoxo, de unas colecciones de líneas con otras. Por sus primeras cartas a Galileo puede comprobarse que Cavalieri había reparado en este problema desde que comenzó con su trabajo sobre los indivisibles.

Así se lo traslada a Galileo, en una carta fechada el 15 de diciembre de 1621, en la que le pide su opinión sobre el dilema ya que, por un lado

> *parece que las omnes lineae de una figura dada son infinitas [en número] por lo que no están cubiertas por la definición de magnitudes que tienen razón,*

pero por otro lado

> *debido a que si una figura se hace más grande también las líneas se hacen mayores, parece que las omnes lineae están cubiertas por la mencionada definición.*

Finalmente se decidió a demostrar este hecho en el teorema II.1 de la Geometría, demostración en la que, como señalamos, aparece un proceso infinito que Cavalieri simplemente soslaya. En sus comentarios sobre las colecciones de líneas Cavalieri intentó explicar cómo era posible trabajar con unas magnitudes que contenían infinitas líneas. Así en un escolio al teorema II.1 de su Geometría explica que no es el número de líneas de una colección lo que es usado para la comparación, sino el espacio ocupado por estas líneas (que sí es finito). En cualquier caso, sus últimas cartas a Galileo, así como diferentes pasajes de la Geometría y de sus *Exercitationes*, muestran que Cavalieri se replanteó muchas veces este problema a lo largo de su vida.

Aunque, como hemos dicho, Galileo no fue precisamente un entusiasta del trabajo de Cavalieri, la realidad es que tampoco lo criticó abiertamente. Otros matemáticos no italianos expresaron sus dudas y escepticismo de manera mucho más explícita. Entre estos fue el suizo Pierre Guldin el que más se distinguió. Guldin rechazó de plano las ideas de Cavalieri, criticando todos los puntos débiles de la teoría que, como hemos señalado, no eran pocos. A propósito de la existencia de razón entre colecciones de líneas, se mostró tajante al escribir que

> *entre una infinidad y otra nunca puede haber una proporción o ratio.*

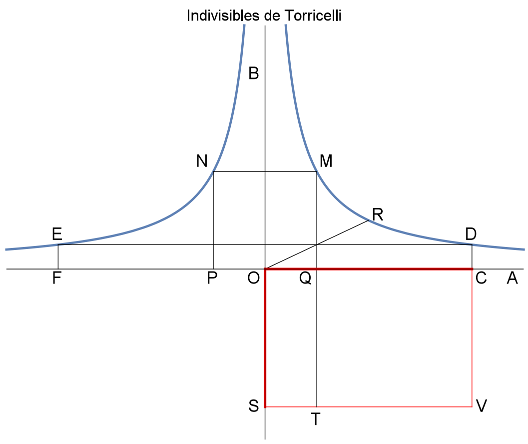
Pero Guldin fue más allá y acusó a Cavalieri de plagio, especialmente de Kepler y de Bartholomeus Sover. Cavalieri debió encontrar realmente insultantes estas afirmaciones y respondió a las mismas en el Libro III de *Exercitationes*. Refiriéndose específicamente a la acusación de plagio, él estableció fácilmente su independencia respecto de Kepler ya que la teoría de cuadraturas y cubaturas de éste, presentada como dijimos en su *Stereometría*, era muy diferente de la de los indivisibles, por más que pueda considerarse como un antecedente importante. En relación con Sover da un argumento temporal, señalando que su *Geometría* estaba lista en 1629, un año antes de la publicación del libro de Sover. En el terreno estrictamente científico Cavalieri responde a Guldin demostrando con el método de los indivisibles los teoremas, que figuran en Pappus, relativos al área y al volumen de los cuerpos de revolución, teoremas que Guldin había "demostrado" mediante razonamientos metafísicos sin valor matemático alguno. Eso no ha impedido, sin embargo, que esos teoremas estén hoy más vinculados al nombre de Guldin que al de Cavalieri, como sería mucho más justo.

Los ataques de otros matemáticos al método de Cavalieri no fueron tan fuertes como los de Guldin, pero ciertos círculos se opusieron al método. En relación a esto Stefano Angelli, jesuato como Cavalieri, señaló maliciosamente en su obra *De infinitis parabolis* de 1659 que en estos círculos había principalmente matemáticos jesuítas. Angeli pertenecía al grupo de matemáticos italianos que evaluaron favorablemente el método de Cavalieri, entre los que podemos destacar a figuras importantes como Pietro Mengoli, sucesor de Cavalieri en la cátedra de Bolonia, Honoré Fabri, a pesar de ser jesuíta, y, sobre todo, Torricelli que durante los primeros años después de la publicación de la *Geometría* se mostró bastante escéptico con el método de indivisibles, pero que hacia 1641 cambió de opinión y se convirtió en un firme defensor del mismo, utilizándolo con frecuencia, como vamos a ver enseguida, y contribuyendo a su popularización, aunque en una forma algo modificada. También fuera de Italia el método de indivisibles se fue conociendo y hacia 1650 era ampliamente aceptado. No obstante, lo que fuera de Italia era llamado el método de indivisibles y se atribuía a Cavalieri, tenía en realidad muy poco en común con su teoría de colecciones de líneas o planos. El método de indivisibles era pensado más bien como una suma de forma que, para el cálculo de áreas y volúmenes, una figura plana se podía considerar como una suma de segmentos y un sólido como una suma de áreas, idea esta que era propia de Torricelli y que, como hemos señalado, no se encuentra en los trabajos de Cavalieri. El hecho de que Torricelli utilizara su propia versión del método de indivisibles pero refiriendo la autoría siempre a Cavalieri es, probablemente, lo que motivó la errónea identificación de ambos métodos.

Para ilustrar el método de los indivisibles tal como lo utilizaba Torricelli vamos a recoger una interesante aplicación incluída en su obra *Opera geometrica* (y que nosotros hemos tomado de [7, pág. 74]) que aporta la novedad, en cierto modo paradójica para la época, de una figura no acotada que tiene volumen finito. Aunque Torricelli creyó haber sido el primero en descubrir que una figura de dimensiones infinitas podía tener una extensión finita, lo cierto es que probablemente se le adelantó Fermat en sus trabajos sobre las áreas bajo las hipérbolas de orden superior, a los que nos referiremos en próximas secciones, y, desde luego, Oresme, en el siglo XIV, que, en sus investigaciones sobre el movimiento uniformemente acelerado, calculó en determinados casos el área bajo el grafo velocidad-tiempo para obtener la distancia recorrida por un móvil, lo que le llevó a obtener la suma de algunas series convergentes como valores de los espacios recorridos.

Ejemplo 2.5. *El volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje de ordenadas una rama de la hipérbola equilátera $xy = \frac{a^2}{2}$ entre los puntos de abscisa* 0 *y b es igual al volumen del cilindro de altura b y radio de la base a.*

En efecto: De acuerdo con la figura, sean OA y OB las asíntotas de una hipérbola equilátera que pasa por los puntos M y D.



Hemos de probar que el sólido infinito que se obtiene haciendo girar el segmento DC y la rama infinita de la hipérbola que pasa por M y D alrededor de la asíntota OB tiene el mismo volumen que el cilindro de altura OC y de base el círculo de diámetro OS (en rojo en la figura), siendo OS el doble de la distancia OR de la hipérbola al origen de coordenadas.

Para ello recordemos que, si la hipérbola equilátera que pasa por M y D tiene de ecuación $xy = \frac{a^2}{2}$, entonces $a = OR$. Veamos ahora cómo razona Torricelli para llegar a la conclusión de que el sólido infinito y el cilindro mencionados tienen el mismo volumen.

Como indivisibles del sólido infinito tomamos las superficies laterales de los cilindros de eje OB, altura MQ y radio de la base OQ, moviéndose M por la hipérbola desde D hacia el eje OB.

Se verifica que el área lateral de cada cilindro es $2\pi \times OQ \times MQ$. Pero como (OQ, MQ) son las coordenadas del punto M que está sobre la hipérbola, se tiene $OQ \times MQ = \frac{a^2}{2} = \frac{OR^2}{2}$. Así el área lateral de cada cilindro es $2\pi\frac{OR^2}{2} = \pi\frac{OS^2}{4}$.

Como indivisibles del cilindro vamos a tomar la superficie de los círculos paralelos a la base de diámetro OS, variando entre O y C. Se tiene que la superficie de cada círculo es $\pi\frac{OS^2}{4}$.

Como vemos, los indivisibles del sólido infinito y del cilindro coinciden y ambos cuerpos se "completan" cuando el punto Q, que determina los indivisibles en cada cuerpo, varía entre O y C. En consecuencia ambos cuerpos tienen el mismo volumen, que será

$$\pi\frac{OS^2}{4} \times OC = \pi \times OR^2 \times OC$$

esto es, $\pi a^2 b$ si llamamos b a la abscisa del punto C. □

Evangelista Torricelli (1608-1647) fue uno de los científicos más destacados de la primera mitad del siglo XVII. Aunque en la actualidad es más conocido por la invención del barómetro, su obra matemática fue tan importante que Boyer señala en [2, pág. 451] que

> *si hubiera vivido una cantidad de años normal, es muy posible que hubiera sido él el inventor del cálculo infinitesimal, pero el cruel destino truncó su vida en Florencia sólo unos días después de haber cumplido* 39 *años.*

En efecto, en la época de Torricelli los problemas más populares eran los que podían ser atacados utilizando métodos infinitesimales, y él llegó a ser un maestro en este arte. Torricelli dio numerosos ejemplos del uso del método de los indivisibles en su *Opera geometrica*, publicada en 1644. Este libro fue muy bien recibido por los matemáticos europeos y llegó a ser la principal fuente del conocimiento que estos tuvieron del método de Cavalieri. Así, en la parte titulada *De dimensione parabolae de la Opera geometrica*, por ejemplo, presenta veintiuna demostraciones diferentes de la cuadratura de la parábola, que se reparten más o menos equitativamente entre el método de los indivisibles (once) y el de exhaución (diez). Esta misma obra incluye otro trabajo titulado *De infinitis hyperbolis* en el que Torricelli demuestra la cuadratura básica para exponentes racionales.

Torricelli también calculó la cuadratura de la cicloide, empleando tanto el método de exhaución como el de los indivisibles, y realizó la construcción de la tangente a la misma, es decir, abordó para esta curva específica los dos problemas básicos del cálculo infinitesimal. Estos resultados, que luego incluyó también en su *Opera geometrica*, le provocaron serias disputas con Roberval, al no hacer ninguna referencia en su obra a que este ya había obtenido esos resultados antes que él. Por ello Roberval acusó a Torricelli de plagio de él mismo y de Fermat, iniciándose una agria polémica entre ambos que continuó hasta su muerte. Como se señala en [2, pág. 448]

> *ahora está ya perfectamente claro que la prioridad en el descubrimiento corresponde a Roberval, pero la prioridad en su publicación a Torricelli que, con toda probabilidad, redescubrió de manera independiente los resultados sobre el área y la tangente.*

3. Las cuadraturas aritméticas de Fermat y Pascal

Después de la publicación de la Geometría de Cavalieri en 1635 Fermat y Pascal, entre otros, se dedicaron a generalizar sus resultados, estudiando de manera particular el área determinada por las parábolas generalizadas $y = x^k$ para cualquier exponente $k \in \mathbb{N}$. Para obtener la cuadratura

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

comenzaron a desarrollar nuevos métodos cada vez más parecidos a nuestra concepción actual de la integral y en los que la aritmética y el álgebra, que habían sido desarrollados en los años anteriores, jugaron un papel esencial que les permitió llegar a donde no pudieron hacerlo sus predecesores. Básicamente la idea consiste en sustituir los indivisibles de Cavalieri por rectángulos infinitesimales cuyas áreas aproximan "tanto como se quiera" la cuadratura buscada. Así, al asociar a cada rectángulo un número que representa su área los razonamientos puramente geométricos de Cavalieri podían ser sustituídos por razonamientos aritméticos mucho más sencillos y precisos, de forma que el conjunto de todas las líneas, que ya había sido sustituído por la suma de todas ellas en la concepción de los indivisibles de Torricelli, se transformaba en una suma de los números correspondientes a las áreas de los rectángulos. Así lo explica Pascal en una carta a un amigo que hemos tomado de [3, pág. 118]:

Quería escribirte esta nota para mostrarte que todo lo que se puede probar por las verdaderas reglas de los indivisibles también puede ser probado con el rigor y a la manera de los antiguos, [. . .] por ejemplo, eligiendo determinados puntos sobre el diámetro de un semicírculo, consideremos este dividido en un número indefinido de partes iguales. Tomemos las ordenadas de estos puntos. No encuentro ninguna dificultad al usar esta expresión, la suma de las ordenadas, que parece no ser geométrica a aquellos quienes no comprenden la doctrina de los indivisibles y quienes piensan que es un pecado contra la geometría expresar un plano por un número indefinido de líneas; esto sólo muestra su falta de inteligencia, porque aquello no significa otra cosa que la suma de un número indefinido de rectángulos teniendo la ordenada como altura y una porción igual de diámetro como base, cuya suma es ciertamente un área plana que difiere del semicírculo por una cantidad menor que cualquier cantidad dada.

Blaise Pascal (1623-1662) nació en Clermont-Ferrand y, aunque su vida fue breve, fue uno de los más destacados científicos y filósofos franceses de su época. Nació en el seno de una familia noble y recibió una cuidada instrucción de su padre Etienne que, aunque no fue un matemático profesional, sentía verdadera predilección por esta ciencia. De hecho, el caracol de Pascal, es decir, la curva de coordenadas polares $r = a + b\cos\sigma$ lleva este nombre en honor del padre Etienne, y no del hijo Blaise como podría pensarse, ya que fue concienzudamente estudiada por aquél.

Se dice que Etienne trató de mantener a su hijo alejado de las matemáticas en los primeros años de su formación, con objeto de que adquiriera una sólida cultura general y se abriera también a otros intereses, pero siendo aún niño mostraba tal talento e inclinación hacia las matemáticas que él solo redescubrió muchos de los teoremas geométricos básicos contenidos en Los Elementos de Euclides. Ante esta evidencia, su padre decidió favorecer esa pasión y, siendo aún adolescente, le permitió acompañarle a las reuniones informales que en la celda del padre Mersenne en París celebraban los científicos acogidos a su círculo. Aquí fue donde se familiarizó con las ideas de Desargues, el padre de la geometría proyectiva, lo que le permitió en 1640, a la edad de dieciséis años, publicar su *Essay pour les coniques*, un artículo de una sóla página impresa pero, como se señala en [2, pág. 455],

sin duda una de las páginas más fecundas de la historia.

En este ensayo Pascal prueba que en un hexágono los puntos de intersección de las rectas donde se sitúan los lados opuestos están alineados, teorema que hoy lleva su nombre y que el autor describió como "mysterium hexagrammicum". Pascal siempre reconoció que la inspiración para ese artículo le vino de la lectura de los trabajos de Desargues y, en un notable rasgo de humildad, poco frecuente en el gremio científico, escribió [2, pág. 456]:

Quisiera decir que debo lo poco que he descubierto yo mismo sobre el tema a sus escritos [de Desargues].

En 1642, con objeto de ayudar a su padre que era por entonces jefe de recaudación de impuestos en Normandía, Pascal inventó la "rueda de Pascal" o "Pascalina", una de las primeras máquinas de calcular, que inicialmente sólo hacía adiciones pero que posteriormente mejoró para que también pudiera hacer restas. Pascal patentó la máquina pero las dificultades que presentaba la construcción impidieron su comercialización para uso general. De hecho, sólo se construyeron cincuenta, de las que aún se conservan nueve.

Otro campo en el que Pascal hizo contribuciones destacadas fue en el de la teoría de probabilidades, de la que se le considera cofundador junto con Fermat. En efecto, durante los primeros años de la década que se inicia en 1650 Pascal realiza en París una vida social intensa, relacionándose con diferentes personajes entre los que se encuentra Antoine Gombaud, el caballero de Méré, que le planteó algunas cuestiones sobre juegos de azar. En relación con estos problemas comenzó una correspondencia con Fermat que se considera como el verdadero punto de partida de la actual teoría de probabilidades. Aunque ni Pascal ni Fermat publicaron sus resultados, su correspondencia fue utilizada por Huygens, otro de los grandes científicos de la época, para elaborar en 1657 su tratado *De ratiociniis in ludo aleae* o, en español, *Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados*, obra fundacional de esta rama de las matemáticas, con permiso siempre de Cardano y su *Liber de ludo aleae* que, como es sabido, fue en realidad la primera monografía que se publicó sobre el tema.

Un aspecto importante en la vida de Pascal es el religioso. Su familia era católica e inclinada hacia una nueva doctrina que por entonces comenzaba a tomar cierto auge en Europa, el jansenismo. El 23 de noviembre de 1654 Pascal sufrió, por lo que parece, aunque no está bien documentado, un accidente cuando conducía un coche de caballos. Esa misma noche cayó en un fuerte arrebato místico que le llevó a abandonar la vida social que frecuentaba y a recluirse en el convento de Port Royal, principal centro impulsor de las ideas jansenistas. Allí escribió sus principales obras filosóficas y religiosas Las lettres provinciales y los *Pensées sur la religion et sur quelques autres sujets*, o simplemente los *Pensées*, obra proyectada como una apología de la religión cristiana pero que quedó simplemente recogida en notas dispersas debido a su prematura muerte y que fue publicada póstumamente. En relación con su pensamiento religioso merece la pena destacar la llamada "Apuesta de Pascal" según la cual la fe en Dios no sólo es acertada, sino también racional ya que

si ganas, lo ganas todo y si pierdes, no pierdes nada.

Lástima que la gracia de la fe no le sea dada a todos los mortales, pues por lo demás no cabe duda de que el punto de vista de Pascal es incontrovertible.

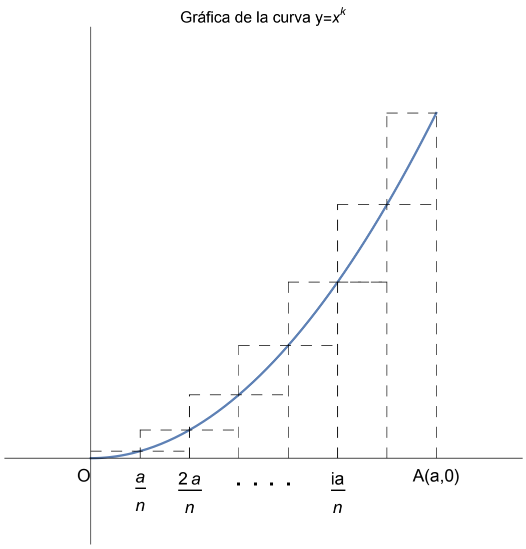
Después de su arrebato religioso Pascal se dedicó poco a las matemáticas. No obstante, en 1658 dedicó algunas horas del insomnio motivado por sus frecuentes dolores al estudio de la cicloide, que el llamaba "roulette", obteniendo algunos resultados que le animaron a proseguir en días sucesivos la tarea iniciada. Después de unos días dedicado a estas investigaciones se animó a convocar un concurso abierto en el que planteó, bajo el pseudónimo de Amos de Dettonville, algunas preguntas sobre la cicloide. Debido al escaso periodo de tiempo que se estableció para la admisión de las respuestas, sólo se recibieron dos, una de ellas del notable matemático inglés John Wallis. El concurso fue declarado desierto, lo que provocó las protestas de los participantes y originó nuevas disputas en el siempre alterado mundo científico. Poco después Pascal, utilizando todavía el pseudónimo mencionado, publicó su *Histoire de la roulette* en la que recogió las soluciones a los problemas propuestos en el concurso.

Su última contribución a las matemáticas fue su *Traité des sinus des quarts de cercle* o, en castellano, *Tratado de los senos de los cuadrantes circulares*, de 1659, obra que resultó decisiva para el alumbramiento del cálculo infinitesimal. En ella Pascal introduce el triángulo característico en el círculo y lo utiliza para calcular el área encerrada por la función seno. Esto ponía de manifiesto que debía existir una relación muy estrecha entre los problemas de tangentes y cuadraturas, pues el triángulo característico también puede utilizarse para resolver el problema de la tangente. Aquí Pascal estuvo muy cerca de ser el primero en obtener lo que hoy llamamos el teorema fundamental del cálculo integral. La idea del triángulo característico fue generalizada por Leibniz para una curva cualquiera y está en la base del cálculo diferencial. A este respecto el propio Leibniz señaló que fue precisamente este trabajo de Pascal el que,"como un relámpago", le hizo ver con claridad el carácter inverso de los problemas de tangentes y cuadraturas.

Pascal tuvo muchos problemas de salud a lo largo de su vida, particularmente digestivos, que le provocaron mucho sufrimiento y que finalmente le causaron la muerte a los 39 años. En parte por ello y en parte por su carácter diletante, que le llevó a emplear su genio en temas muy diferentes, no obtuvo en matemáticas resultados a la altura de su enorme talento. En este sentido se afirma en [2, pág. 460] que

Pascal es, sin duda, el más grande podría-haber-sido de toda la historia de la matemática.

En esta sección vamos a explicar los métodos de cuadraturas aritméticas ideados por Pascal y por Fermat para el cálculo de la cuadratura básica para exponente natural. La idea en ambos casos consiste en dividir el intervalo $[0, a]$ en n partes iguales y hallar las áreas de los hoy habituales rectángulos inscritos y circunscritos P_i y Q_i $(i \in \{1, 2, ..., n\})$, respectivamente, teniendo todos ellos como base a/n y altura la correspondiente ordenada de la curva $y = x^k$.



Así para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos las siguientes aproximaciones S_n y S'_n, por defecto y por exceso, del área encerrada por la curva:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{(i-1)a}{n}\right)^k = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ia}{n}\right)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left[1^k + 2^k + ... + (n-1)^k\right]$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} a(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ia}{n}\right)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left[1^k + 2^k + ... + n^k\right]$$

Por tanto, si llamamos S al área encerrada por la curva $y = x^k$ en el segmento $[0, a]$ se tiene que para todo n natural

$$S_n < S < S'_n$$

lo que nos lleva a que para todo n natural

$$a^{k+1}\left[\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}\right] - \frac{a^{k+1}}{n} < S < a^{k+1}\left[\frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}\right]$$

En términos modernos, para obtener el resultado, esto es, para obtener que $S = \frac{a^{k+1}}{k+1}$, basta probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}\right] = \frac{1}{k+1}$$

lo que hoy podemos comprobar fácilmente utilizando para resolver el límite el método de Stolz. En efecto, dado que la sucesión $\{n^{k+1}\}$ es creciente y divergente a $+\infty$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k}}{\binom{k+1}{0}n^{k+1} + \binom{k+1}{1}n^k + \ldots + \binom{k+1}{k+1} - n^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{k}{0}n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + ... + \binom{k}{k}}{\binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1}\ldots + \binom{k+1}{k+1}} \\
&= \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Naturalmente en la época de Pascal y Fermat este razonamiento era imposible puesto que aún faltaban muchos años para que se desarrollara la teoría de límites. Veamos cuales fueron los procedimientos que siguieron cada uno de ellos para llegar al mismo resultado. Fermat envió en 1639 una carta al padre Mersenne en la que establece, aunque sin probarla explícitamente, la siguiente fórmula:

Proposición 3.1. *Para cada n y $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)...(i+k-1)}{k!} = \frac{n(n+1)...(n+k)}{(k+1)!}$$

Demostración. Veamos la prueba por inducción sobre n. Para $n = 1$ la igualdad queda

$$\frac{1\cdot 2\cdots k}{k!} = \frac{1\cdot 2\cdots(k+1)}{(k+1)!}$$

que es evidentemente cierta. Supuesto para n, veámoslo para $n+1$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{k!} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{k!} + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!} \\
&= \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{(k+1)!} + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k) + (n+1)(n+2)\dots(n+k)(k+1)}{(k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)(n+k+1)}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

que es el resultado deseado. □

Corolario 3.2. *Para cada n y $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \textit{potencias de } n \textit{ inferiores a } (k+1)$$

Demostración. Escribamos, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, la igualdad

$$i(i+1)\dots(i+k-1) = i^k + a_1 i^{k-1} + \dots a_{k-1} i$$

siendo los coeficientes a_1, a_2,..., a_{k-1} constantes que dependen de k. Se obtiene entonces, en virtud de la proposición anterior, que:

$$\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n} i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \dots + a_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i\right] = \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{(k+1)!}$$

y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{k+1} - \left[a_1 \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \dots + a_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

de donde se deduce el resultado. □

A partir de aquí Fermat obtiene fácilmente la cuadratura de la parábola generalizada:

Proposición 3.3.

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Demostración. Partiendo de la desigualdad

$$a^{k+1}\left[\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}\right] - \frac{a^{k+1}}{n} < S < a^{k+1}\left[\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}\right]$$

y aplicando el corolario anterior, obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a^{k+1}\left[\frac{1}{k+1} + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k+1}}{n^{k+1}}\right] - \frac{a^{k+1}}{n} < S < a^{k+1}\left[\frac{1}{k+1} + \frac{b_1}{n} + \dots + \frac{b_{k+1}}{n^{k+1}}\right]$$

y cuando n tiende a infinito todos los sumandos del primer y último miembros de la desigualdad se hacen tan pequeños como se quiera, excepto los primeros de cada uno. De ahí sigue que

$$S = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

□

Por su parte Pascal, para obtener el mismo resultado, prueba en 1654 una fórmula recurrente para la suma de las k-ésimas potencias que es más explícita que la de Fermat. La fórmula de Pascal aparece en su obra *Potestatum Numericarum Summa*, publicada en 1665, y, utilizando la notación actual de los números combinatorios, es la siguiente [4, pág. 107]:

Proposición 3.4. *Para cada n y $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{n} i^k + \binom{k+1}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + ... + \binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)^{k+1} - n - 1$$

Demostración. La fórmula puede obtenerse fácilmente teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{r=0}^{k}\binom{k+1}{r} i^r\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} i + \ldots + \binom{k+1}{k} i^k\right] \\
&= \binom{k+1}{0} n + \binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i + \ldots + \binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{n} i^k
\end{aligned}$$

de donde sigue la igualdad buscada. □

A partir de esta fórmula se obtiene inmediatamente que

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{potencias de } n \text{ inferiores a } (k+1)$$

y ahora puede razonarse como en el caso anterior.

4. El método infinitesimal de la progresión geométrica de Fermat

En orden a generalizar la fórmula de la cuadratura básica para n entero negativo, $n \neq -1$, o fraccionario, Fermat atacó el problema y lo resolvió hacia 1640 mediante un enfoque puramente geométrico, utilizando rectángulos infinitesimales cuyas áreas estaban en progresión geométrica de razón menor que la unidad. En su trabajo *De aequationum localium transmutatione et emendatione, ad multimodam curvilineorum inter fe, vel cum rectilineis comparationem*, subtitulado *Proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis*, de 1658, Fermat comienza diciendo:

> *Arquímedes sólo empleó progresiones geométricas para la cuadratura de la parábola. En sus otras comparaciones entre cantidades heterogéneas se restringió a progresiones aritméticas. ¿Sería así porque encontrara que la progresión geométrica sirviera menos a la cuadratura? ¿O quizás fue que el artificio particular del que se sirvió para cuadrar con esta progresión la primera parábola puede difícilmente aplicarse a otras? Cualquiera que sea la razón yo he probado que la progresión geométrica es muy útil para las cuadraturas y deseo presentar a los geómetras actuales mi invención, que permite cuadrar por un método absolutamente similar tanto parábolas como hipérbolas.*

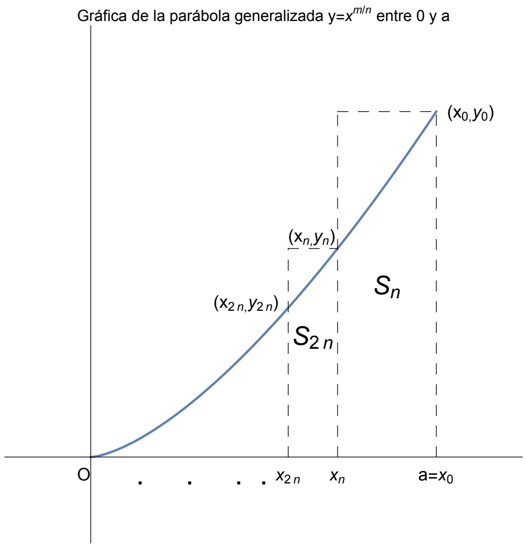
El método de Fermat se basa en el hecho de que la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón menor que uno es finita e igual al primer término dividido entre uno menos la razón. Este resultado es consecuencia de la proposición IX.35 de Los Elementos de Euclides que nos da la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

Vamos a ilustrar a continuación el método de Fermat para calcular el área de la figura comprendida entre el eje $0X$, los puntos de abscisas 0 y a y la parábola generalizada $y = x^{m/n}$, m y $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.1.

$$\int_0^a x^{m/n} dx = \frac{n}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}} \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

Demostración. Gráficamente la situación es la siguiente:



Denotemos $x_0 = a$ y $x_r = aq^r$ para todo $r \in \mathbb{N}$, siendo q un número arbitrario tal que $0 < q < 1$.

Consideremos las abscisas

$$x_0 = a, \; x_n = aq^n, \; x_{2n} = aq^{2n}, \; x_{3n} = aq^{3n}, \ldots$$

a las que corresponden las ordenadas

$$y_0 = a^{m/n}, \; y_n = a^{m/n}q^m, \; y_{2n} = a^{m/n}q^{2m}, \; y_{3n} = a^{m/n}q^{3m}, \ldots$$

y llamemos S_n, S_{2n}, S_{3n},... a las áreas de los rectángulos de bases respectivas $x_0 - x_n$, $x_n - x_{2n}$, $x_{2n} - x_{3n}$,... y de alturas y_0, y_n, y_{2n},..., es decir,

$$\begin{aligned}
S_n &= (x_0 - x_n)y_0 = a(1-q^n)a^{m/n} = (1-q^n)a^{\frac{m+n}{n}} \\
S_{2n} &= (x_n - x_{2n})y_n = aq^n(1-q^n)a^{m/n}q^m = (1-q^n)q^{m+n}a^{\frac{m+n}{n}} \\
S_{3n} &= (x_{2n} - x_{3n})y_{2n} = aq^{2n}(1-q^n)a^{m/n}q^{2m} = (1-q^n)q^{2(m+n)}a^{\frac{m+n}{n}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{pn} &= (x_{(p-1)n} - x_{pn})y_{(p-1)n} = aq^{(p-1)n}(1-q^n)a^{m/n}q^{(p-1)m} = (1-q^n)q^{(p-1)(m+n)}a^{\frac{m+n}{n}}
\end{aligned}$$

Se observa que la sucesión $\{S_n, S_{2n}, S_{3n}, \ldots\}$ está en progresión geométrica de razón $0 < q^{m+n} < 1$ y, en consecuencia, la serie $\sum_{p=1}^{\infty} S_{pn}$ es convergente por lo que su suma será finita y vendrá dada por:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{+\infty} S_{pn} &= \frac{S_n}{1-q^{m+n}} = \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} a^{\frac{m+n}{n}} \\ &= \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} x_0 y_0 = \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} S_0\end{aligned}$$

siendo S_0 el área del rectángulo de base x_0 y altura y_0.

Obviamente el área que hemos calculado es mayor que el área buscada, pero las cantidades tienden a hacerse iguales si los rectángulos considerados tienen la base cada vez más pequeña, lo que se consigue haciendo que q se aproxime a 1, por la izquierda, tanto como queramos.

Dado que para todo $k \in \mathbb{N}$ es

$$(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}) = 1-q^k$$

se tiene que

$$\frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} = \frac{1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}}{1+q+q^2+\ldots+q^{m+n-1}}$$

y este cociente se hace igual a $\dfrac{n}{m+n}$ cuando q se hace igual a 1. O dicho en términos de límites, cosa que no podía hacer Fermat,

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{1-q^n}{1-q^{m+n}} = \lim_{q\to 1^-} \frac{nq^{n-1}}{(m+n)q^{m+n-1}} = \frac{n}{m+n}$$

Sigue, por tanto, el resultado que dio Fermat para el área determinada por la parábola generalizada, esto es,

$$S = \frac{n}{m+n} S_0$$

lo que expresado con la notación de integrales y teniendo en cuenta que $S_0 = a^{(m+n)/n}$ es el resultado buscado. □

Fermat observó que el método vale análogamente para hipérbolas generalizadas del tipo

$$y = \frac{1}{x^{m/n}} \qquad m, n \in \mathbb{N},\ \frac{m}{n} \neq 1$$

Así se tiene que:

Proposición 4.2.

- $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^{m/n}} dx = \frac{n}{n-m} a^{\frac{n-m}{n}}$ *si* $n > m$.
- $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^{m/n}} dx = \frac{n}{m-n} a^{\frac{n-m}{n}}$ *si* $n < m$.

Demostración. Consideremos igual que antes las abscisas

$$x_0 = a,\ x_n = aq^n,\ x_{2n} = aq^{2n},\ x_{3n} = aq^{3n}, \ldots$$

a las que corresponden las ordenadas

$$y_0 = \frac{1}{a^{m/n}},\ y_n = \frac{1}{a^{m/n}q^m},\ y_{2n} = \frac{1}{a^{m/n}q^{2m}},\ y_{3n} = \frac{1}{a^{m/n}q^{3m}}, \ldots$$

y llamemos S_n, S_{2n}, S_{3n},... a las áreas de los rectángulos de bases respectivas $x_0 - x_n$, $x_n - x_{2n}$, $x_{2n} - x_{3n}, \ldots$ y de alturas $y_0, y_n, y_{2n}, \ldots$, es decir,

$$\begin{aligned}
S_n &= (x_0 - x_n)y_0 = a(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}} = (1-q^n)a^{\frac{n-m}{n}} \\
S_{2n} &= (x_n - x_{2n})y_n = aq^n(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}q^m} = (1-q^n)q^{n-m}a^{\frac{n-m}{n}} \\
S_{3n} &= (x_{2n} - x_{3n})y_{2n} = aq^{2n}(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}q^{2m}} = (1-q^n)q^{2(n-m)}a^{\frac{n-m}{n}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{pn} &= (x_{(p-1)n} - x_{pn})y_{(p-1)n} = aq^{(p-1)n}(1-q^n)\frac{1}{a^{m/n}q^{(p-1)m}} = (1-q^n)q^{(p-1)(n-m)}a^{\frac{n-m}{n}}
\end{aligned}$$

En este caso las áreas de los rectángulos $\{S_n, S_{2n}, S_{3n}, \ldots\}$ constituyen una progresión geométrica de razón q^{n-m} por lo que para que la serie sea convergente debe ser:

a) Si $n - m > 0$ se toma igual que antes $0 < q < 1$.

Entonces

$$\sum_{p=1}^{\infty} S_{pn} = \frac{1-q^n}{1-q^{n-m}}a^{\frac{n-m}{n}} = \frac{1-q^n}{1-q^{n-m}}S_0$$

siendo S_0 el área del rectángulo de base x_0 y altura y_0.

Dado que

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{1-q^n}{1-q^{n-m}} = \lim_{q\to 1^-} \frac{nq^{n-1}}{(n-m)q^{n-m-1}} = \frac{n}{n-m}$$

obtenemos que el área determinada por la hipérbola generalizada es $S = \dfrac{n}{n-m}S_0$, lo que, expresado en términos modernos, sería

$$\int_0^a \frac{1}{x^{m/n}}dx = \frac{n}{n-m}a^{(n-m)/n}$$

Obsérvese que en este caso no hay problemas de convergencia con la integral impropia ya que $0 < \frac{m}{n} < 1$.

b) Si $n - m < 0$ se toma $q > 1$.

Obsérvese que en este caso los puntos $x_n = aq^n$ tienden a $+\infty$ y en realidad lo que obtenemos es el área determinada por la hipérbola entre a y $+\infty$. Así se verifica que

$$\sum_{p=1}^{\infty} S_{pn} = \frac{q^n-1}{1-q^{n-m}}a^{\frac{n-m}{n}} = \frac{q^n-1}{1-q^{n-m}}S_0$$

donde S_0 el área del rectángulo de base x_0 y altura y_0.

Como

$$\lim_{q\to 1^+} \frac{q^n-1}{1-q^{n-m}} = \lim_{q\to 1^+} \frac{nq^{n-1}}{-(n-m)q^{n-m-1}} = \frac{n}{m-n}$$

obtenemos que el área determinada por la hipérbola es $S = \dfrac{n}{m-n}S_0$, esto es, la igualdad que, en términos modernos, escribimos en la forma

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{m/n}}dx = \frac{n}{m-n}a^{(n-m)/n}$$

$\square$

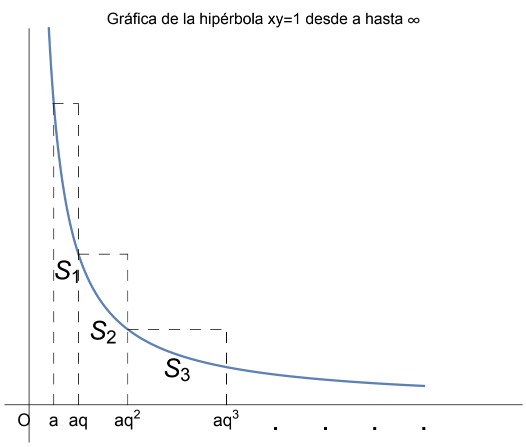
De hecho, en este caso la integral impropia $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^{m/n}}dx$ no es convergente. No obstante, si quisiéramos calcular el área determinada por la hipérbola entre dos puntos de abscisas a y b, $0 < a < b$, basta tener en cuenta que

$$\int_a^b \frac{1}{x^{m/n}}dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{m/n}}dx - \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{m/n}}dx$$

Obviamente en el caso $m - n = 0$, es decir, en el caso $\dfrac{m}{n} = 1$ tenemos la hipérbola equilátera $y = \dfrac{1}{x}$ y el procedimiento falla pues la progresión geométrica formada por las áreas tiene razón $q^0 = 1$ y la suma no sería convergente para ningún valor de q. Fermat era muy consciente de este hecho y así lo señala en su memoria de 1658, en la que escribe expresamente:

> *No es difícil extender esta idea [la demostración realizada para la hipérbola $y = 1/x^2$] a todas las hipérbolas definidas anteriormente, excepto a la que ha sido indicada [la hipérbola de Apolonio $y = 1/x$].*

Este caso singular fue "resuelto" por el matemático belga Gregorius Saint Vincent (1584-1667), contemporáneo de Fermat, que fue profesor de matemáticas en Roma y Praga y que más tarde ocupó el puesto de tutor en la corte de Felipe IV de España. Saint Vincent resolvió este caso en su obra *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum coni* o, en español, *Obra geométrica sobre la cuadratura del círculo y de las secciones cónicas*. La mayor parte de esta obra fue escrita antes de la época en que Fermat se encontraba trabajando sobre los problemas de tangentes y cuadraturas, pero desgraciadamente no se publicó hasta 1647. En este tratado se demuestra que si tomamos a lo largo del eje $0X$ puntos a partir de $x = a$ tales que la longitud de los intervalos que determinan van creciendo en progresión geométrica, y si en dichos puntos levantamos las ordenadas correspondientes a la hipérbola $xy = 1$, entonces las áreas correspondientes bajo dos ordenadas sucesivas son iguales.



En efecto, si tomamos como sucesión de abscisas $\{a, aq, aq^2, aq^3, \ldots\}$ (con $q > 1$ por ejemplo), la sucesión de ordenadas será $\{\frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \frac{1}{aq^3}, \ldots\}$ y, en consecuencia, todos los rectángulos tienen el mismo área. En efecto:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (aq - a)\frac{1}{a} = q - 1 \\
S_2 &= (aq^2 - aq)\frac{1}{aq} = q - 1 \\
S_3 &= (aq^3 - aq^2)\frac{1}{aq^2} = q - 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_n &= (aq^n - aq^{n-1})\frac{1}{aq^{n-1}} = q - 1
\end{aligned}
$$

Observamos, por tanto, que las áreas bajo la curva crecen en progresión aritmética cuando las abscisas crecen en progresión geométrica. Esta relación entre las abscisas y la curva que va dando el área (cuando las abscisas crecen en progresión geométrica las ordenadas de la curva que da el área lo hacen en progresión aritmética) indica, y esto ya se sabía en tiempos de Saint Vincent pues es la esencia de los logaritmos, que la curva que da el área es la logarítmica, o sea, podemos decir que Saint Vincent vislumbró la igualdad que hoy escribimos en la forma

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \log(b) - \log(a)$$

En la obra citada, debido a una aplicación errónea del método de los indivisibles, Saint Vincent creyó haber conseguido cuadrar el círculo, error que perjudicó su reputación y que fue pronto rebatido por otros matemáticos como Huygens. No obstante, la obra contiene muchos resultados interesantes, como el que hemos comentado en el que se insinúa la relación entre los logaritmos y la cuadratura de la hipérbola equilátera, además de que es la obra donde se introduce el vocablo "exhaución" para referirse al método de demostración ideado por Eudoxo y que, en manos de Arquímedes, alcanzó sus más altas cotas de depuración técnica.

Referencias

[1] ANDERSEN, K., *Cavalieri's Method of Indivisibles*, Archiv of History of Exactes Sciences 31, 291-367, 1985.

[2] BOYER, C. B., *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, 2007.

[3] DURÁN, A. J., *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, 1996.

[4] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Editorial, 1992.

[5] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*, Nivola libros y ediciones, 2008.

[6] MARIE, M., *Histoire des sciences matématiques et physiques*, 12 vol. París (Reprint Nueva York), 1977.

[7] REY PASTOR, J., BABINI, J., *Historia de la Matemática, volumen 2*, GEDISA, S.A., 1985.

Sobre el autor:
Nombre: José María Ayerbe Toledano
Correo electrónico: jayerbe@us.es
Institución: Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, España.