Juegos y Rarezas Matemáticas

El valor de π como límite de perímetros y áreas de polígonos regulares

The value of π as the limit of the perimeter and the area of regular polygons

Alfredo Olmos Hernández y Reyna Romyna Olmos Hernández

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IX, Número 2, pp. 091–096, ISSN 2174-0410
Recepción: 12 Feb'19; Aceptación: 13 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

En este artículo se utilizara las propiedades de los polígonos inscritos y circunscritos, para obtener el valor aproximado de π como límite de una sucesión que involucra a la función sin (x). Para ello se calculará el perímetro y área de los polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia en función de sus lados.

Palabras Clave: Polígono inscrito, polígono circunscrito, π.

Abstract

In this article we will use the properties of the inscribed and circumscribed polygons, to obtain the approximated value of π as limit of a sequence involving the function sin (x). To do this, the perimeter and the area of the polygons inscribed and circumscribed to a circumference are calculated in function on their sides.

Keywords: Inscribed polygon, circumscribed polygon, π.

1. Introducción

Los polígonos trazados en una circunferencia se dividen en 2, los polígonos inscritos y los polígonos circunscritos.

Un polígono inscrito es aquel que tiene todos sus vértices en la circunferencia y sus lados son secantes de esta.

Un polígono circunscrito es aquel polígono cuyos lados son tangentes a la circunferencia.

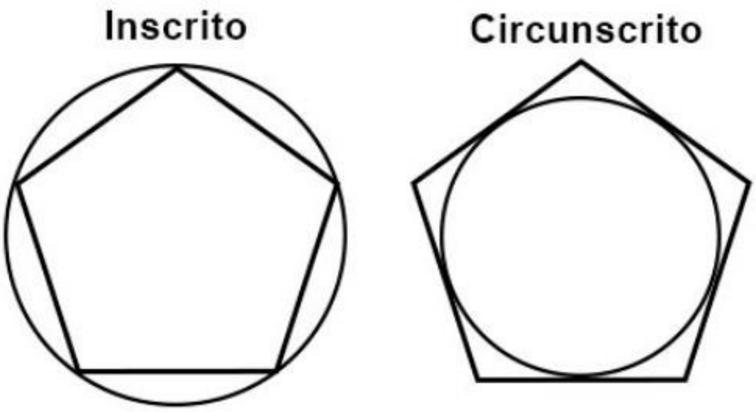

Figura 1. Polígono inscrito y polígono circunscrito.

El radio del polígono inscrito es el radio de la circunferencia circunscrita en él.

La apotema del polígono circunscrito es el radio de la circunferencia inscrita.

Arquímedes utilizo polígonos inscritos y circunscritos (método exhaustivo. Ortiz 2005) para el cálculo aproximado del valor de π.

2. Perímetro y área de polígonos inscritos y circunscritos.

2.1 Polígono inscrito

A continuación se obtienen las expresiones para el cálculo de perímetros y áreas de polígonos inscritos. (Para los ángulos se utilizará el sistema sexagesimal)

Teorema 1

En un polígono regular inscrito el perímetro y el área son obtenidos por las siguientes expresiones.

$$P = 2nr\sin\frac{180}{n}$$

$$A = nr^2\sin\frac{180}{n}cos\frac{180}{n}$$

Prueba

Uniendo dos de los vértices de un polígono inscrito con el centro del círculo se obtiene el siguiente triángulo.

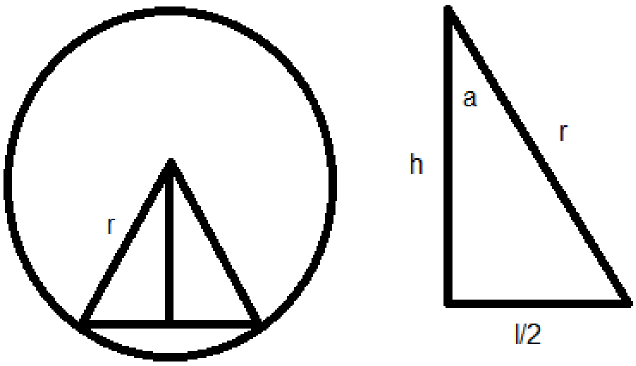

Figura2. Triangulo en polígono inscrito.

Dado que se está considerando un polígono regular, el polígono inscrito de n lados puede dividirse en n triángulos congruentes, como el de la Figura 2 (izquierda) que a su vez se divide en 2 triángulos congruentes (derecha)

En un polígono regular el ángulo central se define como

$$\alpha = \frac{360}{n}$$

$$a = \frac{\alpha}{2} = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$$

Obteniendo el valor de l y h en el triángulo de la Figura 2.

$$\sin a = \frac{l}{2r}$$

$$l = 2r\sin\frac{180}{n}$$

El polígono inscrito tiene n lados que miden l cada uno, por lo que el perímetro es igual a

$$P = 2nr\sin\frac{180}{n}$$

Para el área, se obtendrá el área del triángulo de la derecha de la Figura 2.

$$cos\,a = \frac{h}{r}$$

$$h = r\,cos\frac{180}{n}$$

Luego el área del triángulo es

$$A = \frac{h}{2} * \frac{l}{2}$$

$$A = \frac{1}{4}\left(r\,cos\frac{180}{n}\right)\left(2r\sin\frac{180}{n}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{180}{n} cos\frac{180}{n}$$

El polígono tiene 2n triángulos congruentes, por lo que su área es igual a.

$$A = \frac{2n}{2} r^2 \sin\frac{180}{n} cos\frac{180}{n}$$

$$A = nr^2 \sin\frac{180}{n} cos\frac{180}{n}$$

Q.E.D. □

2.2 Polígono circunscrito

A continuación se obtienen las expresiones para el cálculo de perímetros y áreas de polígonos circunscritos. (Para los ángulos se utilizará el sistema sexagesimal)

Teorema 2

En un polígono regular circunscrito el perímetro y el área son obtenidos por las siguientes expresiones.

$$P = 2nr \tan\frac{180}{n}$$

$$A = nr^2 \tan\frac{180}{n}$$

Prueba

Uniendo dos de los vértices de un polígono circunscrito con el centro del círculo se obtiene el siguiente triángulo.

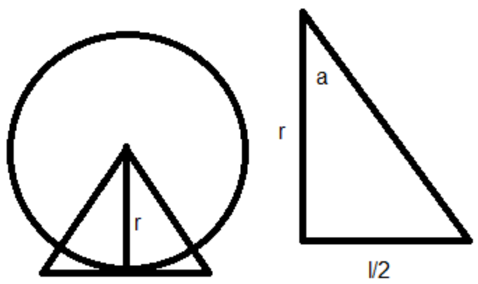

Figura3. Triangulo en polígono circunscrito.

Dado que se está considerando un polígono regular, el polígono circunscrito de n lados puede dividirse en n triángulos congruentes como el de la Figura 3 (izquierda) que a su vez se divide en 2 triángulos congruentes (derecha)

Obteniendo el valor de l en el triángulo de la Figura 2.

$$\tan a = \frac{l}{2r}$$

$$l = 2r \tan \frac{180}{n}$$

El polígono inscrito tiene n lados que miden l cada uno, por lo que el perímetro es igual a

$$P = 2nr \tan \frac{180}{n}$$

Para el área, se obtendrá el área del triángulo de la derecha de la Figura 3.

$$A = \left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$A = \left(\frac{2r\, tan \frac{180}{n}}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \tan \frac{180}{n}$$

El polígono tiene 2n triángulos congruentes, por lo que su área es igual a.

$$A = \frac{2n}{2} r^2 \tan \frac{180}{n}$$

$$A = nr^2 \tan \frac{180}{n}$$

Q.E.D. □

3. Valor de π como límite de la función sin (x).

Una circunferencia puede considerarse como un polígono regular de infinitos lados. Por lo que en un polígono inscrito, cuando el número de lados tiende a infinito, el polígono es igual a la circunferencia.

En una circunferencia el perímetro es igual a $P = 2\pi r$.

Por lo tanto.

$$\lim_{n\to\infty} 2nr \sin \frac{180}{n} = 2\pi r$$

$$2r\, lim_{n\to\infty}\, n\, sin \frac{180}{n} = 2\pi r$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{180}{n} = \pi$$

Esto permite aproximar π mediante perímetros de polígonos inscritos en la circunferencia con número de lados grande.

Por otro lado, el área de una circunferencia es igual a $A = \pi r^2$.

Por lo tanto.

$$\lim_{n\to\infty} nr^2 \sin\frac{180}{n}\cos\frac{180}{n} = \pi r^2$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{180}{n} \cos\frac{180}{n} = \pi$$

Esto permite aproximar π mediante áreas de polígonos inscritos en la circunferencia con número de lados grande.

Se pueden hacer también aproximaciones de π con perímetros y áreas de polígonos circunscritos utilizando las expresiones de 2.1

4. Conclusiones.

En este artículo se obtuvieron las expresiones que permiten obtener el perímetro y el área para cualquier polígono regular en función de sus lados.

Esto se utilizó para obtener aproximaciones del número π mediante perímetros y áreas de polígonos regulares adecuados.

Referencias

[1] CABALLERO, Luis. *Geometría plana y del espacio*, San Marcos, Lima, 1995.

[2] HEMMERLING, Edwin. *Geometría elemental*, Limusa, México, 1975.

[3] ORTIZ, Alejandro. *Historia de la Matemática*, pp. 235-241, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2005.

[4] WENTWORTH, Jorge y SMITH Eugenio. *Geometría plana y del espacio*, pp. 141-152, Ginn Compañía, Boston, 1955.

Sobre los autores:

Nombre: Alfredo Olmos Hernández
Correo Electrónico: alfredooh16@gmail.com
Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.

Nombre: Reyna Romyna Olmos Hernández
Correo Electrónico: londonlun12@hotmail.com
Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.