

# Investigación

## ¿Sombras en la Relatividad General?

### Shadows in General Relativity?

José Rojo Montijano y M<sup>a</sup> Carmen Escribano Ródenas

Revista de Investigación



Volumen IX, Número 1, pp. 009–026, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Nov'18; Aceptación: 15 Feb'19

1 de abril de 2019

#### Resumen

Se discute la relación entre las sombras asociadas a distintos tipos de agujeros negros matemáticos y las evidencias que pudieran favorecer o bien a la relatividad general clásica tetradimensional o bien a escenarios con dimensiones extra.

**Palabras Clave:** Sombra de un Agujero Negro, Relatividad General, dimensiones extra

#### Abstract

We discuss how shadows associated to different mathematical classes of black holes are related to evidence in favour of tetradimensional classical General Relativity or in favour of higher dimensional scenarios.

**Keywords:** Black Hole shadows, General Relativity, Extra dimensions

## 1. Introducción

A pesar de la detección, hace un par de años, de ondas gravitacionales provenientes de la colisión de dos agujeros negros, no tenemos hoy en día evidencia directa de la presencia de agujeros negros en nuestros radiotelescopios, es decir, en el rango de las radiaciones electromagnéticas.

No es de extrañar: tal detección parece imposible a causa de la existencia del horizonte de sucesos del agujero negro, superficie que encierra una región del espaciotiempo más allá de la cual ni la materia ni la radiación pueden escapar (según la Relatividad General).

Sin embargo, englobando el agujero negro y las proximidades de su horizonte está (al menos en los casos de Schwarzschild y Kerr, únicos según la Relatividad General clásica tetradimensional) la región de los fotones, donde éstos siguen trayectorias inestables (o bien hacia el agujero o bien hacia el exterior) o anillos de luz. Por tanto, al observar un agujero negro astrofísico sobre un fondo brillante en el cielo, cabe esperar ver una silueta, el borde,

simultáneamente, de la región de los fotones y de la región oscura, el borde de “la sombra” del agujero negro: esa región por la que caen las trayectorias de los fotones hacia el propio agujero.

Los cálculos teóricos de estas sombras muestran que su forma y su tamaño son sensibles a varios parámetros que dependen de la métrica del agujero negro, como de su masa, de su spin, ... La sombra en el caso de Schwarzschild es un círculo perfecto, mientras que en el caso de Kerr no es circular: posee una forma algo alargada, extendiéndose hacia donde se dirige el sentido del giro de este agujero negro en rotación.

En los últimos años se han estudiado modelos que van más allá de la Relatividad General “clásica” (o tetradimensional), en los que aparecen también agujeros negros con dimensiones extra (agujeros pentadimensionales, hexadimensionales, ...), como, por ejemplo, los anillos negros (que admiten horizontes con topologías no esféricas), y que rompen con los teoremas de unicidad de la Relatividad clásica.

Hoy sabemos que la sombra del agujero negro de Tangherlini (el homólogo en dimensiones superiores al de Schwarzschild) posee un tamaño que decrece cuando aumenta la dimensión, y que los agujeros negros en rotación con dimensiones superiores arrojan una sombra algo más pequeña y menos deformada que en el caso tetradimensional. Así que hoy tenemos conciencia de que la forma y el tamaño de la sombra de un agujero negro depende también de la teoría que se utilice (la Relatividad General clásica o bien alguna de sus generalizaciones y alternativas en otras dimensiones).

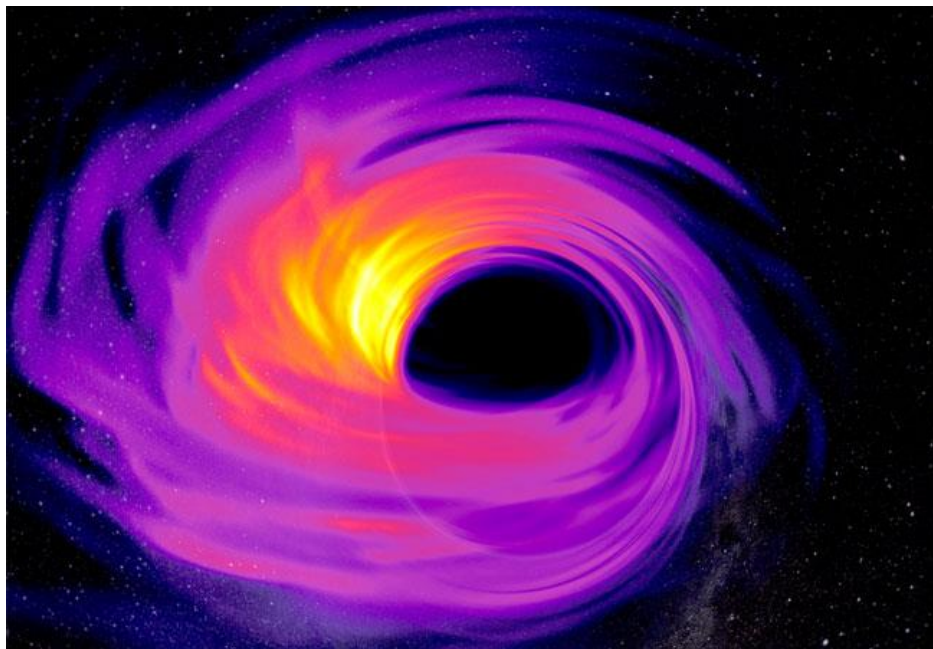


Figura 1. Sombra de un Agujero Negro.

El objetivo principal de este artículo es desvelar los rasgos básicos de la matemática que subyace bajo estas consideraciones, explicando con detalle el caso más sencillo, el del agujero negro de Schwarzschild. En la segunda sección se introduce su métrica y la de Kerr, en el marco de la Relatividad General clásica de Einstein. En la tercera, se estudian las geodésicas nulas de la métrica de Schwarzschild y la sombra arrojada por este tipo de agujero negro. En las conclusiones se comentan los resultados que surgen al generalizar estos métodos a otros tipos de agujero negro (tetradimensionales o no).

## **2. La Relatividad General y las métricas de Minkowski, de Schwarzschild y de Kerr.**

### **2.1 Preliminares**

La Relatividad General de Albert Einstein (1915) constituye la mejor teoría de la gravitación de la que disponemos hoy en día. Una de sus predicciones más fascinantes es la posible existencia de agujeros negros.

En julio de 1930, un estudiante hindú, S. Chandrasekhar, con diecinueve años (y en contra de la opinión de su director de tesis, A. Eddington, uno de los más prestigiosos conocedores de la Relatividad de la época) descubrió que, como consecuencia de las ecuaciones de Einstein, una estrella lo suficientemente masiva, tras agotar su energía nuclear, colapsa gravitacionalmente a un punto en el que la misma estructura del espaciotiempo desaparece. En 1983 recibió el premio Nobel por este estudio. Durante esos 53 años, muy poco a poco, fue madurando en la comunidad científica la comprensión de la geometría y dinámica del espaciotiempo cerca de tal objeto colapsado.

Vista con la perspectiva de hoy, tal singularidad podía ya “leerse” en los trabajos de Karl Schwarzschild de finales de 1915 sobre la geometría relativista del espaciotiempo cerca de una estrella estacionaria, dotada de simetría esférica. La métrica encontrada muestra que la singularidad no resulta visible para un observador externo y que está oculta tras una membrana de sentido único, “el horizonte de sucesos”. Fue J. Wheeler quien, en 1968, se refirió a estas estrellas colapsadas con el evocativo nombre, ya estándar, de “agujeros negros”.

La Relatividad General de Einstein describe a los agujeros negros (estacionarios y aislados) mediante una familia de soluciones que depende sólo de dos parámetros, descubierta por Roy Kerr en 1963 [Kerr, 1963]: las métricas de Kerr, que generalizan la geometría de Schwarzschild al caso en el que el agujero negro gira (tiene momento angular no nulo), es estacionario (se encuentra en equilibrio, independiente de  $t$ ) y tiene un eje de simetría.

### **2.2 Del espaciotiempo de Minkowski a las ecuaciones de la Relatividad General de Einstein**

En este epígrafe vamos a repasar la aparición de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General y a presentar las métricas de Minkowski.

El espaciotiempo de la Relatividad Especial se formula matemáticamente como “el espacio de Minkowski” (*Mink*), es decir,  $\mathbb{R}^4$  con el producto interno estándar de signatura  $(-, +, +, +)$ , donde la métrica de Minkowski se puede expresar como

$$g_{Mink} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

en un sistema de coordenadas adecuado, usando unidades geométricas en las que la velocidad de la luz es 1.

Los “conos de luz”, conjuntos de “eventos” (puntos) que cumplen las ecuaciones de la forma

$$-(t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = 0$$

describen los puntos barridos en el espaciotiempo por una señal luminosa que emana en el instante  $t_0$  de  $(x_0, y_0, z_0)$ .

El célebre experimento de Michelson-Morley mostró que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores en movimiento uniforme unos respecto a otros, y, en particular, que los observadores no pueden viajar más rápido que la luz, de modo que sus trayectorias espaciotemporales (sus “líneas de universo”) deben estar dentro del cono de luz. Tales trayectorias se llaman “temporales”. Las generatrices del cono de luz corresponden a las líneas del universo de los rayos de luz (trayectorias “nulas” o luminosas). De este modo, los conos de luz establecen una estructura causal en el espaciotiempo, según la cual cada observador en movimiento uniforme tiene un futuro y un pasado, determinados respectivamente por el interior y el exterior del cono de luz cuyo vértice es su posición en el espaciotiempo.

El conjunto de transformaciones afines del espaciotiempo de Minkowski que conservan su métrica (en particular, que conservan sus conos de luz) forman el grupo de Poincaré: las consecuencias físicas bien conocidas de la Relatividad Especial, como la dilatación del tiempo, la contracción de longitudes o el corrimiento al rojo, corresponden a algunas de las propiedades matemáticas de la acción de este grupo.

Sin embargo, *Mink*, el espaciotiempo de la Relatividad Especial, no es lo suficientemente general como para incluir una descripción matemática de la gravitación. *Mink* está estructurado alrededor del papel privilegiado que juegan observadores en movimiento uniforme y, por tanto, por cambios de coordenadas lineales. La Relatividad General, por el contrario, incorpora el “principio de equivalencia” que identifica referencias aceleradas con campos gravitacionales y permite cambios locales de sistemas de referencia generales (difeomorfismos locales).

Así, la Relatividad General surge como una teoría geométrica de la gravitación en la que el espaciotiempo es una variedad tetradimensional  $M$ , dotada de una métrica pseudoriemanniana  $g$ , de signatura  $(-, +, +, +)$ , lo que implica que el espacio tangente es isométrico al espaciotiempo de Minkowski en cada punto. Las líneas del universo de partículas con masa “en caída libre” (sobre las que sólo actúa la gravedad) son, aquí, geodésicas “temporales” de  $(M, g)$ : líneas geodésicas tales que  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$ .

Análogamente, los fotones se propagan a lo largo de geodésicas “nulas”:  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ .

La ecuación de las geodésicas se puede escribir como

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

donde la derivada covariante  $\nabla$  define la conexión de Levi-Civita (la única conexión de esta variedad lorentziana que es compatible con la métrica y está libre de torsión).

En un sistema de coordenadas  $\{x^i\}$ ,  $\nabla$  actúa sobre cada campo vectorial  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  así:

$$\nabla_i X = \left( \partial_i X^j + \Gamma_{ik}^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

donde  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_j g_{ir} + \partial_i g_{jr} - \partial_r g_{ij})$  son los símbolos de Christoffel.

En 1915 Einstein publicó las ecuaciones de la Relatividad General. Para formularlas recurrió al tensor de curvatura de Riemann, que mide cuánto se separa  $(M, g)$  del espaciotiempo de Minkowski en un entorno de cada punto, o, equivalentemente, en qué medida la derivada covariante deja de conmutar: se define en coordenadas locales mediante la expresión

$$\nabla_i \nabla_j X - \nabla_j \nabla_i X = R_{ijk}^l X^k \frac{\partial}{\partial x^l}$$

para cualquier campo vectorial  $X$ , de modo que  $R_{ijk}^l \equiv 0$  equivale a que  $(M, g)$  es localmente isométrico al espacio de Minkowski.

Aunque se pueden obtener las ecuaciones de la Relatividad General, como hizo David Hilbert [Hilbert, 1935], a partir de un principio variacional, Einstein las buscó de forma más heurística, tratando de relacionar la curvatura de una métrica lorentziana  $g$  con la materia presente en la variedad en la que actúa dicha métrica, bajo la guía de estos dos requerimientos:

- que se recuperara la ley de gravitación newtoniana “en el límite pre-relativista” (es decir, bajo perturbaciones pequeñas de *Mink* y considerando partículas moviéndose mucho más lentas que la luz)
- y que se mantuvieran las leyes de conservación de la energía y el momento.

Las ecuaciones de Einstein se pueden escribir como

$$R - \frac{1}{2} Sg = 8\pi T$$

La incógnita es la métrica lorentziana  $g$ .

El miembro de la izquierda,

$$G = R - \frac{1}{2} Sg$$

(a menudo denominado “el tensor de Einstein”) se construye a partir de  $R = Ric$  (el tensor de curvatura de Ricci de  $g$ , es decir, la traza del tensor de curvatura de Riemann,  $R_{ij} = R^l_{lij}$ ).

y la curvatura escalar de  $g$ ,  $S = tr(g^{-1}R)$ , ( $S = R^i_i$ ). El tensor  $G$  es simétrico y libre de divergencia (de hecho  $R - \frac{1}{2}Sg$  es la única combinación libre de divergencia de  $R$  y  $S$ ).

El tensor  $T$  es el “tensor energía-momento” de los campos materiales presentes en el espaciotiempo. Como consecuencia de la igualdad,  $T$  ha de ser también un tensor simétrico libre de divergencia, lo que garantiza la conservación local de la energía y el momento.

Naturalmente, estas ecuaciones en derivadas parciales constituyen un sistema no lineal muy complicado, aún en el caso de “las ecuaciones de Einstein en el vacío”, o sea, cuando  $T = 0$  que se reducen inmediatamente a

$$(1) \quad R = 0$$

Estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional de Hilbert-Einstein

$$H(g) = \int_M S_g dV_g$$

(El subíndice “ $g$ ” en el integrando trata de resaltar que tanto el tensor  $S$  como el elemento de volumen ( $dV$ ) depende de  $g$ )

Obviamente la métrica de Minkowski, para la que el tensor de curvatura de Riemann se anula, es la solución trivial de las ecuaciones (1).

### 2.3. Las métricas de Schwarzschild y de Kerr

La primera solución no trivial de (1) fue encontrada por Schwarzschild. Buscaba una variedad lorentziana  $(M, g)$ , con  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , tal que  $g$  fuera independiente de la primera variable,  $t$ , y tuviera simetría esférica. Encontró una familia uniparamétrica de métricas que pudo expresar en un sistema de coordenadas  $t, r, \theta, \varphi$  como

$$(2) \quad g_{Sch} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{S^2}$$

donde  $g_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  es la métrica habitual de la esfera  $S^2$ .

La solución hallada describe un agujero negro (“el agujero negro de Schwarzschild”) de masa  $M > 0$ . Aunque la expresión de  $g_{Sch}$  en estas coordenadas, (2), es singular cuando  $r = 2M$  (el horizonte), tal singularidad es artificial: la métrica se puede extender analíticamente incluyendo al horizonte introduciendo, por ejemplo, las coordenadas  $u, v$  tales que

$$\begin{cases} u = r + 2M \log(r - 2M) \\ v = t + u \end{cases}$$

en cuyo caso (llamando de nuevo  $g_{Sch}$  a la extensión):

$$g_{Sch} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2dvdr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$$

Trabajando con estas últimas coordenadas (de Regge-Wheeler) se prueba que toda trayectoria temporal dirigida hacia el futuro y toda geodésica nula que cruce el horizonte,  $r = 2M$ , sólo pueden atravesarlo “de fuera hacia adentro”.

En cambio la singularidad que aparece en estas soluciones es inevitable.

Obsérvese, además, que cuando  $r \rightarrow \infty$  la métrica se aproxima a

$$-dt^2 + dr^2 + r^2 g_{S^2}$$

lo que indica que  $g_{Sch}$  tiende asintóticamente a la de Minkowski.

En este modelo de Schwarzschild, que describe el campo gravitacional alrededor de una estrella central, al radio  $r=2M$  se le conoce como “el radio de Schwarzschild” de dicho astro.

Pasaron casi cincuenta años hasta que R. Kerr obtuvo una solución exacta de (\*) que describe la geometría exterior de un agujero negro en rotación y estacionario. Se trata de la familia biparamétrica de Kerr,

$$g_K = -\frac{\Delta}{U} (dt - a \text{sen}^2\theta d\varphi)^2 + U \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + \frac{\text{sen}^2\theta}{U} (adt - (r^2 + a^2)d\varphi)^2$$

expresada en coordenadas  $t, r, \theta, \varphi$ ,

$$-\infty < t < \infty, \quad M + \sqrt{M^2 - a^2} < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

donde

$$U = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

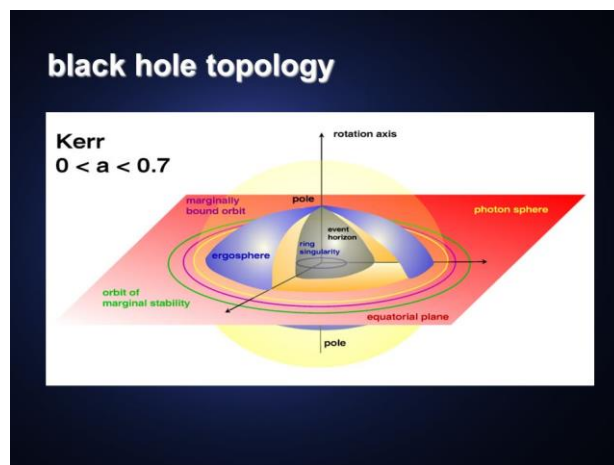


Figura 2. Geometría del Agujero Negro de Kerr.

Los parámetros  $M$  y  $a$  describen la masa y el momento angular por unidad de masa del “agujero negro de Kerr”. Obsérvese que cuando  $a = 0$  (cuando no hay rotación) reaparece la métrica de Schwarzschild. Para que  $g_k$  describa este agujero negro se precisa que  $M^2 > a^2$  (una importante desigualdad entre el momento angular y la masa); en tales casos, el horizonte (la frontera del agujero negro) aparece donde  $r = r_* = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ . Los coeficientes son independientes de  $t$  y de  $\varphi$ , evidenciando que este espaciotiempo es estacionario y tiene simetría axial.

Una de las características geométricas clave de los agujeros negros de Kerr es la existencia de una región acotada del espaciotiempo, situada fuera del horizonte (al que toca en los polos  $\theta = 0, \theta = \pi$ ), la “ergoesfera”, en la que “la coordenada del tiempo se hace espacial”: allí el campo vectorial  $V = \frac{\partial}{\partial t}$  ni es “temporal” ( $g(V, V) < 0$ ), ni nulo ( $g(V, V) = 0$ ), sino “espacial” ( $g(V, V) > 0$ ).

Como  $g_{ij}V^iV^j = g_{tt} = \frac{\Delta^2 \sin^2 \theta - \Delta}{u}$ , resulta que la ergoesfera, donde  $\frac{\partial}{\partial t}$  es espacial, es la región abierta del espaciotiempo donde

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta > 0$$

La importante atención dedicada a estos agujeros negros durante la última parte del siglo XX se refleja en los dos resultados siguientes:

- El teorema de unicidad (cuyos primeros pasos fueron dados por Israel [Israel, 1967] y Carter [Carter, 1987], y después, fueron completados por Robinson [Robinson, 2009]), según el cual:

“Si  $(M, g)$  es un espaciotiempo tetradimensional estacionario, asintóticamente llano y analítico, sin carga eléctrica, con un horizonte conexo en rotación, entonces el exterior de su horizonte es isométrico al de un agujero negro de Kerr.”

- El teorema de Hawking sobre la topología esférica de los horizontes:

“Si  $(M, g)$  es el espaciotiempo de un agujero negro estacionario que cumple la condición de energía nula, entonces las secciones temporales de su horizonte tienen la topología de la esfera  $S^2$ ”.

En Relatividad General se considera natural suponer que  $G(u, v) \geq 0$  para todo par de vectores tangentes a  $M$  en  $P$  dirigidos hacia el futuro, tanto temporales como nulos; es consecuencia de suponer que la energía y el momento que mide un observador nunca es negativa. Esta hipótesis recibe el nombre de “la condición de energía dominante”. La “condición de energía nula” es el caso particular

$$G(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in T_p M, \quad u \text{ vector nulo.}$$



### 3. La sombra de un agujero negro de Schwarzschild.

#### 3.1 La métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild,  $g_{Sch}$ , fue expresada por Hilbert como:

$$g_{Sch} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

donde  $\theta$  y  $\varphi$  son las coordenadas usuales de la esfera bidimensional,  $r$  es una coordenada radial que varía entre la constante  $r_*$  y  $+\infty$ , y  $t$  es una coordenada temporal que varía en  $\mathbb{R}$ ;  $r_s$  es una constante de integración.

El campo  $g_{Sch}$  describe el campo gravitacional alrededor de una masa simétrica  $M$  y, comparando con la teoría newtoniana, resulta que:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Tenemos que  $g_{Sch}$  es la única solución con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en el vacío, sin constante cosmológica,  $R=0$ , y se conoce a  $r_*$  como el radio de Schwarzschild de un cuerpo con simetría esférica con masa  $M$ .

Cuando  $r_* > r_s$ ,  $g_{Sch}$  describe el campo gravitacional alrededor de una estrella de radio  $r_*$ .

Si  $r_* \leq r_s$ ,  $g_{Sch}$  describe un agujero negro, con una singularidad aparente (en esta formulación de Hilbert) cuando  $r = r_s$  y una singularidad para  $r = 0$ . La singularidad aparente (evitable) aparece en el horizonte del agujero negro: existen cambios de coordenadas bajo los cuales la métrica es regular en el horizonte.

#### 3.2 Geodésicas de la luz

A causa de la simetría esférica, resulta suficiente considerar sólo el caso del movimiento en el plano ecuatorial, en el que podemos expresar el langrangiano de las geodésicas como

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \left[ -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2 \right]$$

donde el punto se refiere a la derivada respecto del parámetro de la trayectoria,  $s$ .

Las geodésicas-luz se determinan mediante estas tres ecuaciones:

- Considerando la t-componente de las ecuaciones de Euler,

$$0 = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -c^2 \frac{d}{ds} \left( \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \dot{t} \right)$$

resulta

$$(G1) \quad \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \dot{t} = E \text{ (constante);}$$

· Considerando la  $\phi$ -componente de las ecuaciones de Euler,

$$0 = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{ds} (r^2 \dot{\phi})$$

de donde:

$$(G2) \quad r^2 \dot{\phi} = L \text{ (constante);}$$

· Si consideramos la condición de ser trayectorias luminosas,  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = 0$ , es decir:

$$(G3) \quad - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 \dot{\phi}^2 = 0$$

Dividiendo (G1) por (G2) se obtiene

$$(1) \quad \frac{dt}{d\phi} = \frac{\dot{t}}{\dot{\phi}} = \frac{Er^2}{L \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)}$$

Dividiendo (G3) por  $\dot{\phi}^2$

$$- \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{c^2 \dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \frac{r^2}{\dot{\phi}^2} + r^2 = 0$$

de donde, con ayuda de (1), resulta que

$$- \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \frac{c^2 E^2 r^4}{L^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)^2} + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + r^2 = 0$$

o sea:

$$(2) \quad \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{c^2 E^2 r^4}{L^2} - r^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)$$

Estas dos ecuaciones, (1) y (2), contienen toda la información necesaria sobre las geodésicas-luz: (2) proporciona la forma de la órbita luminosa y (1) el tiempo del trayecto.

### 3.3 La esfera de fotones de $g_s$

Consideremos la derivada respecto de  $\phi$  de la ecuación (2)

$$\frac{d}{d\phi} \left[ \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \right] = \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{c^2 E^2 r^4}{L^2} - r^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]$$

$$2 \frac{dr}{d\phi} \frac{d^2 r}{d\phi^2} = \left( \frac{4c^2 E^2 r^3}{L^2} - 2r + r_s \right) \frac{dr}{d\phi}$$

Para que se pueda producir una geodésica luz en movimiento circular debe suceder que  $\frac{dr}{d\phi} = 0$  y que  $\frac{d^2 r}{d\phi^2} = 0$ , de modo que

$$\begin{cases} 0 = \frac{c^2 E^2 r^4}{L^2} - r^2 + r_s r \\ 0 = \frac{4c^2 E^2 r^3}{L^2} - 2r + r_s \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $\frac{4}{r}$  y restando la segunda ecuación, resulta que

$$0 = -2r + 3r_s$$

lo que equivale a que

$$r = \frac{3}{2} r_s \quad \text{y} \quad r_s = \frac{3GM}{r^2}$$

Hemos comprobado, por tanto, que existe una geodésica luz circular (una circunferencia de fotones) cuando el radio toma el valor

$$\frac{3}{2} r_s = \frac{3GM}{r^2}$$

Puesto que podemos tomar cualquier plano que pase por el origen como nuestro plano ecuatorial,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , podemos establecer que de hecho existe una esfera de los fotones  $r = \frac{3}{2} r_s$ . Cada circunferencia máxima en esta esfera es una geodésica luz.

Se sabe además que cada geodésica luz con una condición inicial que se desvíe ligeramente de la correspondiente a una circunferencia de un fotón en  $r = \frac{3}{2}r_s$ , se moverá espiraleando alejándose de  $r = \frac{3}{2}r_s$  atraída o bien por el infinito o bien por el horizonte.

Resulta posible calcular además el valor de la constante del movimiento,  $\frac{L^2}{E^2}$ , que corresponde a la circunferencia de un fotón: si insertamos el valor  $r = \frac{3}{2}r_s$  en la ecuación

$$0 = \frac{c^2 E^2 r^3}{L^2} - r + r_s$$

hallamos que

$$\frac{c^2 E^2}{L^2} = \frac{\frac{3}{2}r_s - r_s}{\frac{27}{8}r_s^2} = \frac{4}{27r_s^2}$$

es decir:

$$\frac{L^2}{E^2} = \frac{27c^2 r_s^2}{4} = \frac{27c^2 4G^2 M^2}{4c^4} = \frac{27G^2 M^2}{4c^2}$$

Por supuesto, la esfera de los fotones,  $r = \frac{3}{2}r_s$ , no existe para estrellas para las que  $r_* > \frac{3}{2}r_s$ ; por tanto, sólo es relevante para el caso de agujeros negros y para (hipotéticas) estrellas ultracompactas para las que  $r_s < r_* < \frac{3}{2}r_s$ .

### 3.4 La sombra de un agujero negro de Schwarzschild

Fijemos un observador en la posición de radio  $r = r_0$  y consideremos todos los rayos de luz que van de este observador hacia el pasado (o sea, consideremos todos los rayos de luz que llegan a la posición del observador).

Podemos clasificarlos en dos categorías:

- la primera agrupa a los rayos de luz que se marchan hacia el infinito
- la segunda consta de los rayos de luz que van al horizonte de sucesos, donde  $r = r_s$ .

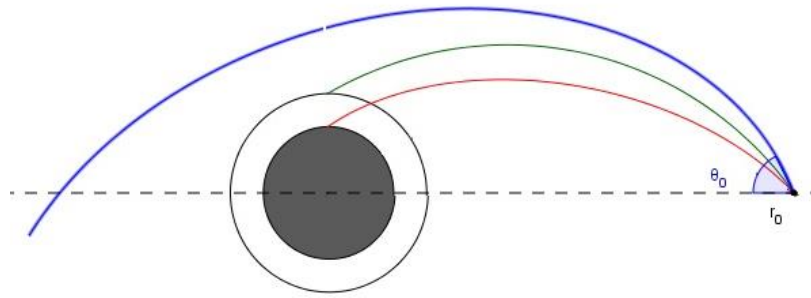


Figura 3.

La frontera que separa ambas categorías está formada por los rayos de luz que espiralean asintóticamente hacia la esfera de los fotones,  $r = \frac{3}{2} r_s$ .

Supongamos ahora que se han distribuido fuentes luminosas a grandes radios, pero que no hay ninguna fuente más. Entonces las direcciones iniciales de los rayos de luz de la segunda corresponden a puntos oscuros de dicho cielo, integrantes de la que llamamos “sombra” del agujero negro. El contorno de tal sombra corresponde a los rayos de luz que espiralean hacia  $r = \frac{3}{2} r_s$ .

Calculamos el radio angular  $\theta_0$  de la sombra en función de  $r_s$  y  $r_0$ . Para cualquier rayo de luz, la dirección inicial forma un ángulo  $\theta$  con respecto al eje; de acuerdo con la figura 4.

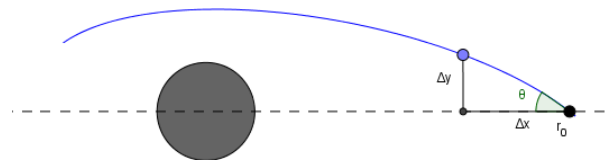


Figura 4.

$$\text{tg } \theta = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Usando la expresión de  $g_s$  en las coordenadas de Hilbert en el plano ecuatorial,

$$g = g_s|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

podemos desarrollar tal límite como

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{rd\varphi}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} dr} \Bigg|_{r=r_0}$$

y, recurriendo a la ecuación (2) del epígrafe anterior que describe a  $\frac{dr}{d\varphi}$ , deducimos que

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right)}{\frac{E^2 r_0^4}{c^2 L^2} - r_0^2 + r_s r_0} = \frac{r_0 - r_s}{\frac{E^2 r_0^3}{c^2 L^2} - r_0 + r_s}$$

y, con algo de trigonometría elemental, reconstruimos un resultado célebre:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \theta + 1} = \frac{1}{(r_0 - r_s)^{-1} \left( \frac{E^2 r_0^3}{c^2 L^2} - r_0 + r_s \right) + 1} = \\ &= \frac{r_0 - r_s}{\frac{E^2 r_0^3}{c^2 L^2} - r_0 + r_s + r_0 - r_s} = \frac{c^2 L^2 (r_0 - r_s)}{E^2 r_0^3} \end{aligned}$$

El ángulo radial  $\theta_0$  del contorno de la sombra es el ángulo correspondiente a un rayo de luz que espiralea hacia  $r = \frac{3}{2} r_s$ . Este rayo debe tener las mismas constantes de movimiento  $E$  y  $L$  que las de una circunferencia de un fotón, donde  $r = \frac{3}{2} r_s$  (puesto que los vectores tangentes de estos dos rayos de luz se aproximan tanto como se quiera uno al otro), como ya habíamos calculado

$$\frac{c^2 L^2}{E^2} = \frac{27}{4} r_s^2$$

de donde se obtiene  $\theta_0$  en función de  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  y  $r_0$ :

$$\operatorname{sen}^2 \theta_0 = \frac{27 r_s^2 (r_0 - r_s)}{4 r_0^3}$$

Obsérvese que:

- $r_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \theta_0 \rightarrow 0$  (la sombra desaparece);
- $r_0 = \frac{3}{2} r_s \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$  (la sombra cubre la “mitad del cielo”);
- $r_0 \rightarrow r_s \Rightarrow \theta_0 \rightarrow \pi$  (la sombra llega a cubrir todo el cielo).

Se suele visualizar la sombra mediante “conos de escape”, que indican para cada posición del observador la parte brillante del cielo, como se puede observar en la Figura 6.

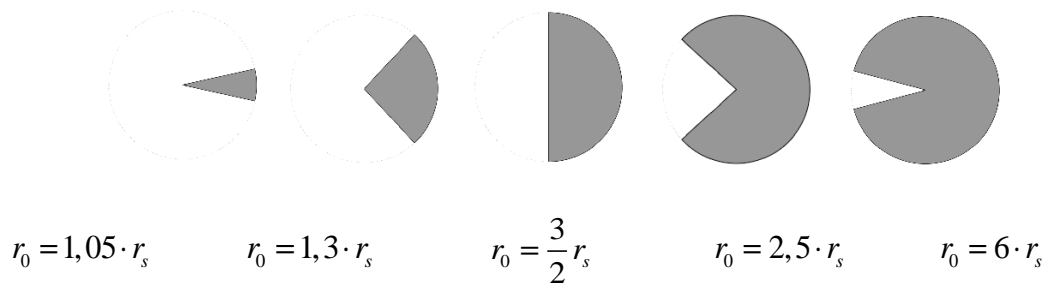


Figura 6. Conos de escape.

En el caso del agujero negro en el centro de nuestra galaxia ( $M \approx 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$ ,  $r_0 \approx 8 Kps$ ) el ángulo radial es  $\theta_0 \approx 15 \mu as$ . Se espera conseguir observar su sombra pronto con radiotelescopios que usen VLBI (“very long baseline interferometry”), como en el proyecto *Event Horizon Telescope*.

Obsérvese de nuevo que la sombra debe existir no solo para un agujero negro, sino también, del mismo modo, para una posible estrella ultracompacta  $\left( r_s < r_* < \frac{3}{2} r_s \right)$  oscura.

#### 4. Conclusiones

Puesto que nuestros cálculos están basados en la métrica de Schwarzschild, no se aplican a agujeros negros en rotación (descritos por la métrica de Kerr). De hecho, en estos casos la sombra no es circular. Así que la forma de la sombra nos dice directamente si el agujero negro rota o no.

En la actualidad, numerosos trabajos analítico-numéricos buscan establecer las propiedades de la sombra tanto de agujeros negros de Kerr en distintos escenarios [Perlick, 2017], como en dimensiones superiores [Bozza, 2010; Amir, 2017].

Las simulaciones numéricas muestran evidencias tanto sobre el achatamiento en la forma como sobre el decrecimiento en el tamaño de las sombras de agujeros negros conforme aparecen giros en la dinámica de esos agujeros negros y más dimensiones en su estructura topológica [Cunha, 2016].

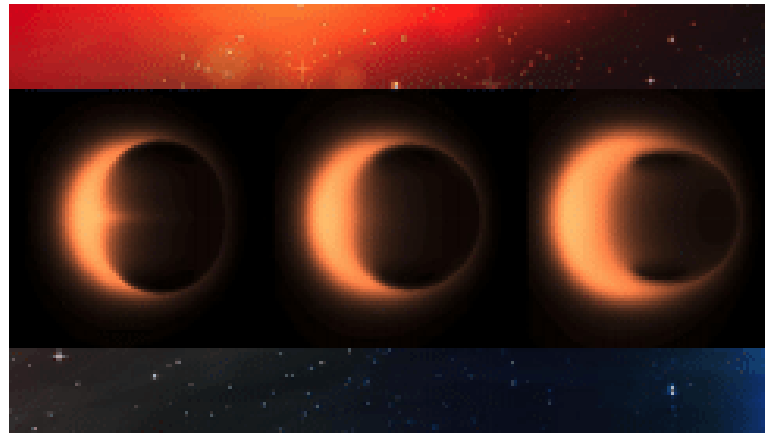


Figura 7. Dependencia de la sombra de los parámetros de la métrica.

Estas conclusiones teóricas, que apuntan a que distintas métricas de agujeros negros dejan su huella, a menudo, en distintas características de sus sombras, van de la mano en la actualidad de la expectativa experimental de que proyectos astrofísicos en curso como el EHT (Event Horizon Telescope) proporcionen en un futuro inmediato cada vez más datos sobre el entorno próximo y la sombra de Sagittarius A\*, el agujero negro supermasivo de la región central de la Vía Láctea, nuestra galaxia.

## Referencias

- [1] AMIR, M., SINGH, B.P., GHOSH, S.G. *Shadows of rotating five-dimensional EMCS black holes*, ArXiv: 1707.09521. 2017.
- [2] BOZZA, VALERIO. Gravitational lensing by black holes. *General Relativity and Gravitation*, 42(9), 2269-2300. doi:10.1007/s10714-010-0988-2. 2010.
- [3] CUNHA, PEDRO. V., HERDEIRO, CARLOS. A., RADU, EUGENE., & RÚNARSSON, HELGE. F. Shadows of Kerr Black Holes with and without Scalar Hair. *arXiv: 1605.08293*. 2016.
- [4] CARTER, BRANDON. Mathematical Foundations of the Theory of Relativistic Stellar and Black Hole Configurations. *Gravitation in Astrophysics NATO ASI Series*, 63-122. doi:10.1007/978-1-4613-1897-2\_2. 1987.
- [5] HILBERT, DAVID. Die Grundlagen der Physik. *Dritter Band: Analysis Grundlagen der Mathematik Physik Verschiedenes*, 258-289. doi:10.1007/978-3-662-38452-7\_18. 1935.
- [6] ISRAEL, W. Event Horizons in Static Vacuum Space-Times. *Physical Review*, 164(5), 1776-1779. 1967.
- [7] JOHANNSEN, TIM. Photon Rings Around Kerr And Kerr-Like Black Holes. *The Astrophysical Journal*, 777(2), 170. doi:10.1088/0004-637x/777/2/170. 2013.



- [8] PERLICK, VOLKER; TSUPKO, O. Y. Light propagation in a plasma on Kerr spacetime: separation of the Hamilton-Jacobi equation and calculation of the shadow. *Phys. Rev. D* 95, 104003. 2017.
- [9] ROBINSON, D.C. Four decades of black holes uniqueness theorems. (pp 115-142 del libro "The Kerr spacetime. Rotating black holes in General Relativity", *Cambridge University Press*. 2009.
- [10] ROJO MONTIJANO, JOSÉ. Schwarzschild y la trama de nuestro universo. *Pensamiento matemático*. Vol. VII, N<sup>o</sup> 1. pp. 149-156. 2017.
- [11] ROJO MONTIJANO, JOSÉ. *Dimensiones Extra y Gravedad: Geometría y dinámica alrededor de un agujero negro*. Tesis Doctoral. Universidad CEU San Pablo. Madrid. 2017.

**Sobre los autores:**

*Nombre:* José Rojo Montijano

*Correo Electrónico:* jrojo.eps@ceu.es

*Institución:* Universidad CEU San Pablo, España.

*Nombre:* M<sup>a</sup> Carmen Escribano Ródenas

*Correo Electrónico:* escrod@ceu.es

*Institución:* Universidad CEU San Pablo, España.