

Historias de Matemáticas

El principio de disposición engañosa

The Principle of Concealed Distribution

Pedro Alegría

Revista de Investigación



Volumen IX, Número 1, pp. 149–162, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Jun'18; Aceptación: 1 Nov'18

1 de abril de 2019

Resumen

En este artículo recopilatorio se realiza un recorrido histórico por algunos problemas de disecciones geométricas que presentan algún tipo de apariencia paradójica. Se enuncia el principio de disposición engañosa, concebido por Martin Gardner, para describir este tipo de problemas y se estudian algunos ejemplos que muestran la relación de estas aparentes paradojas geométricas con sucesiones generalizadas de Fibonacci en el contexto de la matemática recreativa.

Palabras Clave: Problemas de disección, paradojas geométricas, sucesiones de Fibonacci, matemática recreativa.

Abstract

In this survey, an historical journey along some problems of geometric dissections with some kind of paradoxical appearance is made. The principle of concealed distribution, conceived by Martin Gardner, to describing this type of problems is stated and some examples showing the relationship between these apparent geometric paradoxes and generalized Fibonacci sequences in the context of recreational mathematics are studied.

Keywords: Dissection problems, geometric paradoxes, Fibonacci sequences, recreative mathematics.

1. Introducción

Desde sus inicios, muchos problemas geométricos relacionados con áreas se han resuelto mediante procesos de disección. El ejemplo mas significativo es el teorema de Pitágoras, muchas de cuyas demostraciones consisten en recortar un cuadrado en piezas que pueden recolocarse para formar dos cuadrados de dimensiones dadas. Paralelamente, muchos problemas de matemática recreativa consisten en construir figuras planas a partir de un conjunto de piezas de formas diversas.

La frase del gran matemático y filósofo de la ciencia Henry Poincaré (1854-1912), en la que afirma “la geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal”, es el punto de partida de este trabajo recopilatorio en el que mostramos algunos aspectos aparentemente paradójicos que comparten la geometría y la matemática recreativa. Haremos un recorrido histórico y estudiaremos algunos ejemplos a partir de los cuales Martin Gardner acuñó el término “principio de disposición engañosa” para ilustrar diversos problemas de matemática recreativa relacionados con disecciones fraudulentas con el objetivo de descubrir los errores que ciertas representaciones geométricas nos hacen cometer. En la última sección exploramos algunas características de este tipo de disecciones que las relacionan con propiedades características de la sucesión de Fibonacci y sus generalizaciones.

2. Antecedentes históricos

En esta sección introductoria, haremos un recorrido por algunos de los momentos más relevantes en la evolución del principio de disposición engañosa, y sus protagonistas. En la tabla 1 se muestra una cronología resumida de algunos de ellos.

Tabla 1. Cronología de disecciones geométricas engañosas.

1545	Sebastiano Serlio	Il primo libro d'Architettura
1769	Edmé Gilles Guyot	Missing square puzzle
1794	William Hooper	Paradoja de Hooper
1807-33-35	Wallace, Bolyai y Gerwien	Teorema de equicomposición de figuras planas
1896	Sam Loyd	Get off the earth
1917	Henry Dudeney	Paradoja de los monjes
1924	Banach-Tarski	Paradoja de Banach-Tarski
1953	Paul Curry	Paradoja de Curry
1956	Martin Gardner	Principio de distribución oculta

2.1. Paradoja de Serlio

Sebastiano Serlio en [14] mostraba una imagen mediante la cual, un rectángulo de dimensiones 3×10 se podía transformar en dos rectángulos, uno de dimensiones 7×4 y otro de dimensiones 3×1 . En definitiva, probaba que “ $30 = 31$ ”. Una representación esquemática de esta descomposición se muestra en la figura 1.

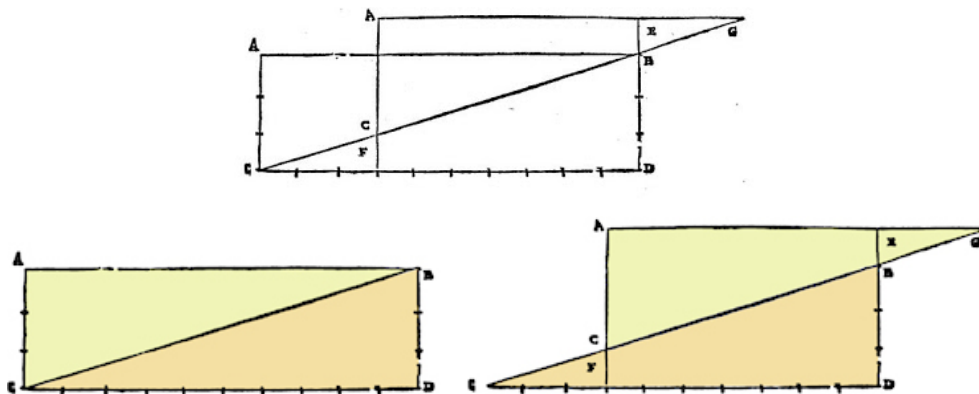


Figura 1. Paradoja de Serlio.¹

Aparentemente, Serlio no se dio cuenta de que su construcción daba regiones de distinta área. Según sus palabras:

Sometimes strange accidents happen to the architect: in situations like the one here described, the methods of mathematicians will help. He has a single panel 10 feet \times 3 feet and he needs to convert it into a 7 feet \times 4 feet panel. Cutting it vertically, its height will double and will reach 6 feet but he needs 7. At the same time, cutting a lateral slice of 3 feet, it will not satisfy the need because the remaining part will have a size of 7 feet \times 3 feet. In order to get the result, he has to follow these instructions. The panel, 10 feet \times 3 feet, has four vertices A, B, C, D: cut it on its diagonal CB and slide the upper part towards B until the distance between the point A and its projection F will be 4 feet. The same will happen with the distance ED, and the distance AE will be 7 feet, so that the new panel AEFD will be 7 feet \times 4 feet. Two additional triangles allow to create a small door: CFC and EBG.

Fue otro arquitecto antagonista de Serlio, Pietro Cataneo, quien detectó el error en 1567 (ver [3]) y propuso una disección alternativa, recortando un rectángulo de dimensiones 12×4 en cuatro piezas con las que se forman dos rectángulos de dimensiones 9×5 y 3×1 , respectivamente.

2.2. Paradoja de Guyot

La siguiente aparición conocida de este tipo de puzles se encuentra en [9] de Edmé Gilles Guyot. La paradoja afirma que $30 = 32$ y la demostración consiste simplemente en observar atentamente las imágenes de la figura 2.



Figura 2. Paradoja de Guyot.

La figura de la izquierda es un rectángulo de dimensiones 10×3 , de modo que tiene área igual a 30. Si reagrupamos las piezas convenientemente, podemos obtener dos nuevos rectángulos, uno de ellos de dimensiones 4×5 y otro de dimensiones 6×2 . El área total es igual a $20 + 12 = 32$. Guyot sugería dibujar una moneda en cada cuadrado para cumplir el sueño de los alquimistas que pretendían producir oro mediante procedimientos místicos.

La explicación del secreto, así como otros ejemplos y sus justificaciones teóricas, aparecen en [1]. La idea básica es que las piezas, al recomponerse, no encajan exactamente en los supuestos rectángulos: dejan una pequeña holgura que disimula la diferencia de áreas.

En 1774, William Hooper (ver [10]) repite el problema de Guyot bajo el nombre “Geometric money”. La errata que contenía en la primera edición del libro de Guyot se repetía en la versión de Hooper, como se observa en la figura 3. El error está corregido en la cuarta edición de 1794.

El título de la recreación está sugerido por el comentario:

In each square you have to draw the figure of a piece of money. As the pieces stand together in the foregoing figure, you will count thirty pieces of money only; but if the two triangles and the two irregular figures be joined together, there will be thirty-two pieces.

¹ <http://www.marianotomatis.it/blog.php?post=20110707§ion=english>

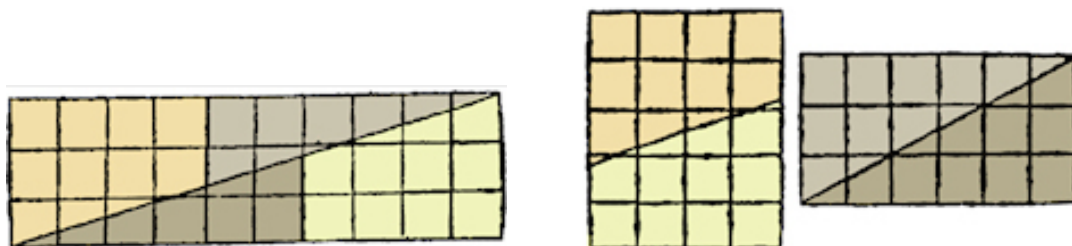


Figura 3. Paradoja de "Hooper".

2.3. Teorema de descomposición de figuras planas

Entre 1807 y 1835, William Wallace, Farkas Bolyai y Paul Gerwien, de forma independiente, demuestran que dos polígonos con la misma área son equidescomponibles, es decir que es posible transformar uno de ellos en el otro dividiéndolo en un número finito de polígonos y reordenando las piezas.

La idea de la prueba es la siguiente: Todo polígono puede cortarse en piezas triangulares que se pueden reagrupar para formar rectángulos. Estos rectángulos a su vez pueden colocarse para formar un rectángulo más grande, que después puede recortarse en piezas que formen un cuadrado, que tiene la misma área que el polígono inicial. El proceso esquemático se ilustra en la figura 4.

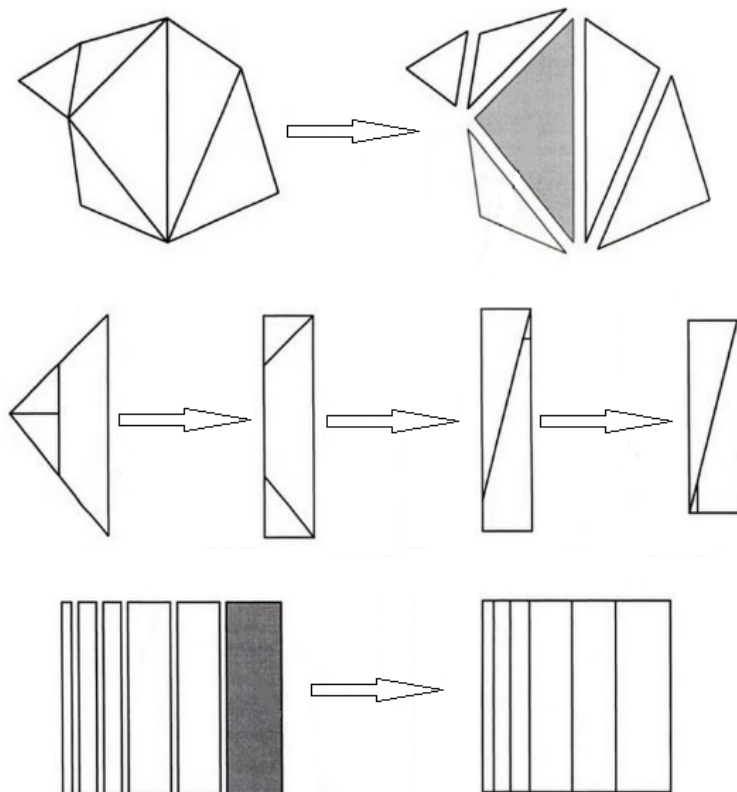


Figura 4. Proceso de descomposición de un polígono en un cuadrado.

En 1990, Miklos Laczkovich (ver [11]) probó que una circunferencia es congruente por di-

sección a un cuadrado de la misma área, pero hacen falta alrededor de 10^{50} piezas. Más aún, cualquier figura cuya frontera esté formada por regiones suavemente curvadas puede disecionarse en un cuadrado. En la demostración de Laczkovich las piezas pueden no ser medibles Lebesgue pero, en 2017, Grabowski, Máthé y Pikhurko (ver [8]) probaron que la descomposición puede realizarse con piezas medibles Lebesgue.

Un problema asociado a este teorema es precisamente el de determinar el mínimo número de piezas necesarias para transformar un polígono en otro. Los primeros valores correspondientes al mínimo número de piezas conocido hasta el momento necesario para transformar un polígono regular en un cuadrado están recopilados por Greg Frederickson en [6] y vienen dados por la tabla 2. En la figura 5 mostramos las correspondientes disecciones, obtenidas algunas de ellas por el método de superposición de teselaciones, que consiste en crear dos teselaciones con el mismo esquema de repetición y superponerlas de manera que coincidan los puntos de repetición. De este modo, los segmentos que forman una de las teselaciones indican los cortes a realizar en las figuras de la otra.

Tabla 2. Disecciones cuadradas de los distintos polígonos

Número de lados	Número de piezas	Autor
3	4	Dudeney, 1902
5	6	Brodie, 1891
6	5	Busschop, 1873
7	7	Theobald, 1995
8	5	Bennett, 1926
9	9	Theobald, 1995
10	7	Theobald, 1995

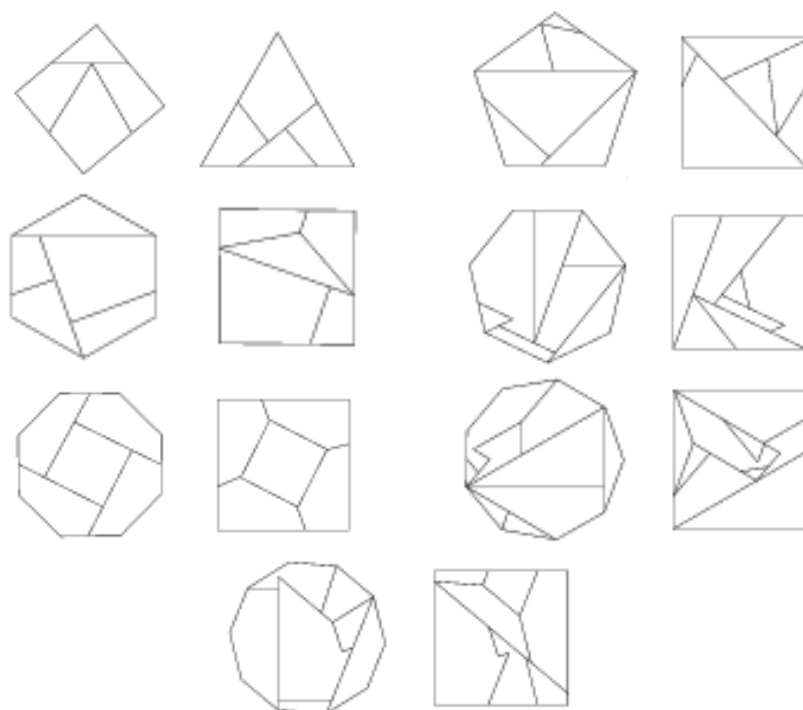


Figura 5. De cuadrado a polígono regular.²

² <https://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/d/d322.htm>

2.4. Fuera de la tierra

Sam Loyd creó el famoso modelo de desapariciones geométricas titulado “Fuera de la tierra” en 1896 (ver figura 6). De este puzle se han hecho multitud de versiones en las que las figuras geométricas se sustituyen por imágenes que representan personajes reales o ficticios o bien todo tipo de objetos. La característica común de todas estas recreaciones es que dos disposiciones distintas de las piezas hacen que aumente o disminuya el número de elementos.



Figura 6. Fuera de la tierra.

Un caso especial de este tipo de descomposiciones corresponde a las llamadas “paradojas del tangram”. Reciben el nombre de paradojas del tangram a las formadas por dos figuras que pueden construirse con las siete piezas del puzle, lo que hace que tengan la misma área, pero parece que a una de ellas le falte una pieza.

Se debe a Henry Dudeney el ejemplo de la paradoja de los monjes, cuya silueta se muestra en la figura 7. Citamos textualmente el final de la recreación 169 de [4]:

Finally, I give an example from the many curious paradoxes that one happens upon in manipulating Tangrams. I show designs of two dignified individuals who appear to be exactly alike, except for the fact that one has a foot and the other has not. Now, both of these figures are made from the same seven Tangrams. Where does the second man get his foot from?

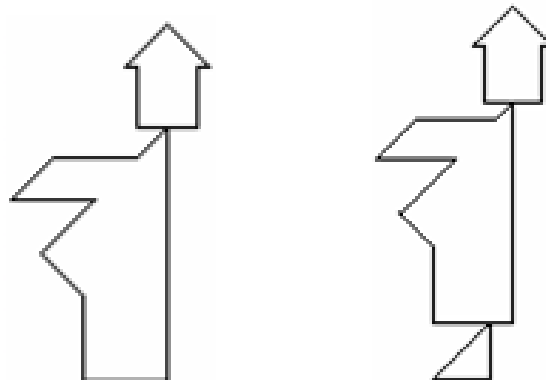


Figura 7. Paradoja de Dudeney.

El siguiente ejemplo, problema propuesto por Gianni Sarcone en [12] y comercializado bajo el nombre “Tangramagic”, no tiene una explicación tan simple. Si añadimos dos piezas como en la figura 8 y proponemos construir un rectángulo de las dos formas indicadas, observamos

que, en uno de ellos, se utilizan todas las piezas y, en otro, falta un cuadrado para completar el recuadro. ¿Cómo explicar esta discrepancia?

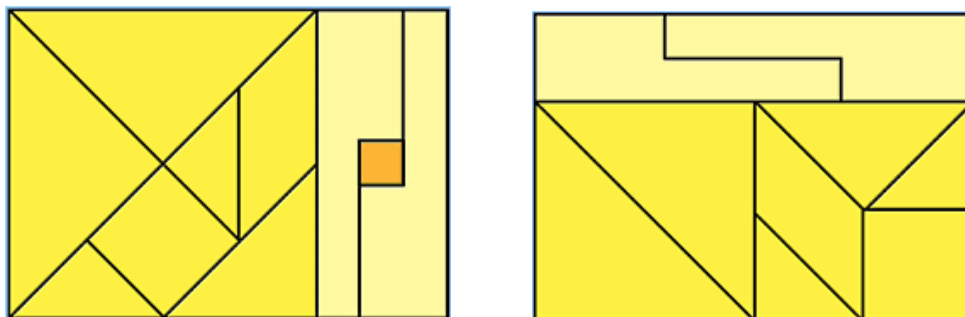


Figura 8. Paradoja de Sarcone.

En su “blog of wonders” (ver [17]), Mariano Tomatis presenta una recopilación bastante completa de los distintos modelos que se han propuesto a lo largo del tiempo, desarrollados a partir de la recreación de Sam Loyd.

2.5. Paradoja de Banach-Tarski

El paso de dos a tres dimensiones conduce a situaciones sorprendentes. El tercer problema de la lista que David Hilbert propuso en su célebre conferencia del Congreso Internacional de Matemáticas en 1900 preguntaba si, dados dos poliedros del mismo volumen, es posible descomponer el primero de ellos en una cantidad finita de piezas de modo que, al recomponerlas, se obtenga el segundo.

Ese mismo año, Max Dehn contestó negativamente pues probó que un cubo no puede disecionarse de forma que sus piezas puedan recomponerse y formar un tetraedro.

Las dificultades asociadas a problemas de disección de poliedros dieron paso a un famoso resultado, completamente contrario a la intuición, conocido como “paradoja de Banach-Tarski”. Este resultado, demostrado en 1924 (ver [2]), se enuncia como sigue:

Es posible descomponer una esfera maciza de radio uno en seis piezas las cuales pueden ser recompuestas, mediante movimientos rígidos, para formar dos esferas macizas de radio uno.

Aunque el número de piezas fue reducido a cinco por Robinson en 1947, no es posible realizar la descomposición de forma física pues el resultado es puramente teórico, basado en el axioma de elección, y las piezas no son medibles.

3. Principio de disposición engañosa

En [7], Martin Gardner hace un recuento histórico de los antecedentes del “Fuera de la tierra” y establece una característica común que engloba las paradojas geométricas de este tipo, la cual bautiza con el nombre de “principio de disposición engañosa”.

Así describe Martin Gardner el principio de disposición engañosa:

All geometrical vanishes involve the cutting and rearrangement of different parts of a figure. After the rearrangement is completed, a portion of the original figure (either part of its area or

one of a series of pictures drawn on the figure) has apparently vanished without a trace! When the pictures are returned to their original form, the missing area or picture mysteriously appears once more.

Posteriormente, Greg Frederickson [6] bautizó con el nombre de “bamboozlement” (engañosa o fraudulenta) a cualquier región plana que, al dividirla en piezas y reagruparlas de forma adecuada, da lugar a otras regiones de área aparentemente distinta.

La idea básica de este principio se comprende fácilmente con el ejemplo de la “paradoja de las líneas”, ilustrada en la figura 9: en una hoja de papel se dibujan diez líneas paralelas, como en la imagen de la izquierda; se recorta la hoja por la diagonal y se desplaza la mitad superior como indica la imagen de la derecha. El resultado de este desplazamiento es que las diez líneas se han convertido en nueve.

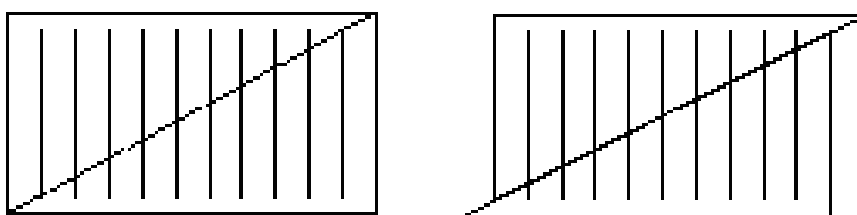


Figura 9. Paradoja de las líneas.

Con esta simplificación, es sencillo descubrir el secreto: las nueve últimas líneas son un poco más largas que las diez primeras. Si las diez líneas de la primera imagen tienen longitud L , las nueve líneas de la segunda imagen tienen longitud $10L/9$.

La versión bidimensional de este ejemplo, idea de Theodore DeLand (1907), consiste en sustituir las líneas por rectángulos. En la figura 10 se muestran dos imágenes, obtenida una de la otra intercambiando las dos piezas inferiores. De esta manera, la imagen de la izquierda está formada por once rectángulos y la de la derecha por diez rectángulos. Se comprende que el rectángulo que falta en la imagen de la derecha se ha repartido entre los demás, de modo que las alturas son ligeramente superiores a las originales.

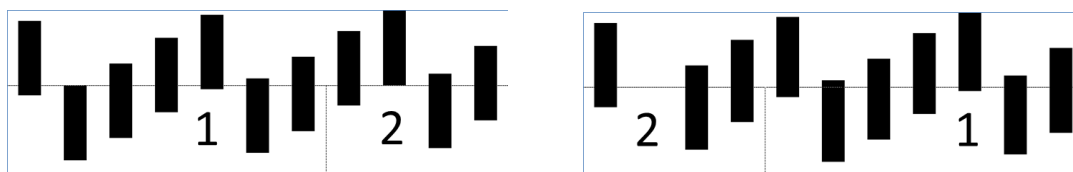


Figura 10. Paradoja de los rectángulos.

A partir de este principio se han elaborado multitud de modelos sustituyendo las líneas o rectángulos por otras figuras con el objetivo de ocultar más aún la diferencia entre las dimensiones de cada imagen. Martin Gardner ofrece una buena muestra de ellos en los capítulos 7 y 8 de [7].

4. Paradojas geométricas y la sucesión de Fibonacci

Los ejemplos recogidos en la sección 2 constituyen una muestra de las posibilidades recreativas de ciertos problemas de disección. Estudiaremos a continuación algunas propiedades sorprendentes que permiten relacionar las sucesiones de Fibonacci con algunas disecciones de apariencia paradójica, lo que permite también plantear algunos problemas matemáticos relacionados.

Nos limitaremos en este trabajo a dos tipos concretos de disecciones pero pueden encontrarse aplicaciones más generales en los trabajos de Greg Frederickson [6] y Torsten Sillke [16].

4.1. Disección de un cuadrado

Como ya hemos indicado, la construcción de Sebastiano Serlio ha sufrido modificaciones a lo largo del tiempo como las de Guyot y Hooper. En 1868, Oskar Schlömilch plantea (ver [13]) la paradoja que “demuestra” que $64 = 65$ a partir de la figura 11.

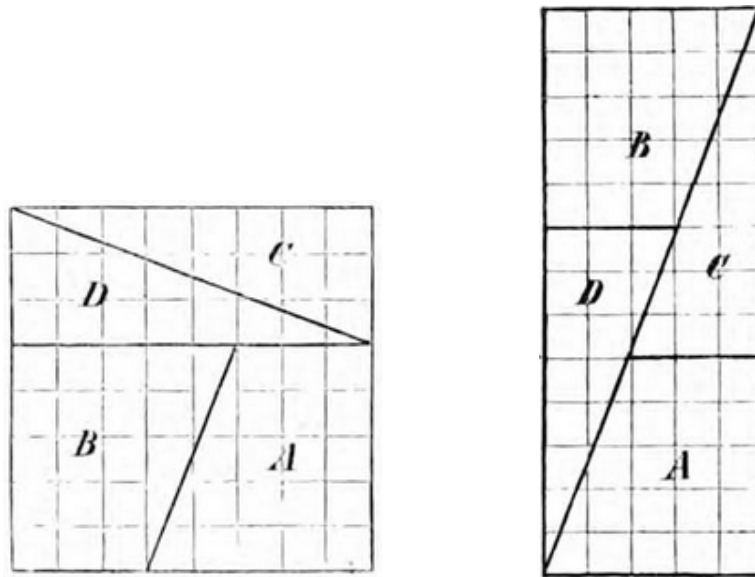


Figura 11. Disección de Schlömilch.

Como indica Warren Weaver en [18], esta construcción era uno de los juegos favoritos de Walter Dodgson (conocido popularmente como Lewis Carroll), y entre sus trabajos inéditos aparece la siguiente generalización:

Caracterizar las posibles dimensiones de las piezas del cuadrado para que, al reconstruirse, se forme un rectángulo cuya área sea (aparentemente) una unidad mayor.

Si denotamos por n al lado del cuadrado y por a al cateto menor del triángulo, la condición impuesta da lugar a la ecuación

$$(2n - a)(n - a) - n^2 = 1 \text{ o bien } n^2 - 3na + a^2 - 1 = 0.$$

A partir de esta ecuación, Carroll obtuvo la siguiente sucesión de posibles soluciones

n	3	8	21	55	...
a	1	3	8	21	...

Teniendo en cuenta que los valores de n y a son los mismos, aunque desplazados, se puede deducir la fórmula de recurrencia que permite obtener todas las soluciones, concretamente la sucesión $\{a_n\}$ dada por:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, n > 1.$$

Curiosamente, se trata de términos alternos de la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$, definida como

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 1.$$

Este hecho parece indicar que tiene relación con la identidad de Cassini demostrada en 1680:

$$(F_n)^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (-1)^{n-1}, n \geq 1.$$

Esta propiedad indica que, si n es impar, entonces el área del cuadrado de lado F_n es una unidad mayor que el área del rectángulo de lados F_{n-1} y F_{n+1} y, si n es par, entonces es una unidad menor. En cualquier caso, el error absoluto es siempre el mismo pero, cuando n es suficientemente grande, el error relativo es casi nulo y, a simple vista, no se percibe el desajuste de las piezas.

Una nueva disposición de las figuras, que se atribuye a Sam Loyd aunque parece que el verdadero inventor fue Walter Dexter, quien la publicó en 1901 para la revista "The boy's own paper", "demuestra" que $63 = 64 = 65$, como se observa en la figura 12. La misma descomposición en cuatro piezas del cuadrado de dimensiones 8×8 se puede reordenar y producir una figura formada por dos rectángulos de dimensiones 5×6 y otro de dimensiones 3×1 .

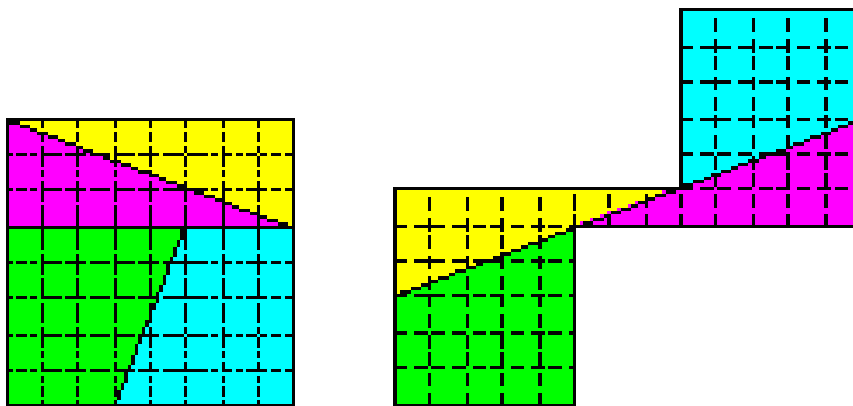


Figura 12. Disección de Dexter.

En [5], E. Escott utiliza la identidad de Cassini para generalizar esta disección y aplicarla a figuras con otras dimensiones. Esto le permite "probar" que $168 = 169 = 170$, como se ilustra en la figura 13. En este caso, el área del cuadrado es una unidad mayor que la del rectángulo correspondiente.

En este momento, parece natural plantearse un problema más general:

Dado un número entero positivo k , caracterizar las posibles dimensiones de las piezas de un cuadrado para que, al reconstruirse, se forme un rectángulo de modo que la diferencia entre sus áreas sea (aparentemente) igual a k .

Para resolverlo, basta tener en cuenta la generalización de la identidad de Cassini a sucesiones de Fibonacci con diferentes valores iniciales: si $f_1 = a, f_2 = b$ y $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} (n > 1)$, entonces se prueba fácilmente que

$$(f_n)^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (-1)^{n-1}(a^2 + ab - b^2), n > 1. \tag{1}$$

Por tanto, el problema tendrá solución cuando $k = \pm(a^2 + ab - b^2)$. Se comprende que no todos los valores enteros de a y b dan lugar a valores enteros de k . Si resolvemos la ecuación

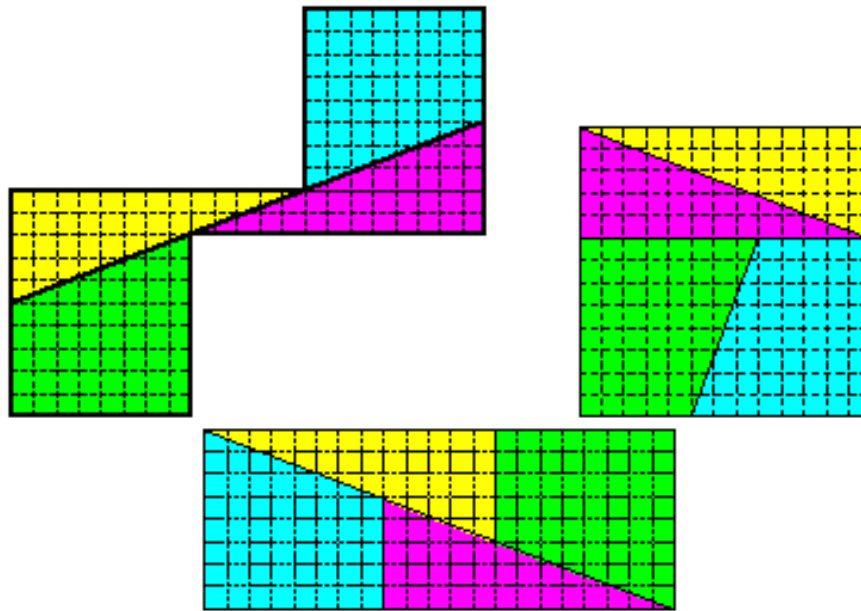


Figura 13. Disección de Escott.

anterior tomando la variable b como incógnita, es condición necesaria para que b sea entero que $5a^2 \pm 4k$ sea cuadrado perfecto. Para distintos valores de k , el problema consiste en resolver una adecuada ecuación de Pell. En particular, si f_1 y f_2 son términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, entonces $k = 1$. Los valores $k = 2$ y $k = 3$ no dan soluciones enteras, pero si $k = 4$, el conjunto de soluciones viene dado por los siguientes valores:

a	4	10	26	...
b	6	16	42	...

En [15], John Sharp propone otras variantes para diseñar disecciones fraudulentas a partir de sucesiones generalizadas de Fibonacci, definidas mediante la relación de recurrencia

$$G_{n+1} = a \cdot G_n + b \cdot G_{n-1}, \text{ con } G_0 = 0, G_1 = 1.$$

Para estas sucesiones, la identidad de Cassini se transforma en la siguiente:

$$G_n^2 = G_{n-1} \cdot G_{n+1} + (-b)^{n-1}.$$

Esto permite construir disecciones paradójicas donde la diferencia de las áreas sea distinta de uno o bien donde las dimensiones de las piezas tengan otros valores.

Por último, queremos aclarar que no siempre las disecciones con las características estudiadas en esta sección son fraudulentas. Concluimos con el siguiente problema:

Calcular las dimensiones de $AE = GH$ del cuadrado $ABCD$ de la figura 14 para que las piezas puedan reagruparse y formar un rectángulo como el de la derecha.

Basta hacer $a^2 + ab - b^2 = 0$ en la fórmula (1), para concluir que la razón entre a y b debe ser la constante áurea ϕ . La sucesión de Fibonacci que lo consigue es aquella cuyos valores iniciales son $f_1 = 1$ y $f_2 = \phi$.

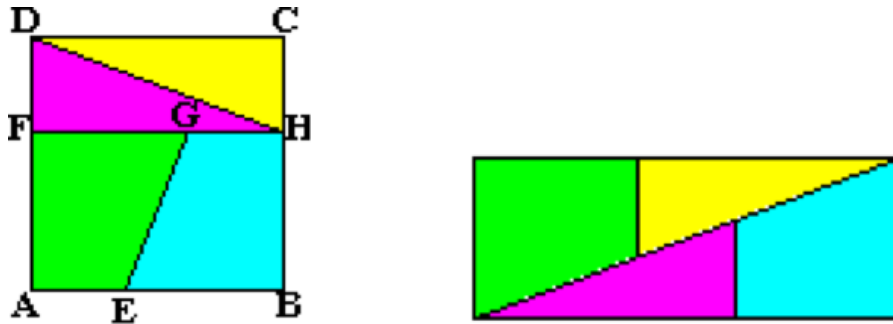


Figura 14. Disección real de un cuadrado.

4.2. Disección de un triángulo

En 1953, el mago estadounidense Paul Curry planteó la siguiente cuestión: dados dos triángulos rectángulos, como se muestra en la figura 15, el primero de ellos de catetos 2 y 5, y el segundo de catetos 3 y 8, si se colocan como muestra la imagen de la izquierda, dejan un espacio cubierto por un rectángulo de lados 3 y 5 pero si se colocan como muestra la imagen de la derecha, el rectángulo que se forma tiene lados 2 y 8. ¿Cómo es posible esa diferencia si ambas imágenes ocupan aparentemente el mismo espacio?

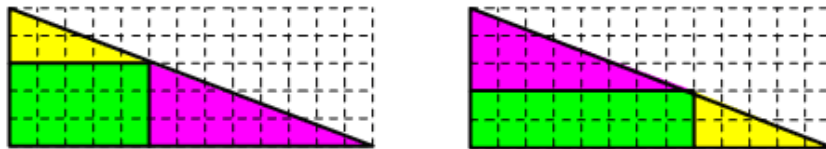


Figura 15. Disección de Curry.

La explicación es sencilla: los triángulos no son semejantes (las razones entre los catetos de ambos triángulos son $2/5$ y $3/8$, respectivamente) lo que hace que las hipotenusas de los triángulos no formen una línea recta. Por tanto, la imagen de la izquierda cubre una superficie que es algo menor que la mitad del rectángulo de dimensiones 5×13 y la imagen de la derecha cubre una superficie que es algo mayor que la mitad del mismo rectángulo.

Una modificación de esta paradoja, original de Martin Gardner (ver [7]), pone de manifiesto más claramente la discrepancia de las áreas, al realizar la disección del rectángulo en dos piezas que pueden disponerse de dos formas diferentes, como se muestra en la figura 16.

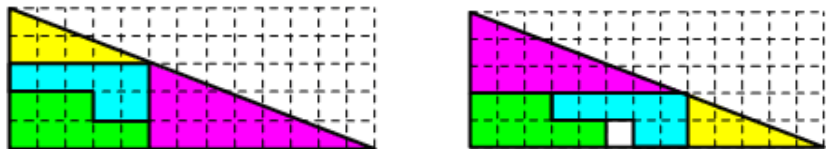


Figura 16. Disección de Gardner.

Al igual que los ejemplos de disección del cuadrado, la paradoja de Curry puede generalizarse a figuras con otras dimensiones, gracias a la llamada identidad de d’Ocagne, también válida para la sucesión de Fibonacci:

$$F_n \cdot F_{n+3} - F_{n+1} \cdot F_{n+2} = (-1)^{n+1}, n \geq 1.$$

Esto significa que, dado un rectángulo de dimensiones $F_n \times F_{n+3}$, se puede recortar en piezas de modo que, al disponerlas adecuadamente, se consigue aparentemente un nuevo rectángulo de dimensiones $F_{n+1} \times F_{n+2}$. Sin embargo, la diferencia entre sus áreas es igual a uno.

Observación. Entre las recreaciones basadas en la paradoja de Curry, queremos destacar la titulada “The eleven holes puzzle”, creada por Tofique Fatehi³ en 1980, en la que un rectángulo de dimensiones 50×31 se recorta en 59 piezas con las que puede reconstruirse el rectángulo de 11 maneras distintas con 11 dimensiones diferentes.

Referencias

- [1] ALEGRÍA, Pedro, *Geometría recortable*, Revista SIGMA, No. 28, pp. 95–115, mayo 2006.
- [2] BANACH, S., TARSKI, A., *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math., vol. 6, pp. 244–277, 1924.
- [3] CATANEO, Pietro, *L’Architettura*, Venecia, 1567. <https://archive.org/stream/larchitettvra00cata#page/n3/mode/2up>
- [4] DUDENEY, Henry E., *Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson and Sons, London 1917.
- [5] ESCOTT, E.B., *Geometric Puzzles*, The Open Court, No. 8, pp. 502–505, 1907.
- [6] FREDERICKSON, Greg, *Dissections: plane and fancy*, Cambridge University Press, 1997.
- [7] GARDNER, Martin, *Mathematics, Magic and Mystery*, New York, Dover Publ. 1956.
- [8] GRABOWSKI, L., MÁTHÉ, A., PIKHURKO, O., *Measurable circle squaring*, Annals of Mathematics, vol. 185, pp. 671–710, 2017.
- [9] GUYOT, Edmé Gilles, *Nouvelles récréations physiques et mathématiques*, vol. 2. París, 1769.
- [10] HOOPER, William, *Rational Recreations*, 4 ed., Londres, 1794.
- [11] LACZKOVICH, Miklos, *Von Neumann’s Paradox with Translation*, Fund. Math. 131, pp. 1–12, 1988.
- [12] SARCONI, Gianni, *Paradoxical Tangram and Vanishing Puzzles*, Journal in Recreational Mathematics, vol. 29, No. 2, pp. 132–133, 1998.
- [13] SCHLÖMILCH, Oskar, *Ein geometrisches paradoxon*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, vol. 13, p. 162, 1868.
- [14] SERLIO, Sebastiano, *Il primo libro d’Architettura*, París, 1545. <http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/LES1736Index.asp>
- [15] SHARP, John, *Fraudulent dissection puzzles: a tour of the mathematics of bamboozlement*, Mathematics in School, vol. 31, No. 4, pp. 7–13, sep. 2002.
- [16] SILLKE, Torsten, *Geometrical paradox*, <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/jigsaw-paradox.html>, 2004.
- [17] TOMATIS, Mariano, *A selection of vanishing puzzles*, <http://www.marianotomatis.it/blog.php?post=blog/20110715§ion=english>, 2011.
- [18] WEAVER, Warren, *Lewis Carroll and a geometrical paradox*, American Mathematical Monthly, vol. 45, No. 4, pp. 234–236, abril 1938.

³ <https://es.slideshare.net/sualeh/the-eleven-holes-puzzle>

Sobre el autor:

Nombre: Pedro Alegría

Correo electrónico: pedro.alegria@ehu.eus

Institución: Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea.