



EXPERIENCIAS DOCENTES

INVESTIGACIÓN DEL IMPACTO EN EL AULA DE
MATEMÁTICAS AL UTILIZAR FLIP EDUCATION

MAGIA Y MATEMÁTICAS: MÁS ALLÁ DE LOS TRUCOS

CRÍTICAS

INFORME SOBRE EL LIBRO: "EL ASESINATO DE
PITÁGORAS", MARCOS CHICOT

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

LA CURVATURA MEDIA Y SOPHIE GERMAIN

CURVATURA MEDIA Y RELATIVIDAD GENERAL

CUENTOS MATEMÁTICOS

DIENTES DE SERPIENTE

INVESTIGACIÓN

ESTRUCTURAS EMERGENTES Y ÓRDENES INTERMEDIOS:
PARADIGMAS PARA ENTENDER LA COMPLEJIDAD EN LA
NATURALEZA... Y EN LA VIDA

EVALUACIÓN DE LA INFLUENCIA DEL FACTOR DE FORMA
DE UNA ESTRUCTURA DE NERVIOS CUATRIPARTITOS
BAJO SOLICITACIONES CUASISTÁTICAS

SIMULADOR TÉRMICO PARA SISTEMAS DE
CLIMATIZACIÓN BASADO EN COMPONENTES
POLIMÓRFICOS CONEXIONADOS MEDIANTE GRAFOS

OPTIMIZACIÓN DE RECURSOS Y CALIDAD DE SERVICIO
EN LAS CONSULTAS DE URGENCIAS DE UN CENTRO DE
ATENCIÓN PRIMARIA

JUEGOS MATEMÁTICOS

ENTENDIENDO EL CUADRADO MATEMÁTICO DE
BENJAMIN FRANKLIN

ENTREVISTA A:

FRANCO BAGNOLI:
EL FÍSICO CERCANO



Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen IV, Número 2, Octubre 2014

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC

Foto de portada / Cuadrado Mágico junto a escultura "El beso de Judas" en la Fachada de la Pasión del
Templo Expiatorio de la Sagrada Familia, Barcelona, España.

Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil
Universidad Politécnica de Madrid



Volumen IV, Número 2, ISSN 2174-0410

Coordinación Comité Editorial

Mariló López González
Sagrario Lantarón Sánchez
Javier Rodrigo Hitos
José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Ascensión Moratalla de la Hoz,
Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Rosa María Herrera, Fernando Chamizo Lorente,
Luis Garmendia Salvador, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador,
Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla

1 de octubre de 2014

Índice de Artículos

Editorial del Número 2 (Vol. IV)	1
--	---

Experiencias Docentes

Investigación del impacto en un aula de matemáticas al utilizar flip education	9
<i>Cristina Jordán Lluch, María José Pérez Peñalver y Esther Sanabria Codesal</i>	
Magia y Matemáticas: más allá de los trucos	23
<i>Carlos Pastor Paz y José María De La Torre Maroto</i>	

Historias de Matemáticas

La curvatura media y Sophie Germain	31
<i>Juan Tarrés Freixenet, M^a Carmen Escribano y José Rojo Montijano</i>	
Curvatura media y Relatividad General	47
<i>José Rojo Montijano, M^a Carmen Escribano y Juan Tarrés Freixenet</i>	

Cuentos Matemáticos

Dientes de Serpiente	57
<i>Blanca Martínez Kleiser, Beatriz Pascual Vegas e Irene De La Red García</i>	

Investigación

Estructuras emergentes y órdenes intermedios: paradigmas para entender la complejidad en la naturaleza ... y en la vida	67
<i>Miguel Ángel Martín Martín</i>	
Evaluación de la influencia del factor de forma de una estructura de nervios cuatripartitos bajo solitaciones cuasiestáticas	75
<i>Juan Manuel Ros García, Roberto Alonso González Lezcano y Susana Hormigos Jiménez</i>	
Simulador térmico para sistemas de climatización basado en componentes polimórficos conexionados mediante grafos	91
<i>Juan A. Hernández Ramos y Fernando del Ama Gonzalo</i>	
Optimización de recursos y calidad de servicio en las consultas de urgencias de un centro de atención primaria	105
<i>Sagrario Lantarón Sánchez y Mariló López González</i>	

Juegos Matemáticos

Entendiendo el Cuadrado Matemático de Benjamin Franklin	125
<i>Marco Vinicio Vásquez Bernal</i>	

Críticas

Informe sobre el libro: “El Asesinato de Pitágoras”, Marcos Chicot	157
<i>Equipo Editorial</i>	

Entrevistas

Franco Bagnoli: El físico cercano	163
<i>Rosa María Herrera</i>	

Editorial del Número 2 (Vol. IV)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 001-008, ISSN 2174-0410

Recepción: 8 Ago'14; Aceptación: 25 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Este número de la Revista “Pensamiento Matemático”, como el de octubre de 2012, está dedicado a los artículos más relevantes que fueron presentados en las Jornadas Internacionales “Matemáticas Everywhere”, en este caso, en su tercera edición. Esta edición ha vuelto a celebrarse en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) que tiene su sede en Castro Urdiales, Cantabria (España) y que a la postre se encargó de la financiación de dicho encuentro.

Abstract

This number of “Mathematical Thinking” Journal, as the 2012 october number, is about the more relevant articles presented on the 3rd “Matemáticas Everywhere” International Meeting. This edition has been celebrated once again in the International Center for Mathematical Meetings (in spanish CIEM) which is based in Castro Urdiales, Cantabria (Spain), and that ultimately was responsible for the financing of this meeting.

Introducción

El Grupo de Innovación Educativa “Pensamiento Matemático” y el Grupo de Investigación MAIC “Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil” ambos de la Universidad Politécnica de Madrid, organizan cada dos años las Jornadas Internacionales Matemáticas Everywhere. La pasada segunda edición (junio 2012) así como la tercera (mayo de 2014), se han realizado en el CIEM (Centro Internacional de Encuentros Matemáticos).

La finalidad de estos encuentros se centra en dar a conocer trabajos que relacionan las Matemáticas con otras áreas del conocimiento y que ponen de manifiesto la importancia de las Matemáticas en la sociedad, así como promover el intercambio de experiencias y el diálogo entre profesionales de la investigación y la enseñanza de esta ciencia.

Los objetivos generales son:

- Adentrar a los asistentes en el mundo de las matemáticas y en la importancia y la utilidad de esta ciencia para el desarrollo de la mayoría de los campos tanto científicos como artísticos o de la vida cotidiana.
- Plantear diversas aplicaciones y conexiones de las matemáticas con otras áreas.

Son unas jornadas orientadas principalmente a profesionales de la docencia de las matemáticas, así como a alumnos de carreras técnicas, profesionales y en general, a los aficionados y estudiosos de esta ciencia.

La tercera edición de las Jornadas celebradas los días 15 y 16 de mayo de 2014, ha vuelto a ofrecer una oportunidad de disfrutar de las matemáticas. Contar y poder escuchar curiosidades y aplicaciones de esta ciencia en entornos muchas veces muy alejados de la propia matemática resulta interesante y muy motivador.

Tras cada una de las ediciones, la Revista Pensamiento Matemático dedica alguno de sus números a los trabajos más relevantes que en ellas se han presentado y que mejor se adaptan a la línea de la revista. De esta forma, en este número pueden encontrarse los contenidos de algunas de las ponencias que se defendieron en la tercera edición y que estamos seguros interesarán a los lectores de Pensamiento matemático.

A continuación presentamos brevemente los artículos que componen el presente número en sus diferentes secciones.

Experiencias Docentes

El artículo *“Investigación del impacto en un aula de matemáticas al utilizar flip education”* pone de manifiesto que en el momento que vivimos, los docentes debemos plantearnos cómo el auge y la democratización de las tecnologías de la información pueden contribuir a mejorar el aprendizaje de los alumnos. Una posibilidad es la denominada *flipped classroom* o clase invertida, en la que parte del trabajo que se hacía en clase lo realiza el alumno con antelación utilizando entre otros materiales digitales. Tras exponer brevemente en qué consiste esta metodología y sus antecedentes, comentamos una experiencia llevada a cabo en uno de nuestros grupos, así como los resultados obtenidos y las opiniones de los alumnos al respecto de la metodología aplicada. La experiencia realizada nos indica que la *flipped classroom* presenta ventajas como un aprendizaje más profundo, la adquisición de competencias transversales y la motivación del alumno en el aula, aunque también presenta aspectos que pueden dificultar su implementación, como el trabajo previo y planificación necesaria por parte del profesor y no ser siempre bien aceptada por los estudiantes.

¿Quiénes de ustedes creen que la Tierra es redonda? ¿Y que tres es mayor que dos? Seguro que tienen razón, pero ¿por qué lo creen? El artículo *“Magia y Matemáticas: más allá de los trucos”* presenta las matemáticas como un hermoso sistema humano, arbitrario y artificial, que ha demostrado ser un modelo útil de interpretación de datos para la sociedad. La magia se basa en que el público genere sus propias ideas ante los datos que se les muestran. Para lograr esto es necesario que el público sepa interpretar los datos que se le proporcionan conforme al algoritmo deseado, de acuerdo con el marco conceptual en el que se presentan. Esto dará lugar a una interpretación unívoca de los mismos generando una información.

La información es fruto del proceso ocurrido en la mente del público y no una idea terminada que el ilusionista trate de “comunicar” y mucho menos de “vender”. Esa idea, esa información, es tomada como dato en vez de como información. No se cuestiona, se asume.

La magia es una herramienta muy útil para comprender los conceptos matemáticos y facilitar la forma en la que se representa y se opera con los datos, asumiendo que esa operativa es arbitraria y puede ser sustituida por otra.

Esta separación entre concepto y operativa abre las puertas del aprendizaje significativo frente al operativo y memorístico, y abre también las puertas a la generación de nuevas operativas matemáticas. Es por tanto la magia una herramienta no solo de aprendizaje sino una herramienta de desarrollo matemático.

Historias de Matemáticas

En *“La curvatura media y Sophie Germain”* se lleva a cabo una exposición histórica del concepto de curvatura media de una superficie, la cual se definió, por primera vez, como la semisuma de las curvaturas principales, en las memorias que Sophie Germain presentó a la Academia de Ciencias de París en 1811, 1813 y 1815, en aras a conseguir el premio que convocó esa institución, y que obtuvo Sophie Germain con la última memoria. El estudio de las superficies elásticas lo inició en 1809 a raíz de los experimentos que realizó Chladni en París con placas vibrantes. Sophie Germain fue autodidacta y falleció con 55 años a causa de un cáncer de mama. Consiguió que Lagrange la estimase como matemática y que Gauss, con quien mantuvo mucha correspondencia, la reconociese de gran valía.



Izda: Retrato de Sophie Germain a la edad de 14 años. Drcha: Efigie de Sophie Germain (Colección Granger).

En *“Curvatura media y Relatividad General”* se pone de manifiesto que desde que se definió por primera vez la noción de curvatura media en el siglo XIX, este concepto ha impactado de forma fundamental tanto en la geometría como en la física y en la cosmología matemática.

En este trabajo se estudia la formación de singularidades en el proceso en el que una superficie del espacio se mueve, tomando como velocidad su propio vector de curvatura media. Este flujo sirve para ilustrar la emergencia en cosmología matemática de singularidades como el big-bang y los agujeros negros.

Se resalta, además, el papel que juega la curvatura media en algunas desigualdades habituales de la Relatividad General y su relación con el problema abierto de lograr una descripción cuasi-local del concepto de masa.

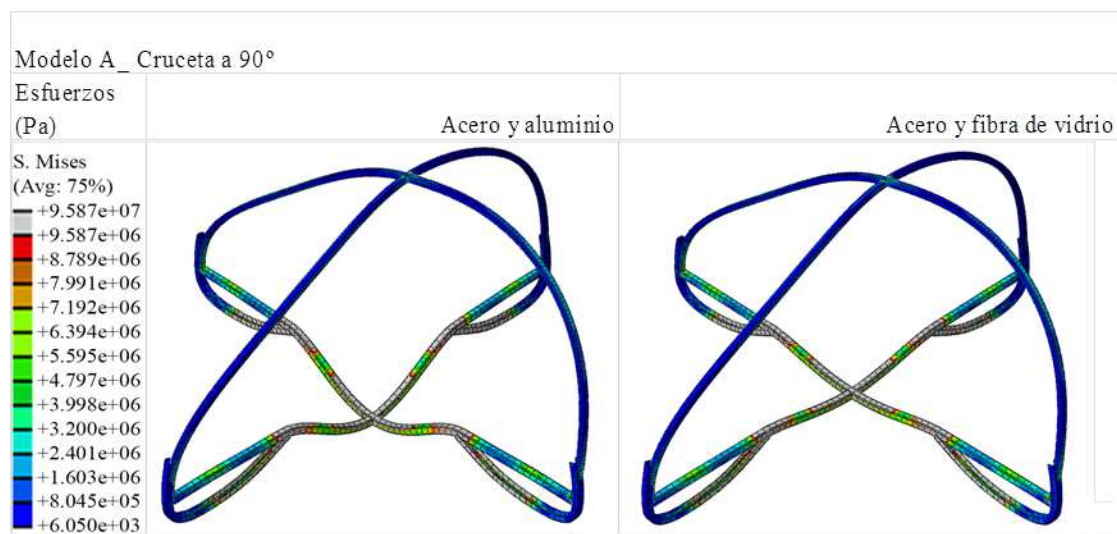
Cuentos Matemáticos

“Dientes de serpiente” es un relato fruto de una experiencia llevada a cabo en la UPM con alumnos de primer curso, en la asignatura de Cálculo. Una historia que tiene como protagonista al inspector de policía Barreda que con ayuda de las Matemáticas conseguirá atrapar al asesino.

Investigación

El artículo *“Estructuras emergentes y órdenes intermedios: paradigmas para entender la complejidad en la naturaleza... y en la vida”* repasa las características más importantes de estructuras complejas que emergen como resultado de procesos dinámicos y se mencionan algunos ejemplos. Se da un ejemplo matemático sencillo que sirve para ilustrar algunos aspectos relevantes sobre la génesis y características de los sistemas complejos.

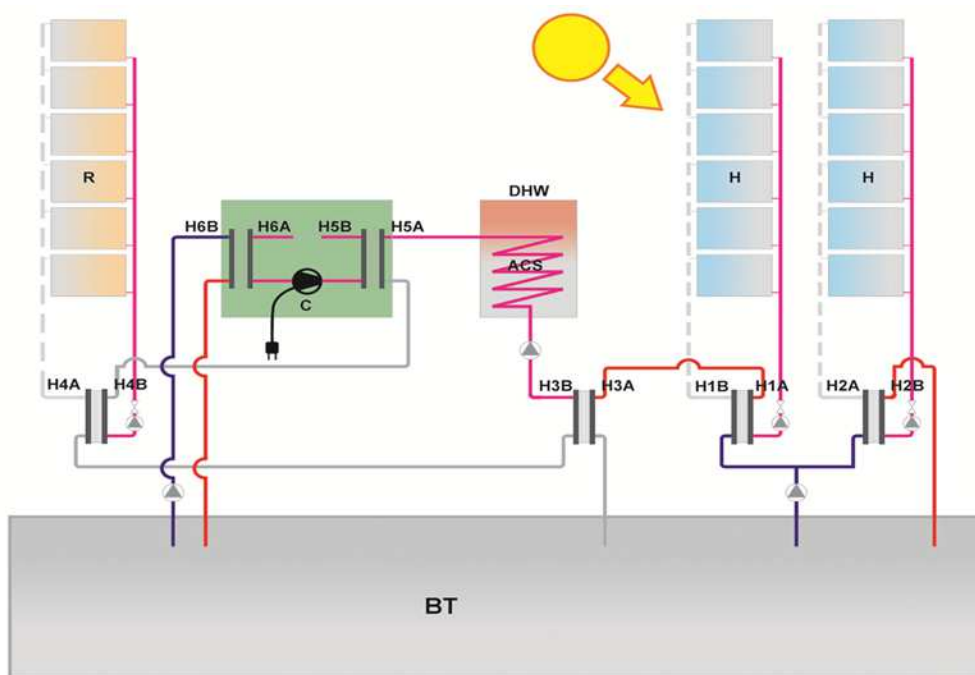
“Evaluación de la influencia del factor de forma de una estructura de nervios cuatripartitos bajo solicitaciones cuasiestáticas” presenta como a partir de un modelo estructural básico, definido por nervios cuatripartitos de curvatura esquinada y bastidor horizontal de base, se realizan diferentes simulaciones numéricas por discretización de puntos, considerando el factor de forma de su geometría, variable. El método aplicado sirve para confirmar que el coeficiente de seguridad resultante de la comparación realizada a los modelos, se optimiza al reducir progresivamente la relación entre la superficie de la envolvente y el volumen encerrado por la estructura espacial. El modelo es sometido a la acción de cargas permanentes y acciones de viento con efecto prolongado en su aplicación cuasiestática. Se realiza un análisis del comportamiento sobre la estructura portante tanto de manera aislada como considerando las cargas totales, determinando por cada configuración de forma las zonas más desfavorables solicitadas y la evaluación de cargas dominantes. Asimismo se consideran en la modelización, los casos materiales para la estructura de acero al carbono en la parte inferior horizontal de la base, adoptando la solución tanto con aleación metálica de aluminio como de fibra de vidrio en la parte superior de los nervios cuatripartitos.



Modelo A. Esfuerzos de Von Mises.

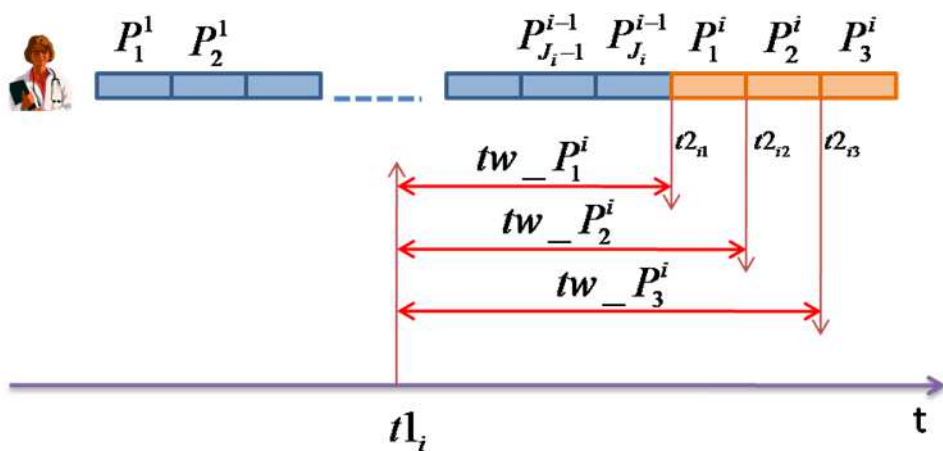
El artículo *“Simulador térmico para sistemas de climatización basado en componentes polimórficos conexiónados mediante grafos”* pone de manifiesto que el consumo energético de las edificaciones representa el 40 % del consumo energético en la Unión Europea. El programa Horizon 2020 promueve el diseño y construcción de edificaciones que no consuman energía. El Departamento de Energía de los EEUU [1] lleva desarrollando desde hace muchos años el EnergyPlus: un código de simulación que permite simular el consumo energético de sistemas de climatización muy complejos. Sin embargo, el programa no contempla elementos como ventanas activas con agua. En otras ocasiones, los modelos matemáticos no se ajustan a la realidad. Todas estas razones hacen necesario desarrollar un software paralelo para la evaluación mediante la simulación de sistemas energéticos. El objetivo de la herramienta de simulación es la exploración y optimiza-

ción de soluciones. El esfuerzo de codificación de todas esas configuraciones, incluso en el caso del EnergyPlus, es muy grande. El presente trabajo consiste en el desarrollo de un código de simulación basado en abstracciones definidas como componentes vinculadas entre sí mediante grafos. Una vez realizado el esfuerzo de modelización de cada una de las componentes del sistema, la simulación energética de un esquema de principio específico requiere un esfuerzo mínimo. La simulación se crea a partir de una lista de componentes o nodos y de una lista de arcos que vinculan de manera automática los diferentes componentes.



Esquema de principio de la climatización de la vivienda.

En “Optimización de recursos y calidad de servicio en las consultas de urgencias de un centro de atención primaria” pone de manifiesto como los servicios de urgencia hospitalarios reciben una proporción no despreciable de pacientes que deberían haber sido atendidos en los servicios de



Médico ocupado. Posicionamiento de pacientes

atención primaria. Planificar los servicios de urgencias de atención primaria para que mejoren su calidad y sean atractivos para los pacientes puede descongestionar las urgencias hospitalarias incidiendo de manera integral en todo el servicio de urgencias sanitario. El tiempo de espera reducido es el principal factor que los usuarios identifican con la calidad del servicio. En este artículo se analiza el problema desde un punto de vista matemático e informático diseñando un software que permite obtener la asignación de facultativos a un servicio de urgencias de atención primaria cumpliendo el objetivo de no sobrepasar un tiempo de espera prefijado optimizando además el consumo de recursos.

Juegos Matemáticos

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

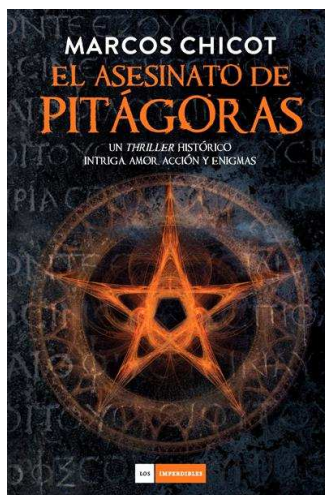
Copia del Cuadrado Matemático 8×8 de Benjamin Franklin.

El objetivo de “*Entendiendo el Cuadrado Matemático de Benjamín Franklin*”)” consiste fundamentalmente en entender cómo Benjamín Franklin, construyó un arreglo de los números enteros, del 1 al 64, logrando que en dicha construcción se presenten muchas características curiosas que han hecho de este arreglo un objeto de estudio y de anécdota, ya que el mismo es un tributo a la especial naturaleza de los números.

En este artículo se desentraña cómo fue posible esta construcción, para luego utilizar lo descubierto y, con un proceso debidamente sistematizado, edificar estructuras mayores que, de igual forma, se sujetan a las características planteadas en el documento original, y en muchos casos las superan con otras igual de curiosas.

Críticas

“*Informe sobre el libro: “El Asesinato de Pitágoras”, Marcos Chicot*” presenta una reseña de la novela “El asesinato de Pitágoras” de Marcos Chicot, novela finalista al premio planeta. Un



Izqda: Portada del Libro. Drcha: Marcos con portada en e-book.

texto donde historia y ficción se alían para ofrecer un paseo por la Antigua Grecia y el mundo de los pitagóricos. La novela es una combinación de intriga, romance y acción.

Entrevistas

“Franco Bagnoli: El físico cercano” es una entrevista que presenta la labor de este compañero italiano, que desarrolla su actividad científica de investigador, profesor y divulgador con buen humor, inteligencia y eficacia y con un entusiasmo que contagia interés a todo aquel que tiene la fortuna de acercarse a él. Sabe combinar el rigor científico con la claridad expositiva y la sencillez, y su atenta humanidad acorta distancias. Su admirable talento para hacer que las cosas más complejas parezcan asequibles atrae a público de todas las edades. Estas notas pretenden ser un extracto de su excepcional personalidad.



Franco Bagnoli.



Dice el refrán que *“De buen nacido es ser agradecido”*, por ello no queremos cerrar esta breve introducción sin dar las gracias a todos aquellos a los que logramos llegar a través de nuestra publicación, en especial a aquellos fervientes seguidores de fuera de España, que motivan con más razón nuestra *“internacionalización”*, y que cada vez de forma más asidua se animan a colaborar con nuestro proyecto.

“Incluso la gente que afirma que no podemos hacer nada para cambiar nuestro destino, mira antes de cruzar la calle.”

Stephen Hawking

“Reunirse en equipo es el principio. Mantenerse en equipo es el progreso. Trabajar en equipo asegura el éxito”

Henry Ford

“El que quiere hacer algo conseguirá un medio, el que no, una excusa.”

Stephen Dolley

El Comité Editorial

Experiencias Docentes

Investigación del impacto en un aula de matemáticas al utilizar flip education

Impact research in a mathematics classroom using flip education

Cristina Jordán Lluch, María José Pérez Peñalver¹ y Esther Sanabria Codesal²

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 009-022, ISSN 2174-0410
Recepción: 14 Abr'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

En el momento que vivimos, los docentes debemos plantearnos cómo el auge y la democratización de las tecnologías de la información pueden contribuir a mejorar el aprendizaje de los alumnos. Una posibilidad es la denominada *flipped classroom* o clase invertida, en la que parte del trabajo que se hacía en clase lo realiza el alumno con antelación utilizando entre otros materiales digitales. Tras exponer brevemente en que consiste esta metodología y sus antecedentes, comentamos una experiencia llevada a cabo en uno de nuestros grupos, así como los resultados obtenidos y las opiniones de los alumnos al respecto de la metodología aplicada. La experiencia realizada nos indica que la *flipped classroom* presenta ventajas como un aprendizaje más profundo, la adquisición de competencias transversales y la motivación del alumno en el aula, aunque también presenta aspectos que pueden dificultar su implementación, como el trabajo previo y planificación necesaria por parte del profesor y no ser siempre bien aceptada por los estudiantes.

Palabras Clave: Flipped classroom, Clase invertida, TICs.

Abstract

At the time we live in, teachers must consider how the development and the democratization of information technologies can help improve students' learning. One option is the flipped classroom or reverse class, in which part of the work done in class is done by the student in advance using digital materials among others. After explaining briefly in what this methodology consists of and its background, we discuss our experience in one of our groups and the results and the opinions of the students about the applied methodology. This experience tells us that it has advantages in terms of a deeper learning,

¹ Pertenece al grupo IEMA

² Pertenece al grupo EITACURTE

to the acquisition of generic skills and student motivation in the classroom but it also has aspects that may hinder its implementation as it requires a lot of preparatory work and planning by teacher and it is not always well accepted by students.

Keywords: Flipped classroom, Inverted class, TICs.

1. Introducción

El auge y la democratización de las nuevas tecnologías de la información (TICs) en el momento que vivimos, nos llevan a replantear nuestra labor como docentes y analizar en qué medida es conveniente introducirlas en nuestras clases, para mejorar la comunicación con nuestros alumnos y favorecer así un aprendizaje significativo.

Sin rechazar métodos más tradicionales como la clase magistral, podemos preguntarnos si no sería más provechoso dedicar el tiempo de la clase presencial a actividades que involucren activamente al alumno, con el fin de que nuestra aportación no se reduzca a una mera transmisión de conocimientos. Sobre todo porque actualmente esta transmisión puede hacerse utilizando herramientas tecnológicas al alcance de todos, como vídeos, foros de discusión u otros materiales interactivos. De esta manera estaremos trabajando en el aula niveles más altos en la Taxonomía de Bloom, como el análisis o la síntesis, que requieren mayor debate y discusión, por lo que la interacción con el profesor y el resto de compañeros se vuelve más necesaria.

Estas reflexiones nos conducen a modificar nuestra forma de dar clase, a plantearnos que quizás sea preferible que la primera toma de contacto del alumnos con los contenidos de la asignatura se realice fuera del aula de manera autónoma y adaptada a su nivel, es decir asignándole tareas previas a la clase presencial, de manera que el tiempo en el aula sea utilizado de forma más activa. Este planteamiento en sí no es una novedad, pero la accesibilidad a las TICs aumenta enormemente tanto el tipo de materiales disponibles para los alumnos como la posibilidad, por parte del profesor, de una evaluación personalizada de los estudiantes.

Así nace la denominada clase invertida, donde los acontecimientos que han tenido lugar tradicionalmente dentro de clase se llevan a cabo ahora fuera del aula (inverted classroom, Lage et. al. 2000). Esta metodología es posteriormente citada en la literatura como *flipped classroom*, donde vídeos y lecciones interactivas creados por los maestros y a los que los alumnos tienen acceso antes de la clase, permiten convertir el aula en un lugar para resolver problemas, avanzar conceptos, y participar en el aprendizaje colaborativo (Bergmann y Sams 2012, Tucker 2012). Estas propuestas docentes son una evolución de la categoría de métodos docentes conocidos como peer instruction (Crouch y Mazur, 2001) y just-in-time teaching (Novak et. al. 1999).

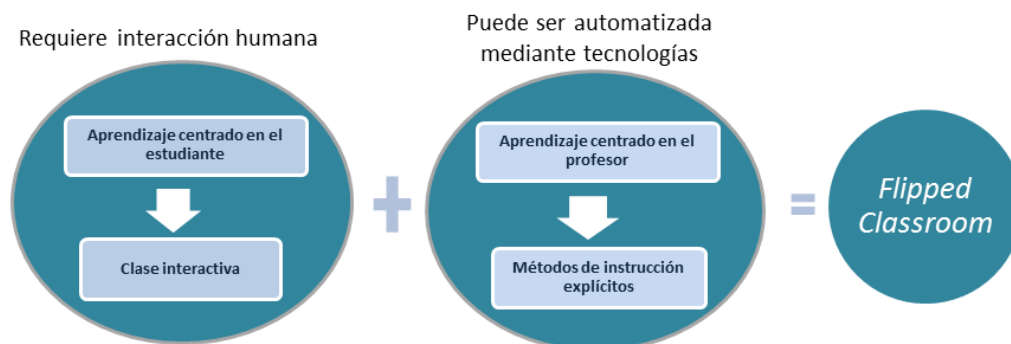


Figura 1. *Flipped Classroom* (basado en Bishop y Verleger, 2013)

De esta forma, los roles de alumno y profesor cambian. La adquisición de la información la realiza ahora el alumno de forma autónoma y a su ritmo, a partir de los materiales docentes propuestos. La labor del profesor consiste por un lado en diseñar actividades, tanto para el estudio previo como para ser realizadas en clase utilizando diferentes técnicas que fomenten el aprendizaje activo y cooperativo de los alumnos y por otro lado en convertirse en facilitador y conductor del proceso de enseñanza-aprendizaje. De esta manera, se pone en valor la actividad del profesor con los alumnos en el aula pues las competencias genéricas y específicas, que aquí se trabajan de forma conjunta, difícilmente se pueden alcanzar en un contexto virtual.

Análisis realizados sobre *flipped classroom* (Bishop y Verleger, 2013) muestran que, en general, los estudiantes están más motivados para ir a clase y sus opiniones sobre esta metodología tienden a ser positivas, aunque invariablemente unos pocos son fuertemente reticentes al cambio, lo cual puede ser debido a que sus métodos educativos anteriores han sido completamente distintos.

Como cualquier otra metodología la clase invertida no es la panacea de los métodos de enseñanza, siendo necesario ajustar su aplicación a nuestros propósitos de aprendizaje, teniendo presentes sus inconvenientes. Por un lado, la generación de materiales de apoyo es costosa y requiere una gran dedicación. Concretamente los vídeos, cuya grabación está siendo fomentada por un gran número de universidades, deben tener unos estándares de calidad, ser cortos y servir de apoyo a un objetivo determinado, por lo que para que sean considerados buenos materiales, requieren mucho tiempo de realización. Por otro lado, los estudiantes se pueden sentir un poco abandonados a su suerte si el profesor no logra engancharlos en el tiempo de clase. Por ello, los profesores deben recabar suficientes datos para realizar una buena evaluación formativa y convencer así a sus estudiantes que están aprendiendo de manera óptima (Talbert, 2012; Tucker, 2012; Miller, 2012).

Algunos profesores de matemáticas han invertido sus clases o partes de ellas y han estudiado los resultados y las percepciones de sus estudiantes. En cuanto a exámenes finales, los que han recibido clase tradicional frente a los que han recibido clase invertida muestran similares resultados (Love et al. 2013). Los estudiantes piensan que es efectivo aprender nuevas habilidades dentro de las matemáticas a través de vídeos (Talbert, 2012; McGivney-Burelle y Fei Xue 2013), se sienten más a gusto y prefieren esta metodología (Love et al. 2013; McGivney-Burelle y Fei Xue 2013) y, además, muestran una mejor percepción hacia la utilidad de las matemáticas en sus disciplinas que los estudiantes de clases tradicionales (Love et al.

2013). En cualquier caso, es necesario seguir analizando este tema sobre el que hay muy pocos estudios hasta la fecha.

En este camino hacia la mejor utilización de las nuevas tecnologías para mejorar el aprendizaje, ha nacido la gamificación de la enseñanza, que es la aplicación de metáforas de juego para tareas del aprendizaje con el objetivo de mejorar la motivación y el compromiso de las personas implicadas en el proceso de aprendizaje (Lee y Hammer, 2011).

Un paso más radical, en lo que a la utilización de la red para la enseñanza se refiere, la constituyen los Open Course Wares (OCW) o los Massive Open Online Courses (MOOCs), donde todo el proceso de enseñanza-aprendizaje se hace en línea (Pappano, 2012; Grossman 2013).

No debemos olvidarnos tampoco del componente económico que subyace en la propuesta de las universidades para la elaboración de materiales on-line o de este tipo de cursos MOOC. Con el aprendizaje en línea se pueden reducir los costes considerablemente sin que haya una merma en la calidad del aprendizaje (Twigg, 2003).

2. Educación Inversa en Matemática Discreta

La Matemática Discreta es una materia que aparece en los diferentes planes de estudio que se han ido sucediendo en la Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica (ETSINF) de la Universitat Politècnica de València (UPV) desde su creación en 1982.

El contenido y enfoque de esta materia ha evolucionado mucho a lo largo de los años. Por un lado, cada nuevo plan de estudios ha supuesto un importante recorte en el número de créditos asignado a ésta y por otro el desarrollo de las nuevas tecnologías ha conducido y permitido cambiar el planteamiento y los métodos de aprendizaje.

Debemos tener en cuenta que las matemáticas son siempre vistas como mínimo con recelo por la mayoría de nuestros estudiantes y que el enfoque de la titulación que se imparte en nuestra escuela es más práctico que teórico, lo que no favorece la percepción de su utilidad por parte de los alumnos. Por ello, cuando en el año 2007 la UPV puso en marcha un proyecto: *Docencia en red* para fomentar la docencia con apoyo de, entre otros materiales digitales, vídeos llamados *Polimedias* (Turró et al., 2010), nos pareció un método prometedor y atractivo para facilitar el aprendizaje de nuestros alumnos, siendo utilizados en un primer momento como refuerzo de las clases presenciales (Jordán, 2009).

En el actual plan de estudios, la asignatura Matemática Discreta tiene asignados 6 créditos de los que 1.5 corresponden a prácticas de laboratorio. Utilizamos metodologías activas así como evaluación continua.

En la parte teórica de la asignatura nos hemos decantado por el método de la lección magistral intercalando actividades de otro tipo. Señalar que no entendemos ésta como una conferencia, puesto que animamos a los estudiantes a participar activamente intercalando preguntas y dándoles libertad para que, en cualquier momento, puedan interrumpir pidiendo alguna aclaración o realizando alguna sugerencia.

En el laboratorio estudiamos teoría de grafos, introduciendo éstos como un método para la resolución de muy diferentes problemas. El objetivo es enfocar esta parte de la asignatura hacia problemas de modelización, proceso que relaciona abstracción y realidad y al que los

alumnos no están acostumbrados, resultándoles por ello especialmente complicado (Jordán y Sanabria, 2013; Jordán et. al, 2013). Aun así consideramos que la formación en este aspecto es completamente necesaria para un ingeniero.



Figura 2. Imagen de un vídeo Polimedia.

La teoría de grafos necesita la introducción de mucha terminología sencilla de comprender, que expuesta en clase puede resultar tediosa, por lo que hemos escogido como metodología en este caso la educación inversa.

Empezamos a aproximarnos a esta metodología en el curso académico 2011-12, en el que de forma esporádica indicábamos a los alumnos que visualizaran algunos de los Polimedias antes de asistir a clase.

El proceso de la educación inversa consiste en términos generales en que la adquisición de conocimientos la realiza el alumno de forma autónoma, a partir de material elaborado por el profesor previamente a la sesión presencial, mientras que la labor del profesor se centra en fomentar aprendizaje activo y cooperativo de los alumnos.

En nuestro caso nos hemos decantado por la utilización de vídeos Polimedia a la hora de aplicar la educación inversa. Se podría hacer también con otro tipo de materiales, por ejemplo con OCWs (Jordán y Torregrosa, 2010; Jordán, 2010; Jordán, 2014). Consideramos que el fomentar la correcta lectura-escritura del lenguaje científico es también necesario, sin embargo, dada la idiosincrasia del alumno medio actual, los vídeos le son más cercanos que cualquier texto escrito, por claro e iluminador que éste sea. En el caso de utilizar material escrito, aconsejamos por tanto acompañarlo con vídeos que hagan al estudiante más asequible el acercamiento a la materia, dado que si encuentra complicada la lectura de los textos propuestos, algunos alumnos no realizarán el trabajo previo, y esto conllevaría de forma natural el fracaso de la metodología.

Dado que los alumnos deben realizar un trabajo previo a la sesión de aula, es necesario que dispongan con suficiente antelación de un listado del trabajo a preparar, explicado de forma clara y detallada. Por ello, introducimos en nuestra asignatura la *guía didáctica*, documento en el que se refleja la tarea del alumno para la próxima sesión así como cualquier otro comentario que el profesor considere oportuno incluir (ver Figura 3).

En nuestro caso los alumnos visualizan algunos Polimedias, al llegar a clase se resuelven preguntas básicas referentes a los conceptos estudiados, a las que llamamos coloquialmente

“preguntas flip”, para comprobar su correcta asimilación. Estas preguntas, incluyen cuestiones sencillas, relacionadas directamente con definiciones o enunciados, así como preguntas que ponen de manifiesto aspectos que por experiencia sabemos que pasan desapercibidos en una primera lectura, o se prestan a confusión, malas interpretaciones, etc.

A continuación, resolvemos ejemplos básicos de modelización en los que se aplican los conceptos estudiados.

Se completa la clase con ampliación de la teoría y resolución de problemas más avanzados, en los que se cuenta con la participación activa del alumnado.

SESION 4 de Laboratorio	
<i>Trabajo previo en casa</i>	
<i>Repasar</i>	Lo visto en la clase anterior
<i>Visualizar</i>	Repasar en los videos la materia referente a conexión, orientabilidad y aristas de corte
<i>Revisar</i>	Los ejercicios del fichero Cuestiones_modelizacion_Sem_2_2013_2014 desde el punto de vista de la conexión (i.e., estableciendo relaciones con la conexión) y utilizando el programa SWGrafos
<i>Resolver</i>	los apartados que faltan de Ejercicios flip 2013_2014 Sesión 3 y los de Cuestiones_modelización_2013_2014_Sesión_3
NOTA. En la próxima sesión no habrá ejercicios flip ni cuestionarios nuevos. Revisaremos las nociones de orientabilidad y aristas de corte que habréis estudiado y resolveremos lo propuesto en semanas anteriores. Traedlos resueltos para que le podamos sacar partido a la clase y llevéis la materia al día. En la sesión 5 habrá un pequeño control en aula.	

Figura 3. Ejemplo de guía didáctica.

Con esta metodología conseguimos profundizar en la teoría de grafos de una manera más aplicada que con la clase tradicional.

El éxito de la educación inversa depende en nuestra opinión de muchos factores, destacamos a continuación algunos aspectos de esta metodología que afectan tanto al profesor como al alumno.

2.1 Aspectos relacionados con el profesor

A continuación recogemos algunos puntos que consideramos importante tener en cuenta a la hora de implantar esta nueva metodología.

Trabajo previo por parte del profesor

Si nos decimos a aplicar esta metodología es importante que tengamos en cuenta el esfuerzo que va a suponer generar el material docente adecuado, así como las guías didácticas necesarias para llevar a cabo su implementación.

Nuestra metodología se apoya principalmente en vídeos, siendo por tanto esta problemática la que mejor conocemos. Los vídeos deben planificarse con mucho cuidado puesto que el objetivo es que el alumno entienda la materia que se expone sin necesidad de acudir a tutorías lo que supone una exquisita coherencia en el contenido: transparencias claras y agradables con numerosos ejemplos que clarifiquen los conceptos introducidos.

Los expertos en educación recomiendan, para una mejor comprensión, dividir los temas en bloques de contenidos que se puedan exponer en aproximadamente diez minutos, lo que en ocasiones resulta complicado.

En relación a la puesta en escena, cabe destacar la importancia de la claridad en la exposición, el completar verbal y gestualmente el contenido, intentar presentar el tema de forma agradable, utilizando una entonación y énfasis adecuado. Todo ello contribuirá además a evitar en lo posible la deserción por aburrimiento.

Por otra parte, la grabación conlleva problemas técnicos de diversa índole que hacen que el tiempo dedicado a grabar 10 minutos pueda multiplicarse.

Planificación de la estructura de las clases

A pesar de que las sesiones de aula estén separadas en el tiempo, no es conveniente saturar a los alumnos con la visualización de muchos vídeos para la siguiente sesión, aunque éstos sean cortos. La experiencia nos muestra que los visualizan más rápido y con menos detalle. En consecuencia debemos tener en cuenta que:

- a) Es preferible la visualización de 2 o 3 vídeos entre cada par de sesiones, por lo que sería deseable que las sesiones presenciales fueran más cortas y separadas en el tiempo. En general la organización del horario no depende de nosotros sino de la escuela por lo que en la planificación de la asignatura deberíamos tenerlo en cuenta.
- b) Dado el carácter un tanto “disperso” de los alumnos, especialmente en los grupos de primero, pensamos que es preferible utilizar la enseñanza inversa en la introducción de puntos nuevos dentro de cada tema, ya que para los alumnos resultan más fáciles de estudiar fuera del aula y, por otra parte, podemos dedicar el tiempo presencial a asentar de manera más profunda los fundamentos del tema a base de preguntas-respuestas fomentando así la interacción con el resto del grupo.
- c) La estructura de la clase debe ser variada, no podemos empezar con educación inversa, lo que supone para todos una novedad, y luego seguir con una clase tradicional. Lo ideal es ampliar la teoría que los alumnos han trabajado fuera de clase intercalándola con ejemplos y ejercicios. En esta línea, se hace imprescindible prestar especial atención al diseño de las actividades que ocuparan el tiempo de la clase. En el caso concreto de la teoría de grafos, tras la resolución de las “preguntas flip” (preguntas realizadas por el profesor para garantizar la correcta comprensión de los conceptos introducidos, a través de los vídeos, por parte de los alumnos) pasaríamos a la aplicación de la materia estudiada a la resolución de problemas sencillos de modelización. Seguiríamos con ampliación de la teoría e iríamos intercalando ejercicios de modelización, unos hechos por el profesor y otros por los alumnos, con el objetivo de dar dinamismo a la clase, estimulando en todo momento la participación activa. Esto contribuye a crear un ambiente más agradable de trabajo. Observamos que esta planificación se vuelve más difícil al tener que coordinarla con los vídeos de que disponemos. Mediante los vídeos el alumno puede repasar o reforzar fuera del aula la materia analizada. Este segundo contacto resultará sin duda mucho más provechoso.

Atención a los alumnos

El profesor debe estar muy alerta a la participación de cada uno de los alumnos, por lo que si el tamaño de grupo es grande dificulta mucho la implementación de esta metodología. El profesor debe hacer preguntas a todos y cada uno de los alumnos, para conseguir que ninguno pueda esconderse en el mutismo. El saber que va a ser objeto de preguntas será un acicate para estudiar antes de la sesión la materia señalada. Otra opción será puntuar la actividad de cada uno de ellos en las diferentes sesiones, obteniendo así notas de clase que serán consideradas en la evaluación continua.

2.2 Aspectos relacionados con el alumno

Estamos exigiendo una colaboración activa y continua al alumno, lo que no siempre es fácil de conseguir, ya sea por factores personales como los diferentes grados de exigencia, las expectativas u objetivos a alcanzar, la resistencia al cambio, etc., o por factores externos. Esta colaboración redundará en resultados de aprendizaje más significativos.

Factores externos

Según nuestra experiencia los más habituales son la carga de trabajo del resto de asignaturas o la presión de tener un examen próximo, lo que hace que, en virtud del dicho “primero lo urgente, después lo importante” la atención prestada a nuestra materia fuera del aula sea menor de lo necesario. Obviamente éste es un problema con el que todas las metodologías se encuentran, pero que en el caso de la educación inversa resulta más crítico dado que el alumno no ha realizado la primera toma de contacto con los conceptos que van a ser analizados en el aula, por lo que en este caso la interacción es nula y no podemos avanzar, lo que nos obliga a seguir una metodología tradicional para no perder así el interés de la mayoría de nuestros alumnos.

Rechazo a la innovación

Generalmente, las innovaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje van a tener al principio de su aplicación un cierto rechazo por parte de los alumnos. Éste puede ser originado tanto por sus características personales como por la materia, y quizás en mayor medida, por el estilo de aprendizaje predominante desde su infancia, principalmente si la metodología, sea la educación inversa u otra, no es la habitual.

Mejora de los resultados de aprendizaje

Es importante explicar a los alumnos en qué consiste la metodología, hacer hincapié en que si participan el resultado será más satisfactorio, resaltar que el trabajo realizado durante el curso resultará más productivo. Además, es conveniente recordarles que la educación inversa permite mayor interacción profesor-alumno, alumno-alumno, más tiempo para trabajar la materia en el aula y resolver cuestiones que la enseñanza tradicional, lo que consigue afianzar de manera más significativa las competencias de la materia.

3. Opiniones de los alumnos

Cada vez que introducimos una innovación docente en nuestras aulas es conveniente evaluar los resultados obtenidos como consecuencia de su aplicación y no dejarnos llevar sólo por nuestra percepción del éxito obtenido.

En el caso de la educación inversa, a fin de analizar la opinión de los alumnos que durante el presente curso académico 2013-2014 han cursado la asignatura Matemática Discreta (MAD) en el grupo D, donde hemos aplicado la metodología anteriormente descrita, hemos planteado un cuestionario on-line mediante Google Docs. Mediante este formulario que fue realizado por los alumnos de forma voluntaria, una vez publicadas las notas, hemos obtenido un total de 20 respuestas de las 50 posibles.

Las preguntas orientadas a conocer la opinión que los alumnos tienen de la metodología aplicada en la asignatura han sido planteadas para poder medir las respuestas con la técnica de Escala de Likert, ya que según J. C Nunnally este tipo de escalas sumativas constituyen el mejor método para el escalamiento de actitudes verbalizadas (1987).

Para ello hemos pedido a los alumnos que puntúen en qué medida les han resultado útiles los diversos elementos utilizados en la *flip education*, según el baremo 1=Nada, 2=Poco, 3=Regular, 4=Bastante y 5=Mucho, así como si prefieren esta modalidad al método clásico.

3.1 Análisis de los resultados

En este apartado analizamos las opiniones que nuestros alumnos manifiestan en relación a algunos aspectos de la metodología empleada en la asignatura.

Respecto a la pregunta sobre si prefieren una enseñanza más tradicional o la *flip education*, los alumnos eligieron en un 59% el método clásico frente a un 41% que se decantaron por la metodología utilizada, como vemos gráficamente en la Figura 4.

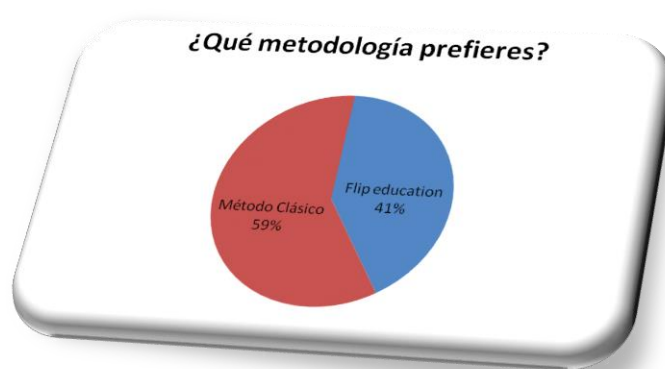


Figura 4. Porcentajes de las preferencias en el tipo de metodología

Si analizamos esta pregunta considerando la procedencia de los alumnos, es decir discriminando si su forma de acceso a la titulación de Ingeniería Informática ha sido a través de bachillerato o de ciclos formativos, obtenemos que el porcentaje en que los alumnos de

secundaria se decantan por cada una de las metodologías es muy similar, siendo el de la *flip education* ligeramente superior, con un 53% frente al 47% que opta por el método tradicional.

Los alumnos que han cursado ciclos prefieren claramente, en más de un 85%, la metodología clásica, como observamos en la Figura 5.

En el caso de considerar la preferencia de los alumnos por el tipo de metodología utilizada en la clase, atendiendo a la nota obtenida en MAD, nos centramos en los resultados de los que han superado la asignatura puesto que corresponden a la mayoría de la muestra obtenida.

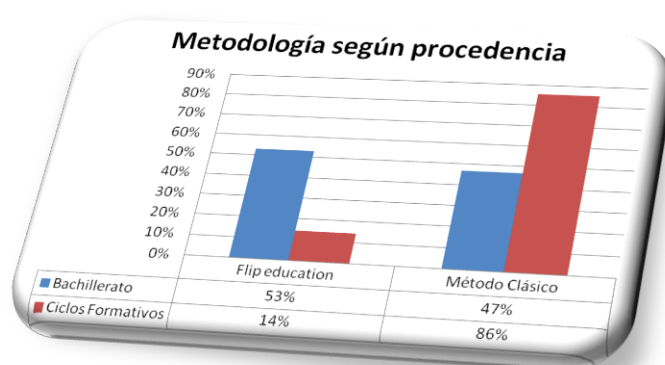


Figura 5. Porcentajes de las preferencias según los estudios previos

Los alumnos cuya nota está en el intervalo de 7-7.9 son el grupo que mayoritariamente se decanta por la *flip education*, en un porcentaje del 67%. Cuanto más nos alejamos, por exceso o por defecto, de este intervalo más baja este porcentaje, siendo del 50% tanto en la franja de 6-6.9, como en la de 8-8.9, decreciendo al 25% en las franjas de 5-5.9 y de 9-10, como podemos ver en la Figura 6.

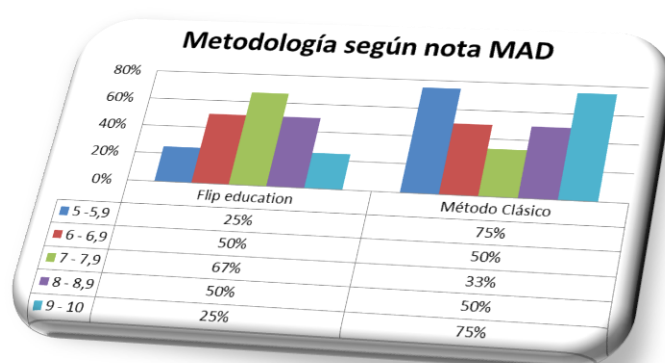


Figura 6. Porcentajes de las preferencias en según la nota final de la asignatura

Sin embargo, a pesar de esta aparente indiferencia general ante la *flip education*, las opiniones sobre los principales elementos implicados en ella, como las guías didácticas y los Polimedias (vídeos), son bastante favorables, siendo más frecuentes las respuestas positivas de que los alumnos los utilizan mucho o bastante que las negativas poco o nada, como observamos en las Figuras 7 y 8.



Figura 7. Porcentajes de relativos a la utilización de Polimedias



Figura 8. Porcentajes relativos a la utilización de guías didácticas

Por último, es interesante resaltar que a una gran mayoría de los alumnos le gusta la metodología utilizada y consideran que el ambiente de la clase es agradable (Figuras 9 y 10).

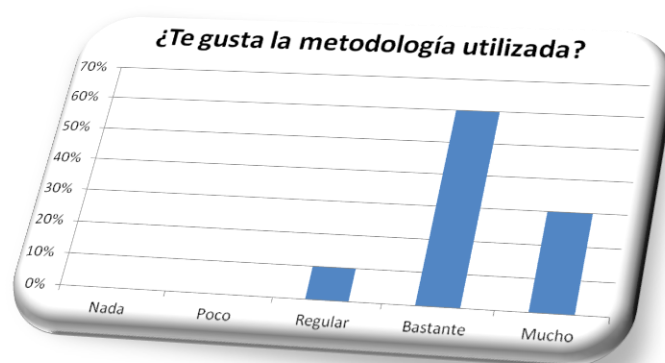


Figura 9. Porcentajes relativos a la metodología utilizada en el aula



Figura 10. Porcentajes relativos al ambiente en el aula

En general, también encuentran que el ritmo de la clase ha sido adecuado (Figura 11).

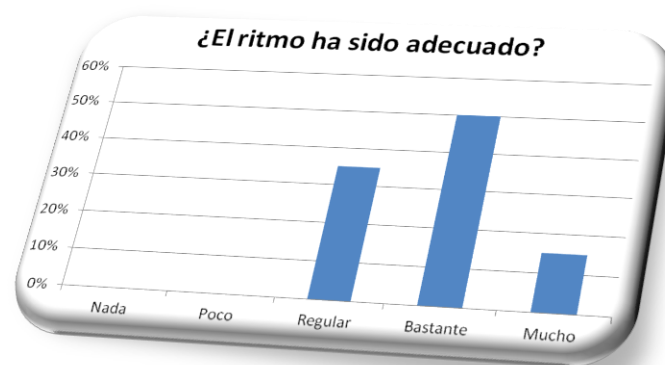


Figura 11. Porcentajes relativos al ritmo de la clase.

4. Conclusiones

A pesar de que los alumnos no han manifestado abiertamente su preferencia por la metodología de clase invertida, si encuentran atractiva la experiencia en general, lo que nos anima a continuar en esta línea de trabajo. Observamos que nuestros resultados coinciden en términos generales con los estudios realizados por otros autores (Bishop y Verleger, 2013)

El éxito de la educación inversa depende de muchos factores, principalmente porque se exige del alumno una colaboración directa y continua, que no siempre es fácil de conseguir. Por ello, es importante motivarlos explicándoles claramente las ventajas que esta metodología ofrece, poniendo de manifiesto que, si participan, el resultado será más satisfactorio y el trabajo realizado durante el curso resultará más productivo.

Por otro lado, si nos decidimos a aplicar esta metodología debemos tener en cuenta el esfuerzo que supondrá generar el material docente adecuado, las guías didácticas necesarias

para llevar a cabo su implementación, así como la planificación exhaustiva de las clases presenciales y no presenciales y el seguimiento adecuado de la evolución de los alumnos.

Referencias

- [1] BERGMANN, J. AND SAMS, A. *Flip Your Classroom: Talk to Every Student in Every Class Every Day*. International Society for Technology in Education, 2012.
- [2] BISHOP, J. L. & VERLEGER, M. A. *The flipped classroom: A survey of the research*. In ASEE National Conference Proceedings, Atlanta, GA, 2013.
- [3] CROUCH, C. H., & MAZUR, E., *Peer instruction: Ten years of experience and results*. American Journal of Physics, 69(9), pp. 970-977, 2001.
- [4] GROSSMAN, D., *Massive open online courses - threat or opportunity?* BBC News, 1 de Julio, 2013, <http://www.bbc.co.uk/news/education-23069542>
- [5] JORDÁN, C., *Utilización correcta e incorrecta de los ficheros Polimedia*, Valencia, Actas de la JIDINF'09, 2009.
- [6] JORDÁN, C. *Materiales docentes de la asignatura Estructuras Matemáticas para la Informática II*, 2014, http://www.upv.es/pls/oalu/sic_asi.Sak_Recurso_ocw?P_OCW=E&P_ASI=6024&P_CACA=2010&P_IDIOMA=c&P_VISTA=MSE
- [7] JORDÁN LLUCH, C. Y SANABRIA-CODESAL, E., *Grafos hamiltonianos en el diseño de viajes*, Modelling in Science Education and Learning, 6, pp. 133-143, 2013.
- [8] JORDÁN LLUCH, C., SANABRIA-CODESAL, E., PÉREZ-PENALVER, M.J., *Estrategias matemáticas en la ONU*. Pensamiento Matemático, 2(2), pp. 55-66, 2012.
- [9] JORDÁN, C., TORREGROSA, J.R., *Docencia en red: un paso adelante en el uso de nuevas tecnologías*, Proc. de las VI Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria, p.726, Alicante, 2008a.
- [10] JORDÁN, C., TORREGROSA, J.R., *Los objetos de aprendizaje y el nuevo contexto educativo*, Actas del V Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria, Valencia, 2008b.
- [11] JORDÁN, C., TORREGROSA, J.R., *Las OCW en el nuevo contexto educativo*, Actas de las VIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria, Alicante, 2010.
- [12] LAGE, M. J., PLATT, G. J., & TREGLIA, M. *Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment*. The Journal of Economic Education, 31(1), 30-43, 2000.

- [13] LEE, J. J., & HAMMER, J. *Gamification in education: What, how, why bother?* Academic Exchange Quarterly, 15(2), pp. 146, 2011.
- [14] LOVE, B., HODGE, A., GRANDGENETT, N. AND SWIFT, A. W. *Student learning and perceptions in a flipped linear algebra course*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(3), pp. 317-324, 2014, <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.822582>
- [15] MCGIVNEY-BURELLE, J., & XUE, F. *Flipping Calculus*. PRIMUS, 23(5), pp. 477-486, 2013.
- [16] MILLER, A. *Five best practices for the flipped classroom*. Retrieved April, 16, 2012.
- [17] NOVAK, G. M., GAVRIN, A., & WOLFGANG, C. *Just-in-time teaching: Blending active learning with web technology*. Prentice Hall PTR, 1999.
- [18] PAPPANO, L. (2012). *The Year of the MOOC*. The New York Times, 2(12), 2012.
- [19] TALBERT, R. *Inverted classroom*. Colleagues, 9(1), pp. 7, 2012.
- [20] TALBERT, R. *Learning MATLAB in the inverted classroom*. In American Society for Engineering Education. American Society for Engineering Education, 2012.
- [21] TUCKER, B. *The flipped classroom*. Education Next, 12(1), pp. 82-83., 2012.
- [22] TURRO, C., CAÑERO, A., BUSQUETS, J., *Video Learning Objects Creation with Polimedia*. IEEE International Symposium on Multimedia, pp. 371-376, 2010.
- [23] TWIGG, C. A. *Models for online learning*. Educause review, pp. 28-38, 2003.

Sobre las autoras:

Nombre: Cristina Jordán Lluch

Correo Electrónico: cjordan@mat.upv.es

Institución: Departamento de Matemática Aplicada (Universitat Politècnica de València).

Nombre: María José Pérez Peñalver

Correo Electrónico: mjperez@mat.upv.es

Institución: Departamento de Matemática Aplicada (Universitat Politècnica de València).

Nombre: Esther Sanabria Codesal

Correo Electrónico: esanabri@mat.upv.es

Institución: Departamento de Matemática Aplicada (Universitat Politècnica de València).

Experiencias Docentes

Magia y Matemáticas: más allá de los trucos

Magic and mathematics: beyond the tricks

Carlos Pastor Paz y José María De La Torre Maroto

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 023-030, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Abr'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

¿Quiénes de ustedes creen que la Tierra es redonda? ¿Y que tres es mayor que dos? Seguro que tienen razón, pero ¿por qué lo creen?

Las matemáticas son un hermoso sistema humano, arbitrario y artificial, que ha demostrado ser un modelo útil de interpretación de datos para la sociedad. La magia se basa en que el público genere sus propias ideas ante los datos que se les muestran. Para lograr esto es necesario que el público sepa interpretar los datos que se le proporcionan conforme al algoritmo deseado, de acuerdo con el marco conceptual en el que se presentan. Esto dará lugar a una interpretación unívoca de los mismos generando una información.

La información es fruto del proceso ocurrido en la mente del público y no una idea terminada que el ilusionista trate de “comunicar” y mucho menos de “vender”. Esa idea, esa información, es tomada como dato en vez de como información. No se cuestiona, se asume.

La magia es una herramienta muy útil para comprender los conceptos matemáticos y facilitar la forma en la que se representa y se opera con los datos, asumiendo que esa operativa es arbitraria y puede ser sustituida por otra.

Esta separación entre concepto y operativa abre las puertas del aprendizaje significativo frente al operativo y memorístico, y abre también las puertas a la generación de nuevas operativas matemáticas. Es por tanto la magia una herramienta no solo de aprendizaje sino una herramienta de desarrollo matemático.

Palabras Clave: Magia, matemáticas, matemagia, aprender, operativa vs concepto, aprendizaje significativo, motivación, herramienta matemática.

Abstract

Do you believe that the Earth is a round Planet? Do you believe that number three is bigger than two? If you have said "yes" it's hardly sure that you are right, but, why do you believe it?

The Mathematical Science is a beautiful, arbitrary and artificial Human system. And it has become quite useful for data interpretation. The art of Magic is also based on the generation of ideas in the mind of the spectators according to an algorithm that has been previously taught to them. It is obvious that by interpreting the data presented with the algorithm taught, the conclusion, usually called 'information', will be unequivocal.

The power of this idea is that the spectators generate that information in their own minds. It is not the magician who tries to convince the public but the public who usually assumes the information like a data.

The art of Magic is a useful tool not only for the understanding of the Mathematical concepts but also for the comprehension of the way they are represented. But it is also helpful for understanding that operations and algorithms are not the same than concepts and can be substituted when convenient.

By showing the evidence that concept and algorithm is not the same, it becomes easier to work for a creative and non-memory-based learning. It also leads the pupils to be able to question the algorithms and operations learned and even to create new ones. Is, therefore, Magic a useful tool not only for the learning of Maths but also for the Mathematical development.

Keywords: Magic, illusionism, maths, mathematics, learning, concept vs algorithm, motivation, non-memory-based learning, mathematical tool.

1. Introducción

En la mayoría de las aulas españolas el aprendizaje de las matemáticas se realiza desde la operativa. Es decir, se dedica casi todo el tiempo a explicar las diferentes formas de realizar operaciones. Cómo sumar números enteros, cómo sumar “llevándome”, cómo sumar con números negativos, cómo sumar fracciones... Se podrían enseñar infinitas formas de sumar ya que la operativa de la suma depende de lo que se quiera sumar. Además cambia si cambian las condiciones. Por ejemplo, sumar “llevándose” cambia cuando se cambia el sistema decimal por un sistema binario. Con este método de enseñanza cada vez que cambia un parámetro el alumnado puede tener la sensación de estar enfrentándose al manejo de un concepto distinto cuya única forma de solución es la memorización de la operativa propuesta por el profesor.

En cambio el aprendizaje de las matemáticas que propone Aprender por Arte de Magia, se basa en la comprensión del concepto. Y partiendo de éste, que el alumno pergeñe y proponga la operativa más adecuada para cada caso se torna en un ejercicio aparentemente trivial pero que, curiosamente, es rara vez enfrentado ni siquiera en los cursos superiores de matemáticas de carreras técnicas. Entendiendo el concepto matemático y lo que éste conlleva es mucho más sencillo comprender, deducir y/o realizar cada una de las operaciones correspondientes.

Además se pueden utilizar las herramientas de la magia para crear en los alumnos sensaciones (sorpresa, emoción, curiosidad,...), creencias y deducciones que facilitan el aprendizaje significativo de las matemáticas.

2. El dilema de la operativa.

Es imprescindible para una correcta comprensión de las matemáticas entender cada uno de los conceptos que se usan. Se ha de partir del concepto para que una vez entendido éste se puedan extrapolar y entender las diferentes operaciones. Si no se dan los pasos en este orden se puede caer en el error de tener que aprender cada una de las diferentes operativas sin entender por qué ni para qué.

Puede parecer irracional que alguien que sepa sumar 2 bolígrafos más 5 bolígrafos no sepa sumar 2 manzanas más 5 manzanas. Pero, ¿no es lo mismo cuando sumamos en base decimal, hexadecimal o binario? En cambio muy poca gente diría que sabe contar o sumar en hexadecimal o binario si no se lo han explicado de forma expresa.

Aprender el mecanismo de la suma que todos conocemos funciona bien para determinados fines. Se trata de un modelo útil. Eso no quiere decir que sea inmutable sino que se trata, simplemente, de un mero caso particular de suma. De hecho, es más que probable que un alumno de primaria que se enfrente por sí mismo a tener que estimar mentalmente sumas de números naturales de más de cuatro cifras, deduzca rápidamente que la estrategia de suma enseñada por su profesor es absolutamente ineficaz para su caso particular y que, por ejemplo, comenzar por calcular el valor de la cifra más significativa e ir sumando de izquierda a derecha en vez de derecha a izquierda es, además de más fiable, más eficaz y mucho más rápido.

El hecho de enseñar modelos de operativas, separados del concepto que éstas pretenden modelar, es una perspectiva que no fomenta, entre el alumnado, la mente crítica. Así, las matemáticas se habrán convertido en una asignatura de memorización, de ejecución, en lugar de una herramienta de reflexión, deducción, interpolación de conceptos y desarrollo constante.

Se plantea entonces un problema para el cual no se tiene aún una solución determinante: ¿Cuál es el compromiso óptimo entre la utilidad de una operativa y su pérdida de generalidad para la enseñanza de un determinado concepto matemático?

En cualquier caso, comenzar por una determinada operativa contribuye enormemente a perder la perspectiva sobre el concepto que se intenta comprender y/o hacer comprender para poder trabajar con él de forma eficaz. Es más, el simple hecho de tener una determinada operativa como algo invariable puede hacer que las soluciones matemáticas sean incorrectas.

3. La magia como herramienta para enseñar matemáticas. La presentación de datos para generar ideas propias.

¿Qué es la magia? Con asiduidad la respuesta ante esta pregunta suele estar relacionada con el engaño, la ocultación de datos, la trampa,... En cambio un juego de magia consiste en:

“Lograr algo que, en función de los datos disponibles y conforme al/los algoritmo/s que la mente del público usará para interpretarlos, ese mismo público podrá demostrar que es imposible”.¹

Y, habitualmente, con la información que está dando por sentada y fruto del análisis que ha hecho de los datos presentados, el público lleva razón.

Para lograr hacer un juego de magia, el ilusionista, tiene que comprender la diferencia entre lo que tiene que hacer y lo que su público interpreta que tiene que hacer. No es lo mismo hacer que una moneda viaje del puño cerrado derecho al izquierdo que hacer que parezca que una moneda está en el puño cerrado derecho para luego mostrar que está en el izquierdo. Por eso es fundamental discernir entre operativa y objetivo. Operativa y concepto.

Fruto del análisis sistemático de los conceptos matemáticos que han de aprender los alumnos nace el método de enseñanza de Aprender por Arte de Magia. El modelo pedagógico que se sigue en las clases es una de las partes esenciales del proyecto y consiste en:

- Explicar el concepto matemático mediante un caso real que el alumno pueda practicar en su día a día. Este ejemplo ha de ser algo totalmente familiar para el alumno.
- Una vez entendido el concepto genérico se hace un juego de magia cuya ejecución depende directamente del concepto que se está trabajando. Se busca la sorpresa, el interés, la ilusión y las ganas de aprender e investigar del alumno.
- Posteriormente se le enseña al alumno a realizar el juego de magia. Para la correcta realización del juego necesita haber entendido el concepto. Por tanto cada vez que practica el juego refuerza y asienta el concepto matemático. Este proceso, muchas veces, se realiza de forma inconsciente por parte del alumno.
- Por último, una vez entendido el concepto matemático, se enseña la operativa concreta, haciendo ver al alumno que solo es una de las posibles y que si se entiende el concepto, habitualmente, la operativa es simple.

La segunda parte imprescindible del proyecto deriva de la idea de que:

“El mago ha de generar ideas en la mente del público objetivo”²

¹ Definición de Juego de Magia según José María de la Torre Maroto, creador de la idea “Desarrollo Estratégico Ilusionista” en la que se basa, en gran parte, el modelo de “Aprender por Arte de Magia” expuesto en este artículo.

Lo fascinante es que esas ideas, siendo exactamente las que el mago desea que su público tenga en su mente, no serán enunciadas por el mago, sino que surgirán en el cerebro del público (fruto de los algoritmos previamente implantados en él). Por tanto serán ideas del público. Y es difícil que alguien no “compre” sus propias ideas. A partir de entender qué es una fracción es mucho más constructivo establecer el canal adecuado, para que sea el propio alumno quien pueda pensar formas eficaces de sumar fracciones, que enseñarle el procedimiento concreto para el caso concreto.

4. Pruebas realizadas con alumnos reales.

Con el objetivo de poder evaluar la eficacia directa del proyecto Aprender por Arte de Magia se han realizado tres talleres, uno por cada ciclo de educación primaria. Los talleres han abarcado los conceptos matemáticos del segundo trimestre de cada ciclo. Antes de comenzar el taller se realizó una prueba inicial sobre los conceptos a trabajar. Al final se realizó una prueba muy parecida pero un poco más difícil que la inicial con el objeto de contrastar los conocimientos iniciales y finales del taller.

4.1. Taller de primer ciclo de primaria:

- Edades: entre 6 y 8 años
- Conceptos matemáticos:
 - Contar. Concepto y práctica.
 - Sumar, restar y relación entre ambas operaciones.
 - Valor y equivalencia entre monedas y billetes.
 - Concepto de multiplicar.
 - Orientación Espacial.
- Resultados de las pruebas iniciales y finales

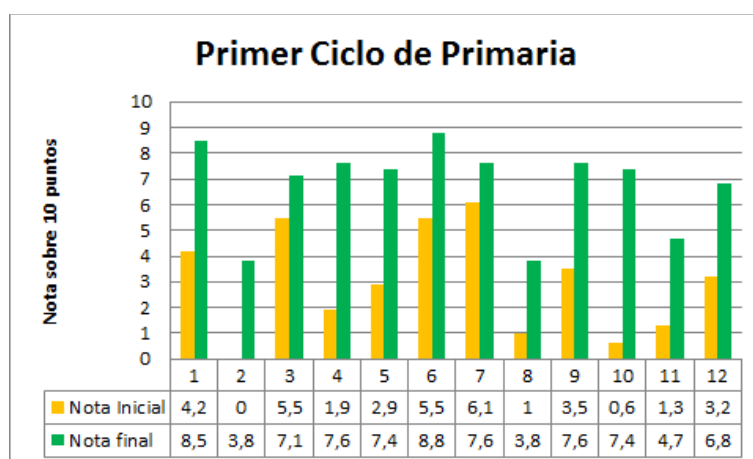


Figura 1. Resultados de los test iniciales y finales de una muestra de 12 alumnos del primer ciclo de primaria.

2 Palabras de José María de la Torre Maroto pertenecientes a su filosofía y definición de la magia.

4.2. Taller de segundo ciclo de primaria:

- Edades: entre 8 y 10 años
- Conceptos matemáticos:
 - Comprensión del concepto de fracción.
 - Representación y lectura de una fracción y sus términos.
 - Comparación de fracciones de igual denominador y también con distinto denominador.
 - Representación gráfica de fracciones.
 - Correspondencia entre fracciones y números decimales y viceversa.
 - Valor de cada cifra en función de su posición en un número decimal.
 - Operaciones con números decimales y fracciones.
 - Operaciones con precios.
 - Identificación del concepto de capacidad.
 - Estimación de capacidades por comparación.
- Resultados de las pruebas iniciales y finales

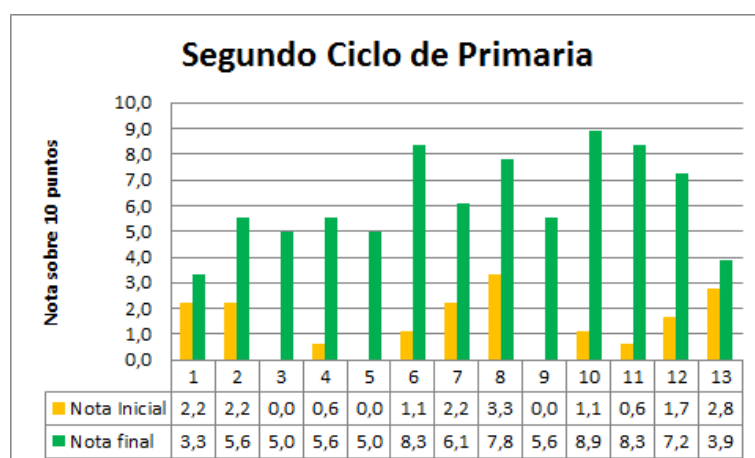


Figura 2. Resultados de los test iniciales y finales de una muestra de 13 alumnos del segundo ciclo de primaria.

4.3. Taller de segundo ciclo de primaria:

- Edades: entre 10 y 12 años
- Conceptos matemáticos:
 - Multiplicación y división con decimales.
 - Equivalencia entre decimales y fracciones.
 - Fracciones equivalentes y comparación de fracciones.
 - Operaciones con fracciones.
 - Proporcionalidad y porcentaje.

- Unidades de longitud y superficie y operaciones con las mismas.
- Resultados de las pruebas iniciales y finales

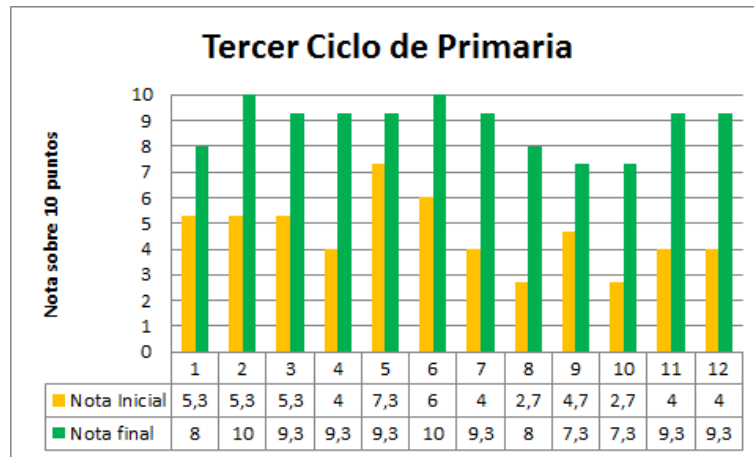


Figura 3. Resultados de los test iniciales y finales de una muestra de 12 alumnos del tercer ciclo de primaria.

5. Conclusiones.

- El concepto que se pretende modelar ha de ser el pilar fundamental del aprendizaje para que éste pueda ser significativo.
- Si se entiende el concepto, la generación de operativas por parte de los propios alumnos facilita la extrapolación e interpolación de diferentes conceptos y diferentes operativas.
- La operativa no es inmutable, puede cambiar, por lo que aprender solamente operativas no es efectivo e incluso puede imposibilitar la resolución de problemas que, con otra estrategia, serían resolubles.
- La operativa sin comprensión del concepto puede alejarnos de éste y dificultar el aprendizaje.
- Generar los canales adecuados para la generación de ideas propias es una herramienta muy eficaz para el aprendizaje de las matemáticas en concreto, y de todas las materias en general.
- La aportación de la magia, sus técnicas y filosofías ayuda enormemente al aprendizaje significativo. Además aporta un desarrollo completo del alumno mediante las inteligencias múltiples. Esto hace que el alumno esté más motivado, sea más creativo, tenga mayor inquietud por aprender y, lo más importante, hace que el alumno sea más feliz aprendiendo y su aprendizaje sea más productivo y eficaz.

Sobre los autores:

Nombre: Carlos Pastor Paz

Correo Electrónico: direccion@aprenderporartedemagia.com

Institución: Aprender por Arte de Magia – www.aprenderporartedemagia.com

Nombre: José María de la Torre Maroto

Correo Electrónico: direccion@aprenderporartedemagia.com

Institución: Aprender por Arte de Magia – www.aprenderporartedemagia.com

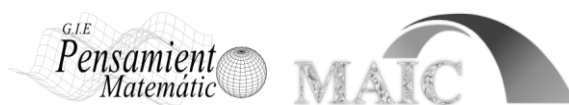
Historias de Matemáticas

La curvatura media y Sophie Germain

Mean curvature's definition and Sophie Germain

Juan Tarrés Freixenet, M^a Carmen Escribano y José Rojo Montijano

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 031–046, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Ago'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

La curvatura media de una superficie en un punto se define, por primera vez, como la semisuma de las curvaturas principales, en las memorias que Sophie Germain presentó a la Academia de Ciencias de París en 1811, 1813 y 1815, en aras a conseguir el premio que convocó esa institución, y que obtuvo Sophie Germain con la última memoria. El estudio de las superficies elásticas lo inició en 1809 a raíz de los experimentos que realizó Chladni en París con placas vibrantes. Sophie Germain fue autodidacta y falleció con 55 años a causa de un cáncer de mama. Consiguió que Lagrange la estimase como matemática y que Gauss, con quien mantuvo mucha correspondencia, la reconociese de gran valía.

Palabras Clave: Sophie Germain, curvatura media, superficies, elasticidad.

Abstract

The mean curvature of a surface in a point is defined, for the first time, as the average value between the principal curvatures in Sophie Germain's memoirs. Presented in the Paris Academy of Sciences in 1811, 1813 and 1815 in order to obtain the award proposed by this institution, Sophie Germain won with her last memoir. She began to study elastic surfaces in 1809, motivated by the experiments with vibrating plates conducted by Chladni in Paris. Sophie Germain was self-educated, and passed away at the age of 55 as a result of breast cancer. She managed to both gain the esteem of Lagrange as a mathematician, as well as the appreciation of Gauss, with whom she exchanged several letters concerning these scientific matters.

Keywords: elasticity, mean curvature, Sophie Germain, surfaces.

1. Introducción

A raíz de la llegada a París en 1808, del físico e ingeniero alemán, Ernest Florens Freidrich

Chladni (1756-1827), para presentar unos experimentos musicales¹ con placas vibrantes, la Academia de Ciencias de París, convocó al año siguiente un premio con el tema de intentar mostrar una teoría matemática que explicase el comportamiento de las superficies elásticas y compararla con la experiencia.

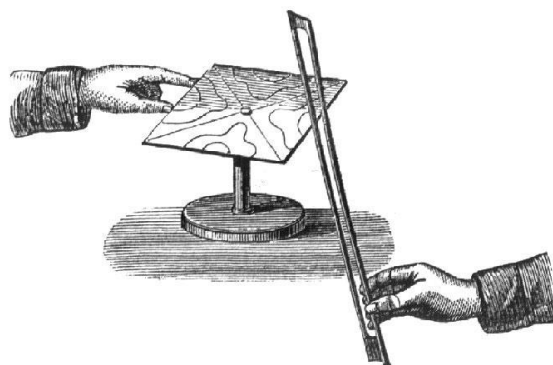


Figura 1. Experimento musical de Chladni.

La idea de curvatura media se puede decir que tiene sus orígenes en Sophie Germain y las tres memorias que esta mujer presentó a la Academia de Ciencias de París, en la segunda década del siglo XIX. Con la última memoria recibió el premio extraordinario, procediendo de forma análoga a como Leonhard Euler había razonado para el caso unidimensional de varillas, cuerdas o láminas estrechas.

Sophie Germain, a pesar de haber sido reconocida como una excelente matemática², y de haber nacido y vivido en una época revolucionaria en París (entre el último cuarto del siglo XVIII y el primer tercio del XIX), en la que salieron a la luz muchas ideas progresistas, sufrió por el mero hecho de ser mujer, y toda su vida se vio marcada por esta circunstancia. Tenía un gran talento para las ciencias en general, y las matemáticas en particular. Nunca se casó y luchó por salir adelante y hacerse un lugar entre los científicos de la época, pero a pesar de su insistencia, su sexo chocó con los prejuicios sociales y vivió a mitad de camino entre el reconocimiento y la marginación, sin poder alcanzar un trabajo que le permitiera vivir con sus propios medios y tuvo que depender económicamente, casi toda su vida, de la hacienda de su familia.

2. Sobre Sophie Germain

Sophie Germain nació el 1 de abril de 1776³ en el seno de una familia burguesa descendiente de varias generaciones de ricos comerciantes. Su padre, llamado Ambroise-

¹ El concierto de formas, como Chladni lo denominaba, consistía en llenar con arena unos platos de cristal, y tomarlos delicadamente entre dos de sus dedos, por sitios opuestos, mientras con un singular instrumento con arco hacía sonar una de sus aristas, como si fuese la cuerda de un violín. Esto producía una nota melodiosa mientras que la arena se distribuía dibujando formas que no parecían aleatorias, ya que al repetir el experimento se producía la misma figura en la arena.

² Karl Friedrich Gauss, cuando se enteró de que era una mujer la que le escribía, con el seudónimo de un hombre, le envió una nueva carta reconociendo en ella el más noble coraje, los talentos más extraordinarios, y una inteligencia superior.

³ En la famosa calle de San Denis de París.

François Germain (1726-1821)⁴, se comprometió, por poco tiempo, pero de una manera activa, durante los primeros días de la Revolución Francesa como diputado elegido por el Tiers-État para la Asamblea Constituyente de 1789. Era liberal con ideas progresistas que abogaban por las reformas sociales, económicas y financieras del Ministro Turgeot. Su madre, Marie Madeleine Gruguelus también era hija de comerciantes. Este matrimonio tuvo solamente tres hijas. La mayor, Marie-Madeleine, la mediana Marie-Sophie, y la pequeña Angélique-Ambroise. La mayor se casó con el notario Charles Lherbette que tenía 19 años más que ella, y con el que tuvo un hijo, Jacques-Armand, que estudió derecho como su padre, y llegó a ser procurador del rey y diputado. Este único sobrino de Sophie quería a su tía y era querido por ella, incluso, en los relatos biográficos se dice que se le parecía físicamente por su gran frente. Estimaba y compartía las ideas de su tía. Hizo publicar las ideas filosóficas de su tía dos años después de muerta ésta. Él murió sin descendencia en 1864. La hermana pequeña de Sophie, Angélique-Ambroise se casó con un médico, René-Claude Geoffroy, que murió en 1831, el mismo año que murió Sophie. Luego se volvió a casar con un famoso fisiologista, René-Joachim-Henry Dutrochet, que murió en 1847, al que Angélique sobrevivió hasta 1875. La residencia familiar se trasladó a casa de Angélique, cuando estaba casada con su primer marido, en la calle de Braque⁵, y allí vivieron los padres de Sophie, y ella misma, excepto los últimos años de su vida, en los que decidió trasladarse a un lugar más tranquilo para sus estudios.

Cuando estalló la Revolución, en 1789, Sophie tenía 13 años y, al parecer, era exageradamente tímida e introvertida, con un aspecto físico más bien poco agraciado. En estos momentos las calles de París eran muy peligrosas para una niña de su edad ya que estaban llenas de gentes que iban y venían corriendo y entonando himnos revolucionarios. Harta de oír en su propia casa y a todas horas del día interminables discusiones sobre el dinero, la política y los cambios que traía consigo la Revolución, Sophie encontró en la biblioteca de su padre un refugio a la vez tranquilo e intelectualmente excitante.



Figura 2. Izqda: Retrato de Sophie Germain a la edad de 14 años. Drcha: Efigie de Sophie Germain (Colección Granger).

⁴ Desde 1700 aproximadamente se tienen noticias de esta familia de prósperos comerciantes descendientes de Joseph Germain.

⁵ En el número 4 de la actual rue Braque sigue existiendo esta casa en París.

En este ambiente, encontró un libro titulado *Histoire des Mathématiques*, de Jean-Etienne Montucla⁶. Con el tiempo, y pese a la oposición de sus padres⁷, comenzó leyendo el tratado de aritmética de Étienne Bezout y el cálculo diferencial de A.J. Cousin, y llegó a leer con facilidad libros tan especiales como los *Principia Mathematica* (1687) de Newton, *Exposé sur le Système du Monde* (1796), de Pierre Simon de Laplace, y las obras de Leonhard Euler.

En 1795 se creó l'École Polytechnique, Sophie tenía 19 años y consiguió las notas que se exigían para entrar en la misma en los cursos impartidos por diferentes profesores, especialmente el de análisis matemático de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), aunque por ser mujer no se le permitió⁸. Había la costumbre de que a fin de curso algunos profesores pidieran a los estudiantes sus observaciones por escrito; Sophie Germain aprovechó la ocasión para enviarle las suyas a Lagrange utilizando el pseudónimo de Le Blanc⁹, un alumno de l'École Polytechnique, un año mayor que ella, que iba a ingresar en l'École des Ponts et Chaussées, y que Sophie conocía. Lagrange los leyó y quiso conocer a tal alumno que sabía interpretar y comentar sus lecciones, por lo que conoció a Sophie. Desde entonces no volvió a hacer discriminaciones por ser de una mujer, y se convirtió en su mentor, quedando Sophie invitada a las tertulias científicas con otros hombres de ciencias. Al principio estas reuniones deslumbraron a Sophie, pero con el tiempo volvió a sus pensamientos de que los hombres pensaban que con la participación de las mujeres debían de adoptar un tono menor, ya que el espíritu femenino es inadecuado para los temas científicos¹⁰.

Lagrange proporcionó a Sophie libros y la formación necesaria para seguir investigando. Estudió a Arquímedes, Newton, Leibniz, Euler, los Bernouilli, Diofanto, Fermat, Hipatia, Legendre y Gauss entre otros (El libro de Gauss *Disquisitiones Arithmeticae* escrito en 1798 fue uno de sus favoritos).

El campo de la teoría de números le ofrecía una magnífica ocasión de realizar sus proyectos y de hacer verdaderos progresos; por añadidura, le va a permitir establecer los primeros contactos profesionales con auténticos científicos. Durante los años siguientes se dedicó sobre todo a asimilar los nuevos y difíciles métodos de las *Disquisitiones Arithmeticae*, y a realizar algunas aportaciones.

Con Carl Friedrich Gauss, en la universidad de Gotinga, intercambió mucha correspondencia desde 1804¹¹, aunque siempre con el seudónimo de Leblanc, aunque realmente Gauss solo le contestaba cuando sus trabajos presentados en las cartas tenían que

⁶ Cuentan sus biógrafos que cuando Sophie leyó la historia de Arquímedes, al que se le olvidaba comer y beber absorbo en sus pensamientos matemáticos, decidió que ella sería matemática.

⁷ Su familia la castigaba por leer, y sobre todo libros de ciencias, ya que estaba mal visto para las mujeres, pues pensaban que podía caer enferma. Por ejemplo, para que no estudiara de noche le suprimieron la ropa de abrigo, y las velas, aunque ella se las ingeniaba para poder seguir haciéndolo a escondidas.

⁸ Esta escuela parisina no admitió mujeres hasta 1972.

⁹ No se podía dirigir a él como mujer así que pensó en su amigo Antoine Auguste Leblanc que frecuentaba las reuniones en su casa, y que se encontraba matriculado en el curso de Lagrange. Él fue el que le pasó los apuntes de *Análisis* de J. L. Lagrange, y los de *Química* de A. F. Fourcroy.

¹⁰ Véase la página 68 del libro *Matemática es nombre de mujer*, de Susana Mataix.

¹¹ En la respuesta de Gauss a la primera carta recibida de Sophie, con el seudónimo de Leblanc, en 1804, le dice Gauss a Sophie (Leblanc): "Me complace comprobar su habilidad para la aritmética. Sobre todo su nueva demostración para números primos, cuando 2 es o no es residuo cuadrático, me ha gustado mucho, es una demostración muy aguda, es una pena que no se pueda aplicar a otros números..."

ver con lo qué él estaba trabajando.

Debido a las campañas de Napoleón contra los prusianos Sophie le encargó a un amigo de su familia, el general Perneti, que cuidara de este matemático olvidadizo en 1806. Este amigo cuando volvió a ver a Sophie en París, le comentó la sorpresa de Gauss que decía no conocer a ninguna Sophie Germain que pudiese interesarse por él. Entonces ella, en su siguiente carta, le descubrió quién era¹². Gauss entonces le escribió *“El gusto por las ciencias abstractas en general y, sobre todo por los misterios de los números, es muy raro; esto no es sorprendente, puesto que los encantos de esta sublime ciencia en toda su belleza sólo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ellos. Cuando una persona de su sexo, que por nuestras costumbres y nuestros prejuicios, debe encontrar infinitamente más obstáculos y dificultades que los hombres para familiarizarse con esas investigaciones espinosas, sabe a pesar de ello flanquear las trabas y penetrar en lo más profundo, hace falta sin duda que tenga el más noble coraje, los talentos más extraordinarios, la inteligencia superior”*¹³. A partir de 1809 Gauss se dedicó a otros menesteres y la correspondencia se interrumpió.

En 1808 llegó a París el ingeniero alemán Ernst Chladni quien presentó sus experiencias sobre la vibración de las superficies elásticas. Insistía en observar las figuras que se formaban al esparcir arena sobre una placa a la que se la hacía vibrar rozando en el borde con el arco de un violín. Lo que ocurría entonces es que la arena se concentraba donde las vibraciones eran más débiles, formando seductoras figuras geométricas. Estos experimentos que resultaron ser muy llamativos, los realizó primero en el Instituto de Francia¹⁴, y después se repitieron delante de Napoleón.

Puesto que por esta época la Academia de las Ciencias de París tenía la costumbre de ofrecer un premio¹⁵ al mejor trabajo en ciencias físicas y matemáticas, en 1809 propuso dar el premio a quien desarrollase una teoría matemática sobre las superficies elásticas que explicara las experiencias de Ernst Chladni¹⁶.

A partir de 1809 Sophie Germain se interesa por nuevos problemas y cambia completamente de campo de investigación centrándose en la física-matemática, quizás debido a que Gauss no contestaba ya sus cartas, o quizás debido a este concurso convocado por la Academia de Ciencias de París.

Sophie Germain presentó tres memorias consecutivas sobre el tema propuesto por la Academia, la primera en 1811, la segunda en 1813 y la tercera y última en 1815. El día 8 de enero de 1816, recibió el *“Prix Extraordinaire”* de la Academia de Ciencias. Se reunió mucha gente para conocer a la famosa mujer matemática, sin embargo Sophie no asistió a la ceremonia de entrega del premio, pues como ella misma aseguró en estos momentos no sentía ninguna admiración por la mayoría de los académicos, a pesar de que años atrás se había sentido una novata entre gigantes.

¹² Sophie dándole a conocer que efectivamente era una mujer le dice *“...espero que la información que hoy le confieso no me prive del honor que me concedió bajo un nombre falso, y que no me sea negado un breve momento en el que usted se dedique a escribirme para darme noticias ...”*.

¹³ Carta de Karl Friedrich Gauss a Sophie Germain, fechada el 30 de abril de 1807.

¹⁴ Delante de un grupo de élite de 66 matemáticos y físicos que constituían la *“Primera Clase”* del Instituto de Francia.

¹⁵ Se elegía una comisión de cuatro o cinco personas que planteaba un tema y se establecía un programa, teniendo los candidatos dos años para hacer una memoria que presentaban de forma anónima.

¹⁶ Véase MOLERO APARICIO y SALVADOR ALCAÍDE, *Germain, Sophie (1776-1831)* www.Divulgamat.net.

Desde la concesión del premio, toda la comunidad científica la reconoció y respetó. Además algunos académicos le rindieron su simpatía y aprecio, entre ellos Jean-Baptiste Joseph Fourier¹⁷ (1768-1830), quién en una de sus primeras actuaciones como secretario perpétuo de la Academia de Ciencias, le permitió asistir a las sesiones del Instituto de Francia¹⁸, siendo la primera mujer, no esposa de académico, que lo hizo¹⁹.

Este premio consiguió que subiera su propia autoestima, y continuó sus investigaciones con Legendre sobre Teoría de Números, y volvió a escribir a Gauss sobre este tema²⁰. Aunque Gauss y Sophie Germain nunca se conocieron, éste intentó que en 1830 la Universidad de Göttingen le otorgara el título de doctor *honoris causa*, cuestión que no prosperó incluso con la gran influencia de Gauss.

A partir de este momento se publicaron diversas memorias y artículos, incluso hasta después de su fallecimiento. Además su sobrino se encargó posteriormente de seguir publicando sus escritos.



Figura 3. Tumba de Sophie Germain en el cementerio de Père Lachaise de París.

En 1825, en una de las reuniones que organizaba François Arago en el Observatorio de París, Sophie conoció al joven matemático, del que se decía que tenía mucho talento,

¹⁷ Fue elegido Secretario Perpétuo de la Academia de Ciencias en 1822.

¹⁸ El Instituto, que se había creado en 1795 (tras el cierre de las academias en 1793) estaba compuesto por tres clases (la primera para matemáticas y naturales) y a partir de 1816 se reorganizó en cuatro academias (A. Francesa, A. de Inscripciones y Bellas Letras, A. de Ciencias y A. Bellas Artes), y a las sesiones públicas podían asistir las mujeres de los académicos sólo en ocasiones especiales. Hoy en día el Instituto de Francia agrupa además a la quinta Academia de Ciencias Morales y Políticas.

¹⁹ El 30 de mayo de 1823 Fourier le escribe a Sophie diciéndole que tendrá un asiento reservado en el centro de la sala cada vez que desee asistir a las lecciones públicas del Instituto, para demostrarle el interés que su trabajo matemático inspiraba a la institución.

²⁰ En la carta que Sophie le escribe a Gauss en Mayo de 1819 le dice "Aunque he trabajado durante algún tiempo en la teoría de superficies elásticas (a lo que tengo mucho que agregar si tuviera la satisfacción de realizar algunos experimentos en superficies cilíndricas que tengo en mente), nunca he dejado de pensar en la teoría de números... Hace tiempo que nuestra Academia propuso como materia para un premio la demostración de la imposibilidad de la ecuación de Fermat, este desafío me ha atormentado a menudo".

Guglielmo Libri, Conde de Bagnano²¹, del que se hizo una buena amiga²². Por su correspondencia con él se sabe que Libri asistía a comer invitado a casa de Sophie donde coincidió en alguna ocasión con August Leopold Crelle²³.

Libri volvió a Italia, pero siguió su amistad con Sophie. Regresó a París en 1830 y afianzaron aún más su afecto. De esta época se conservan algunas de las cartas que se escribían mutuamente, tanto con aportaciones matemáticas a la teoría de números, como con cuestiones personales, como el hecho de que a causa del dolor que sentía Sophie debido a su enfermedad, a partir de abril de 1831 se tiene constancia de que ya no veía a ninguno de sus amigos y sólo tenía la compañía de su hermana y su sobrino.

Poco antes de su muerte, en mayo Sophie le escribe a su amigo Libri diciéndole: *“Estoy enferma, señor, muy enferma. Trabajé duro durante su estancia aquí porque no quería cerrarle la puerta, pero desde entonces el dolor se ha incrementado y hoy por hoy no puedo recibir visitas o cuidarme. El dolor que siento es horrible y mi vida es un verdadero suplicio, no veo cómo mi situación pueda mejorar, como le había dicho hace un tiempo...”*. Sophie Germain falleció en París, el 27 de junio de 1831²⁴, después de haber sufrido mucho, a causa de un cáncer de pecho, que le habían descubierto un par de años antes.



Figura 4. Placa en la casa donde murió en París (13, rue de Savoie).

El busto de Sophie Germain se conserva en el "Museum d'Histoire Naturelle" de París, aunque estuvo colocado en el en el patio del Liceo de París, de la rue Jouy, que lleva su nombre desde 1888.

²¹ Había nacido en Florencia en 1802, y estudiado en la Universidad de Pisa, de la que fue profesor de física y matemáticas. Por aquel entonces se dedicaba a investigar en la teoría de números, aunque además fue historiador de matemática, bibliófilo, gran coleccionista y comerciante de libros.

²² El día 14 de mayo de 1825 Libri escribe a su madre diciéndole *“finalmente anoche me encontré con Mademoiselle Germain, que ganó el premio extraordinario de matemáticas en el Instituto hace algunos años, hablé con ella dos horas, tiene una personalidad impresionante”*.

²³ Fue el fundador de la célebre revista alemana de matemáticas *Crelle's Journal*.

²⁴ Libri escribiría a su madre unos días después diciéndole: *“La señorita Germain, por quien sentía un profundo aprecio, murió hace 15 días. Era víctima de un cáncer y sufrió terribles dolores. ¿Este es el destino reservado a las almas maravillosas? Siento un profundo pesar”*. Véase página 121 de Sánchez Fernández (2013), *Sophie Germain. Las matemáticas como pasión*.

2. Influencia en la teoría matemática de las superficies elásticas

Sophie Germain se apasionó por el estudio de las superficies elásticas a raíz de los experimentos de Chladni y del concurso²⁵ convocado por la Academia de Ciencias²⁶. Los académicos y científicos de la época consideraban el tema muy complicado. Se pretendían establecer las ecuaciones diferenciales de las superficies vibrantes.

Sophie a pesar de que no tenía una buena formación en el tema, quería proceder con las superficies por analogía con el razonamiento seguido por Euler para el caso unidimensional de las varillas, las cuerdas y las láminas estrechas.

Este último había supuesto que en un punto cualquiera de la varilla, la fuerza de elasticidad interna que compensa el efecto de las fuerzas exteriores aplicadas es proporcional a la curvatura (o lo que es lo mismo, inversamente proporcional al radio de curvatura) de la varilla en dicho punto.

En 1760, Euler había publicado el trabajo *Recherches sur la courbure des surfaces*²⁷ en el que se introducen las direcciones principales y las curvaturas principales en un punto de una superficie. Para ello, el autor analizaba las curvas obtenidas como intersección de la superficie con planos normales a ella y obtiene que, en cada punto, las curvaturas máxima y mínima corresponden a dos curvas situadas en dos planos perpendiculares entre sí. Éstas son las curvaturas principales y las direcciones correspondientes a cada una de ellas, las direcciones principales.

Se obtiene así el siguiente resultado:

Teorema. Si k_1 y k_2 son las curvaturas principales de una superficie en un punto, la curvatura k de una sección normal en el mismo, que forma un ángulo ϕ con una de las direcciones principales es:

$$k = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi$$

Es decir, todas las curvaturas de las direcciones normales en un punto de la superficie quedan determinadas por las dos curvaturas principales en el mismo. Obtiene también Euler en ese trabajo que la suma de las curvaturas de dos secciones perpendiculares es igual a la suma de las dos curvaturas principales.

Por analogía con lo que había leído en los trabajos de Euler, Sophie Germain enuncia en su primera memoria presentada a la academia, lo que en adelante llamará siempre “mi hipótesis”:

La fuerza elástica en un punto de una superficie, que compensa el efecto de las fuerzas exteriores aplicadas, es proporcional a la suma de las curvaturas principales de la superficie en dicho punto.

²⁵ Se convocó un premio extraordinario con el tema «Donner la théorie mathématique des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience».

²⁶ Pierre Simon Laplace había realizado la convocatoria pensando en su discípulo y protegido Siméon Denis Poisson (1781-1840), pero éste ni siquiera se presentó al concurso.

²⁷ Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Berlin, 1760.

Sophie Germain llamará curvatura media a la semisuma de las curvaturas principales. De este modo, su hipótesis se puede reformular con estas palabras:

La fuerza elástica y la curvatura media son directamente proporcionales.

Esta memoria fue la única que se presentó en esta primera edición de este premio, pero fue rechazada por considerar el trabajo incompleto e incorrecto, y decidieron de nuevo volver a convocar el premio para dos años más tarde. Sophie había conseguido una ecuación en derivadas parciales de sexto orden, de la que buscaba soluciones regulares, en casos particulares, mediante series trigonométricas tal como había hecho Euler para el caso de las varillas elásticas.

A partir de una relación de equilibrio mecánico supuesta, Sophie Germain da, lo mismo que Euler, otras hipótesis adicionales que simplifican las relaciones asociadas a desplazamientos y rotaciones de la placa; así, supone, en particular, que los desplazamientos de los puntos de la superficie son pequeños y se realizan a lo largo de las normales a la superficie en cada uno de sus puntos. La idea de hacerle jugar a la suma de las curvaturas principales el mismo papel que la curvatura simple para una varilla elástica en el caso unidimensional es una idea completamente original de Sophie Germain. Se apoya en la intuición de que una superficie (de espesor despreciable) se comporta como una suma de sus indivisibles (las curvas que la forman) y que el movimiento al que se ve sometida se puede considerar como la superposición de los movimientos a los que se verían sometidos dichas curvas si estuvieran realmente separadas y vibraran aisladamente unas de otras.



Figura 5. Busto de Sophie Germain realizado por Zacharie Astruc a partir de la reconstrucción de su máscara mortuoria.

Lagrange utilizó este primer trabajo de Sophie sobre superficies elásticas, corrigió su análisis matemático y a partir de la hipótesis de Sophie obtuvo una ecuación diferencial para describir el comportamiento estático y dinámico de las placas en puntos del interior²⁸. Sophie

²⁸ De esta corrección y análisis se conoce la ecuación final que escribió en una nota en la página 149 del tomo 39 de los *Annales de Chimie et de Physique*.

animada por el éxito de Lagrange con su idea, volvió a su trabajo intentando que la geometría de la deformación del plano justificase su hipótesis, y comparó sus resultados con los experimentos de Chladni y con otros experimentos que ella misma llevó a cabo. Así volvió a presentar una segunda memoria más extensa que la primera en 1813, con la que consiguió una mención de honor, pues los académicos²⁹ alegaron que su teoría no explicaba los resultados experimentales³⁰. Y la academia volvió a convocar el concurso para dos años más tarde.

El día 1 de agosto de 1814 Poisson leyó un trabajo³¹ sobre este tema, en el que empezó a criticar el enfoque de Leonhard Euler, de Jacques Bernouilli y por último de la memoria que el año anterior había recibido una mención de honor por parte de la Academia. Poisson³² obtenía una ecuación diferencial no lineal, que con ciertas simplificaciones se transformaba en la ecuación de la segunda memoria de Sophie.

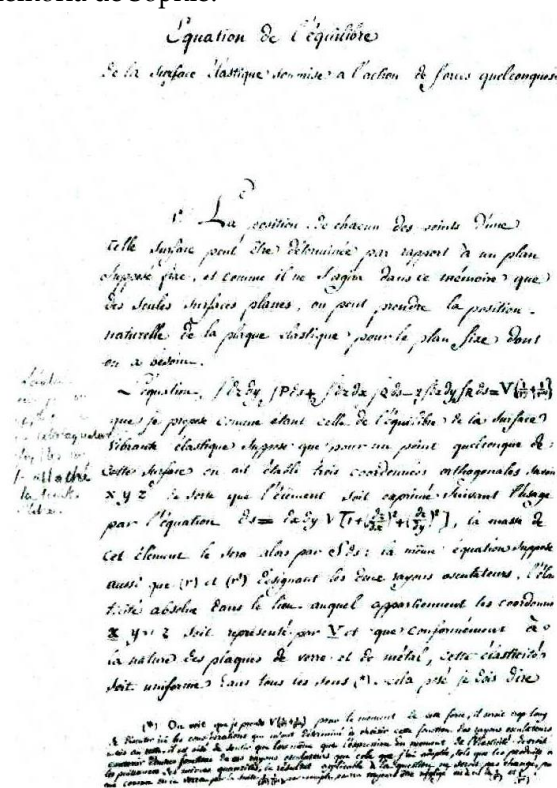


Figura 6. Primera página de la primera memoria de Sophie sobre superficies elásticas (Biblioteca Moreniana de Florencia).

²⁹ Adrien-Marie Legendre (1736-1833) fue uno de los miembros de la comisión que juzgó su segunda memoria presentada, y mantuvo mucha correspondencia con Sophie, saltándose las normas del concurso convocado, desde la primera edición, e intentando calmar la ansiedad de Sophie que había descubierto ciertas dudas sobre el trabajo presentado.

³⁰ Parece ser que Sophie tenía claro su objetivo, pero su poca formación, le impidió formular con rigor su planteamiento (manera poco ortodoxa de manejar el lenguaje matemático).

³¹ Este trabajo no se publicó, por lo que Sophie sólo tuvo acceso a un resumen del mismo que sí se publicó en el "Bulletin de la Société Philomatique" y en la "Correspondence de l'Ecole Polytechnique".

³² Era discípulo de Laplace y de su teoría "molecular" con la que ensayaban explicar todos los fenómenos físicos de la física newtoniana, con un conjunto de fuerzas atractivas o repulsivas. Así consideraban el equilibrio de una única molécula de la superficie elástica.

3. El gran premio de la Academia de Ciencias de París

En la tercera memoria que presenta en 1815, *“Mémoire sur les Vibrations des Surfaces Élastiques”*, Sophie, que había alcanzado una confianza cada vez mayor en su hipótesis, pretende dar a ésta el rango de teorema, deducido a partir de un postulado (que considera incontestable) mediante el uso de la lógica.

El postulado lo formula de la manera siguiente: *“El efecto es siempre proporcional a la causa que lo produce”*. A propósito de este postulado, escribe:

“Así, cuando digo que una fuerza es proporcional al efecto que produce, o que tiende a producir, ¿hago algo distinto que expresar una proposición generalmente admitida y que, por supuesto, es evidente por sí misma?...Las fuerzas de la elasticidad tienden a eliminar la diferencia entre la forma natural de los cuerpos debidas a ellos mismos y la forma que los mismos cuerpos se ven forzados a tomar por el efecto de una causa exterior.

Las fuerzas de la elasticidad que actúan sobre cualquier cuerpo elástico se pueden medir con la diferencia entre la forma natural de ese cuerpo y la forma que toman bajo el efecto de una causa exterior. El efecto producido por una fuerza es, explícitamente o implícitamente, el conjunto de los efectos producidos por la misma fuerza.

Explícitamente si se consideran sucesivamente todos los efectos sin expresar que unos dependen de los otros; implícitamente si la relación que existe entre los mismos efectos permite considerarlos como un efecto único.

El efecto de las fuerzas de elasticidad que actúan sobre una superficie es eliminar la diferencia entre la curvatura natural de la superficie y la curvatura que ha sido forzada a tomar por el efecto de una fuerza exterior, pero la pregunta sobre la curvatura de una superficie no es susceptible de una respuesta simple; está compuesta de un conjunto de preguntas relativas a la curvatura de las curvas resultantes de las secciones de la misma superficie hechas en todas las direcciones y según todas las inclinaciones posibles.

El conjunto de las diferencias entre las curvaturas de las distintas secciones de la superficie, consideradas antes y después de la acción de la causa exterior, es explícitamente la medida de las fuerzas de elasticidad que actúan sobre esa superficie.

Existe entre las curvaturas de las curvas formadas por las distintas secciones de la superficie una relación tal que podemos expresar sus sumas por las de las secciones principales.

El efecto de las fuerzas de elasticidad está pues implícitamente expresado por la suma de las únicas diferencias entre las curvaturas principales de la superficie, consideradas antes y después de la fuerza exterior”³³.

En el caso de las superficies elásticas, la situación viene dada por tres términos:

1. Las fuerzas exteriores

³³ Estos razonamientos se los expone Sophie a Poisson en una carta que le envía ya que a pesar de haber recibido su memoria el premio extraordinario el jurado, del que formaba parte Poisson, había presentado ciertas reservas sobre sus demostraciones. Sólo recibió una respuesta laconica y de una cortesía formal por parte de Poisson, que siempre eludió cualquier discusión seria sobre las cuestiones de fondo y que además la ignoraba en público.

2. Las fuerzas de elasticidad

3. La relación de proporcionalidad evidente entre la deformación de la superficie y las fuerzas de elasticidad.

El problema que surge es el de dar forma matemática a la noción de deformación de la superficie, entendida como diferencia entre dos formas.

En el caso de una viga elástica, si I es la forma inicial, y E , la forma final, este concepto se convierte en algo matemáticamente operativo gracias a la curvatura, considerada como el inverso del radio de curvatura y que, de alguna manera, “mide” la deformación respecto de la forma rectilínea inicial.

Pero una superficie elástica deformada presenta una infinidad de curvas posibles en cada punto, que son las secciones planas de la superficie para cada plano que pasa por el mismo. Sophie Germain postula que si se suman todas las curvaturas de las diferentes secciones planas de la superficie se va a obtener una expresión que dará un aspecto matemático a la noción de forma de la superficie en ese punto.

Surge así de manera implícita un procedimiento de cálculo integral para obtener la curvatura de una superficie. Aprovechando los resultados de Euler, afirma Sophie Germain:

La suma de las razones inversas de los radios de curvatura de todas las curvas determinadas por las secciones planas de la superficie se reduce a la suma de las razones inversas de los dos radios de curvatura principales.

Y enuncia el teorema siguiente: *La suma integral de todas las curvaturas correspondientes a todas las curvas posibles obtenidas por intersección de las secciones planas (que pasan por un punto) con la superficie es proporcional a la suma de las curvaturas principales.*

Este resultado analítico, junto con el postulado metodológico del efecto proporcional a la causa, le parece suficiente para establecer de manera irrefutable la validez de su hipótesis en el caso de las superficies elásticas.

Sophie Germain obtuvo al fin el premio extraordinario de la Academia por esta tercera memoria, que contenía la mitad de páginas que la primera, pero ni siquiera se tomó la molestia de ir a recogerlo. Publicó la tercera memoria con la que consiguió el premio en 1821 con el título *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques* (Veuve Courcier. Paris. 1821)³⁴.

Presentó una nueva memoria a la academia *Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques* en 1824 que debían evaluar Poisson, Laplace y el barón de Prony. Esta memoria permaneció oculta entre los efectos de Prony, hasta que después de muerta y de haber suscitado mucho interés por su obra, se publicó la memoria en 1880.

En 1826 y 1828 publicó respectivamente *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et Équation Générale de ces Surfaces*³⁵, y *Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*³⁶, donde intenta dar un enfoque totalmente opuesto a la teoría molecular de Poisson, e

³⁴ Quizás la publicó ella misma para que nadie se adueñase de su obra, por lo que había hecho anteriormente Poisson con la memoria anterior.

³⁵ Huzard Courcier, París, 1826.

³⁶ Annales de Chimie et de Physique, Tome XXXVII, pp. 337.

intervenir en la polémica entre Poisson y Navier sobre la teoría de la elasticidad.

Durante los acontecimientos de julio de 1830 en París, pocos meses antes de su muerte, Sophie redactaba una *Mémoire sur la courbure des surfaces*, que se publicó en el *Journal de Crelle* en 1831. En ella trata de establecer una teoría dinámica de la curvatura que permita medir la “distribución” de la misma en torno a un punto. Una vez más, su camino se cruza con el de Gauss, que en 1827 había publicado una teoría matemática de la curvatura, muy profunda y original, que se basa en el estudio de la superficie desde un punto de vista intrínseco, situándose el observador sobre la propia superficie, sobre la que realiza sus medidas haciendo abstracción de sus relaciones con el espacio circundante en el que está sumergida, son las *Disquisitiones circa superficies curvas*. El concepto fundamental aquí es el de la llamada curvatura gaussiana, que es igual al producto de las dos curvaturas principales.

Fue precisamente el dominio de esta teoría de Gauss, que al principio pudo parecer que no tenía relación alguna con la teoría de las superficies elásticas, lo que permitió a los físicos especialistas en teoría de elasticidad hacer nuevos progresos a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX.

El trabajo de Gauss eclipsó la obra de Sophie Germain, que escribió una última carta a Gauss el 28 de marzo de 1829 en la que le envió un resumen de su propia memoria (en preparación). Además aprovecha para expresarle la emoción y satisfacción que sintió al leerla, diciéndole: *“No puedo decirle cómo de atónita me quedé, al tiempo que satisfecha, al saber que un reconocido matemático tenía, casi a la vez que yo, la idea de la analogía, que me parece tan racional. No entiendo cómo nadie la había tenido antes, ni cómo nadie le había prestado atención hasta la fecha, tratándose de una consideración que yo había publicado ya”*.

4. Conclusiones

Sophie Germain fue una mujer autodidacta en un mundo de hombres, en el que sólo por el hecho de ser mujer tenía que derruir un muro cada vez que se interesaba por las matemáticas. A pesar de todos los obstáculos puestos en su camino por la sociedad científica, además de por su propia familia, supo colocarse a nivel intelectual entre los grandes académicos del momento de todo el espacio europeo.

Sus dos grandes ámbitos de investigación matemática fueron la teoría de números y las vibraciones sobre superficies elásticas. En el primero consiguió establecer el teorema conocido con su nombre, que junto con los números de Germain³⁷ constituye uno de los pasos más importantes para demostrar la conjetura de Fermat hasta 1840. Aunque a partir de 1809 se dedicó con mucho entusiasmo al estudio de las superficies elásticas como se ha visto en este trabajo, nunca dejó la teoría de números, pues incluso estando ya muy enferma, en 1830, redactó en un artículo que se publicaría después de muerta en el *Journal de Crelle* titulado *Notes sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans la équation $x^n + y^n = z^n$* . En el ámbito de las superficies elásticas se ha visto su importancia en los acápites precedentes, y que además tuvo sus aplicaciones en construcciones como por ejemplo la Torre Eiffel unos años más tarde³⁸.

³⁷ Un número natural n es de Germain, si n es primo y $2n+1$ también es primo.

³⁸ A pesar de que el trabajo de Sophie fue muy importante, su nombre no se encuentra entre los 72 científicos que constan en la torre, algunos de ellos contemporáneos de Sophie.

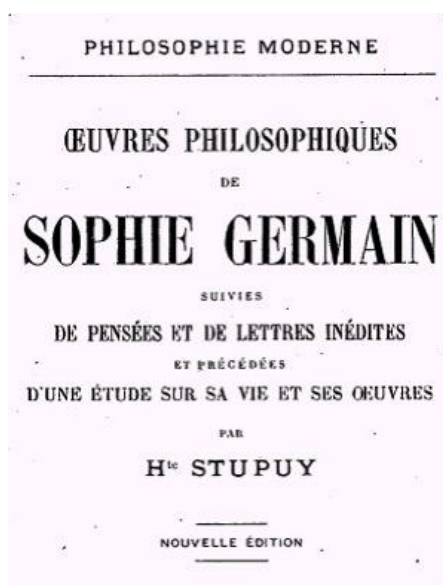


Figura 7. Publicación de 1879, reeditada en 1880.

En 1879 Hippolyte Stupuy publicó con mucho éxito en toda Europa el libro titulado *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de Pensées et de Lettres inédites et précédées d'une Étude sur sa vie et ses œuvres*. Tanta fama consiguió esta publicación que se tuvo que realizar una segunda edición al año siguiente, donde se incluyeron como anexo algunos artículos aparecidos en revistas de la época como *La Philosophie positive*, *Journal de savants* y *Revue occidentale*, que elogiaban la obra³⁹.

En su honor le dedicaron su nombre a un colegio de niñas en 1876, y también una calle en París, en el distrito 14. También la Academia de Ciencias de París, convocó desde 2003, un premio anual denominado Grand Prix Sophie Germain, dotado con 8000 euros, para un investigador que efectúe un trabajo de investigación fundamental en Matemáticas. En la actualidad existen incluso hoteles que llevan su nombre.



Figura 8. Cartel de la calle de París que lleva su nombre.

³⁹ En esta obra se comienza con un resumen de la vida e investigaciones de Sophie Germain, titulado *Étude sur Sophie Germain*, los siguientes capítulos son *Considérations sur l'état des sciences et des lettres aux différentes époques de leur culture*, y *Pensées diverses*, que había publicado el sobrino de Sophie en 1833. A continuación le sigue otro capítulo denominado *Correspondance*, donde se incluyen 34 cartas escritas por Sophie o dirigidas a ella, sobre todo de Gauss, Legendre y Fourier.



Figura 9. Hotel de París con el nombre de Sophie Germain.

Referencias

- [1] ALIC, Margaret. *El legado de Hipatia. Historia de las mujeres en la ciencia desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX*. Siglo veintiuno editores, México, 1991.
- [2] DAHAN-DALMEDICO, Amy. *Mécanique et théorie des surfaces: les travaux de Sophie Germain*. *Historia Mathematica* 14 (4), pp. 117-122, 1987.
- [3] DAHAN-DALMÉDICO, Amy. *Sophie Germain*. *Scientific American*, 265, 117-122, 1991.
- [4] FIGUEIRAS, Lourdes.; MOLERO, María.; SALVADOR, Adela.; ZUASTI, Nieves. *El Juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas*. Madrid, 1998.
- [5] GERMAIN, Sophie. *Mémoire sur la courbure des surfaces*. *Journal de Crelle*, VII, 1-29, 1831.
- [6] HILL, Amy Marie. *Sophie Germain: A mathematical Biography*, University of Oregon, 1995.
- [7] MATAIX, Susana. *Matemáticas es nombre de mujer*. Ed. Rubes. Barcelona, 2003.
- [8] MOLERO APARICIO, María; SALVADOR ALCAIDE, Adela. *Sophie Germain*, Ed. Orto. Madrid, 2004.
- [9] MOLERO APARICIO, María; SALVADOR ALCAIDE, Adela. *Germain, Sophie (1776-1831)*, www.Divulgamat.net, consultada 4 de Agosto 2014.
- [10] SANCHEZ FERNANDEZ, Laura. *Sophie Germain. Las Matemáticas como pasión*. Colección La matemática en sus personajes nº 47. Ed. Nívola. Madrid, 2013

- [11] STUPUY, Hippolyte. *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de lettres inédites et précédées d'une étude sur sa vie et ses œuvres*. Paris, Firmin-Didot, 1896.

Sobre los autores:

Nombre: Juan Tarrés Freixenet

Correo Electrónico: tarres@mat.ucm.es

Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Nombre: M^a Carmen Escribano Ródenas

Correo Electrónico: escrod@ceu.es

Institución: Universidad CEU San Pablo, Madrid, España.

Nombre: José Rojo Montijano

Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es

Institución: Universidad CEU San Pablo, Madrid, España.

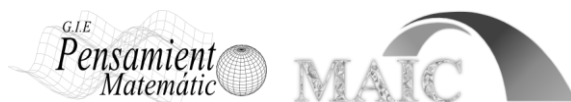
Historias de Matemáticas

Curvatura media y Relatividad General

Mean curvature and General Relativity

José Rojo Montijano, M^a Carmen Escribano y Juan Tarrés Freixenet

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 047–056, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Ago'14; Aceptación: 11 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Desde que se definió por primera vez la noción de curvatura media en el siglo XIX, este concepto ha impactado de forma fundamental tanto en la geometría como en la física y en la cosmología matemática.

En este trabajo estudiamos la formación de singularidades en el proceso en el que una superficie del espacio se mueve, tomando como velocidad su propio vector de curvatura media. Este flujo nos sirve para ilustrar la emergencia en cosmología matemática de singularidades como el big-bang y los agujeros negros.

Resaltamos, además, el papel que juega la curvatura media en algunas desigualdades habituales de la Relatividad General y su relación con el problema abierto de lograr una descripción cuasi-local del concepto de masa.

Palabras Clave: Curvatura media, flujos geométricos, Relatividad General, singularidades, superficies atrapadas.

Abstract

Since the notion of mean curvature was first defined in the 19thC, this concept has impacted geometry, physics and mathematical cosmology in a fundamental way.

In this paper we study the formation of singularities in the process of a surface moving in space, taking the vector of its mean curvature as its velocity. This flow is useful to illustrate the emergence of singularities such as the big-bang and the black holes in mathematical cosmology.

We highlight, moreover, the role that mean curvature plays in some usual inequalities in General Relativity and its relation with the open problem of achieving a quasi-local description of the concept of mass.

Keywords: Mean curvature, geometric flows, General Relativity, singularities, trapped surfaces.

1. Introducción.

Sophie Germain (1776-1831) es quien introduce el término de curvatura media en la segunda década del siglo XIX en sus estudios sobre superficies elásticas¹ [12].

La curvatura media desempeñó en el siglo XIX un papel importante dentro de las matemáticas (recuérdese la descripción de la geometría extrínseca de una superficie en el espacio euclídeo tridimensional, el estudio de superficies minimales y de superficies de curvatura media constante, el análisis de las fórmulas de variación del área, ...). Pero no hay que olvidar que a la vez tiene una presencia pujante en el mundo de las aplicaciones a la física clásica (elasticidad, ciencia de los materiales, superficie de equilibrio entre dos medios, ...).

Desde finales del siglo XX y en esta segunda década del nuevo siglo XXI estamos comprobando cómo la relación de este concepto tanto con problemas geométricos básicos como con aplicaciones a la Física fundamental se ha vuelto todavía más intensa y fructífera.

Siendo la Relatividad General una teoría geométrica de la gravitación, resulta natural encontrar en ella desigualdades geométricas con un claro significado físico; a menudo son resultados matemáticos que sin esa interpretación física difícilmente hubieran llegado a ser siquiera imaginados. Entre los objetos de la Naturaleza, los agujeros negros son, a la vez, objetos macroscópicos predichos por la Relatividad General y matemáticamente simples. En su estudio se refleja con especial claridad esta relación entre Física y Geometría. La métrica de Kerr [11], por ejemplo, depende de dos parámetros: la masa (m) y el momento angular (J). Como es sabido, esta métrica representa el espaciotiempo de un agujero negro si y sólo si

$$\sqrt{|J|} \leq m$$

Si no es así, el espaciotiempo correspondiente contiene una singularidad desnuda. El área correspondiente resulta ser:

$$A = 8\pi \left(m^2 + \sqrt{m^4 - J^2} \right)$$

de donde se sigue que, en la conocida desigualdad

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m$$

conjeturada por Penrose, la igualdad caracteriza precisamente a la métrica de Schwarzschild (es decir, al caso en el que no hay rotación y por lo tanto su momento angular es nulo: $J = 0$).

¹ Tras dos intentos fallidos, la Academia de Ciencias de París le concede el Premio Extraordinario por su trabajo sobre estas superficies elásticas, presentado en 1815, y que se publicará en 1821 con el título *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques* (Veuve Courcier. Paris. 1821)

A continuación se van a resaltar algunos ejemplos en los que un mejor entendimiento de la noción de curvatura media juega un papel protagonista en el desarrollo de nuevas investigaciones.

2. La curvatura media de una superficie tridimensional en el espacio euclídeo y la desigualdad de Heinz.

Para visualizar mejor este tipo de curvatura vamos a ambientarnos dentro del espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$. En cada punto de una superficie del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ existen direcciones especiales en las que la superficie se curva más o menos que en las demás direcciones (“las direcciones principales”). La media aritmética de las curvaturas en dichas direcciones (“las curvaturas principales” K_1, K_2) es denominada la curvatura media de la superficie en ese punto, H . Resulta frecuente en la literatura tomar simplemente a H como la suma $K_1 + K_2$.

La curvatura media es una cantidad extrínseca, ya que refleja cómo se ve la superficie desde fuera.

En el caso sencillo de que la superficie sea una esfera de radio r , la curvatura media es el inverso del radio:

$$H = \frac{1}{r} ;$$

Y así se puede observar que si el valor de la curvatura media es grande, entonces la esfera es pequeña (y viceversa).

Para una superficie general también se debe dar esta propiedad: cuando la curvatura media se acrecienta, la superficie mengua, como indica la siguiente “desigualdad de Heinz”².

Si $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ donde D es un disco abierto de centro O y de radio r en el plano y S es la gráfica de f , siendo H su curvatura media.

$$|H| \geq \alpha > 0 \text{ para algún número real } \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow r \leq \frac{1}{\alpha} .$$

3. La formación de singularidades: la curvatura media y los flujos geométricos.

En cada punto de una hipersuperficie S de $\mathbb{R}^{n+1}$ elegida una normal unitaria continua N , se consideran las n curvaturas principales $K_1, K_2, \dots, K_n$. Al número que resulta de su suma se le llama curvatura media (escalar) H y al vector producto de esa curvatura media por la normal unitaria, $\vec{H} = HN$, se le denomina vector de curvatura media (que no depende de la

² Para funciones reales de clase dos definidas en un disco abierto en $\mathbb{R}^3$.

elección de N , ya que si se reemplaza N por $-N$, también cambia el signo de la curvatura media escalar).

En el “flujo por la curvatura media”, la hipersuperficie S evoluciona de manera que su velocidad en cada instante coincide con el vector de curvatura media. ¿Qué sucede a largo plazo?

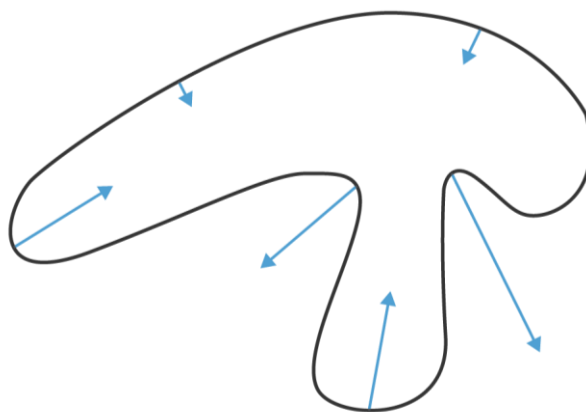
Estas son sus propiedades básicas cuando $n = 2$:

1. Las superficies se van suavizando.
2. Su área va decreciendo: el flujo se puede caracterizar como el opuesto del gradiente del funcional de área.
3. Superficies inicialmente disjuntas permanecen disjuntas y superficies embebidas permanecen embebidas.
4. Superficies compactas tienen su tiempo de vida limitado.
5. Superficies compactas convexas se redondean y se contraen a un punto.

La demostración de este último punto puede realizarse probando que la forma asintótica es totalmente umbilical: en cada punto las curvaturas principales son iguales todas (aunque a priori pudieran variar de punto a punto). Las únicas superficies compactas totalmente umbilicales son las esferas.

Obsérvese que la explicación anterior está vacía de contenido si $n = 1$, es decir, cuando consideramos el flujo por la curvatura de curvas cerradas en el plano. Recordemos a grandes rasgos las características del proceso por el que una curva cerrada plana se mueve, en el instante t , en la dirección del vector normal principal en cada punto, tomando como velocidad al vector de curvatura de la curva en ese punto.

Los tramos fuertemente curvados de la curva se mueven rápidamente; los tramos casi rectilíneos, poco curvados, avanzan lentamente. En los puntos con curvatura positiva, la curva se mueve hacia el interior; en los puntos con curvatura negativa, hacia fuera.



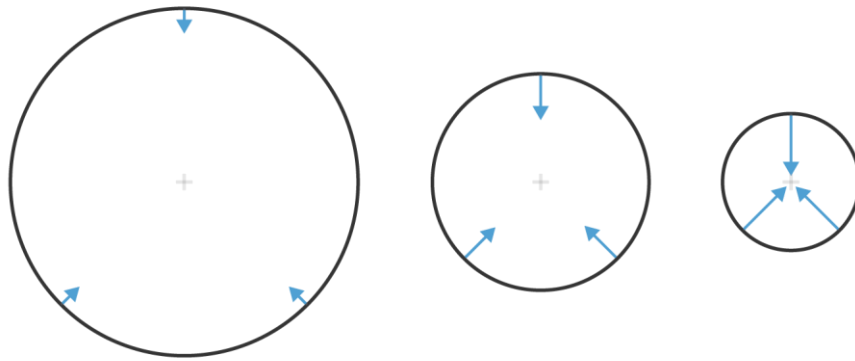
¿Y qué sucede “al final”?

En el caso particular de que la curva sea una circunferencia, entonces sólo cambia su radio, $r(t)$, de acuerdo con la siguiente ley:

$$r'(t) = -\frac{1}{r(t)}.$$

Así, si comenzamos con un radio inicial R , en el instante t , el radio de la circunferencia es

$$r(t) = \sqrt{R^2 - 2t}$$



y este proceso deja de tener sentido en el instante

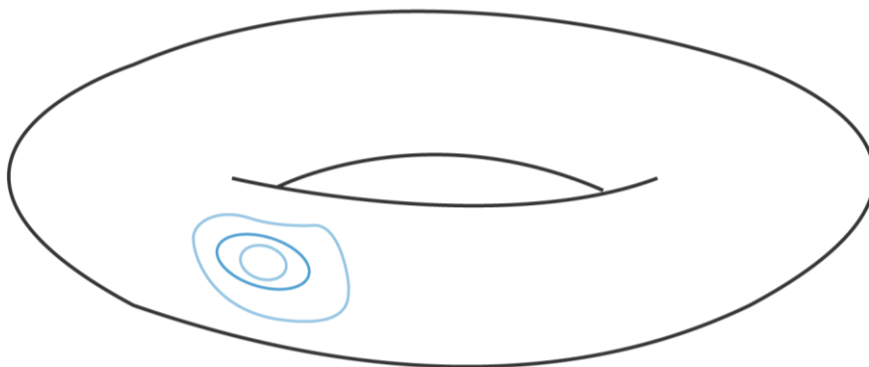
$$T = \frac{R^2}{2}$$

Al número T se le llama “tiempo de vida” de la circunferencia inicial. En ese instante hemos llegado a “tocar una singularidad”, que en este caso sería el centro de la circunferencia.

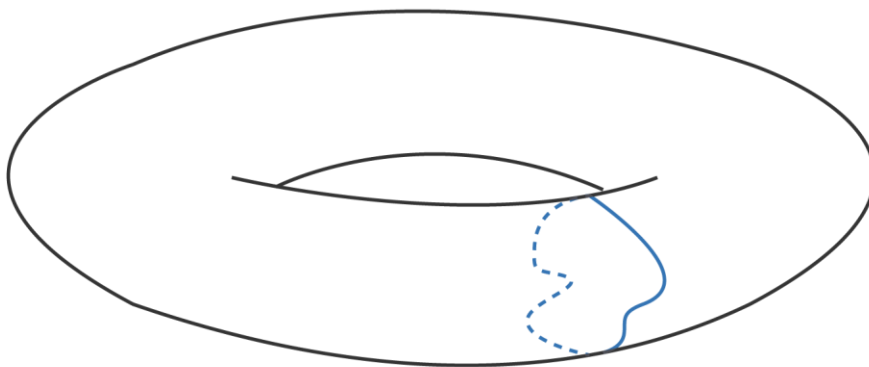
El “principio de comparación” es una de las propiedades más importantes de esta evolución, ya que establece que dos curvas disjuntas (donde una encierra a la otra) no pueden dejar de ser disjuntas en el futuro. De ahí que cada curva cerrada tenga sólo un tiempo finito de vida, pues está encerrada por una circunferencia.

Grayson probó en 1987 que en un tiempo finito la curva inicial evoluciona hacia una curva convexa y Gage y Hamilton probaron un año antes que la curva inicial progresivamente se redondea, hasta que desaparece.

Cuando se considera este flujo entre curvas cerradas sobre una superficie, que avanzan tomando como velocidad su curvatura geodésica, hay curvas que (como en el plano) se contraen en tiempo finito, redondeándose.



Pero a veces el comportamiento es más sutil: si se elige una curva no contraíble, ésta se deformará hasta que su curvatura dentro de la superficie (la “curvatura geodésica”) se anule y surja una geodésica cerrada.



Este proceso es “infinitamente largo” y demuestra el potencial del recurso de los flujos geométricos para obtener automáticamente objetos geométricos óptimos.

Así pues se comprueba que las singularidades pueden no ser puntuales y que el tiempo de vida puede ser “eterno”.

Volviendo al caso de las superficies en $\mathbb{R}^3$ moviéndose bajo el flujo de la curvatura media, el análogo del teorema de Grayson es falso en este contexto, ya que es fácil encontrar un contraejemplo. Se puede considerar, por ejemplo, dos esferas con radio muy grande, unidas por un tubo largo y delgado. Tanto las esferas como el tubo se contraen. Pero como la curvatura media a lo largo del tubo es mucho mayor que sobre las esferas, la zona central del tubo colapsa pronto a un punto, formando una singularidad; la superficie se separa entonces en dos componentes, que eventualmente se harán convexas y colapsarán, redondeándose a un par de puntos.

A diferencia del proceso que seguían las curvas, resulta que en la evolución de una superficie pueden formarse singularidades antes de contraerse y desaparecer.

En cosmología matemática estas propiedades ayudan a entender la evolución de un espaciotiempo con singularidades, que puedan desarrollarse no sólo “al final” (o “al principio”), sino incluso en cualquier instante. El estudio de las singularidades geométricas anteriores (¿cómo es una superficie cerca de un punto singular?, ¿cómo afecta la formación de una singularidad a la evolución subsiguiente de la superficie?, ...) es una herramienta para considerar los problemas análogos (considérese el big-bang o la formación de agujeros negros) en el Universo.

4. Caracterización cuasi-local del concepto matemático de agujero negro.

Un agujero negro se suele definir por su horizonte de sucesos: una frontera en el espaciotiempo tal que ningún suceso de un interior pueda “nunca” ser observado desde su exterior. Este concepto es global y “teleológico”: usa expresamente el futuro infinito.

En los últimos años se ha buscado una caracterización que carezca de esta referencia. Una idea es usar superficies atrapadas, como en el siguiente resultado:

“la existencia de una superficie atrapada implica la formación de una singularidad espaciotemporal en el futuro”.

Este teorema de singularidad fue probado por Penrose en dimensión cuatro y hoy en día ya se ha demostrado en dimensión arbitraria.

Para explicar a grosso modo qué es una “superficie atrapada” e intentar entender el enunciado de este teorema se proponen los siguientes asertos.

1. El vector de curvatura media, H , se puede definir sobre superficies (de cualquier codimensión) en cualquier espaciotiempo. H está íntimamente ligado con la energía gravitacional.
2. Cuando emanan rayos de luz de una superficie cerrada S en $\mathbb{R}^{3,1}$, podrían hacerlo hacia el exterior (“divergen”), o hacia el interior (“convergen”). Una superficie atrapada es una superficie cerrada, espacial, tal que las familias de rayos luminosos que le son ortogonales convergen. “Nada” puede escapar de su interior, por tanto: ésta es una indicación de la presencia de un campo gravitacional tan intenso que consigue que todos los rayos de luz converjan.
3. Respecto al contenido matemático de estas ideas se pueden considerar las siguientes ideas. En el espacio euclídeo, la curvatura media de una superficie S está relacionada con la variación del área: si deformamos S en la dirección normal N con rapidez s , se tiene

$$\partial(|S|) = -\int_S sH = -\int_S \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle$$

Si deformamos S en la dirección $\vec{v}$,

$$\partial_{\vec{v}}(|S|) = -\int_S \langle \vec{H}, \vec{v} \rangle,$$

donde $|S|$ indica el área de la superficie S .

En $\mathbb{R}^{3,1}$, el espacio de Minkowski, si S es una superficie espacial y g su primera forma fundamental (que es definida positiva), existe también un campo de vectores normal, el campo vectorial de curvatura media $\vec{H}$, que mide cómo cambia el área cuando se deforma la superficie, pues también está caracterizado por :

$$\partial_{\vec{v}}(|S|) = -\int_S g(\vec{H}, \vec{v})$$

Para medir la divergencia de los rayos de luz que emanan de S , podemos tomar dos campos vectoriales normales a S , L y L^- , luminosos ($\langle L, L \rangle = 0 = \langle L^-, L^- \rangle$), normalizados (es frecuente tomar $\langle L, L^- \rangle = -2$). Lo habitual es elegir $L^- = \frac{\partial}{\partial t}(-N)$, $L = \frac{\partial}{\partial t}(+N)$.

Con estas notaciones, que una superficie sea atrapada se distingue por que las dos cantidades

$$-\int_S \langle \bar{H}, L \rangle, \quad -\int_S \langle \bar{H}, L^- \rangle$$

son negativas.

Obérvase que este concepto de superficie atrapada no es global: sólo concierne a la propia superficie y sus alrededores. Es “cuasilocal”.

5. Comentarios finales

A pesar de haber transcurrido ya prácticamente dos siglos³ desde la definición de curvatura media de Sophie Germain, este concepto sigue dando pie a nuevas ideas en física matemática.

Roger Penrose propuso en 1982 una lista de los principales problemas no resueltos en Relatividad General. El primero de ellos era buscar una definición cuasi-local de masa para una superficie cerrada S en un espaciotiempo general. Aun cuando todavía hoy en el siglo XXI no se ha encontrado una solución completamente satisfactoria, parece claro que la solución considerará una vez más al vector de curvatura media de la superficie S , $\bar{H}$. La propuesta de S. Hawking es, por ejemplo:

$$M_H(S) = \sqrt{\frac{|S|}{16\pi}} \left[1 - \frac{1}{16\pi} \int_S \langle \bar{H}, \bar{H} \rangle \right]$$

En la actualidad la curvatura media sigue sugiriendo nuevos caminos en las investigaciones de la geometría, la física y la cosmología matemática. Un bello ejemplo aparece en el reciente trabajo de Brendle y Wang [3] en el que, además, se motiva la anterior fórmula de la masa de Hawking.

Referencias

- [1] BRAY, H.; JAUREGUI, J.; MARS, M. *Time flat surfaces and the monotonicity of the spacetime Hawkings mass II*, ArXiv 1402.3287, 13 de febrero de 2014.
- [2] BRAY, H. *Black holes and the Penrose inequality in General Relativity, International Congress of Mathematicians, vol.II*, pp. 257-371, Beijing, 2002.
- [3] BRENDLE, S.; WANG, M.T. *A Gibbons-Penrose inequality for surfaces in Schwarzschild spacetime*, pp. 33-44, Comm. Math. Phys. 330, 2014.

³ La última memoria por la que le concedieron el premio extraordinario de la Academia de Ciencias de París se presentó en 1815.

- [4] CHRUSCIEL, P.; GALLOWAY, G.; POLLACK, D., *Mathematical General Relativity: a Sampler*, pp. 567-638, Bulletin of American Soc. 47, 2010.
- [5] DAIN, S., *Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes*. J. Differential Geometry, 79(1): 33-67, 2008.
- [6] GAGE, M.; HAMILTON, R., *The heat equation shrinking convex plane curves*, pp. 417-491, Journal of Diff. Geo. 23, 1986.
- [7] GRAYSON, M. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, pp. 285-314, Journal of Diff. Geo. 31, 1987.
- [8] PENROSE, R. *Gravitational collapse and spacetime singularities*, pp. 57-59, Physical Review Letters 14, 1965.
- [9] ROJO, J. *De Dido a Penrose, pasando por Minkowski*, pp. 109-118, Un paseo por la geometría, 2009.
- [10] ROJO, J. *Dinámica de curvas cerradas en agujeros negros esféricos*, pp. 327-324, Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés, UCM, 2012.
- [11] SCHOEN, R., *Mean curvature in Riemannian Geometry and General Relativity*, MSRI, 2002.
- [12] TARRÉS, J.; ESCRIBANO, M.C.; ROJO, J. *La curvature media y Sophie Germain*. Historias de Matemáticas, Revista Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, Vol.IV, núm. 2, octubre, 2014.
- [13] WHITE, B. *Lectures on minimal surface theory*, ArXiv 1308.3325, 15 de agosto de 2013.
- [14] WONG, W. *A spacetime characterization of the Kerr-Newman metric*, ArXiv 0807.1904, 30 de enero de 2009.

Sobre los autores:

Nombre: José Rojo Montijano

Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es

Institución: Universidad CEU- San Pablo, Madrid, España.

Nombre: M.Carmen Escribano Ródenas

Correo Electrónico: escrodenas@ceu.es

Institución: Universidad CEU- San Pablo, Madrid, España.

Nombre: Juan Tarrés Freixenet

Correo Electrónico: tarres@mat.ucm.es

Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Cuentos Matemáticos

Dientes de serpiente

Snake teeth

Blanca Martínez Kleiser, Beatriz Pascual Vegas e Irene De La Red García

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 057–066, ISSN 2174-0410

Recepción: 12 Mar'14; Aceptación: 1 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Este relato es fruto de una experiencia llevada a cabo en la UPM con alumnos de primer curso, en la asignatura de Cálculo. Una historia que tiene como protagonista al inspector de policía Barreda que con ayuda de las Matemáticas conseguirá atrapar al asesino.

Palabras Clave: Matemáticas, Literatura, Experiencia en el aula, Innovación.

Abstract

This story is the result of an innovative experience carried out with first year students of Polytechnic University of Madrid (UPM) who were attending the course of Calculus. The story is starring a Police Inspector, Mr.Barreda, who will be able to discover and catch the murderer of an investigated crime with the help of Mathematics.

Keywords: Mathematics, Literature, Innovation.

1. Introducción

Los estudiantes de primer curso del grado de Fundamentos de la Arquitectura de la UPM, del curso 2012/13, participaron en una experiencia, dentro de la asignatura de Cálculo y enmarcada en el proyecto de Innovación Educativa del GIE Didáctica de las Matemáticas: “Experimentación de un nuevo enfoque de la enseñanza de las Matemáticas en la UPM”, que consistió en escribir un relato policiaco.

Partiendo de un homicidio, los alumnos debían elaborar una trama para cuyo desenlace fuera imprescindible resolver ciertos problemas matemáticos relacionados con el contenido de la asignatura.

El relato que viene a continuación es una muestra de aquella experiencia.

2. El crimen

El inspector Barreda no tenía ese día cara de buenos amigos. La fiesta de la noche anterior se había alargado demasiado, y las nueve de la mañana le parecía una hora demasiado temprana para pensar con nitidez.

— Buenos días inspector.

— Buenos días agente. ¿Qué tenemos?

— Homicidio de un hombre blanco, 45 años, su nombre Enrique Gala, arquitecto, acababa de llegar a Madrid procedente de la República Democrática del Congo.

— ¿Han hablado con los familiares?

— Sí, hemos localizado a su hermana. Ha sido ella quien nos ha contado lo que conocemos hasta ahora.

— ¿Y bien? ¿Qué más sabemos?

— Al parecer se había presentado a un concurso de Arquitectura. Por eso estaba en Madrid.

— ¿El forense?

— Está allí, junto al cadáver.

El inspector se dirigió hacia el forense, que examinaba con atención el cuerpo de la víctima.

— Buenos días inspector.

— Buenos días. Qué, ¿alguna pista sobre la causa de la muerte?

— A primera vista, salvo estos puntos rojos en el cuello, parece que fue por un fuerte golpe en la cabeza. Hasta que no hagamos la autopsia no sabremos más.

— Muy bien, manténgame informado.

Mientras Barreda inspeccionaba la escena del crimen se le acercó la teniente Castro.

— No tiene buena cara inspector. ¿Ha pasado mala noche?

— No, en absoluto. En realidad ha sido una noche inolvidable. Estuve en una fiesta y me acosté tarde.

— ¿Está al corriente del caso?

— Sí. ¿Se ha encontrado el arma homicida?

— No. Aún no.

3. Buscando pistas

El equipo de policía, tras hablar con la hermana del arquitecto Enrique Gala, llama al inspector Barreda para comunicarle que hace nueve días se reunió con unos amigos para

cenar y que, según la hermana, acabó con alguna que otra discusión. El inspector se dispone a llamarlos uno a uno para interrogarlos

En primer lugar, acude a casa del organizador de la cena, su amigo Javier González, que se dedica al estudio de serpientes.

— Buenos días, señor González.

— Buenos días, inspector.

— Supongo que ya sabrá por qué motivo estoy aquí. ¿Qué relación tenía con el arquitecto?

— Éramos buenos amigos, nos conocíamos desde hace bastantes años, y luego coincidimos en el Congo.

— ¿Con qué frecuencia se veían?

— Poco, poco. —afirmó rotundamente. — Sobre todo en cenas y en ocasiones especiales como la del otro día. Estoy bastante ocupado con el trabajo últimamente y no he podido dedicar mucho tiempo a la familia y a los amigos.

— Le entiendo. ¿A qué se dedica usted?

— Soy herpetólogo, es decir, zoólogo especializado en el estudio de serpientes y anfibios y los ecosistemas en que viven. Ahora tenemos entre manos un proyecto importante, de un tipo de serpiente que hemos estado investigando mucho tiempo, y creemos que por fin hemos localizado su procedencia.

— Mmm... De acuerdo, y con respecto a la cena, les vieron discutir a usted y al señor Gala. ¿A qué se debía tal discusión?

El herpetólogo se pone nervioso. Tartamudea, pero al fin contesta:

— Pues, resulta que teníamos en mente hacer un viaje, y estábamos discutiendo sobre las fechas, por supuesto no fue una discusión seria, ni mucho menos, era algo más bien en tono amistoso...

El inspector, nada contento con esa respuesta y pensando que gente que se ve poco no organiza viajes juntos, continúa con su interrogatorio:

— Bien, por último... ¿Dónde estaba usted, anoche a las 00:45 de la madrugada?

— Trabajando, en el laboratorio con mi ayudante, por supuesto. ¿Puedo irme ya? Tengo prisa, porque cojo esta misma tarde un vuelo... Por trabajo, ya sabe.

— De acuerdo, hemos terminado.

Dado que el inspector no se queda nada conforme con las respuestas, y aprovechando que está en casa del herpetólogo, le pregunta si puede hablar con su mujer, que también se encontraba en dicha cena.

— Buenos días, señora Ballester.

— Buenos días, inspector. ¿En qué puedo ayudarle?

— Me gustaría que me respondiera a una serie de preguntas sobre la cena que organizaron hace 9 días, con el arquitecto Gala, y sobre la relación que tienen usted y su marido con el mismo.

— Por supuesto, lo que necesite.

— Bien. ¿Qué me puede decir acerca de Enrique Gala?

— Era un buen hombre, señor. Muy amable y caballeroso. Dudo que tuviese algún enemigo, pues era muy gentil, y siempre que podía ayudaba a quien lo necesitase. Así que no me puedo ni imaginar quién habrá podido ser su asesino.

— ¿Y estuvo usted presente durante la discusión del susodicho con su marido?

— No, en absoluto. Yo en ese momento me encontraba charlando con el ayudante de mi marido, pero sí le puedo decir que me di cuenta de la situación, aunque no sé exactamente cuál fue el motivo.

— ¿No le preguntó a su marido al terminar la cena?

— Sí, por supuesto, pero es muy suyo para sus cosas, y para los negocios, así que no me quiso decir nada. Se encerró en su despacho a organizar las vitrinas y ya.

— Mmm... De acuerdo— dijo frotándose la barbilla pensativo— Negocios.

— Sí, ¿alguna cosa más?

— Sí, por último, donde se encontraba usted, ayer por la noche a las 00:45?

— Aquí en casa, en la cama, esperando a mi marido que estaba trabajando, como últimamente hace a todas horas.

— De acuerdo, muchas gracias.

— A usted, inspector.

Tras esta primera toma de contacto con los primeros sospechosos, el inspector Barreda se dispone a continuar con su lista, aunque su instinto le dice, que todo apunta a que fue el herpetólogo. Se dirige a casa del ayudante del herpetólogo, el señor Calleja. Llama a la puerta y se oye una voz que pregunta:

— ¿Quién es?

— ¿Señor Calleja? Soy el inspector Barreda, quería hacerle una serie de preguntas sobre la muerte del arquitecto Enrique Gala.

— Un momento por favor.

Se empieza a oír como abre una cantidad exagerada de cerrojos, pestillos y cadenas.

— ¿Se esconde de algo? — pregunta el inspector al mismo tiempo que se abre la puerta.

— No, claro que no, simplemente me gusta vivir seguro.

Una vez dentro, comienza el interrogatorio.

— De acuerdo, ¿qué relación tenía con el arquitecto?

— No lo conocía demasiado. Era amigo de mi jefe, el señor González, y he coincidido con él en alguna cena a la que he acudido acompañando a Javier. Pero poco más. Parecía un buen hombre.

— Y usted, ¿estuvo presente en la discusión que tuvieron su jefe y Enrique Gala?

— Pues como todos, presente no, era una cosa entre ellos dos. Pero por supuesto todos nos dimos cuenta de que pasaba algo. Aunque no fue nada, todo quedo en una tontería de amigos.

— ¿Y no sabe a qué se debía?

— No, claro que no. Yo soy su ayudante, el señor González es muy estricto con eso. No me dedico a hacer preguntas ni a meterme en la vida privada de mi jefe.

— Pero, la señora Ballester me dijo que no era un asunto privado, sino que se trataba de algún negocio.

— Eh... Pues no sé. Yo no sé nada de nada.

— Bueno, será reservado. Por último, ¿dónde se encontraba la noche del asesinato a las 00:45?

— ¿Anoche? Salí a cenar, con unos amigos. Después fuimos a tomar algo. Era mi cumpleaños y me regalaron un esqueleto fosilizado de serpiente.

— Un momento... ¿No trabajó ayer por la noche?

— No — contesta nervioso.

— ¿Me puede enseñar su regalo? El cadáver presentaba dos heridas en el cuello...

— Yo no he sido.

— Es sólo para comprobarlo. Tenemos una sospecha y gracias a la prueba del Carbono 14, averiguaremos la antigüedad de su serpiente.

De acuerdo, pues nada más por el momento. Ya le llamaremos si necesitamos algo... ¿O usted también se va de viaje de trabajo con su jefe?

Ya en el laboratorio.

— Buenos días inspector. Hemos realizado el análisis.

— Interesante prueba la del carbono 14. Podría explicarme el proceso.

— Por supuesto. Con mucho gusto:

— Hemos medido la cantidad de isótopo que contiene el hueso de serpiente y ha resultado ser de 0,8854.

La ecuación de la velocidad de desintegración del C14 es

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -kQ(t)$$

Como se conoce la vida media del C-14, 5.730 años, y la cantidad inicial de isótopo acumulada, Q_0 , sólo hay que resolver la ecuación anterior con dichas condiciones. Lo que nos lleva a

$$\begin{cases} Q(t) = Ce^{-kt} \\ Q(0) = Q_0 \\ Q(5730) = \frac{Q_0}{2} \end{cases}$$

Al conocer la cantidad que aún queda de isótopo radiactivo este modelo nos lleva a afirmar que $t=16.705$.

Así, el fósil es verdadero y tiene una antigüedad de 16.705 años. En el laboratorio se comprueba que los restos encontrados junto a la víctima, tienen menos de 2 años. Por tanto, el ayudante no es culpable.

— En ese momento el inspector recibe una llamada y tiene que marcharse de inmediato.

— ¿Inspector? Llamaba para preguntar cómo le han ido los interrogatorios. ¿Sabe algo?

— Tengo mis sospechas, pero me faltan datos. Voy a casa del herpetólogo, asegúrate de que él y su mujer siguen ahí y trae al equipo.

De nuevo en casa del señor González, este no está muy contento por la segunda visita del inspector.— Le dije que cojo un vuelo esta tarde ¿qué se dejó por hacer la primera vez que vino?

— No se preocupe, será una visita breve. El forense quiere algunas muestras de comida, pues se sospecha que pudiese comer algo en muy mal estado que le agravó algún problema de salud.

— Aquí no encontrará nada. Ya se lo digo.

— Inspector Barreda, ¿puede venir un momento? —interrumpió el agente.

— Discúlpenme, si son tan amables...

Los interrogados hacen señas de aprobación mientras el inspector y el agente ya están prácticamente fuera de la habitación. Entran en una sala contigua con un escritorio y las paredes repletas de expositores y dibujos.

— ¿Qué le parecen, inspector?

— ¿El herpetólogo? Prepotente. Una persona poderosa y demasiado orgullosa como para confiar en que la gente puede hacer las cosas bien sin su ayuda. Si investigásemos un poco seguro que sacábamos más de un trapo sucio...

— Yo he investigado un poco...

— Adelante, agente.

— El herpetólogo, señor. Como usted dice, ninguno encargaría algo así a terceras personas que no fuesen de su confianza. Y el señor González es el único que tiene medios eficientes en su poder para hacerlo. Medios de los que sólo se encarga él y que conoce bien...

— Serpientes... —dijo el inspector viéndolo todo un poco más claro.

— Serpientes. He echado un vistazo a la casa mientras hablaba con ellos... Mire esa vitrina.

Le señaló una pequeña estantería cerrada con candado. Dentro de ella, pequeños tubos de ensayo perfectamente etiquetados. *Acanthophis*, *Boulengerina*, *Dendroaspis*, *Hemachatus*, *Micruroides*...

— Son... ¿venenos? — preguntó el inspector, horrorizado.

— De casi todas las serpientes tropicales que se pueda imaginar. En algunos falta un poco...

— Rápido. Busque qué especies se pueden encontrar en la República Democrática del Congo y qué cantidad de veneno hace falta para matar a una persona.

— Ya lo sé, señor. La *Dendroaspis polylepis*, más conocida como mamba negra. Es la serpiente más venenosa de África.

— ¿Tan obvio?

— En realidad, no lo es tanto. — comenzó a recitar mientras consultaba su teléfono móvil.— “Es peligrosa porque es muy rápida y agresiva...”

— Bueno, da igual. No me importa la serpiente, me importa el veneno.

— Claro, claro... “Su mordedura puede inyectar de 100 a 120 ml de veneno. Sólo el 10% de esa cantidad puede matar a un adulto. Aunque su veneno no es el más tóxico de las serpientes...”

— En estos tubos de ensayo debe haber unos 6 ml... ¿Cuánto calcula usted que sería necesario para debilitar mucho a alguien?

— Pero, señor. No está débil. Está muerto.

— Se vieron hace nueve días. Los 0,01 ml de veneno lo habrían matado antes de llegar a los entrantes. No. En el caso de que se lo haya suministrado, no le dio tanta cantidad.

— Ah... cierto... pues... contando con que no tendría ningún antídoto y aun así puedo sobrevivir una semana... ¿la mitad de los 0,01 ml?

El inspector ya estaba volviendo al salón.

— Disculpe, señor González. Todo está bien pero debemos esperar a que los agentes hagan una inspección rutinaria. ¿Sería tan amable de servirme algo de beber?

El herpetólogo hizo una señal a su mujer y esta se dirigió hacia la cocina volviendo con una copa llena de agua con hielo.

— Muchas gracias. Creo que ya tengo exactamente lo que necesito.

El inspector analiza la copa y toma datos.

— Consideraré la copa como un paraboloide elíptico de ecuación $x^2 + y^2 = z$ y altura 10 cm., sabremos si puede contener por lo menos 125 ml para que el efecto mortífero del veneno (0,005 ml) se diluya lo suficiente como para suministrarse lentamente al organismo.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{10} \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \, dz \, d\alpha = 50\pi$$

La copa cumple con la cantidad mínima.

Aun así, con esa cantidad no pudo matarle.

Para que el veneno acabara con la vida del arquitecto, hacía falta el tripe de la cantidad encontrada. En ese momento el inspector recordó los dos puntos rojos en el cuello... ¡Podrían ser el resultado de dos inyecciones con la cantidad del veneno para que resulte letal!

Tras la visita a la casa de Calleja, el inspector también se fijó en unas jeringas, aparentemente de trabajo, que tenía en una estantería. Estaban sin numerar, pero el inspector pudo comprobar que eran similares a unas que había visto en el depósito forense.

— Esta jeringa es como un cilindro. De largo mide 3cm y el diámetro de la misma 0.05 cm., Así que su volumen debe ser aproximadamente

$$\int_0^3 \int_0^{0.025} \int_0^{2\pi} r \, d\alpha \, dr \, dz = 0.0058 \, ml$$

Lo había logrado, las cantidades coinciden con las necesarias para que fuera letal el veneno de la mamba negra. Solo faltaba encontrar las pruebas, pero, si estaba el inspector en lo cierto, el ayudante podría estar implicado por poseer las jeringas.

Sin perder el tiempo, consiguen una orden de registro para los domicilios de Calleja y González, mientras estos quedan retenidos por orden del juez.

Encuentran en la casa de González una habitación cerrada con llave.

— ¿Cree que aquí pueden estar ocultas las pruebas, inspector?

— Lo averiguaremos en unos segundos agente, pero esto resulta muy sospechoso...

Unos miembros del equipo consiguen abrir la puerta, y tras ella, se encuentran varios documentos de un proyecto de la víctima, y de un plano en el mismo sitio, donde González y su equipo pretendían estudiar a las serpientes. Habían encontrado al móvil que impulsó al herpetólogo a realizar tal crimen. Con esto, el inspector tenía casi todas las pruebas para acusar a González de homicidio. Faltaba la mamba negra de la cual habían obtenido el veneno.

No fue difícil encontrarla, estaba en casa de Calleja, la casa que con tanta cerradura parecía esconder algo... Tras revisar su estudio, encontraron en una papelera, dos jeringas ocultas en una caja de una grapadora.

¡Lo tenían todo! El caso quedaba resuelto con González y Calleja acusados de asesinato

FIN.

Sobre las autoras:

Nombre: Blanca Martínez Kleiser

Correo Electrónico: blaki_92@hotmail.com

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Beatriz Pascual Vegas

Correo Electrónico: beapasve@hotmail.com

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Irene De La Red García

Correo Electrónico: idelared@me.com

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Grupo de Innovación Educativa Didáctica de las Matemáticas

Nombre: Ascensión Moratalla

Correo Electrónico: ascension.moratalla.delahoz@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Juana María Sánchez

Correo Electrónico: juanamaria.sanchez@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: M^a Agripina Sanz

Correo Electrónico: mariaagripina.sanz@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: M^a Carmen Ferreiro

Correo Electrónico: mariacarmen.ferreiro@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación

Estructuras emergentes y órdenes intermedios: paradigmas para entender la complejidad en la naturaleza... y en la vida

Emerging structures and intermediate orders: paradigms for understanding the complexity in nature ... and in life

Miguel Ángel Martín Martín

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 067–074, ISSN 2174-0410

Recepción: 14 Abr'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

En esta nota se repasan las características más importantes de estructuras complejas que emergen como resultado de procesos dinámicos y se mencionan algunos ejemplos. Se da un ejemplo matemático sencillo que sirve para ilustrar algunos aspectos relevantes sobre la génesis y características de los sistemas complejos.

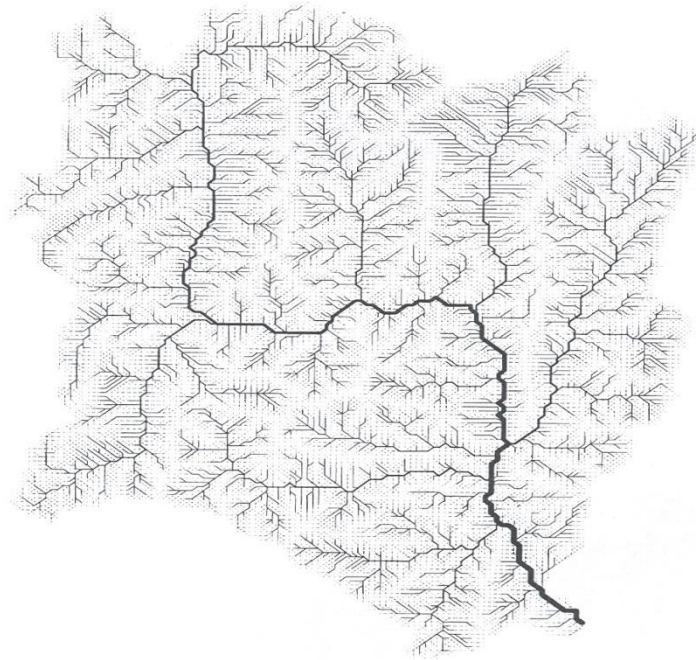
Abstract

The main features of complex structures emerging as a result of dynamical processes are reviewed and some examples of such structures are given. A simple mathematical model is used to illustrate some relevant aspects on the genesis and features of complex systems.

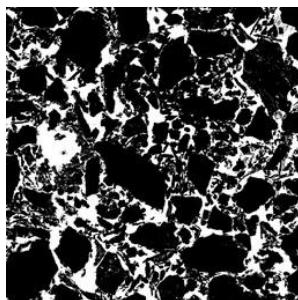
1. Estructuras emergentes “everywhere”

Las estructuras emergentes están por doquier y aparecen como fruto de la evolución de los sistemas.

Un ecosistema, una cuenca de drenaje, el suelo, un hormiguero o la misma mente pueden servir de ejemplos de estructuras emergentes en las cuales de las interacciones locales entre los componentes de una red (nivel micro) emerge una estructura o patrón global (nivel macro).



En el caso de las redes fluviales, por ejemplo, el proceso de ramificación guiado por una mezcla de causas deterministas y componentes aleatorios, determina a largo plazo la estructura de la cuenca de drenaje. Otro proceso, el de fragmentación de sistemas, término que puede tener un sentido muy amplio, está en el origen de la formación de muchos sistemas complejos. Como ejemplo concreto citaremos el suelo como medio granular/poroso formado por individuos (granos y poros), que aparecen como resultado de un largo proceso en el que la fragmentación es un proceso determinante. El resultado es la emergencia de una estructura con características fractales bien definidas.



← zoom



El estudio de estas estructuras ha dado lugar a las modernas teorías de la complejidad que involucran un amplio abanico de aspectos que explican la formación y las características de estas estructuras. Aquí pretendemos simplemente mencionar de forma somera alguno de ellos, pero sobre todo, dar un ejemplo matemático, que aunque simple, sirve para ilustrar e intuir aspectos relevantes sobre la génesis y características de los sistemas complejos.

Una explicación de la formación de estas estructuras es la teoría, ampliamente aceptada, de la *criticalidad auto-organizada* (SOC) o tendencia de los sistemas con muchos grados de libertad para construir un estado al borde de la criticalidad que se caracteriza por involucrar un amplio rango de escalas (espaciales o temporales). Una idea esencial de la SOC consiste en admitir que la mano invisible que guía la evolución de los grandes sistemas interactivos debe buscarse en las propiedades generales de la dinámica más que en el estudio detallado de cada uno de sus ingredientes, como tradicionalmente sostienen los reduccionistas.

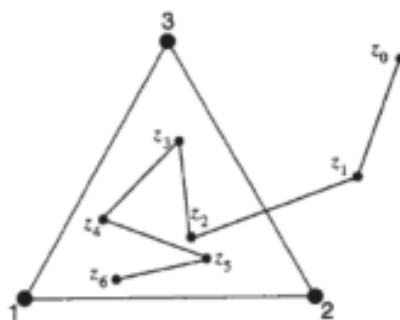
Una característica que suelen compartir esas estructuras emergentes es la *fractalidad* o ausencia de una escala característica unida a una invarianza respecto de la escala, la cual se manifiesta con la aparición de *leyes potenciales* para las distribuciones de probabilidad de distintas características geométricas. Ello puede explicarse a su vez por el hecho de que muchos sistemas de la naturaleza evolucionan una forma intermitente y con rupturas, más que de una forma suave y continua, en las que interviene el azar provocando acontecimientos y formas de todos los tamaños.

Otra característica fundamental es el nivel intermedio de *complejidad* o *incertidumbre* inherente al sistema, lo que se mide por la *entropía de Shanon* que en tiene su lectura en términos de *heterogeneidad* o de *diversidad*. En dicho nivel intermedio radica la estabilidad de este tipo de estructuras. Una estructura (por ejemplo, comunidad de individuos) poco diversa o heterogénea, es muy vulnerable, mientras que con una diversidad extrema (por ejemplo, con muy pocos individuos de cada especie), colapsa. El nivel intermedio garantiza la estabilidad y la adsorción de inestabilidades puntuales.

2. Un ejemplo simple pero paradigmático

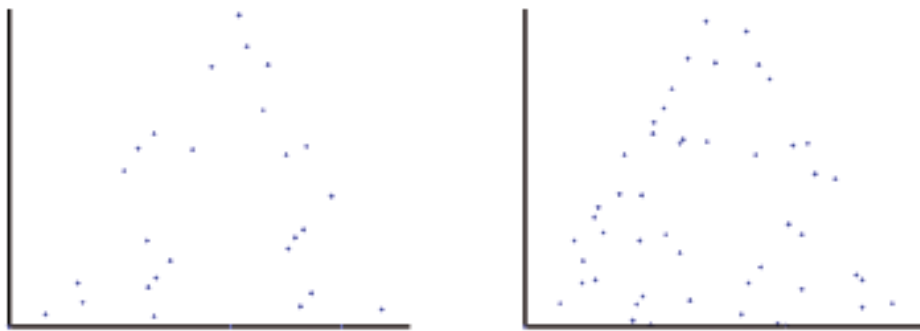
El ejemplo que sigue, denominado “juego del caos” (probablemente conocido por el lector) puede ser muy útil para intuir aspectos importantes de las estructuras complejas y hacer un paralelismo con lo que hemos relatado más arriba.

Consideremos ahora otro ejemplo de ley de evolución o sistema dinámico. Supongamos que marcamos tres puntos A, B, C en el plano y partiendo de un punto x_0 cualquiera nos dirigimos en línea recta hacia uno de dichos puntos quedándonos a mitad de camino entre el punto seleccionado y el punto de partida x_0 .

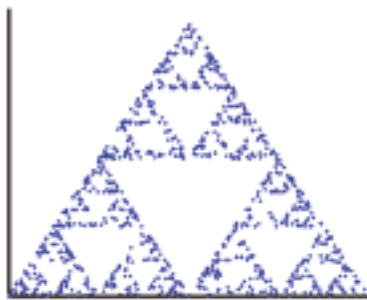


El punto al que hemos de dirigirnos lo seleccionamos de forma aleatoria tirando un dado y con las siguientes reglas: si sale 1 ó 2 nos dirigimos al punto A , si sale 3 ó 4 nos dirigimos al punto B y si sale 5 ó 6 vamos hacia el punto C . Si llamamos x_1 al punto en el que nos hemos quedado una vez hemos tirado el dado y hemos obrado con la norma antes apuntada, repetimos exactamente el mismo proceso una y otra vez obteniendo los puntos o estados $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. ¿Podría predecirse hacia qué punto o región se dirigen los “futuros” x_n ? ¿Vagarán al azar o existe algún tipo de certidumbre? ¿Dependerán del estado inicial? Puesto que nuevamente se trata de un problema ingenuo que todos podemos entender, parar la lectura de este artículo y pensar en estas preguntas por algún tiempo sería altamente aconsejable. Incluso las personas que conozcan un mínimo de programación, después del ejercicio mental propuesto, pueden mandar a su ordenador que simule lo que ocurriría.

La figura que sigue muestra el resultado de dos simulaciones partiendo del mismo punto, una con 20 iteraciones y otra con 30 iteraciones. Puede verse que los resultados son distintos.



Esta otra figura muestra la simulación con 1000 puntos.



El resultado, aunque sea conocido, es sorprendente: ¡siempre aparece la misma figura! ¡Independientemente del punto del que se parta o de que los primeros resultados sean diferentes! La figura que aparece, llamada triángulo de Sierpinski, es la estructura que emerge como consecuencia de esa dinámica tan simple.

La geometría de este tipo de objetos sigue así una nueva ley de regularidad llamada *autosemejanza* que es la invarianza de su geometría respecto de la escala a la que son observados mostrando huecos (regiones sin puntos) e irregularidades a todas las escalas: si hiciéramos un “zoom” en uno de los triangulitos más pequeños lo que veríamos de nuevo es otro triángulo de Sierpinski. La *dimensión fractal* de esa región, que en este caso es $\log 3 / \log 2$, viene a reflejar su capacidad para rellenar el espacio, indicando que se trata de un objeto geométrico con tamaño intermedio entre una curva y una superficie.

Pero lo que es aún más llamativo es que surjan asociados a procesos dinámicos tan simples como el juego del caos. Allí el objeto no aparece como el resultado de un proceso geométrico “ordenado” como el que acabamos de exponer, pues un trozo de órbita, en el juego del caos, es errática y no manifiesta ninguna regularidad, sino como una estructura *asintótica* (o a largo plazo) que aparece como resultado de una lucha entre determinismo y aleatoriedad presentes en el juego.

Aunque el resultado del juego del caos de una realización concreta $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ (órbita), y el de otra, incluso obtenida partiendo del mismo estado inicial x_0 , puede ser completamente distinto. La evolución de la órbita sigue, de hecho, una dinámica caótica: se tiene una certidumbre acerca de la región del plano en torno a la que vagan las órbitas, que es el mencionado triángulo de Sierpinski, y su dimensión fractal es una primera aproximación de la cuantificación de la incertidumbre del sistema. Aunque es realmente la *dimensión de entropía* $\sum p_i \log p_i$, que tiene en cuenta las probabilidades p_i , la que determina la heterogeneidad con que se distribuyen las órbitas dentro del atractor, y con ello da la medida del *nivel de complejidad* de la estructura emergente.

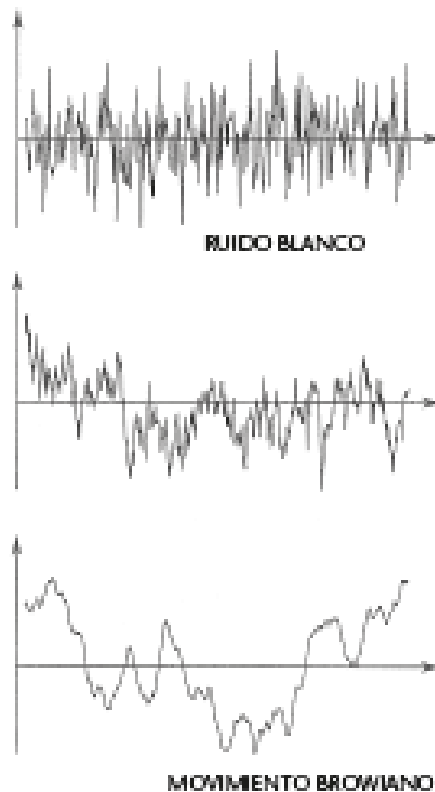
3. Complejidad en la vida y en las ciencias

La complejidad en la naturaleza es más una norma que una excepción manifestándose por medio de estructuras de naturaleza fractal. Este tipo de *orden intermedio* surge bien como fruto de dinámicas caóticas o bien como una necesidad de los sistemas para cumplir una misión o ser estables. Así, por ejemplo, la estructura ramificada (fractal) de los bronquios es la respuesta de la naturaleza a la necesidad de intercambiar el oxígeno en la sangre en plazos pequeños de tiempo, o la complicada estructura tridimensional de los vasos sanguíneos en el hígado responde a la necesidad de optimizar el proceso metabólico.

La irrupción de las nuevas teorías del caos y los fractales han conducido a las nuevas teorías sobre la complejidad que tratan de explicar sistemas tan distintos como el cerebro humano, la organización en un hormiguero o la estructura de los ecosistemas. Estas teorías, si bien de carácter un tanto especulativo, han arrojado una nueva visión sobre la organización de los sistemas en general sugiriendo cómo sistemas aparentemente distintos obedecen a pautas de complejidad muy similares con la omnipresencia de esas estructuras intermedias que

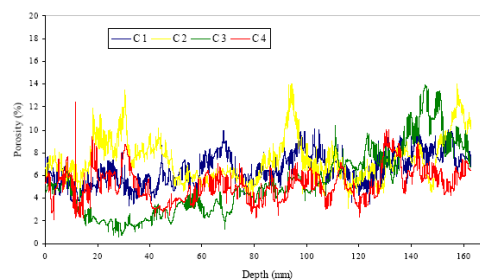
facilitarían el buen funcionamiento evitando que los sistemas colapsen. La cadena de interacciones locales entre los elementos constitutivos del sistema (neuronas, hormigas, elementos vivos de una cadena trófica) que reciben y transmiten información básicamente local a los elementos vecinos, hace emerger una estructura de orden a gran escala. El paralelismo con el juego del caos es grande. Allí el paso de un estado (punto) al siguiente tiene un factor de certeza (se va hacia uno de los tres puntos) y también una “dosis” de incertidumbre. El resultado es la emergencia de la estructura global cuando el número de iteraciones es grande, aun cuando poco puede ser conocido de la sucesión de puntos (órbita) en una secuencia concreta.

Los registros espaciales o temporales derivados de la observación de una estructura compleja, suelen tener una “memoria” intermedia entre el *ruido marrón* (también llamado ruido Browniano) y la ausencia total de memoria del *ruido blanco*.



Los ruidos fractales, en particular el llamado, por razones que no vienen al caso, *ruido 1/f*, aparecen en innumerables situaciones en la naturaleza, desde la geometría de una costa hasta los ritmos cardiacos, pasando por las secuencias de aminoácidos en el ADN (figuras). En muchos de esos ejemplos las dimensiones fractales toman valores entre 1 y 2 verificándose esa omnipresencia de las estructuras intermedias que parecen ser una constante en la naturaleza.

Así, por ejemplo, la figura siguiente



corresponde a la porosidad observada en secciones transversales de cilindros de suelo cuando se estudian mediante tomografía axial computerizada. La complejidad inherente a los procesos de fragmentación es heredada por la estructura tridimensional porosa del suelo y ésta, a su vez, se manifiesta en medidas indirectas como es la porosidad de las secciones aludidas.

Las estructuras a medio camino entre el orden y el desorden parecen esconder la armonía y la belleza en muchos órdenes de la vida. El dicho “en el punto medio está la virtud” tendría su lectura en los términos en los que venimos hablando: el orden riguroso es aburrido y el desorden absoluto desquizante. Ahora bien, el “punto medio” no tiene un único camino y el equilibrio de ese orden intermedio puede resolverse de infinitas formas. La libertad está permitida, el libertinaje prohibido y las actitudes fundamentalistas desaconsejadas.

2. Conclusiones

Las estructuras emergentes aparecen en innumerables escenarios de la naturaleza como consecuencia de la evolución de los sistemas. Se caracterizan por tener un nivel intermedio de complejidad, aspecto en el que radica su estabilidad. La aparición de estas estructuras puede estar provocada por interacciones locales simples entre elementos del sistema de las que emerge el orden global que las caracteriza.

Referencias

- [1] RODRÍGUEZ-ITURBE, Rinaldo A. *Fractal River Basins: Chance and Self-Organization*. Cambridge University Press, 2001.
- [2] PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. and SAUPE, D. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. Springer-Verlag. New York, 1992.
- [3] MARTÍN, M. A. *Matemáticas Bioenriquecidas*, 2003.
<http://www.matematicasbioenriquecidas.com/>

Sobre el autor:

Nombre: Miguel Ángel Martín Martín

Correo Electrónico: miguelangel.martin@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid

Grupo de Investigación en Fractales y Aplicaciones PEDOFRACT

<http://www.etsia.upm.es/pedofract/>

Dpto. Matemática Aplicada

ETSI Agrónomos

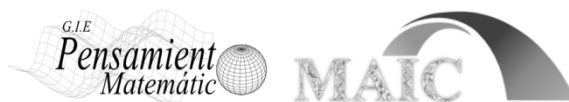
Investigación

Evaluación de la influencia del factor de forma de una estructura de nervios cuatripartitos bajo solicitaciones cuasiestáticas

Evaluation of the influence of the form factor of a quadripartite nerve structure under quasi-static loads

Juan Manuel Ros García, Roberto Alonso González Lezcano
y Susana Hormigos Jiménez

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 075-090, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Ago'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

A partir de un modelo estructural básico, definido por nervios cuatripartitos de curvatura esquinada y bastidor horizontal de base, se realizan diferentes simulaciones numéricas por discretización de puntos, considerando el factor de forma de su geometría, variable. El método aplicado sirve para confirmar que el coeficiente de seguridad resultante de la comparación realizada a los modelos, se optimiza al reducir progresivamente la relación entre la superficie de la envolvente y el volumen encerrado por la estructura espacial. El modelo es sometido a la acción de cargas permanentes y acciones de viento con efecto prolongado en su aplicación cuasiestática. Se realiza un análisis del comportamiento sobre la estructura portante tanto de manera aislada como considerando las cargas totales, determinando por cada configuración de forma las zonas más desfavorables solicitadas y la evaluación de cargas dominantes. Asimismo se consideran en la modelización, los casos materiales para la estructura de acero al carbono en la parte inferior horizontal de la base, adoptando la solución tanto con aleación metálica de aluminio como de fibra de vidrio en la parte superior de los nervios cuatripartitos.

Palabras Clave: Simulación numérica, modelización numérica, estructura portante, factor de forma.

Abstract

From a basic structural model, defined by quadripartite nerves with cloister curvature and horizontal frame as the base, different numerical simulations are performed by using points discretization, considering the form factor of its geometry, variable. The method used allows confirming that the safety factor resulting from the comparison of the models is

optimized when reducing gradually the ratio of the covered area and the volume enclosed by the spatial structure. The model is subjected to the action of permanent and wind loads, with prolonged effect in their quasistatic application. It is performed a behavioral analysis of the supporting structure both in isolation and considering the total loads, determining for every shape configuration the worst requested areas and evaluating prevailing loads. It is also considered when modeling the material cases for carbon steel structure in the lower horizontal part of the base, thus adopting the solution with aluminum metal alloy as glass fiber in the top of the quadripartite nerves.

Keywords: Numerical simulation, numerical modelization, supporting structure, form factor.

1. Introducción

Se hace preciso establecer un método de cálculo que permita establecer una comparación de las variables que operan en el diseño estructural basado en fiabilidad, coste y seguridad de un módulo espacial. Con tal objetivo se demuestra que a partir del desarrollo de simulaciones numéricas de una estructura portante definida por nervios cuatripartitos, se alcanzan mejores resultados desde el punto de vista de resistencia mecánica al practicar una reducción de su *factor de forma*. Se entiende por *factor de forma* de un espacio construido como el coeficiente entre la superficie de la envolvente y el volumen que comprende (S/V). A medida que el volumen aumenta, también lo hace la superficie exterior, pero en menor proporción, de manera que el factor de forma disminuye. Igualmente, a mayor compacidad menor superficie exterior¹.

Se pretende demostrar mediante simulaciones numéricas por elementos finitos que al modificar el denominado *factor de forma* de la estructura se puede obtener un mayor índice de seguridad en el diseño de la estructura portante al ser sometida a cargas permanentes y cargas de viento; lo que garantizaría una mejora en su funcionalidad, seguridad y habitabilidad. Dentro de las diferentes opciones materiales, se verifica dimensionalmente considerando para la parte inferior horizontal de la estructura, acero al carbono y aleación metálica por un lado y fibra de vidrio por otro para los nervios superiores cuatripartitos.

Se procede del modo que el factor de seguridad se determina por medio de la siguiente expresión:

$$\eta_M = \sigma_{VM} / \sigma_Y$$

Donde:

η_M es el coeficiente de seguridad aplicable a la propiedad de los materiales en la combinaciones de cargas estáticas para los distintos materiales [1].

σ_{VM} es el valor resultante de esfuerzo debido a las solicitaciones aplicadas (esfuerzo de Von Mises en nuestro caso).

σ_Y es el valor de cálculo de las propiedades de los materiales (límite elástico).

¹ Compacidad se define como la relación entre el volumen comprendido dentro de una superficie envolvente, es decir, el inverso del factor de forma.

El material fallará cuando la máxima energía de distorsión se presenta en materiales dúctiles que son capaces de absorber una cierta cantidad de energía antes de sufrir una falla o de romper.

De acuerdo con este criterio un elemento estructural colapsa cuando en alguno de sus puntos la energía de distorsión por unidad de volumen rebasa un cierto umbral (ver figura 1):

$$e_{dist} \geq \frac{\sigma_Y^2}{2E}$$

La fluencia ocurrirá cuando la energía de distorsión de un volumen unitario sea igual a la energía de distorsión del mismo volumen cuando se lo someta a un esfuerzo uniaxial hasta la resistencia a la fluencias (límite elástico del material).

El esfuerzo de Von Mises se obtiene por la siguiente expresión:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \geq \sigma_Y$$

Donde:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

σ_Y , la tensión del límite elástico del material de la pieza.

σ_1, σ_3 , la mayor y la menor tensión principal en el punto considerado.

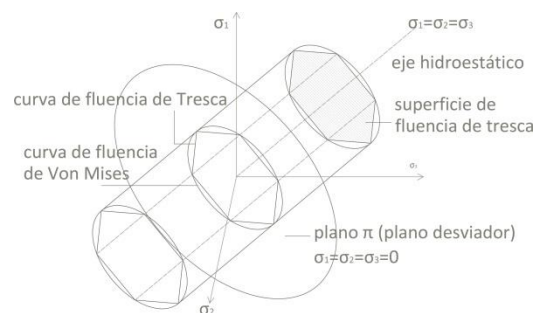


Figura 1. Representación criterio de Von Mises

Es sabido que la forma envolvente de un edificio representa un factor determinante en cuanto a su aprovechamiento climático y relación con el entorno, definido por dos de sus principales características: la superficie de su cerramiento y el volumen que encierra.

A medida que el volumen aumenta, también lo hace la superficie exterior, pero en menor proporción, de manera que el *factor de forma* disminuye. Igualmente, a mayor compacidad menor superficie exterior y, consecuentemente, pérdidas energéticas menores y mayor eficiencia prestacional.

Así que, para minimizar el intercambio energético entre el edificio y su ambiente exterior, teóricamente la mejor forma de una edificación sería la esférica. La compacidad de un edificio depende de la geometría (forma y tamaño) de las condiciones de contorno [2].

De igual manera se pretende demostrar que el *factor de forma* no solo contribuye a minimizar el balance energético del espacio construido sino que también tiene incidencia directa en la resistencia mecánica de su estructura, y que a mayor compacidad volumétrica existe una mejor respuesta frente a resistencia de cargas referidas a viento y nieve.

Los modelos que han sido utilizados (ver Figura 2), sometidos a variables tipológicas de compacidad geométrica son:

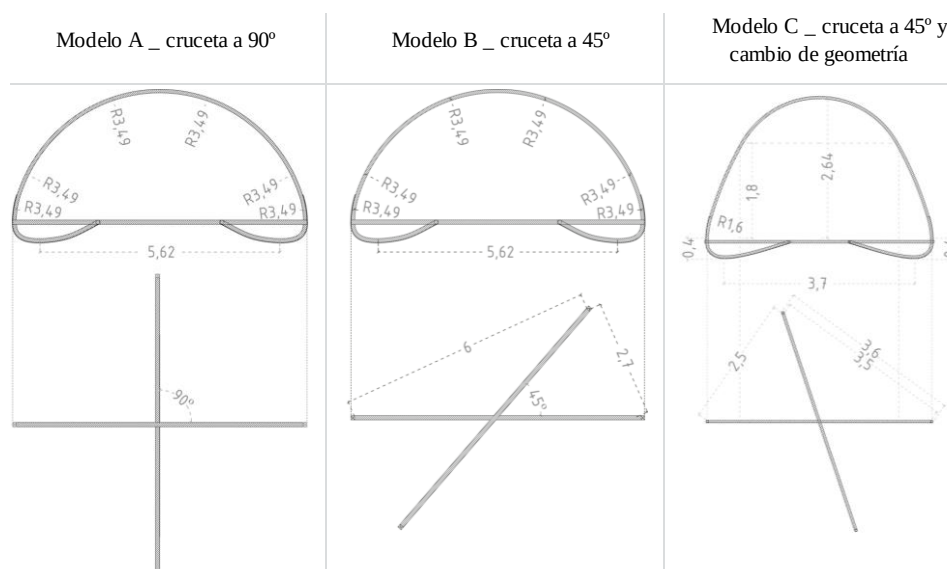


Figura 2. Modelos de tipología variable considerados

2. Metodología desarrollada

Para la determinación del modelo se ha utilizado el método de elementos finitos como valiosa herramienta en la etapa del diseño ya que permite no solo representar geometrías complejas, considerando las más variadas condiciones de carga, y las propiedades mecánicas del material, sino que también facilita la interacción entre los distintos componentes estructurales del modelo².

Se procede de manera que la estructura queda dividida en pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no.

Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema.

² La metodología por elementos finitos permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a las hipótesis básicas del método. Los prototipos, por lo tanto, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el primero puede acercarse bastante más al diseño óptimo, minimizando el elevado coste económico y el tiempo de desarrollo.

Un punto cualquiera del sólido tiene tres desplazamientos u, v, w , que son función de las coordenadas (x, y, z) del punto (ver Figura 3), y que se agrupan en un vector:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Un nodo cualquiera de un elemento tiene tres desplazamientos u, v, w . Todos ellos se agrupan formando el vector de desplazamientos nodales del elemento.

$$\delta^e = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \dots]^T$$

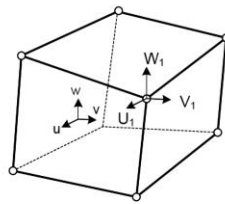


Figura 3. Elemento finito tridimensional de 8 nudos

Los desplazamientos se interpolan en función de los desplazamientos nodales mediante las funciones de interpolación:

$$u = \sum N_i U_i$$

$$v = \sum N_i V_i$$

$$w = \sum N_i W_i$$

Esta interpolación se representa en la forma matricial habitual:

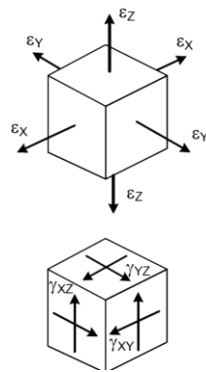
$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e$$

Siendo $\mathbf{N}$ la matriz de funciones de interpolación, cuya estructura en este caso es:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

En un punto sólido tridimensional, el vector de deformaciones unitarias contiene seis términos, que corresponden a las tres deformaciones unitaria $\mathbf{e}$, y a las tres deformaciones ingenieriles $\mathbf{g}$.

Su valor en función de las derivadas de los desplazamientos es, en el caso de las pequeñas deformaciones:



$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Esta expresión se puede poner en la forma habitual:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u}$$

donde se identifica el operador $\mathbf{j}$, de tamaño 6×3 , que pasa de las deformaciones $\mathbf{u}$ a las deformaciones unitarias. Sustituyendo las deformaciones $\mathbf{u}$ en función de las deformaciones nodales, a través de las funciones de interpolación se obtiene:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e$$

La matriz $\mathbf{B}$ relaciona las deformaciones de los nudos con las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N}$$

Dada la estructura de $\mathbf{N}$, la matriz $\mathbf{B}$ se puede poner en la forma:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} = \partial \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n]$$

Cada una de las matrices $\mathbf{B}_i$ tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{B}_i = \partial \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Las tensiones en un punto cualquiera del dominio están definidas por el tensor de tensiones en tres dimensiones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}$$

La ecuación constitutiva del material para un material elástico lineal es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$$

Siendo:

$\mathbf{D}$ la matriz elástica, que para un material elástico lineal es constante y depende de sólo dos parámetros: el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson ν . Su valor es

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$\mathbf{e}_0$ es el vector de las deformaciones unitarias iniciales existentes en el material en el punto considerado, debidas normalmente a las temperaturas, aunque pueden incluirse en ellas las debidas a los errores de forma, etc.

s_0 son las tensiones iniciales presentes en el material, de valor conocido.

Se han elaborado diferentes modelizaciones (ver Figura 4) para cada uno de los tres módulos estructurales que han sido considerados, modificando su ya descrito *factor de forma*. Los modelos desarrollados constan de 13654 nodos y 4567 elementos del tipo C3D8R³.

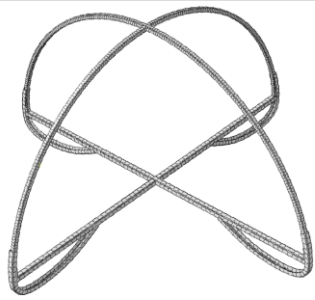
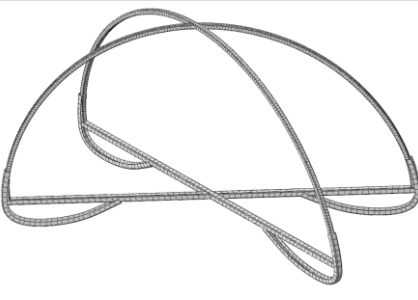
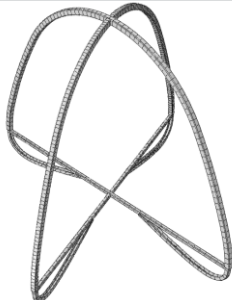
Modelo A _ cruceta a 90°	Modelo B _ cruceta a 45°	Modelo C_ Cruceta a 45° y cambio de geometría
		
nº elementos: 21672	nº elementos: 22528	nº elementos: 7252
nº nodos: 6720	nº nodos: 77908	nº nodos: 29996

Figura 4. Mallado de los modelos

Una vez definidos los modelos, se introducen las propiedades de los materiales de los distintos elementos de los prototipos analizados. También es necesario definir su sección y, cuando se precise, su orientación. Los tres modelos comparten las siguientes características:

³ El modelo se discretizó a partir de una estructura mallada mediante elementos lineales hexaédricos de 8 nudos del tipo C3D8R (integración reducida). Estos elementos nos dan una solución precisa con un menor coste computacional.

Las propiedades de los apoyos y de las barras inferiores de los modelos, piezas que se ven sometidas a deformación plástica (por tanto, es necesario dar información al programa sobre su comportamiento, también en régimen plástico) y constituidas por perfiles de acero, son las siguientes:

- Coeficiente de Poisson: 0.3
- Módulo elástico: 202 GPa
- Densidad: 7850 Kg/m³
- Límite elástico: 300MPa
- Alargamiento: 0,20
- Resistencia de rotura: 500MPa

Por otro lado, las barras superiores están formadas por perfiles de aleación metálica de aluminio con las siguientes propiedades:

- Coeficiente de Poisson: 0.33
- Módulo elástico: 70 GPa
- Densidad: 2700 Kg/m³
- Límite elástico: 150 MPa
- Alargamiento: 0,08
- Resistencia de rotura: 180MPa

Se supone también un segundo caso en el que las barras superiores, en vez del mencionado aluminio, estén conformadas por perfiles tubulares de fibra de vidrio (material anisótropo, cuyo comportamiento varía según la dirección de la fibra) con las siguientes características [3]:

- Coeficiente de Poisson: 0.09-0.23
- Módulo elástico: 23 GPa
- Densidad: 1800 Kg/m³
- Límite elástico de tracción a 90° de la dirección de la fibra: 50 MPa
- Límite elástico de tracción a 0° de la dirección de la fibra: 240 MPa
- Límite elástico de compresión a 90° de la dirección de la fibra : 70 MPa
- Límite elástico de compresión a 0° de la dirección de la fibra : 240 MPa
- Alargamiento: 0,023
- Esfuerzo a flexión: 240 MPa

Una vez asignados los materiales a cada una de las partes que constituyen los prototipos se lleva a cabo el ensamblaje de las mismas, de tal forma que queda definida la posición que ocupan en el espacio. Para ello, se han creado partes independientes para emplearlas como referencia al crear particiones en las superficies de contacto de los apoyos con las barras

inferiores con el propósito de facilitar la convergencia del programa a la hora de obtener los resultados.

Es importante definir las superficies de contacto existentes entre los distintos elementos. Un sólido se considera como un conjunto de nodos vinculados unos a otros mediante elementos, si esto no queda debidamente indicado ambos volúmenes entrarían en contacto sin apreciar ninguno de los dos la presencia del otro, de manera que se simularía el movimiento de cada pieza de forma independiente.

Para ello se definen las superficies de contacto y las propiedades de su interacción. [4] [5]

Ya que las propiedades han sido indicadas, debe especificarse las cargas a las que se ven sometidos los modelos (indicando las superficies que se ven afectadas por estas) y las condiciones de contorno de los mismos.

Los tres modelos se ven sometidos a lo siguiente:

- Cargas en barras superiores:
- Cargas de nieve: 20 Kp/m^2
- Cubierta: 3 Kp/m^2
- Cargas de viento: $\alpha=20^\circ$
- Barlovento: 66 Kp/m^2
- Sotavento: -30 Kp/m^2
- Cargas en barras inferiores y apoyos:
- Cargas de uso: 200 Kp/m^2
- Efecto coriolis: 15 Kp/m^2
- Balasto: 1800 Kp/m^3

La carga de barlovento de 66 Kp/m^2 ha sido asignada en la superficie exterior de la mitad de las barras que conforman la cruceta superior, mientras que la de sotavento de -30 Kp/m^2 se ha incluido de la misma manera en la mitad restante de dicha cruceta.

En cuanto a la asignación de las cargas de nieve y cubierta se ha seleccionado la totalidad de la superficie exterior de los perfiles de aluminio.

La carga de viento considerada corresponde a una velocidad del viento de 75 km/h . La dirección del viento se considera paralela al suelo, no obstante, la presión sobre la estructura se considera perpendicular a la superficie de esta.

El viento produce presiones por debajo de la línea del plano osculador en la zona de barlovento y succiones por encima de esta línea y en la zona de sotavento (ver Figura 5).

La dirección del viento se ha considerado paralela al eje X. La carga de viento en el sector de presiones se ha considerado constante y con valor de 66 Kp/m^2 .

En el sector de succiones, la carga también se ha considerado constante y con valor de -30 Kp/m^2 .

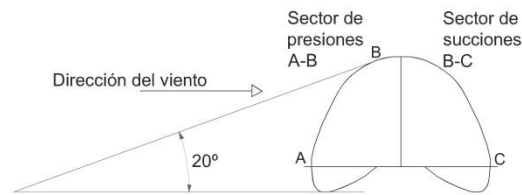


Figura 5. Cargas de viento

La carga de uso se ha aplicado en el área superior de las barras inferiores. Para incluir la carga de balasto se ha seleccionado la superficie inferior de los apoyos, al igual que a la hora de añadir el efecto coriolis teniendo en cuenta también la superficie de las barras inferiores comprendida entre los apoyos.

Por último se han definido las condiciones de contorno indicando una superficie determinada de un grupo de elementos, en la parte inferior de los perfiles que conforman los apoyos, empotrada en el terreno. Las cargas y las condiciones de contorno han sido incluidas por unidad de superficie y en coordenadas cartesianas.

Se sabe que las cargas a la que se ven sometidos los modelos son permanentes. Teniendo esto en cuenta definimos un único paso de solicitaciones de cargas en el que asumimos un valor que asciende literalmente desde cero hasta llegar al máximo, con la finalidad de que la convergencia para obtener resultados se consiga con mayor facilidad.

3. Resultados numéricos

En la Tabla 1 se puede apreciar que en los modelos de secciones tubulares de 5mm el modelo con plano inferior horizontal en cruceta de 45° y factor de forma más bajo está sometido a menores esfuerzos. Resultando un mayor margen de seguridad al fallo frente al viento y ante las sobrecargas de uso; esto es aplicable tanto para las estructuras de parte superior de aluminio como de parte superior de fibra de vidrio. En todos los modelos analizados la zona más desfavorable resultó ser la estructura inferior de acero.

También se aprecia claramente que la estructura con suelo en cruceta a 45° e inferior factor de forma está siendo sometida a menores desplazamientos horizontales bajo las mismas solicitaciones

Modelo	Cruceta a 45°			Cruceta a 90°			Modelo actual (cruceta a 45°)		
Sección	Perfiles de 5mm								
Material	Acero + Aluminio								
Cargas	Uso	Viento	Cargas totales	Uso	Viento	Cargas totales	Uso	Viento	Cargas totales
Esfuerzo Von Mises (Mpa)	100,8	30,03	100,4	96,27	29,5	95,87	60,81	49,06	74,57
Desplazamiento (m)	1,64E-03	1,69E-03	1,68E-03	1,65E-03	1,66E-03	1,67E-03	5,78E-04	1,42E-03	1,44E-03
Defomormación unitaria	3,70E-04	3,33E-04	3,69E-04	4,78E-04	2,01E-04	4,77E-04	4,03E-04	3,60E-03	6,82E-04
Material	Acero + Fibra de vidrio								
Cargas	Uso	Viento	Cargas totales	Uso	Viento	Cargas totales	Uso	Viento	Cargas totales
Esfuerzo Von Mises (Mpa)	100,8	37,06	100,4	96,27	36,42	95,87	67	49,48	85,04
Desplazamiento (m)	1,64E-03	4,92E-03	3,40E-03	1,65E-03	4,82E-03	4,84E-03	5,95E-04	3,60E-03	3,61E-03
Defomormación unitaria	3,70E-04	9,94E-04	5,25E-04	4,78E-04	5,45E-04	5,47E-04	9,65E-04	9,43E-04	1,20E-03

Figura 6. Resultados numéricos según cargas de uso, cargas de viento y cargas totales.

En el modelo A con un *factor de forma* de 1,77 se alcanza un esfuerzo Von Mises de 95,87MPa (ver Figura 6) en la parte inferior de la estructura lo que da lugar a un rango de seguridad de 2,61 para un límite elástico de 250MPa de un acero dúctil. Los esfuerzos que se producen en la parte superior de la estructura no se ven alterados al modificar el material de aluminio a fibra de vidrio.

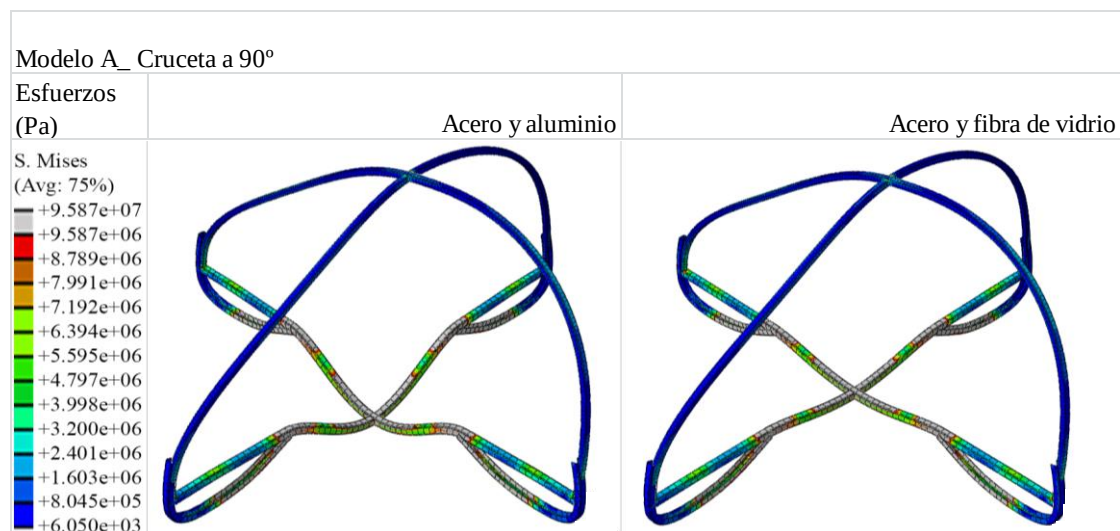


Figura 7. Modelo A. Esfuerzos de Von Mises.

En el modelo B con un *factor de forma* de 1,86 se alcanza un esfuerzo Von Mises de 104,40MPa (ver Figura 7) en la parte inferior de la estructura lo que da lugar a un rango de seguridad de 2,39 para un límite elástico de 250MPa de un acero dúctil; de igual manera, los esfuerzos que se producen en la parte superior de la estructura no se ven alterados al modificar el material de aluminio a fibra de vidrio.

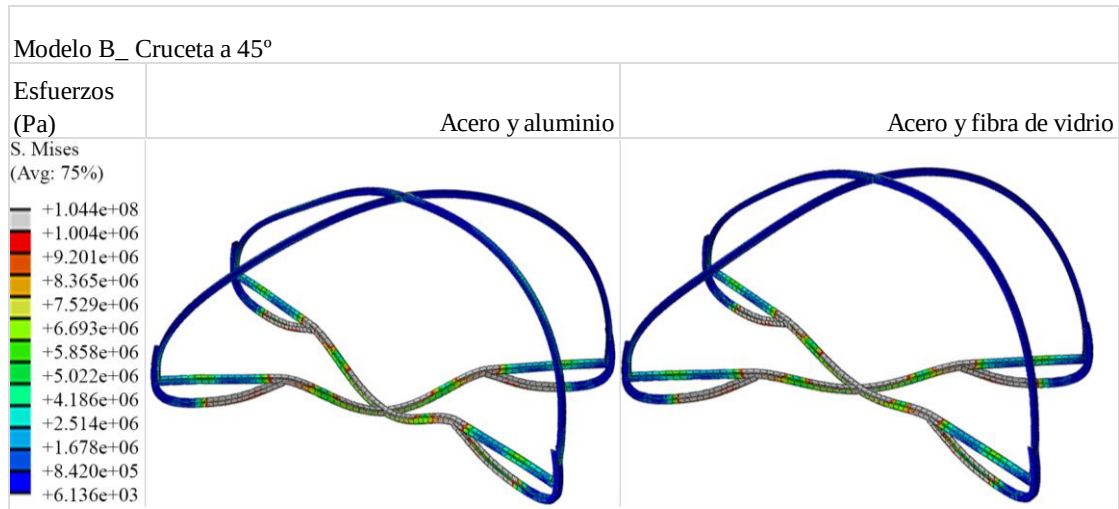


Figura 8. Modelo B. Esfuerzos de Von Mises.

En el modelo C con un *factor de forma* de 1,29 se alcanza un esfuerzo Von Mises de 74,52MPa y 85,04MPa (ver Figura8) en la parte inferior de la estructura con parte superior de aluminio y fibra de vidrio respectivamente lo que da lugar a rangos de seguridad de 3,35 y 2,94 respectivamente para un límite elástico de 250MPa de un acero dúctil; lo que demuestra sensiblemente que estructuras con menor *factor de forma* obtienen rangos de seguridad mayores.

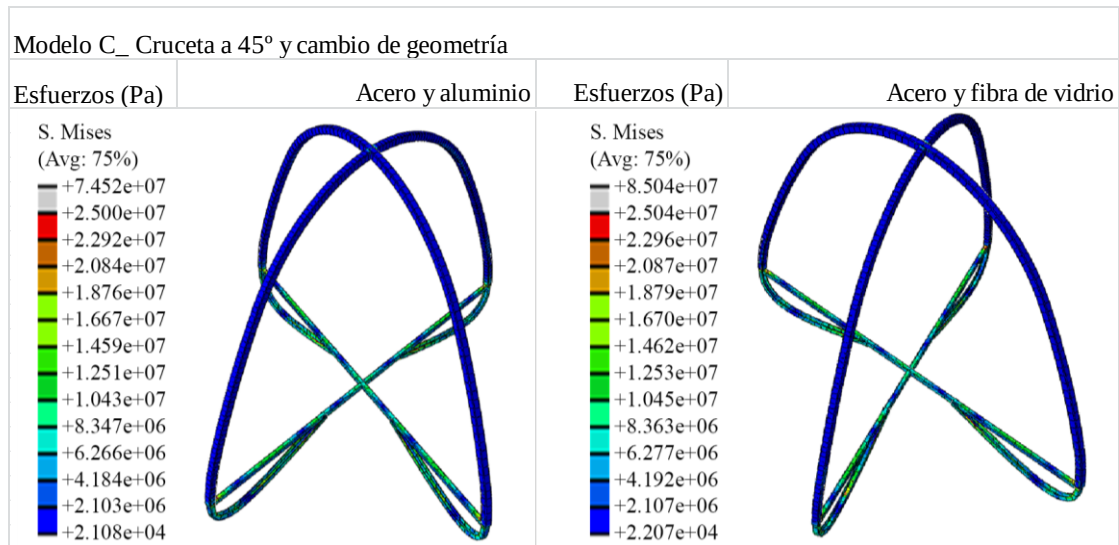


Figura 9. Modelo C. Esfuerzos de Von Mises.

4. Conclusiones

Una vez ejecutadas las simulaciones numéricas podemos concluir que al reducir la superficie exterior de los modelos variables definidos, los resultados constatados soportan mejor las solicitaciones de viento. Asimismo al aumentar el *factor de forma* utilizado se aumenta la resistencia mecánica de la estructura pasando de un rango de seguridad de 2,39 (modelo B) a otro de 3,35 (modelo C). Lo que proporciona desde un punto de vista material una mayor fiabilidad, seguridad y funcionalidad, aportando un incremento de condiciones de competitividad constructiva, en condiciones de utilidad y habitabilidad; obteniendo así un equilibrio optimizado entre requerimientos y prestaciones.

La resistencia mecánica de la parte superior aumenta al disminuir el área expuesta al viento, y la forma de cruceta a 45° aumenta la resistencia frente a las sobrecargas de uso.

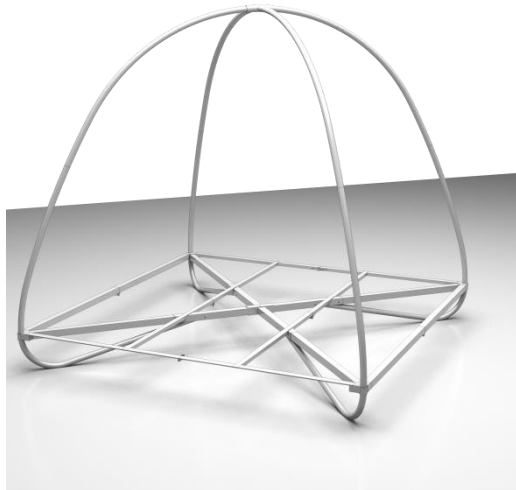


Figura 10. Modelización geométrica de la mejor solución obtenida

Se muestra que las solicitaciones de uso y de viento son las más desfavorables. Se puede corroborar que aún no se supera el límite elástico del acero (300MPa) ni del aluminio (150MPa) en ninguno de los modelos lo que conllevaría a establecer una sección transversal de sección más reducida dando lugar a un coste mínimo de material.

Se corrobora mediante las simulaciones numéricas que las estructuras con la parte superior aluminio e inferior acero y la estructura con la parte superior de fibra de vidrio y la inferior en acero soportan sobradamente las solicitaciones de cargas impuestas con factores de seguridad de diseño bastante fiables y seguros.

Se verifica que los desplazamientos de los tres modelos con las solicitaciones aplicadas son mínimos cumpliendo con los valores esperados de fiabilidad según normativas de servicio.

Se comprueba además que las deformaciones de la estructura cumplen dentro de los rangos establecidos de seguridad, al estar muy por debajo de las zonas de deformaciones plásticas de los materiales o de tensión de rotura de los mismos.

Se puede deducir de todo lo expuesto que las presiones del viento a barlovento y sotavento y el efecto coriolis, supuestas para un viento de 75 km/h, así como las solicitaciones

de carga, tipos de uniones, geometrías y materiales elegidos no afectan la deformada y los desplazamiento del modelo de la estructura ya que en todos los modelos simulados los resultados arrojan valores de los mismos dentro de los rangos de seguridad y habitabilidad aceptables.

Se verifica finalmente que los modelos propuestos, con estructura superior de aluminio o fibra de vidrio y estructura inferior de acero, cumplen con las condiciones de diseño óptimo de acuerdo a variables geométricas bajo las solicitaciones impuestas, ofreciendo mejores resultados de consumo material, el modelo con menor *factor de forma*.

La seguridad alcanzada en la mejor solución obtenida (ver Figura 9) garantiza, que bajo desviaciones aleatorias de los requerimientos previstos, poder mantener un margen adicional de prestaciones muy por encima de las mínimas estrictamente necesarias.

Referencias

- [1] HAMROCK, B. *Diseño de elementos de máquinas*, pág 56, McGraw-Hill, 2000.
- [2] DRUET, L.; BUCANEGRA, M^a C.; ORDOÑEZ, N. y VILLAR, J.S. *Guía de Edificios residenciales de alta calificación energética e integración de energías renovables*, pág 145-146, Fundación Habitec, 2011.
- [3] RIDRUEJO, A.; GONZÁLEZ, C. y LLORCA, J. *Simulación Numérica del Comportamiento a Tracción de un fieltro de fibra de vidrio*, *Análisis de Mecánica de la Fractura 26*, Vol2, Pág 395, 2009.
- [4] KARLSSON, S. *Abaqus theory manual. 6.4.ed. Ed. Pawtucket*, pág 76, Providence, USA 2004.
- [5] KUSHAWAHA, R.; SHEN, J. *Finite Element analysis of dynamic interaction between soil and tillage tool*. Transactions of the ASAE. Vol 37. pág 1315-1319, 1995.

Sobre los autores:

Nombre: Juan Manuel Ros García
Correo Electrónico: jmros.eps@ceu.es
Institución: Universidad San Pablo-CEU, Madrid, España.

Nombre: Roberto Alonso González Lezcano
Correo Electrónico: rgonzalezcano@ceu.es
Institución: Universidad San Pablo-CEU, Madrid, España.

Nombre: Susana Hormigos Jiménez
Correo Electrónico: s.hormigos@usp.ceu.es
Institución: Universidad San Pablo-CEU, Madrid, España.

Investigación

Simulador térmico para sistemas de climatización basado en componentes polimórficos conexionados mediante grafos

Thermal simulator for HVAC systems based upon polymorphic components connected by graphs

Juan A. Hernández Ramos y Fernando del Ama Gonzalo

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 091–104, ISSN 2174-0410

Recepción: 14 Abr'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

El consumo energético de las edificaciones representa el 40% del consumo energético en la Unión Europea. El programa Horizon 2020 promueve el diseño y construcción de edificaciones que no consuman energía. El Departamento de Energía de los EEUU [1] lleva desarrollando desde hace muchos años el EnergyPlus: un código de simulación que permite simular el consumo energético de sistemas de climatización muy complejos. Sin embargo, el programa no contempla elementos como ventanas activas con agua. En otras ocasiones, los modelos matemáticos no se ajustan a la realidad. Todas estas razones hacen necesario desarrollar un software paralelo para la evaluación mediante la simulación de sistemas energéticos. El objetivo de la herramienta de simulación es la exploración y optimización de soluciones. El esfuerzo de codificación de todas esas configuraciones, incluso en el caso del EnergyPlus, es muy grande. El presente trabajo consiste en el desarrollo de un código de simulación basado en abstracciones definidas como componentes vinculadas entre sí mediante grafos. Una vez realizado el esfuerzo de modelización de cada una de las componentes del sistema, la simulación energética de un esquema de principio específico requiere un esfuerzo mínimo. La simulación se crea a partir de una lista de componentes o nodos y de una lista de arcos que vinculan de manera automática los diferentes componentes.

Palabras Clave: Simulación, EnergyPlus, eficiencia energética, edificaciones sostenibles.

Abstract

The buildings sector represents 40% of the European Union's (EU) total energy consumption. Reducing energy consumption in this area is therefore a priority under the "20-20-20" objectives on energy efficiency. The Department of Energy of the U.S.A. [1] has been developing for many years the EnergyPlus : A simulation code to calculate the energy

consumption of HVAC system of a buildings. However, the program does not cover items such as an IntelliGlass active window with water chamber. All these reasons make it necessary to develop parallel software to simulate energy systems. The objective of the simulation tool is to explore and to optimize different solutions. The effort to codify all these settings, even in the case of the EnergyPlus, is very large. It is shown a simulation code based on components or abstractions linked through graphs. It is also shown that the effort to simulate a new HVAC system is minimal. The HVAC system is created from a list of components or nodes and a different lists of arcs. These lists are automatically linked to form graphs which are automatically simulated.

Keywords: simulation, EnergyPlus, energy efficiency, sustainable buildings.

Introducción

La climatización de un edificio se compone de un conjunto de sistemas complejos en el que intervienen muchos factores. Debido a la subida del precio de la energía en los últimos años las normas que rigen la construcción y el acondicionamiento de los edificios están imponiendo dispositivos que permitan la producción de energía mediante fuentes renovables. El Código Técnico de la Edificación [2] hace obligatorio el uso de paneles solares fototérmicos para la producción de agua caliente sanitaria. Por otra parte, la directiva 2010/31/UE del Parlamento europeo relativa a la eficiencia energética de los edificios [3], especifica que el 20% de la energía producida en Europa debe proceder de fuentes renovables. Eso implica que los edificios, como grandes consumidores de energía final, deben tender a integrar dispositivos que produzcan energía para climatización e iluminación.

El coste de los equipos de climatización es elevado, por lo que se hace necesario desarrollar sistemas de simulación previos que garanticen que las decisiones del proyecto son las óptimas para garantizar el confort de los ocupantes con el mínimo gasto energético asociado.

La simulación matemática de estos sistemas requiere de varios niveles de abstracción. Primero se simplifica una instalación real a través de un esquema de principio de las instalaciones energéticas. Posteriormente se define cada elemento de la instalación como un conjunto de componentes. Cada componente está definido por una serie de entradas y salidas. En el caso de un sistema de climatización los componentes pueden tener entradas y salidas de fluidos (agua, aire, fluidos refrigerantes de bajo punto de ebullición,...) y también entradas y salidas de flujos de calor debido al intercambio convectivo de energía con otros componentes a diferentes temperaturas.

La programación multicapa permite la simulación de sistemas físicos complicados. La idea básica de este paradigma se basa en la construcción de abstracciones jerarquizadas mediante su funcionalidad [4].

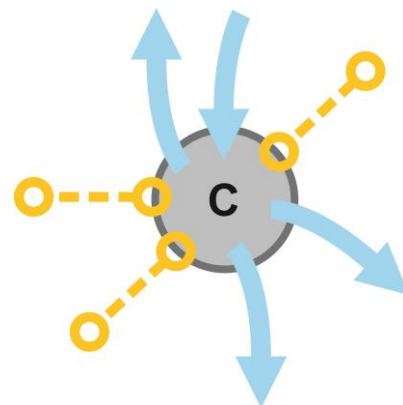


Figura 1. Definición de un componente en un sistema de grafos. Las flechas azules representan entradas y salidas de fluidos en el componente. Las líneas discontinuas representan intercambio de energía con otros componentes mediante radiación y convección.

A continuación se van a describir físicamente los componentes que integran el sistema:

Los vidrios activos consisten en dos láminas de vidrio entre las que existe una cámara de agua en circulación. Se pueden utilizar, bien al exterior para captar radiación solar y calentar agua, bien al interior para emitir calor si el agua circula a mayor temperatura que la del aire interior.

Una bomba de calor por compresión emplea un fluido refrigerante con un bajo punto de ebullición. Esta máquina térmica permite transferir energía mediante calor de un ambiente a otro, según se requiera. Para lograr esta acción es necesario un aporte de electricidad.

Un depósito de inercia es un gran volumen de agua que puede contar con varias entradas y salidas. Puede servir para acumular energía o para disiparla cuando hay un exceso de calor en los circuitos de los vidrios activos.

Los intercambiadores de calor de placas son los dispositivos que permiten la transferencia de energía calorífica entre todos los dispositivos anteriores. Están compuestos de finas placas metálicas con gran superficie de intercambio de calor entre los fluidos que circulan por cada una de estas placas.

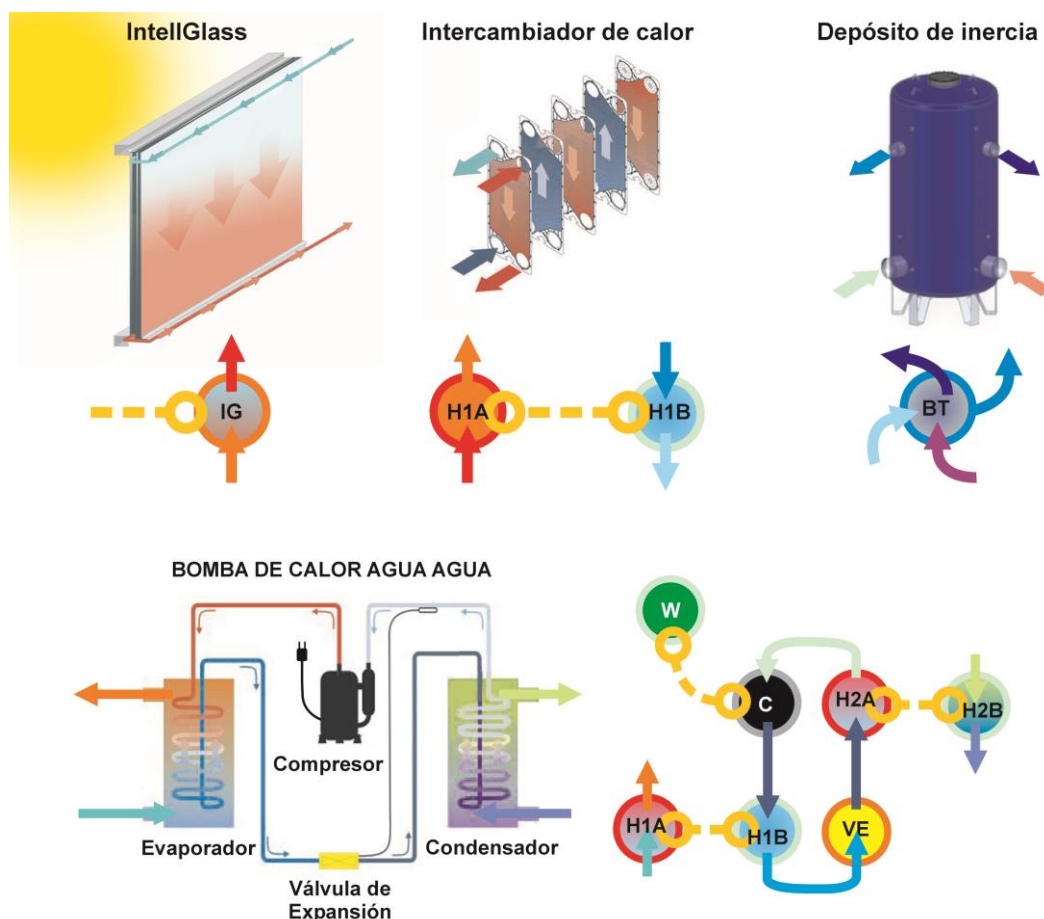


Figura 2. Definición del funcionamiento de los elementos del sistema de climatización en función de sus componentes.

1. Sistemas de climatización de edificios

Para conseguir una sensación de confort en el interior de un edificio se precisa controlar la temperatura y la humedad relativa. Para ello es necesario aportar la energía suficiente para compensar las pérdidas o ganancias que se producen a través de los cerramientos y ventilar el aire interior.

En el edificio que se estudia en este artículo se utiliza energía solar y una bomba de calor agua-agua como elementos que proporcionan la energía necesaria a todo el sistema. La energía solar es captada mediante acristalamientos activos ubicados en el exterior (HeatGlass). La transferencia de calor al interior del edificio se realiza mediante acristalamientos activos ubicados en el interior (RadiaGlass).

1.1 Descripción del edificio

El edificio que se ha estudiado es una vivienda unifamiliar ubicada en una zona de montaña. Los inviernos son muy fríos y los veranos son suaves, por lo que el problema de climatización se centra, sobre todo, en la producción de calor. En verano se puede llegar a una situación de confort con una correcta ventilación y la adecuada protección solar de los huecos de fachada. El proyecto contempla muros muy aislados en las orientaciones norte, este y oeste, así como en el suelo en contacto con el terreno. La fachada sur se abre con vidrios de baja emisividad que permiten el paso de la radiación solar durante el día en invierno y reducen las pérdidas de calor durante la noche.

Para lograr el confort interior en invierno se propone la utilización de energía solar mediante paneles de vidrio activo ubicados en la cubierta. La superficie de la cubierta es suficiente para cubrir las necesidades de calefacción durante gran parte del año. Para apoyar el sistema en momentos de mucha demanda de calefacción se utiliza una bomba de calor agua-agua. En los meses de verano, cuando la demanda de calefacción y de agua caliente sanitaria se reduce al mínimo, se disipa el exceso de calor captado por los paneles solares de cubierta en un depósito de agua enterrado que se integra en los cimientos de hormigón del edificio.

1.2 Esquema de principio y elementos del sistema

Dentro de un proyecto de arquitectura o de ingeniería, el documento que refleja y relaciona todos los sistemas que intervienen en la climatización de un edificio recibe el nombre de esquema de principio. Realizar un esquema de principio supone una primera abstracción con respecto a la realidad.

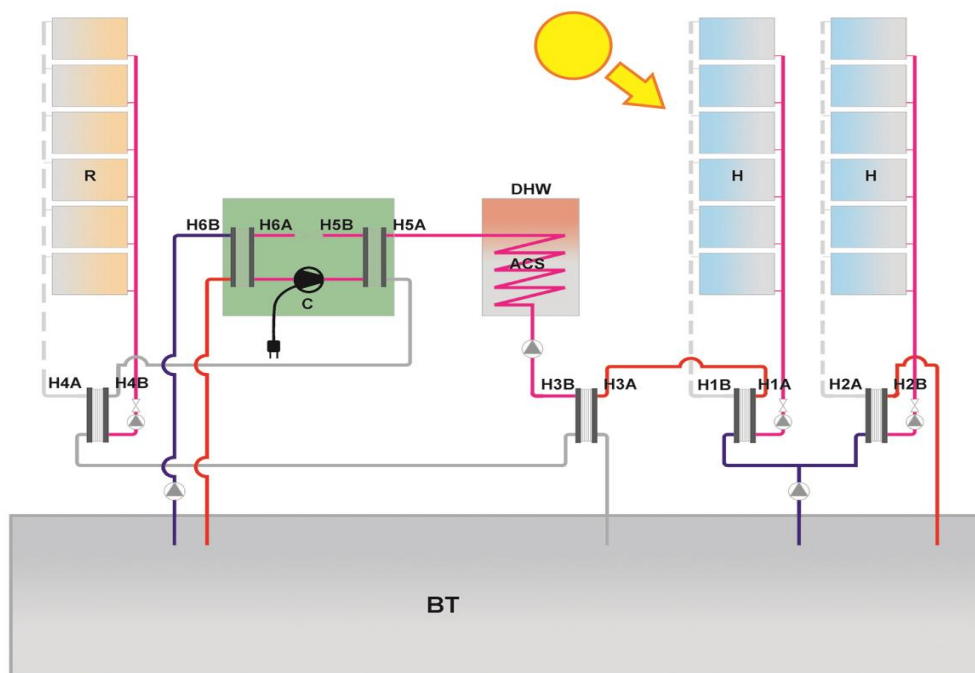


Figura 3. Esquema de principio de la climatización de la vivienda.

En este ejemplo las fuentes de energía son el sol y una bomba de calor agua-agua. Los vidrios activos de la cubierta (HeatGlass) captan el calor del sol y transfieren energía a través de intercambiadores de placas. Parte de esa energía es transferida al depósito de inercia. Otra parte se transfiere al depósito de agua caliente sanitaria. La bomba de calor actúa cuando la energía solar no es suficiente para llegar a la temperatura deseada. El calor del depósito de agua caliente sanitaria es transmitido a través de otro circuito y otro intercambiador de calor a los vidrios activos interiores (RadiaGlass) que ceden calor hacia el interior a través de su superficie y mediante convección.

Para definir la relación entre los distintos elementos del sistema, se recurre a la definición de los componentes y a una lista que los relaciona. En estas listas se distinguen los circuitos de fluidos (agua o aire) y los intercambios de energía a través de superficies en contacto.

Componentes:

Paneles de vidrio activo HeatGlass (H); Intercambiadores de calor de placas (H1A-H1B H2A-H2B, H3A-H3B y H4A-H4B); Interior (I); Exterior (E); Red eléctrica (R); Depósito de inercia (BT); Depósito de agua caliente sanitaria (DHW); Intercambiador de calor del depósito de agua caliente sanitaria (ACS); La bomba de calor se define por dos intercambiadores de calor (H5A-H5B y H6A-H6B) y un compresor (C).

Circuitos:

	CIRCUITO 1		CIRCUITO 2		CIRCUITO 3		CIRCUITO 4		
SOURCE	I	E	H	H1A	H	H2A	H1B	H3A	BT
TARGET	E	I	H1A	H	H2A	H	H3A	BT	H1B

2. Simulación térmica del sistema de climatización

El objetivo de esta sección es componer todas las ecuaciones algebraicas o diferenciales de los elementos que constituyen el sistema de climatización del edificio para obtener el comportamiento global del sistema. La idea que subyace es crear una abstracción de programa del elemento particular del sistema de climatización. Así, todos los elementos o componentes del sistema tienen un conjunto de ecuaciones que se empaquetan en un vector de estado que contiene todos los grados de libertad del sistema completo. De esta manera, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con sus condiciones iniciales que constituyen un Problema de Cauchy. Mediante la llamada a una función que resuelve el problema de Cauchy, que no es objeto de este trabajo, se simula el sistema.

```
call Solution_Cauchy_Problem( Domain          = Time_Domain,
                             Initial_condition = IC_Building,
                             System_of_equations = Building_equations,
                             Outputs          = Building_graphs )
```

La clave reside ahora en crear una funcionalidad software que de forma automática a través de las conectividades de los diferentes componentes del sistema ensamble las ecuaciones de cada elemento y haga las conexiones hidráulicas de los diferentes elementos.

2.1 Definición de componentes

Desde el punto de vista de la programación, los componentes del sistema son cajas negras o sistemas abiertos caracterizados por una entrada y una salida y por una superficie que intercambia calor con otros componentes o con el medio exterior. Sin embargo, desde el punto de vista de las ecuaciones que lo gobiernan es importante conocer su naturaleza interna. Esta doble necesidad motiva considerar los componentes como objetos polimórficos para que el tratamiento software sea mucho más sencillo. Es decir, un depósito con agua se puede tratar de forma general como un sistema abierto genérico la hora de vincular su salida con la entrada de otro componente o como un depósito de agua con la particularidad de su funcionamiento. Se define un componente como el objeto siguiente:

```
type component
  integer :: variables
  type (connector) :: inlet(:), outlet(:)
  type (interface) :: interfaces(:)
  character (len=*) :: name
end type
```

Un componente está caracterizado por su número de grados de libertad o variables independientes, un conjunto de conectores de entrada, un conjunto de conectores de salida y un conjunto de interfaces que le permiten el intercambio de calor con el exterior u otros componentes.

```

type connector
    real, pointer :: T
    real, pointer :: m
end type

type interface
    real, pointer :: Q
end type

```

El sistema de climatización del edificio está formado por un conjunto de componentes polimórficas, un conjunto de circuitos y una lista para la conexión de las diferentes fronteras. Las diferentes componentes polimórficas pueden ser: depósitos de agua, ventanas IntelliGlass, intercambiadores de calor, etc.

```

type Building

    type (Polymorphic_Pointer), allocatable :: Components(:)
    type (arc_list), allocatable :: Circuits(:), Interfaces
    real, allocatable :: Q(:)

end type

type :: Polymorphic_Pointer
    class(*), pointer :: p
end type

type arc
    character(len=*) :: source, target
end type

type arc_list
    type (arc), allocatable :: name(:)
end type

```

Los diferentes circuitos que unen estas componentes pueden ser el circuito hidráulico primario o secundario, terciario, etc. A su vez, cada circuito se caracteriza por un conjunto de arcos que son parejas de nombres de vinculan componentes. Por último, la lista para la conexión de las fronteras de los componentes permite transferir calor de un circuito a otro. De esta manera, se puede definir cualquier sistema de climatización de un edificio a través de las componentes que lo conforman. Las vinculaciones entre las entradas y las salidas de las componentes están determinadas por los circuitos y las transferencias de calor entre los componentes están determinadas a través de la lista de conexión de fronteras.

2.2 Depósito de agua para la acumulación de energía

Un depósito de agua está caracterizado por una frontera que puede intercambiar calor con el exterior y por una entrada y por una salida que intercambian masa de agua. La temperatura no uniforme del agua en el interior del depósito y los procesos de mezcla térmica se rigen por la ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, si se considera que la temperatura del agua es uniforme, la temperatura del interior del depósito está gobernada por una ecuación diferencial

ordinaria de primer orden. Lo que es importante hacer notar es que, independiente mente del modelo matemático que se adopte para el depósito, la abstracción del simulador propuesto en este trabajo no cambia. Para el simulador un depósito es un componente adicional con un conjunto de N ecuaciones diferenciales ordinarias.

Con este modelo, el depósito se puede definir como la extensión de un componente. Es un objeto que hereda las propiedades y la forma de un componente.

```
type, extends(Component) :: Water_tank
  real, pointer :: T
  real :: Tdot
  real :: c = 4180
  real :: flow = 30 ! l/min
  real :: Volume = 15 ! m3
  real :: Surface = 20 ! m2
  real :: density = 1000 ! kg/m3
  real :: hext = 10 ! W/m2K
  contains
  procedure :: Constructor => Constructor_Water_tank
  procedure :: Equations => Equations_Water_tank
  procedure :: Ini => Ini_Water_tank

end type
```

El objeto Buffer_Tank está caracterizado por su temperatura T (única variable independiente), por todas las propiedades de un componente y por las propiedades específicas que lo definen: masa, calor específico,... Por otra parte, el depósito de agua incluye sus ecuaciones constitutivas así como sus condiciones iniciales.

2.3 Ventana activa con cámara de agua en circulación

La complejidad del modelo matemático para una ventana con una cámara de agua en circulación depende del grado de aproximación física que se quiera obtener. En el caso más simple la ventana se puede tratar como un sistema abierto que intercambia calor con el exterior mediante sus superficies de la delimitan y mediante un flujo convectivo asociado a su entrada y su salida. Así, la temperatura uniforme de la ventana considerada está gobernada, como en el caso del depósito, por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Como contraposición a este caso simplificado se podría simular de forma genérica la transferencia de calor que se produce en cada unas de las partes que constituyen la ventana: láminas de vidrio, cámara de agua t cámaras de aire. Así, los mecanismos de transferencia de calor son: radiación, conducción y convección. La ecuación de calor para las láminas de vidrio y las ecuaciones de Navier-Stokes para la cámara de agua y la cámara de aire gobiernan las evolución de las temperaturas de la ventana. Estas ecuaciones que constituyen un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales se deben completar con condiciones de contorno y condiciones iniciales que provienen de las diferentes capas. El problema planteado es de una dificultad extrema.

En el término medio entre estos dos modelos, se podría plantear un modelo más simple tanto para las cámaras de agua y de aire como para las láminas de vidrio. Debido a que la

cámara de aire tiene muy poca inercia térmica, ésta se modela mediante una ecuación algebraica que mediante un coeficiente de transferencia que vincula el calor que transporta la cámara desde un panel de vidrio al otro. Por otra parte, si se considera la temperatura del agua uniforme, la temperatura del agua de la cámara se gobierna por una ecuación diferencial ordinaria. En el caso de los paneles de vidrio se considera que la transferencia de calor es perpendicular al panel y su temperatura está gobernada por la ecuación del calor unidimensional no estacionaria. Aún en este modelo intermedio, la dificultad para simular una ventana aislada es grande. Si se piensa en la complejidad de un sistema completo de climatización de un edificio, se entiende que es necesario hacer un esfuerzo de abstracción para poder abordar el problema.

En este caso, la definición del tipo ventana activa es más complicado. Una ventana es la extensión de un componente que está formada por capas polimórficas de agua, aire o vidrio.

```
type, extends(Component) :: Active_Window

type (Polymorphic_Pointer), pointer :: Layer(:)

real, allocatable :: T_I(:)      ! temperatures at interfaces between layers
real, allocatable :: alpha_I(:)! absorption at interfaces (PVB)

type (Surface) :: S

contains

procedure :: Constructor => Constructor_Active_window
procedure :: Equations => Equations_Active_window
procedure :: Ini => Ini_Active_window

end type
```

Además, la ventana activa incluye las ecuaciones de gobiernan la temperatura de la ventana. Estas ecuaciones se obtienen mediante la agrupación de las ecuaciones para cada una de las capas. Las ventanas activas que intervienen en el sistema son, en principio, diferentes entre sí. Sin embargo, el objeto definido anteriormente sirve para todas ellas. Incluso para el modelo simple elegido anteriormente para la ventana el problema no es sencillo. La ventana es un conjunto de capas polimórficas: vidrio, agua y aire. La determinación de la temperatura en cada una de las capas exige integrar al menos una ecuación diferencial con condiciones de contorno que dependen del resto de las capas. Para llevar a cabo este proceso, se plantean de forma genérica las ecuaciones de conservación para los contornos de todas las capas y el sistema resultante se resuelve mediante un Newton. Una vez determinados los valores de las temperaturas en las entrefases se pueden calcular los flujos de calor en los puntos interiores de cada una de las capas.

```
function Equations_Active_window( W )
class (Active_window), target :: W

! ** Solve temperatures at interfaces i = 0...N, unknowns:
call Newton( F_Interface, W % T_I )
```

```
! ** Energy balance for each layer
do i = 1, N layers
    select type ( A => W % Layer(i) % p )
        type is (Water_layer)
            Equations_active_window(:) = A % Equations( T_agua, ie)
        type is (Glass_layer)
            Equations_active_window(:) = A % Equations(ie)
        type is (Air_layer)
            Equations_active_window(:) = A % Equations()
    end select
end do

contains

function F_Interface(T_interface)

    Q(0, 1) = q_ext
    Q(N, 2) = q_int

    do i=1, N
        select type ( A => W % Layer(i) % p )
            type is (Glass_layer)
                Qb = A % Fluxes()
            type is (Water_layer)
                Qb = A % Fluxes(Inclination)
            type is (Air_layer)
                Qb = A % Fluxes(Inclination)
        end select
        Q(i-1,2) = Qb(1)
        Q(i,1) = Qb(2)
    end do

    F_Interface(:) = Q(:,1) - Q(:,2) + W % alpha_I(:) * ie
end function

end function
```

2.4 Intercambiador de calor de placas

Generalmente, la inercia térmica de un intercambiador de calor de placas es pequeña frente a la inercia térmica del sistema por lo que el conjunto de ecuaciones que gobiernan el proceso de intercambio de calor se pueden considerar estacionarias o cuasiestacionarias. Por otra parte, el diseño del intercambiador está muy vinculado a su funcionamiento y, en consecuencia, a su modelo matemático. La empresa que ha desarrollado el intercambiador de calor, como conocedor de su producto, ofrece un modelo simplificado para el mismo que constituye dos ecuaciones algebraicas no lineales que relacionan las entradas y las salidas del circuito primario y del circuito secundario.

2.5 Esquema de principio mediante la conexión de componentes

La idea consiste ahora en vincular componentes mediante el esquema de principio de la instalación térmica de climatización. Desde el punto de vista matemático, esas conexiones

constituyen un grafo. Los nodos o los vértices del grafo son las componentes y las aristas o arcos del grafo pueden ser o bien las tuberías hidráulicas que unen cada una de los elementos o componentes del esquema de principio o bien uniones virtuales entre componentes que simbolizan la transferencia de calor entre los diferentes componentes. De esta manera, el grafo está definido mediante un conjunto de sus componentes o nodos y mediante el conjunto tuberías o aristas que unen componentes. Se consideran todas las tuberías para vincular parejas de componentes. Una vez vinculadas todas las entradas con todas las salidas, queda vincular todas las fronteras o superficies de los componentes para indicar el flujo de calor entre los mismos. Así, un grafo puede representar el flujo de agua de un circuito cerrado y el flujo de calor entre las componentes viene representado por otro grafo superpuesto a este primero. Tanto las vinculaciones de entradas o salidas de los componentes como la vinculación entre las fronteras se puede hacer de forma genérica sin conocer si se trata de una ventana o se trata de un depósito.

En los siguientes pseudocódigos se muestra como se realizan estas vinculaciones mediante punteros. La temperatura de la entrada de un componente se apunta a la temperatura de salida otro componente. Cuando la temperatura de la salida cambia, la temperatura de la entrada cambia porque es la misma variable.

subroutine Connections(inlet, outlet, C)

```

    select type ( A => C(outlet) % p )
      class is (Component)
        select type ( B => C(inlet) % p )
          class is (Component)
            ! inlet of the component A points to outlet of B
            A % inlet % T => B % outlet % T
            A % inlet % m => B % outlet % m
          end select
        end select
    end select
end subroutine

```

De igual manera se realiza la vinculación entre las componentes que están en contacto mediante sus superficies e intercambian calor a través de las mismas.

Tanto la conexión entre las entradas y las salidas así como las conexiones entre las superficies de los diferentes componentes se realiza en la inicialización del problema una única vez. Estas conexiones garantizan la continuidad de temperaturas superficiales y temperaturas entrada/salida para las componentes que intervienen el sistema o edificación.

La simulación del problema completo consiste en integrar el problema de Cauchy o de condiciones iniciales que resulta de juntar todas las ecuaciones constitutivas del sistema. Un vez más este proceso se puede realizar de manera automática mediante el siguiente pseudocódigo.

subroutine Building_equations(t, U, F)

```

    B % Heat_fluxes_at_interfaces(t)

    do i=1, Nc

```

```
select type( A => B % Component(i) % p )
  class is (Component)
    select type( A => B % Component(i) % p )
      type is (Water_tank)          F(:) = A % Equations(t)
      type is (Active_window)      F(:) = A % Equations(t)
      type is (Air_Zone)           F(:) = A % Equations(t)
    end select
  end select
enddo
end subroutine
```

En primer lugar, se obtienen los flujos de calor entre las diferentes interfaces de las componentes del sistema que constituye un sistema de M ecuaciones donde M es el número de interfaces. Cada una de estas ecuaciones impone que el flujo por la derecha coincide con el flujo por la izquierda de la interfaz. Cada una de las componentes está acoplada con el resto a través de las condiciones de contorno que son los flujos de calor en las interfaces. En esta subrutina $U(t)$ representa el vector de estado del sistema y $F(U,t)$ su variación con respecto al tiempo. El problema de Cauchy así planteado es de dimensión N . Las variables independientes del sistema o grados de libertad son las variables independientes de cada uno de las componentes. En la inicialización, las variables independientes de cada componente se apuntan a una parte del vector de estado.

Finalmente, el resultado de la ecuaciones de cada una de las componentes se empaqueta en el vector columna $F(:)$ y el problema se lanza a un integrador temporal.

3. Conclusiones

Los sistemas de climatización de las edificaciones son cada día sistemas más complejos. El tratamiento matemático de los mismos exige entenderlos como sistemas termodinámicos formados por subsistemas abiertos. En este trabajo se ha definido un componente como un sistema abierto caracterizado por sus entradas, salidas y una superficie no permeable por la que se intercambia calor con otros componentes. Así, los diferentes subsistemas de un sistema de climatización se pueden considerar como componentes o sistemas abiertos. Los diferentes componentes intercambian energía con otras componentes mediante dos mecanismos bien diferenciados: (i) transporte de energía forzado mediante un fluido asociado a sus entradas y salidas y (ii) intercambio térmico a través de las fronteras de cada componente.

Se han definido arcos azules direccionales que unen diferentes componentes para indicar el mecanismo de transferencia (i) y arcos rojos no direccionales para indicar el mecanismo de transferencia (ii). De esta manera, se construye un grafo formado por los diferentes componentes que intervienen en el sistema y por los diferentes arcos azules y rojos.

Se ha mostrado que la introducción de los grafos en este tipo de sistemas de climatización tiene las siguientes ventajas:

- 1) permite explicar los sistemas de climatización de una forma mucho más rápida. Los caminos que puede llevar el calor en las transferencias de energía se hacen evidentes. En

consecuencia, la estrategia energética del sistema se consigue entender sin entrar en los mecanismos físicos de la transferencia de calor más complicados.

2) permite identificar en diseño errores en la topología del sistema. Bucles abiertos o caminos de transferencia de energía no usados.

3) permite simular instalaciones muy complejas sin necesidad de escribir un programa específico para ello. Se ha descrito un simulador basado en componentes polimórficas que permita determinar las transferencias de calor entre los compontes de un grafo genérico. Para simular una determinada instalación, el usuario tan solo tiene que introducir las listas de las componentes y las listas de los arcos que definen una instalación específica.

Referencias

- [1] BUILDINGS ENERGY DATA BOOK. U.S. DEPARTMENT OF ENERGY.
<http://buildingsdatabook.eren.doe.gov/>
- [2] DOCUMENTO BÁSICO HE. AHORRO DE ENERGÍA. Septiembre 2013. Ministerio de Fomento.
- [3] DIRECTIVA 2010/31/UE DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO DE 19 DE MAYO DE 2010 RELATIVA A LA EFICIENCIA ENERGÉTICA DE LOS EDIFICIOS.
- [4] HERNÁNDEZ, J.A., ZAMECNIK, M.A. *FORTRAN 95: Programación Multicapa para la Simulación de Sistemas Físicos*, Editorial ADI, Madrid, 2001.

Sobre los Autores:

Nombre: Juan Antonio Hernández Ramos

Correo Electrónico: juanantonio.hernandez@upm.es

Institución: Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. E.T.S.I.Aeronáuticos. UPM. Madrid.

Nombre: Fernando del Ama Gonzalo

Correo Electrónico: ama.eps@ceu.es

Institución: Departamento de Arquitectura y Diseño. Escuela Politécnica Superior. Universidad CEU San Pablo. Madrid

Investigación

Optimización de recursos y calidad de servicio en las consultas de urgencias de un centro de atención primaria

Optimization of resources and service quality in emergency consultations in a primary attention centre.

Sagrario Lantarón Sánchez y Mariló López González

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 105–124, ISSN 2174-0410

Recepción: 14 Abr'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Los servicios de urgencia hospitalarios reciben una proporción no despreciable de pacientes que deberían haber sido atendidos en los servicios de atención primaria. Planificar los servicios de urgencias de atención primaria para que mejoren su calidad y sean atractivos para los pacientes puede descongestionar las urgencias hospitalarias incidiendo de manera integral en todo el servicio de urgencias sanitario. El tiempo de espera reducido es el principal factor que los usuarios identifican con la calidad del servicio. En este artículo se analiza el problema desde un punto de vista matemático e informático diseñando un software que permite obtener la asignación de facultativos a un servicio de urgencias de atención primaria cumpliendo el objetivo de no sobrepasar un tiempo de espera prefijado optimizando además el consumo de recursos.

Palabras Clave: planificación, optimización de recursos, tiempos de espera, modelización matemática, algoritmos.

Abstract

The hospital emergency services receive a non insignificant proportion of patients who should have been attended in the primary attention services. Planning the emergency services of primary attention for them to improve their quality and to be attractive for the patients can clear the hospital emergencies influencing in an integral way on the whole sanitary emergency service. The reduced wait time is the main factor which the users identify with quality of service. In this article the problem is analysed from a mathematic and computer point of view designing a software which allows obtaining the assignment of

doctors to an emergency service of primary attention fulfilling the objective of not surpassing a predetermined wait time as well as optimizing the resources consumption.

Keywords: planning, resource optimization, wait times, mathematical modelization, algorithms.

1. Introducción

La masificación de los servicios de urgencias hospitalarios (SUH) es una realidad creciente, que refleja los problemas de adecuación en la utilización de dichos servicios y las deficiencias en la coordinación entre éstos y los servicios de atención primaria de salud [7, 9, 12].

Los SUH realizan tareas propias de la atención primaria y de otros niveles no urgentes de atención [7, 9], lo cual genera una serie de disfunciones que afectan a la organización y la eficiencia de los hospitales, a los usuarios y al conjunto del sistema sanitario [12]. En el ámbito hospitalario, la atención de este tipo de pacientes sobrecarga los SUH, y puede influir negativamente en la calidad asistencial, lo que incrementaría los riesgos para los pacientes más urgentes, disminuiría la eficiencia global del servicio, y deterioraría el clima laboral y la calidad percibida por el usuario [9]. La inadecuación estructural y funcional, el incremento en los tiempos de demora en la atención y la deshumanización de los SUH son, en gran parte, consecuencia de la sobreutilización de dichos servicios por una parte de la población, que puede estar haciendo un uso sustitutivo de ellos con respecto a la atención primaria, lo que tiene importantes implicaciones en la calidad global del sistema sanitario, como la pérdida de la continuidad asistencial, del seguimiento de los tratamientos y fallos en la prestación de servicios preventivos y de promoción de la salud [7, 9, 12].

Se han realizado diferentes estudios que arrojan el porcentaje de pacientes que acuden a un servicio de urgencias hospitalarias cuando deberían haber acudido a un servicio de urgencias de atención primaria (SUAP). Según el análisis realizado en [7], se concluye que un 23,09% de los pacientes visitados en urgencias podría haberse consultado en el nivel de atención primaria de salud sin necesitar en éste una excesiva tecnificación. Según el estudio realizado en [10], el 65,56% de los pacientes acuden al SUH por iniciativa propia, de los cuales el 15,66% serían urgencias con solución extrahospitalaria y el 73,97% son urgencias relativas.

Se plantea la cuestión de por qué se elige acudir a un centro hospitalario en primera opción. Según [11] los SUH son especialmente valorados por la tecnología y la inmediatez de la resolución del problema de salud. Las valoraciones negativas incluyen los largos tiempos de espera, así como el trato impersonal y la falta de información que reciben los pacientes. Aun así, todos estos aspectos negativos se consideran justificados e inevitables. Entre los usuarios de SUAP se valoran favorablemente aspectos como el trato personal y la relación longitudinal con los profesionales.

La actitud del paciente de acudir como primera opción a un servicio de urgencias hospitalario no se debe tomar sólo como una actitud aprendida o como una muestra de los cambios sociolaborales de la sociedad, sino como una crítica al sistema sanitario actual que no da las respuestas que la sociedad demanda. No sólo hemos de considerar la educación sanitaria dirigida a un adecuado uso de los servicios sanitarios como la herramienta a usar para paliar el uso de las urgencias hospitalarias como primera opción del usuario, se ha de

considerar la necesidad de evaluar al propio sistema sanitario para dar una respuesta más eficaz al ciudadano [10].

2. Presentación del problema

La masificación de las urgencias médicas hospitalarias provoca problemas económicos y de calidad asistencial:

- el coste de una misma enfermedad no urgente atendida en un SUH es entre 2,5 y 3 veces superior que si se atiende en una consulta no urgente [5].
- aumentan los tiempos de espera lo que disminuye la eficiencia del servicio y la calidad asistencial.

Una solución a este problema podría ser el estudio del servicio de urgencias médicas de manera integral, teniendo como principal objetivo que un porcentaje de los pacientes que ahora mismo acuden al SUH como primera opción acudan al SUAP lo cual descongestionaría el servicio hospitalario y reduciría los costes globales de los servicios de urgencias.

Sin embargo, para que la población revierta su conducta de acudir en primera opción a los centros hospitalarios se les debe ofrecer un servicio de calidad en los centros de salud.

Según [3, 14, 16] la idea de calidad de servicio viene determinada principalmente por tiempo de espera reducido. Las esperas prolongadas constituyen una de las principales causas de insatisfacción de los usuarios de estos servicios siendo fuente frecuente de reclamaciones. Por ello los tiempos de espera constituyen un importante método de control de calidad para los servicios de urgencia de todo tipo.

Si se consiguen gestionar adecuadamente las urgencias de los centros de atención primaria para que se comprometan a no sobrepasar tiempos de espera razonables, se estaría dando un gran paso en posicionar esta atención por delante de la hospitalaria para patologías no graves.

En la resolución de este problema, la gestión de tiempos de espera de manera integrada con la optimización de recursos de personal médico en los servicios de urgencias, son de vital importancia ya que se trata de servicios críticos en los que debe intentarse, por un lado que los tiempos de atención a los pacientes se minimicen, y por otro que el número de médicos involucrados sea óptimo, equilibrando así una atención de calidad con un coste en recursos sostenible. Por ello, la organización y planificación de estos servicios debe ser un tema de interés en Sanidad.

Actualmente se cuenta con programas informáticos que realizan todo tipo de gestión en hospitales y clínicas (SALUS es un ejemplo de ellos). En cambio, no son tan usuales los programas que realizan una planificación para la búsqueda de la optimización de los recursos.

A este respecto, en el presente artículo se desarrolla una metodología de planificación y organización de recursos en el contexto de las urgencias de un centro de salud que puede ser extrapolada a otro tipo de servicios médicos. Dicha metodología desemboca en la realización de un programa que resuelve de forma efectiva ciertas tareas de planificación. En concreto, el problema de optimización a resolver es encontrar el número mínimo de médicos que necesita un centro de salud para cubrir el servicio de urgencias, consiguiendo que el tiempo de espera

requerido sea el adecuado para el buen funcionamiento del servicio. Este estudio además permite analizar las franjas horarias de atención médica que son responsables potenciales de las demoras si no se aumenta el número de facultativos en ellas.

Entre los principios de la planificación destacan [13]:

- La flexibilidad: la planificación debe ser un proceso flexible, ya que se desarrolla en un entorno donde la producción de continuos cambios socioculturales y tecnológicos hace muy difícil el establecimiento de un plan rígido.
- La operatividad: la finalidad de la planificación es constituir un instrumento de gestión y cambio.

El algoritmo que se presenta e implementa en este trabajo, como la mayoría de los programas de ordenador, se ajusta a estos principios. Las variables que se definen en él cuyo rango puede ser elegido en cada momento por el usuario, permiten que se adapte a diferentes situaciones dando al procedimiento un carácter dinámico y flexible. Constituye un instrumento de gestión y planificación del número de médicos y su actividad en un servicio de urgencias de un centro de salud, dependiendo de los tiempos de espera deseados, que se adapta a las características dinámicas y cambiantes que dichos servicios presentan por su naturaleza.

En la siguiente sección se concreta el modelo utilizado..

3. El modelo y la metodología

El marco de actuación del trabajo es el servicio de urgencias de atención primaria de un centro de salud. El objetivo de estos servicios es prestar atención sanitaria durante los periodos en los que el centro de día correspondiente se encuentra cerrado.

El modelo que se presenta se centrará en la organización del SUAP, pudiendo adaptarse al periodo deseado: días completos (urgencias de sábados y festivos) o periodos inferiores (nocturnos en días laborables) para conseguir unos tiempos de espera adecuados según la afluencia detectada en dicho centro. Para ello se actuará sobre el número de médicos que son necesarios. Además se organizará su horario de trabajo para poder hacer frente a momentos críticos en la afluencia de pacientes, así como a las necesidades de descanso de los facultativos.

El objetivo principal se fija en conseguir atender a todos los pacientes que acudan al servicio de urgencias sin que ninguno de ellos sobrepase el tiempo de espera máximo que se proponga en la planificación, todo ello utilizando el menor número de recursos posible, es decir, se quiere minimizar el uso de horas de médico manteniendo el compromiso de no sobrepasar el máximo tiempo de espera prefijado. Para ello, un paciente debe ser reconocido en el menor tiempo posible, es decir, por el primer médico que quede libre, pero no podrá recibir atención hasta que se haya hecho lo mismo con los pacientes anteriores.

El momento en el cual un paciente puede comenzar a recibir atención médica, es decir, su tiempo de espera en el servicio (tw), depende de factores que han sido fijados previamente por las autoridades y factores sobrevenidos. Podemos decir entonces que el tiempo de espera sufrido por cada paciente es debido a:

- Factores fijados previamente por las autoridades:

- tiempo medio de atención sanitaria por paciente (t_m): las autoridades suponen que un médico dispone de t_m minutos para atender a un paciente.
- número de médicos existentes en el servicio sanitario (n): las autoridades contratan un número determinado de médicos para atender el servicio.
- Factores sobrevenidos
 - número de pacientes que acuden al servicio de urgencias en los diferentes tiempos.

El estudio que aquí se presenta tiene como objetivo lograr no sobrepasar el tiempo de espera máximo exigido al servicio. Los datos de entrada son el tiempo medio de atención sanitaria por paciente y datos estadísticos de afluencia de pacientes a servicios de urgencia, teniendo como resultado el número de médicos exigibles y sus horas de utilización. El estudio estimará el número de médicos que logre el tiempo de espera máximo prefijado.

El modelo se desarrolla calculando el instante en el que cada paciente es atendido por el médico, calculando así su tiempo de espera total en el servicio médico.

Se considera la hipótesis de que en determinados instantes de tiempo t_{1i} se actualizan los datos de los nuevos pacientes que han llegado al servicio de urgencias. En cada uno de estos instantes se registra la entrada de J^i pacientes que pasan a la última posición de la lista de espera. Los pacientes serán atendidos en el orden en el que se encuentran en la lista por uno de los n médicos que prestan servicio en el centro. (Figura 1).

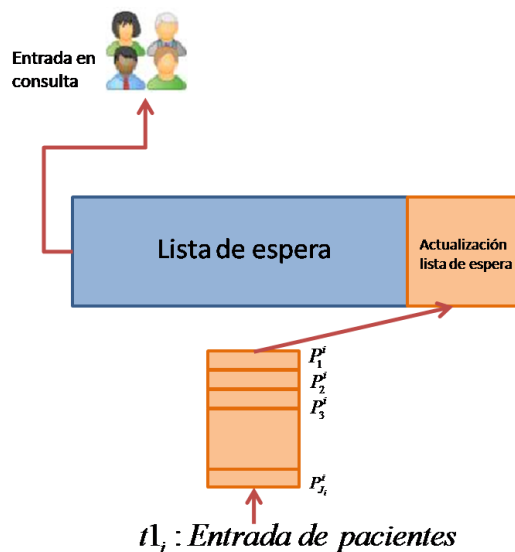


Figura 1. Entrada de pacientes en el SUAP

La nomenclatura utilizada en el modelo es la siguiente:

- t_{1i} : Momento en el que entran en lista de espera J^i pacientes.
- P_{ik} : Paciente k -ésimo $k \in \{1, \dots, J^i\}$ del total de J^i pacientes que entran en el servicio de urgencias en el instante t_{1i} .

- t_{2ik} : Momento en el que es atendido el paciente k -ésimo $k \in \{1, \dots, J^i\}$ del conjunto de pacientes que entran en el instante t_{1i} .
- $tw_{P_k} = t_{2ik} - t_{1i}$: tiempo de espera del paciente P_k .

En primer lugar, por simplicidad en la explicación, se va a presentar el caso particular en el que $n=1$, después se presentará el caso general.

3.1. Disponibilidad de un único facultativo

El médico que atiende el servicio de urgencias no puede prestar atención a los pacientes del instante t_{1i} hasta que se hayan atendido a los usuarios con entrada en los instantes anteriores t_{1k} , $k=1, \dots, i-1$.

Se dan los siguientes casos de estudio:

a1. En el momento de entrada de los pacientes en el servicio (t_{1i}), el médico está ocupado con pacientes anteriores. El instante en el que el paciente k -ésimo $k \in \{1, \dots, J^i\}$ comienza su atención médica (t_{2ik}) es función de los momentos de atención de los pacientes anteriores. Este hecho queda representado en las figuras 2a y 2b en las que cada barra, de longitud t_m , corresponde a un paciente y simboliza el tiempo efectivo en el que está siendo atendido en consulta. En la figura 2a se representa la entrada de pacientes, simulando el acceso de tres pacientes en el instante t_{1i} . En la figura 2b se simula el posicionamiento de éstos. Ya que las barras no pueden solaparse, al disponer de un único facultativo, éstas sufren un desplazamiento horizontal hasta que se sitúan unas a continuación de las anteriores. Se puede observar el tiempo de espera que se contabilizaría, representado por las flechas de doble punta.

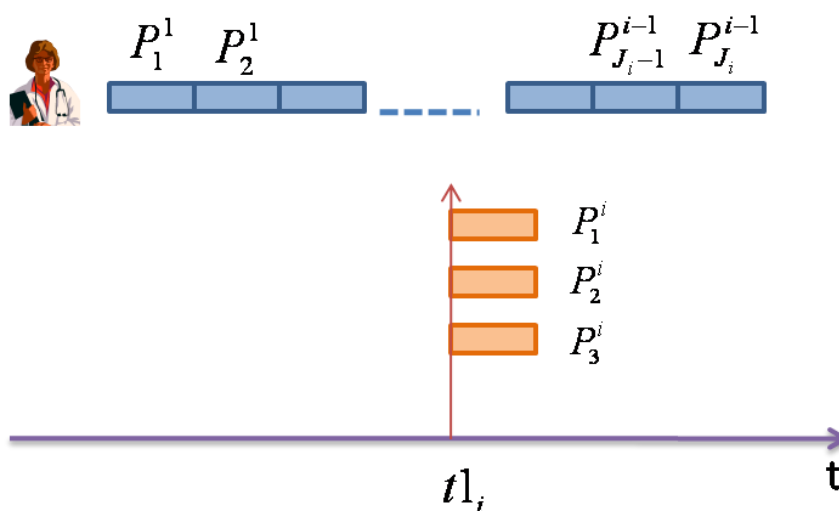


Figura 2a. Simulación de entrada de pacientes en el instante t_{1i} para $n=1$ y médico ocupado

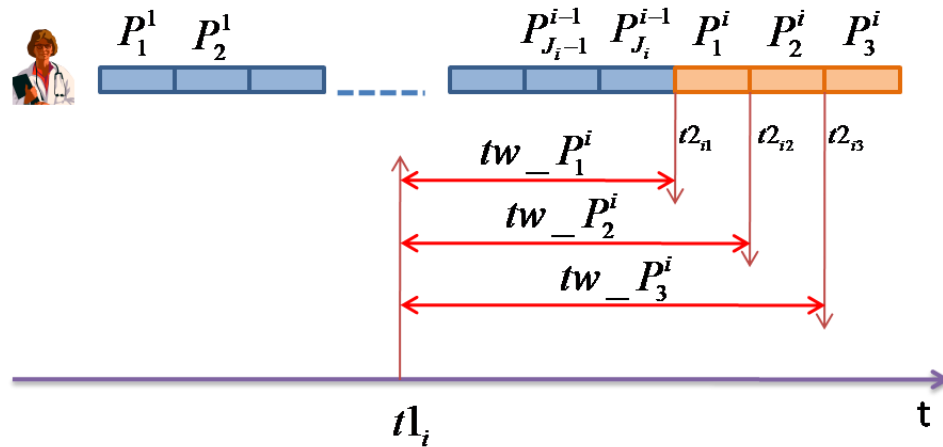
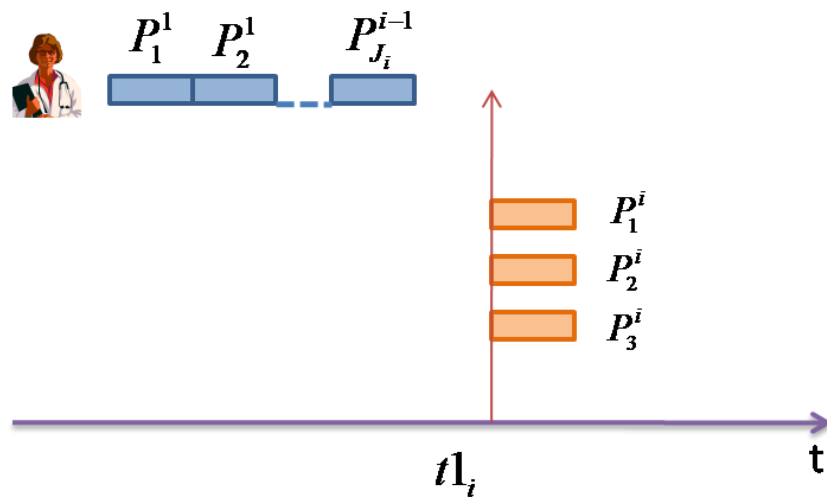


Figura 2b. Médico ocupado. Posicionamiento de pacientes.

b1. En el momento de contabilización de los pacientes en el servicio de urgencias, el médico está libre. El paciente P_1^i comienza su atención médica en ese instante, siendo su tiempo de espera $tw_{P_1^i} = t_{2i1} - t_{1i} = 0$. La sucesión de las $J_i - 1$ barras restantes se posicionarán a continuación. El tiempo de espera de los pacientes restantes viene dado por $tw_{P_k^i} = t_{2ik} - t_{1i} = (k - 1) \cdot t_m$, $k \in \{2, \dots, J_i\}$. Este hecho queda representado en las figuras 3a y 3b. Obsérvese, el tiempo marcado con una barra verde que denota el tiempo que el médico está libre.

Figura 3a. Simulación de entrada de pacientes en el instante t_{1i} para $n=1$ y médico libre

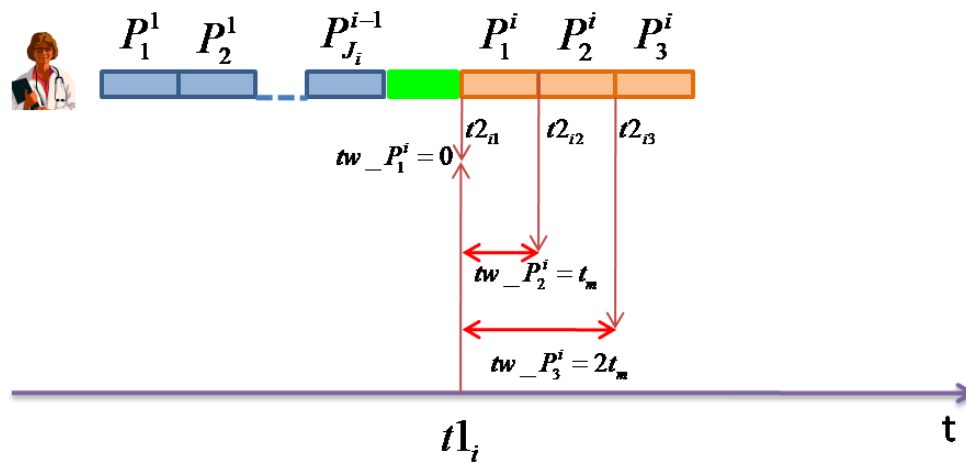
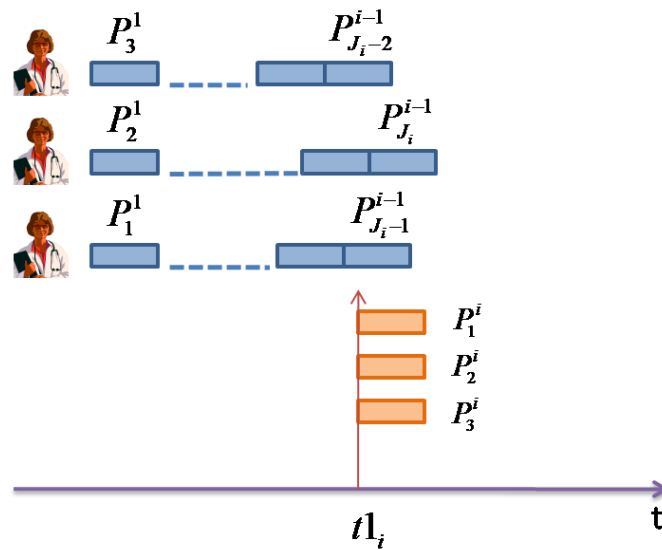
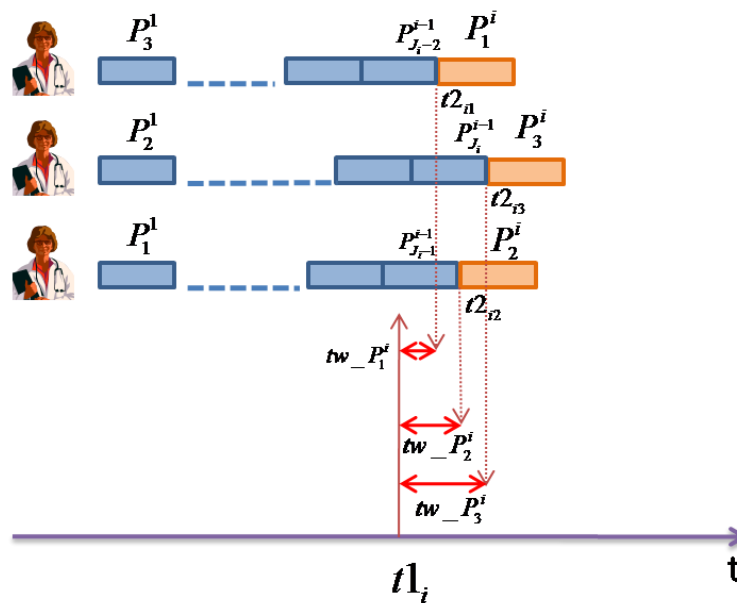


Figura 3b. Médico libre. Posicionamiento de pacientes

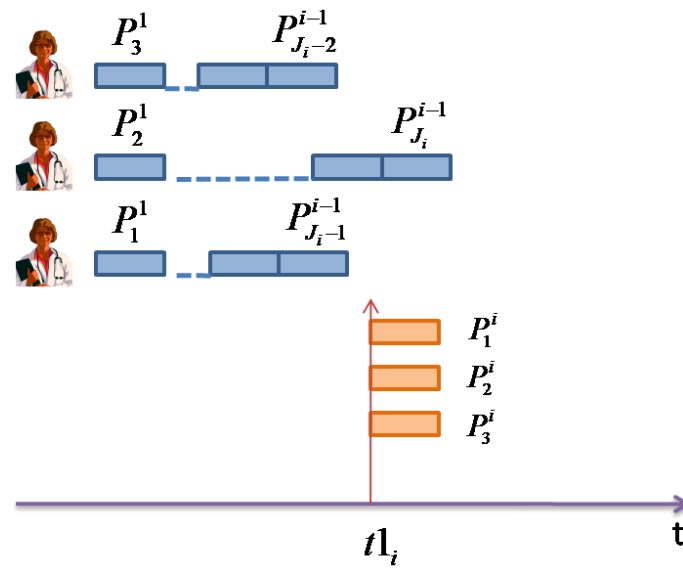
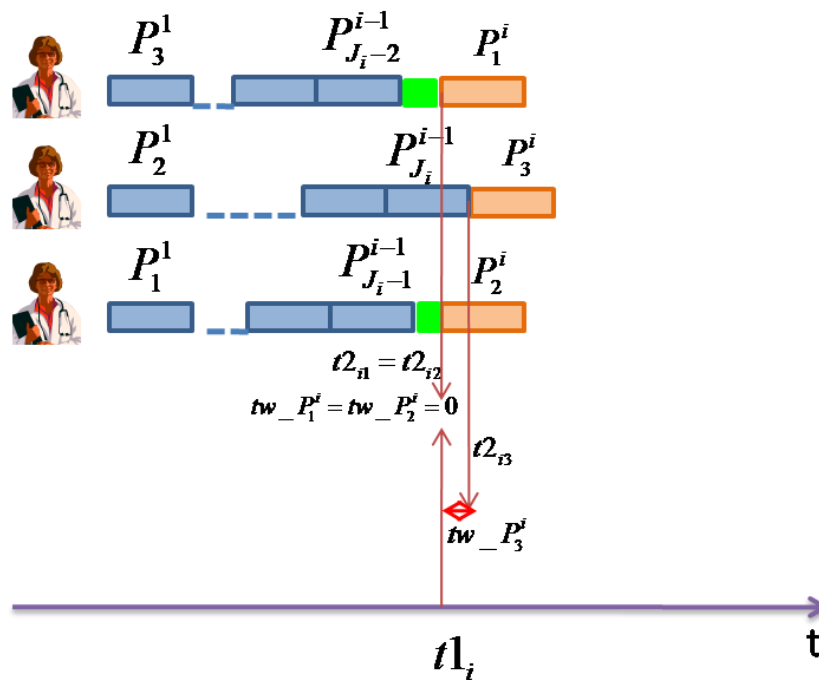
3.2. Caso general en el que se disponen de n facultativos

Generalicemos al caso con n facultativos. Se podrá disponer de n barras de atención médica en paralelo. El tiempo que tarda un paciente en ser atendido se reduce en la mayoría de los casos. Se dan las siguientes opciones de estudio:

a2. En el momento de contabilización de los pacientes en el servicio de urgencias ($t1_i$), los médicos están ocupados con pacientes anteriores. El instante en el que un paciente k , $k \in \{1, \dots, J^i\}$ comienza su atención médica ($t2_{ik}$) se retrasa en función de los momentos de atención de los pacientes que le preceden. El paciente comienza su atención en consulta en el mínimo de los tiempos de salida de los pacientes inmediatamente anteriores a él. Por tanto, cada barra (que representa el tiempo efectivo de atención en consulta) se desplaza horizontalmente hasta posicionarse a continuación de la última barra (de entre todas las consultas) que esté situada más a la izquierda. Este hecho queda representado en las figuras 4a y 4b.

Figura 4a. Simulación de entrada de pacientes en el instante t_{1i} para n médicos ocupadosFigura 4b. Posicionamiento de pacientes para n médicos ocupados

b2. En el momento de contabilización de los pacientes en el servicio, existen m médicos libres $1 \leq m \leq n$; m pacientes se asignan a estos facultativos posicionando su barra de atención a partir de ese instante, el tiempo de espera es $tw = t_{2ik} - t_{1i} = 0$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Si $J > m$ existen $J-m$ pacientes que serán atendidos según lo indicado en a2. Obsérvese, el tiempo marcado con barra verde que denota el tiempo que el médico está libre. Estos hechos quedan representados en las figuras 5a y 5b.

Figura 5a. Simulación de entrada de pacientes en el instante $t1_i$ para n médicos (algún médico libre)Figura 5b. Posicionamiento de pacientes para n médicos (algún médico libre)

4. Puesta en práctica de la metodología

Se ha desarrollado un programa que, a partir de la metodología expuesta en la sección anterior, calcula el número de facultativos necesarios en el servicio, una vez que se ha fijado el tiempo máximo de espera deseable en dicho servicio (tiempo máximo permitido para el

mantenimiento de los estándares de calidad). De esta forma, las variables de entrada y salida para dicho programa serán:

Input:

- Tiempo máximo de espera deseable en el servicio.
- Tiempo medio de atención a los pacientes por el facultativo (t_m).
- Datos de afluencia de pacientes: número de pacientes que entran en el servicio de urgencia en cada instante en el que se actualiza la lista de entrada.

Output:

- Mínimo número de médicos simultáneos en el servicio para que pueda garantizarse el tiempo de espera máximo deseado.

Para la puesta en práctica de la herramienta se han generado los datos de entrada para 24 horas de servicio de urgencias de atención primaria. Además se considera un tiempo medio de atención, t_m , de 10 minutos.

Se presentan a continuación diferentes simulaciones dependiendo del valor de las variables que sean deseables en cada momento.

- Simulación 1: el tiempo de espera máximo permitido es de 10 minutos.

Se logra el objetivo con 4 médicos simultáneos. Los resultados que se obtienen se muestran a continuación en las figuras 6a a 6f. En la figura 6a se observa, para cada médico, el tiempo efectivo en el que está atendiendo pacientes y el tiempo en el que no está en consulta. Se aprecia que el tiempo en que están ocupados pasa por dos franjas de hora punta, una en la mañana y otra en la tarde. En el resto de horas no es óptimo económicamente, ni necesario, la presencia del número máximo de facultativos.

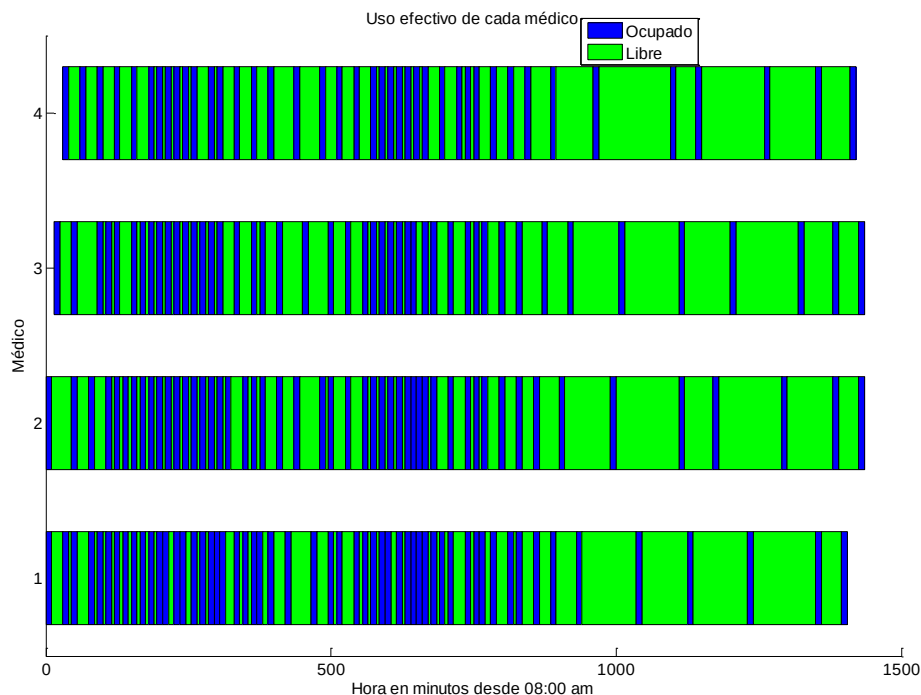


Figura 6a. Ocupación de cada uno de los médicos

En las figuras 6b, 6c, 6d y 6e, se visualiza el número de facultativos que se están utilizando en cada instante. Se observa que excepto para las zonas horarias de mayor afluencia, se puede lograr el objetivo con 1 o 2 médicos.

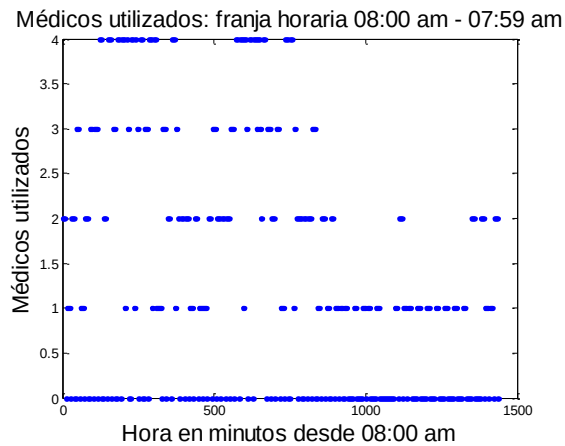


Figura 6b. Número de médicos que se utilizan en cada instante. Desde 08:00 am hasta 07:59 am

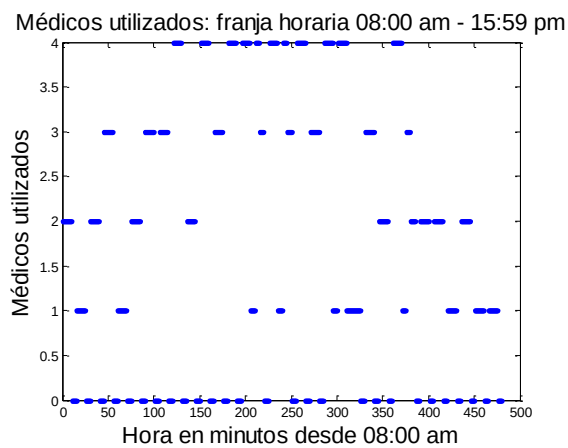


Figura 6c. Número de médicos que se utilizan en cada instante. Desde 08:00 am hasta 15:59 pm

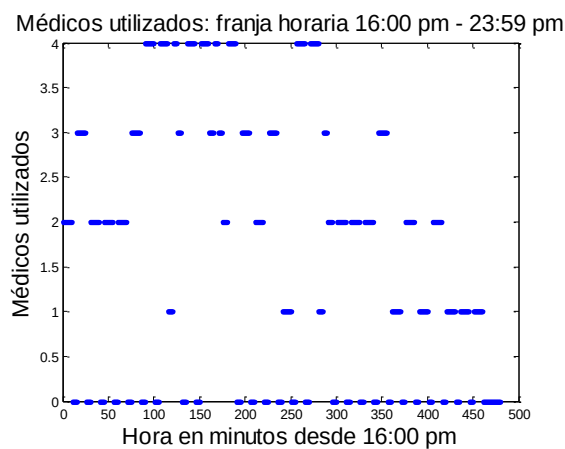


Figura 6d. Número de médicos que se utilizan en cada instante. Desde 16:00 pm hasta 23:59 pm

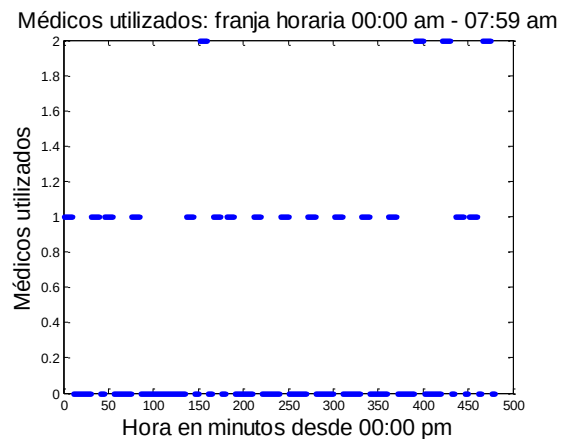


Figura 6e. Número de médicos que se utilizan en cada instante. Desde 00:00 am hasta 07:59 am

A continuación, en la figura 6f, se muestra el tiempo de espera que sufren los pacientes en cada instante, a lo largo de las 24 horas de servicio. Salvo en las horas punta en las que se alcanza el tiempo máximo de espera permitido, en las horas restantes se trabaja sin espera, lo cual nos indica que se puede reducir el número de médicos que se están utilizando en esas franjas horarias y que se indican en las figuras 6b a 6e en, al menos, un facultativo.

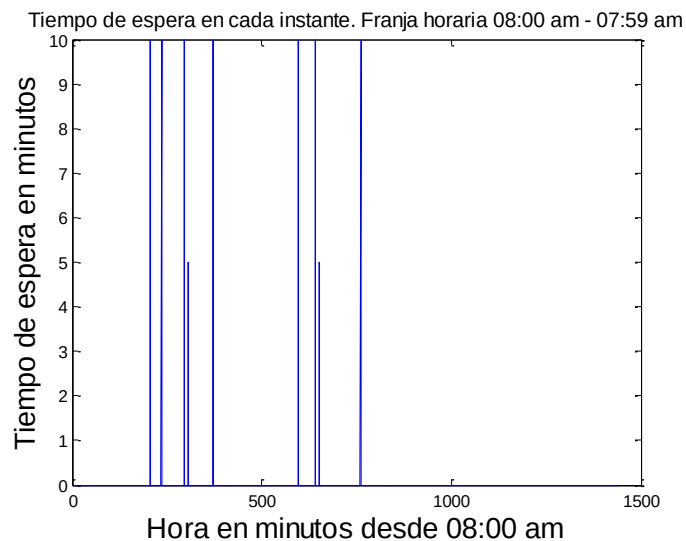


Figura 6f. Tiempo de espera real en cada instante

La conclusión del estudio aplicado a esta simulación indica que se tendrían que utilizar 4 médicos en hora punta, 2 médicos en horas alrededor de punta y 1 médico en el resto de horario.

- Simulación 2: el tiempo de espera máximo permitido es de 20 minutos.

Se logra el objetivo con 3 médicos simultáneos. Los resultados que se obtienen se muestran a continuación en las figuras 7a, 7b y 7c. En la figura 7a se observa, para cada

médico, el tiempo efectivo en el que está atendiendo pacientes y el tiempo en el que no está en consulta. Se aprecia que el tiempo en el que están ocupados se incrementa respecto al caso anterior, y también pasa por dos franjas de hora punta, ahora más extensas, una en la mañana y otra en la tarde. En el resto de horas no es óptimo económicamente, ni necesario, la presencia del número máximo de facultativos.

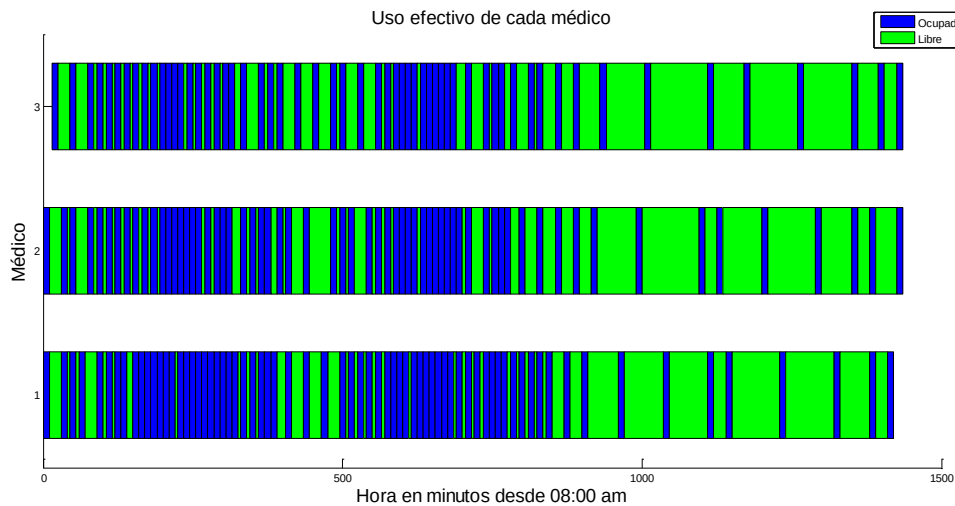


Figura 7a. Ocupación de cada uno de los médicos

En la figura 7b, se visualiza el número de facultativos que se están utilizando en cada instante. Se observa que excepto para las zonas horarias de mayor afluencia, se puede lograr el objetivo con 1 o 2 médicos.

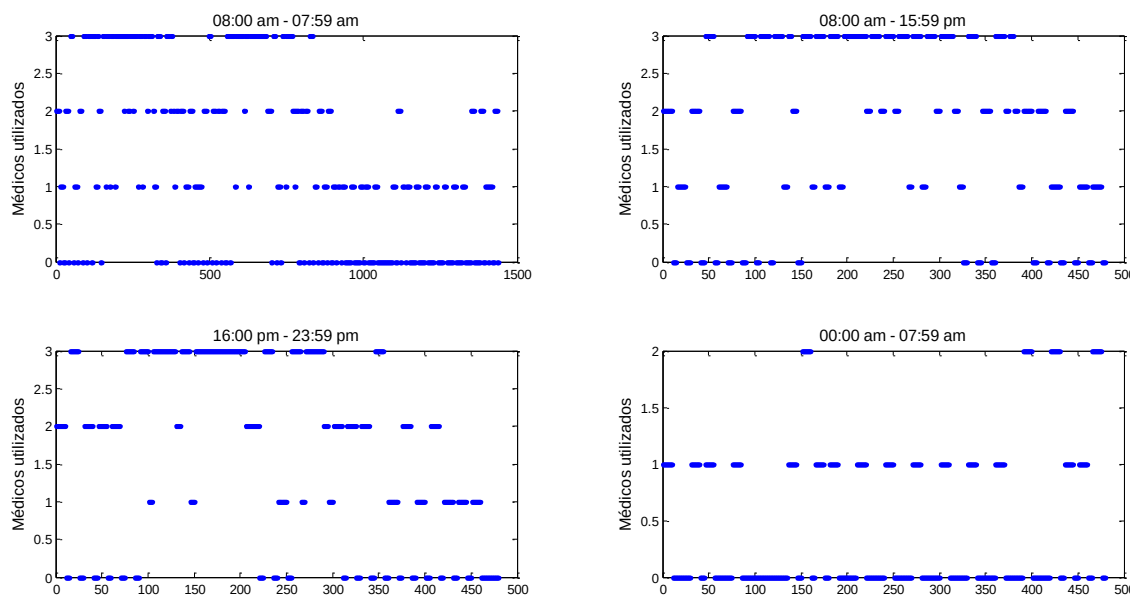


Figura 7b. Número de médicos que se utilizan en cada instante. Franjas horarias indicadas en cada subfigura

A continuación, en la figura 7c, se muestra el tiempo de espera que tienen los pacientes en cada instante, a lo largo de las 24 horas de servicio. Salvo en las horas punta en las que se alcanza el tiempo máximo de espera permitido, en el tiempo restante se trabaja sin espera, lo cual nos indica que se puede reducir el número de médicos que se están utilizando y que se indican en la figura 7b.

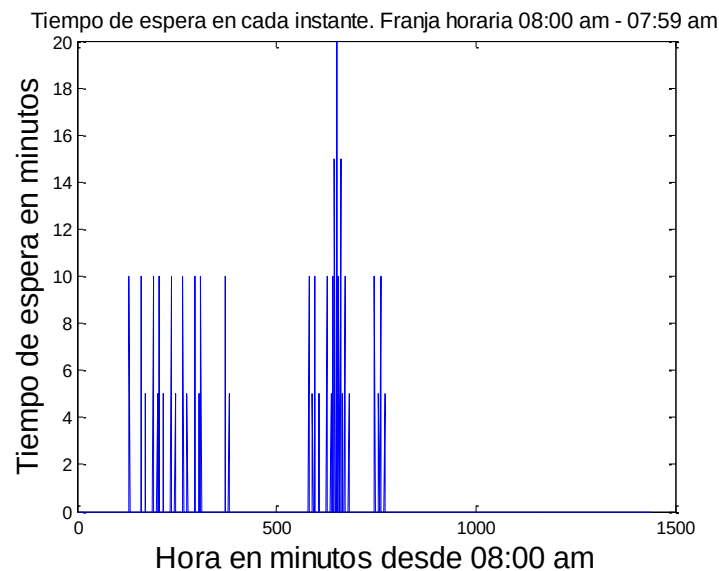


Figura 7c. Tiempo de espera real en cada instante

La conclusión del estudio aplicado a esta simulación indica que se tendrían que utilizar 3 médicos en hora punta, 2 médicos en horas alrededor de punta y 1 médico en el resto de horario.

- Simulación 3: el tiempo de espera máximo permitido es de 30 a 59 minutos.

Obtenemos los mismos resultados que en el caso anterior. En hora punta se deben disponer 3 médicos y se tendrían tiempos de espera de 20 minutos. Si se reduce la disposición de médicos, los tiempos de espera se incrementan fuertemente.

- Simulación 4: Tiempo máximo permitido 60 minutos.

Se logra el objetivo con 2 médicos simultáneos. Los resultados que se obtienen se muestran a continuación en las figuras 8a, 8b y 8c. En la figura 8a se observa, para cada médico, el tiempo efectivo en el que está atendiendo pacientes y el tiempo en el que no está en consulta. Se aprecia que el tiempo en que están ocupados los facultativos se incrementa enormemente respecto a los casos anteriores, estando ocupados los dos médicos durante prácticamente todo el tiempo salvo las horas nocturnas. En el resto de horas no es óptimo económicamente, ni necesario, la presencia del número máximo de facultativos.

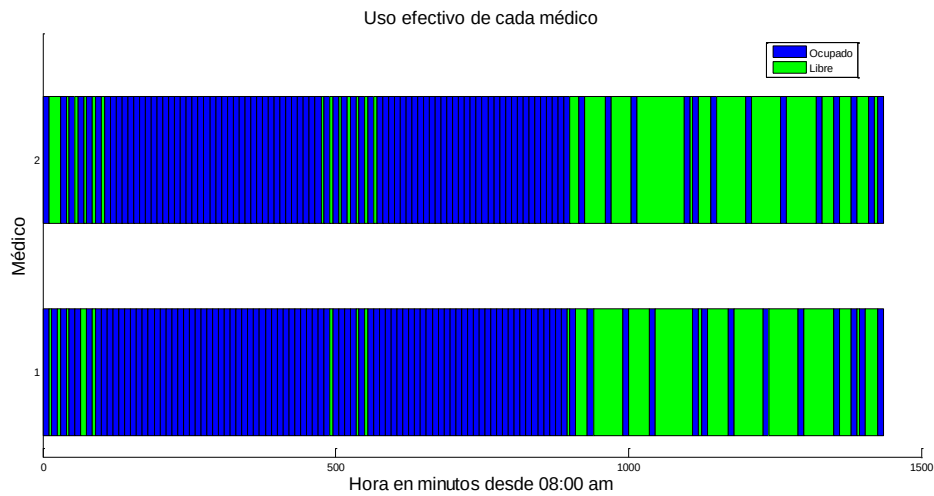


Figura 8a. Ocupación de cada uno de los médicos

En la figura 8b, se visualiza el número de facultativos que se están utilizando en cada instante. Se observa que se están utilizando los dos médicos excepto para las zonas horarias nocturnas.

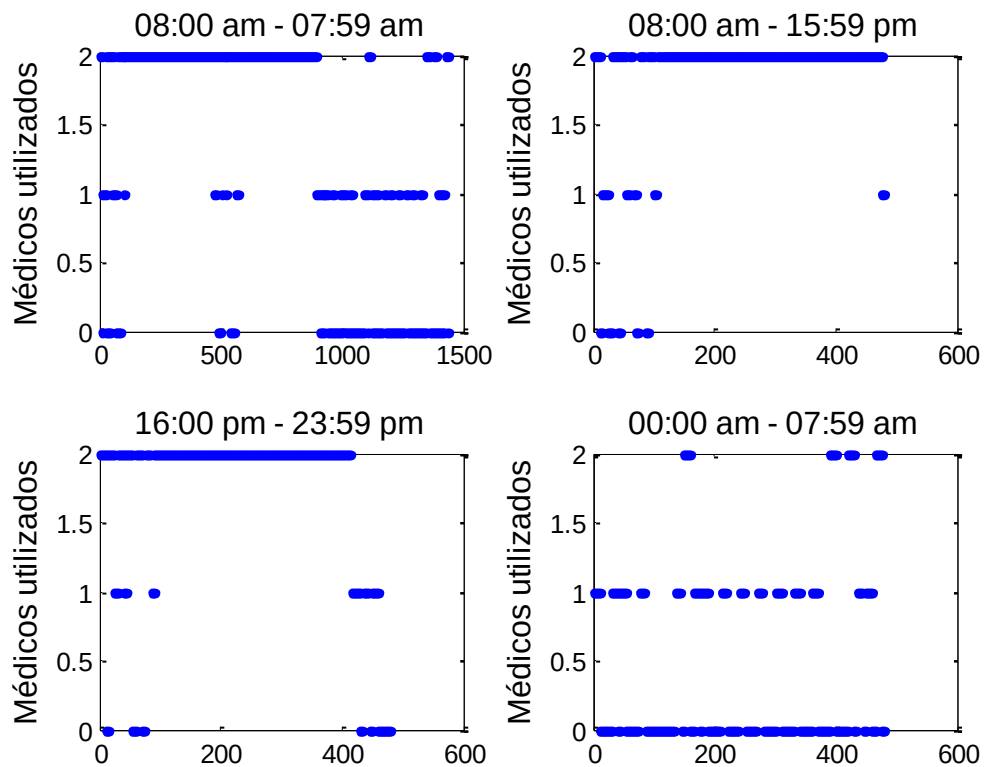


Figura 8b. Número de médicos que se utilizan en cada instante. Franjas horarias indicadas en cada subfigura

A continuación, en la figura 8c, se muestra el tiempo de espera que tienen los pacientes en cada instante, a lo largo de las 24 horas de servicio. El tiempo de espera es elevado a lo largo del día. En las horas nocturnas, el tiempo de espera se anula, lo cual nos indica que se puede reducir el número de médicos durante ese periodo a un único facultativo.

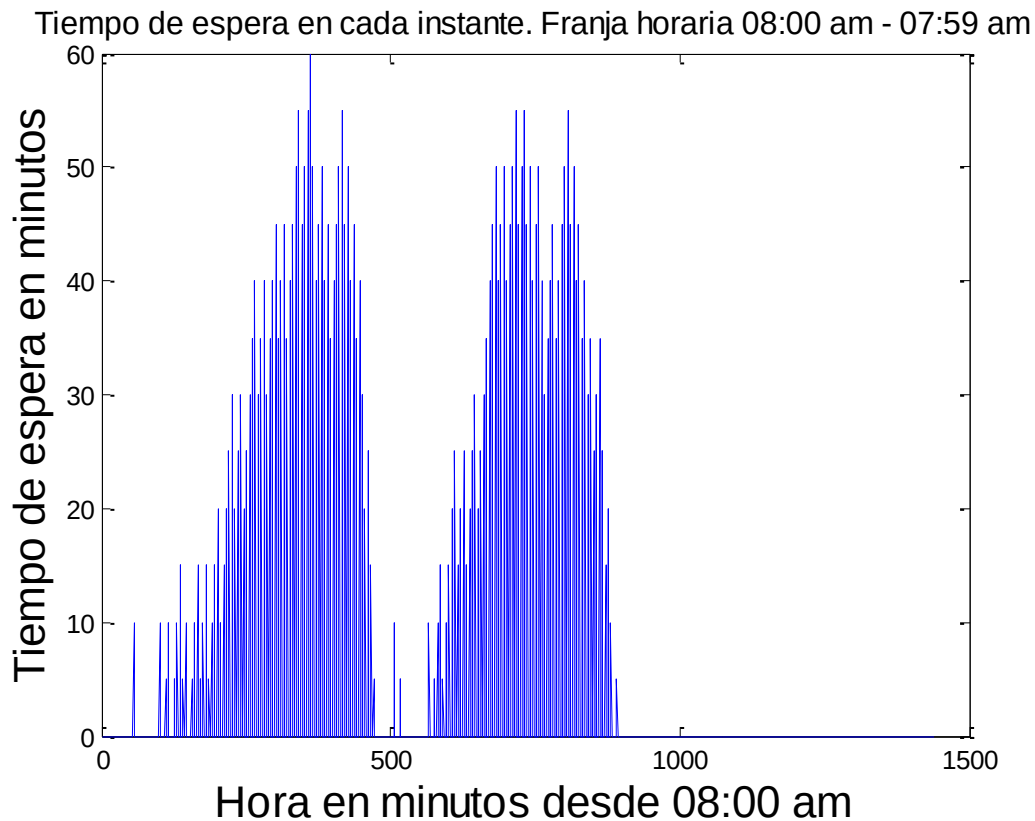


Figura 8c. Tiempo de espera real en cada instante

La conclusión del estudio aplicado a esta simulación indica que se tendrían que utilizar 2 médicos durante todo el horario salvo las horas nocturnas.

5. Conclusiones

Se ha presentado un software que consigue una planificación de los tiempos de espera de un servicio de urgencias de atención primaria.

El estudio indica que aumentando el número de médicos en horas punta se reduce el tiempo de espera a lo largo de todo el día. El aumento de horas efectivas de médico no es muy elevado, ya que las franjas de gran afluencia son reducidas. Sin embargo, los tiempos de espera se reducen enormemente y puede darse así una imagen de calidad en el servicio de cara a la ciudadanía. En horas de baja utilización se puede mantener un único médico. Dado que el coste de atención en los SUH es mucho mayor, invertir en el aumento de personal en los SUAP produce además rentabilidad económica.

Referencias

- [1] ÁLVAREZ ÁLVAREZ, B. et al. *Estudio del triage y tiempos de espera en un servicio de urgencias hospitalario*. Emergencias. vol. 10, núm. 2, marzo-abril 1998.
- [2] ÁVILA MÁRQUEZ, E. et al. *Organización de la asistencia en un Servicio de Urgencias*. Todo Hospital. 85: 71-75, 1992.
- [3] BELZUNEGUI OTANO et al. *Indicadores de calidad en Urgencias: comportamiento en relación con la presión asistencial*. Emergencias. Vol. 5, Núm. 3, Mayo-Junio 1993.
- [4] BORRÁS GAJU, A. *Organización de un Servicio de Urgencias Hospitalario*. Todo Hospital. 116: 53-60. 1995.
- [5] CUNNINGHAM PJ, CLANCY CM, COHEN JW, WILETS M. *The use of hospital emergency departments for nonurgent health problems: a national perspective*. Med Care Res Rev. 52: 453-74. 1995.
- [6] GARCÍA VEGA J, CLAVERIA FONTAN A. *Tiempo de estancia en un Servicio de Urgencias Hospitalario*. Emergencias. 1: 17-21. 1989.
- [7] GÓMEZ-JIMÉNEZ et al. *Análisis de la casuística de los pacientes derivables desde urgencias a atención primaria*. Gaceta Sanitaria, v.20 n.1 Barcelona ene.-feb. 2006.
- [8] HERNÁNDEZ I, AIBAR C, ARANAZ JM, LUMBRERAS B; *Planificación y programación en atención a la salud*; En: Piédrola G. et al. Medicina Preventiva y Salud Pública; 11ª edición; Madrid; Elsevier 2008.
- [9] JIMÉNEZ MURILLO, L. et al. *Urgencias sanitarias en España: situación actual y propuestas de mejora*. Sociedad Española de Medicina de Urgencias y Emergencias. Granada: Escuela Andaluza de Salud Pública; 2003.
- [10] NÚÑEZ LÓPEZ, R. et al. *Por qué acuden los pacientes a urgencias hospitalarias*. Revista científica de la sociedad española de enfermería de urgencias y emergencias. SEGUNDA ÉPOCA N°8 Julio - Agosto de 2009.
- [11] PASARIN, M ISABEL et al. *Razones para acudir a los servicios de urgencias hospitalarios: La población opina*. Gaceta Sanitaria. 2006, vol.20, n.2, pp. 91-99. ISSN 0213-9111.
- [12] PEIRÓ S et al. *Efectividad de las intervenciones para reducir la utilización inapropiada de los servicios hospitalarios de urgencias. Revisando la literatura 10 años después del informe del defensor del pueblo*. Economía y Salud. 33: 3-12. 1999.
- [13] PINEAULT R, DAVELUY C; *La Planificación Sanitaria. Conceptos, métodos, estrategias*; Masson; Barcelona 1987.
- [14] RIUS BRICOLLER C, VAQUERO BELMONTE F, SAGUER OLIVA M. *Estudio del tiempo de estancia en el Servicio de Urgencias como sistema de control de calidad*. Emergencias; 2: 22-25. 1990.
- [15] RODRÍGUEZ GUTIÉRREZ C, ROMERA GARCÍA T, MENÉNDEZ RIVERA JJ. *Estudio de tiempos en el área de Urgencias Hospitalarias*. Gaceta Sanitaria; 6: 113-116. 1992
- [16] SURROCA RM, SIMÓN RM, JUIG J, CARBONELL JM. *Metodología de análisis de calidad de un Servicio de Urgencias Hospitalario*. Revista Calidad Asistencial: 346-349. 1995.

Sobre las autoras:

Nombre: Sagrario Lantarón Sánchez

Correo Electrónico: sagrario.lantaron@upm.es

Institución: Departamento de Matemática e Informática aplicadas a la ingeniería Civil.
Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Mariló López González

Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es

Institución: Departamento de Matemática e Informática aplicadas a la ingeniería Civil.
Universidad Politécnica de Madrid, España.

Juegos Matemáticos

Entendiendo el Cuadrado Matemático de Benjamín Franklin

Understanding the Mathematical Square of Benjamin Franklin

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 125–156, ISSN 2174-0410
Recepción: 23 Abr'14; Aceptación: 1 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Este trabajo se realiza con el objetivo de entender cómo Benjamín Franklin, construyó un arreglo de los números enteros, del 1 al 64, logrando que en dicha construcción se presenten muchas características curiosas que han hecho de este arreglo un objeto de estudio y de anécdota, ya que el mismo es un tributo a la especial naturaleza de los números.

En este artículo se desentraña cómo fue posible esta construcción, para luego utilizar lo descubierto y, con un proceso debidamente sistematizado, edificar estructuras mayores que, de igual forma, se sujetan a las características planteadas en el documento original, y en muchos casos las superan con otras igual de curiosas.

Palabras Clave: Cuadrado Matemático, orden, sumatoria, arreglos.

Abstract

This work is done in order to understand how Benjamin Franklin, built an array of integers from 1 to 64, obtaining in this structure many curious features that have made this document an object of study, since it is a tribute to the special nature of the numbers.

The paper has managed to uncover how it was possible this construction, then it used what has discovered under a process duly systematized to build larger structures that fit in a similar way the characteristics proposed in the original document, and in many cases achieve other interesting ones.

Keywords: Mathematical Square, order, sum, arrangements.

1. Introducción

El Cuadrado Mágico de Benjamin Franklin que, tal como se presenta en la figura 1, ha constituido un enigma matemático, es un ordenamiento matricial de 8 filas por 8 columnas, donde

se ubican, los números naturales de 1 al 64, sin repetición, cumpliendo algunas condiciones especiales, que no han sido explicadas por algún tiempo. En este artículo se desvelará el intrincado proceso de su construcción, que posibilita incluso construir unos de orden superior.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 1. Copia del Cuadrado Matemático 8×8 de Benjamin Franklin.

En la primera sección explicaremos las propiedades del Cuadrado Matemático de Benjamín Franklin, para en la sección 2 indicar el proceso de su construcción, en la siguiente sección se indica el proceso para construir un cuadrado de estas características de orden 16×16 , para luego presentar unos resultados que prueban que el método funciona.

2. El Cuadrado Mágico de Benjamin Franklin

Se atribuye al pensador, padre de la Patria de los Estados Unidos de Norte América, la construcción del cuadrado mágico que ilustra esta publicación y que se reproduce a continuación. Se trata de una curiosidad matemática que deja vislumbrar en su contenido la capacidad del genio. A continuación explicaré algunas curiosidades que muestran la importancia de esta construcción.

PROPIEDADES

- Es un cuadrado de 8 filas por 8 columnas, contiene por tanto 64 espacios.
- Está llenado por naturales del 1 al 64 sin repetir, uno en cada espacio.
- Los elementos de cada fila suma 260.
- Los elementos de cada columna suman también 260.
- Si de la construcción tomamos cualquier sub cuadrado de orden 2 por 2, como el de la figura 2 que se muestra, sus números suman siempre 130, la mitad del total por fila y por columna a sabiendas de que es posible obtener 49 sub cuadrados de este orden.
- Si del cuadrado estudiado se toman sub cuadrados de orden 4 por 4 como el de la figura 3, sus elementos siempre sumarán 520, el doble de la suma de los elementos por fila o por columna, existen 25 sub cuadrados de ese tipo.

3	62
60	5

Figura 2

3	62	51	46
60	5	12	21
6	59	54	43
58	7	10	23

Figura 3

- g. Si del cuadrado de Franklin se extraen sub cuadrados de 6 por 6, como el que se muestra en la figura 4, sus elementos siempre sumarán 1170, 4.5 veces la suma de cada fila o columna, existen 9 sub cuadrados con de ese orden ¹.

3	62	51	46	35	30
60	5	12	21	28	37
6	59	54	43	38	27
58	7	10	23	26	39
8	57	56	41	40	25
63	2	15	18	31	34

Figura 4

- h. Si definimos como diagonal de dos sentidos a las que van hacia abajo e inician de izquierda a derecha las primeras cuatro columnas y de derecha a izquierda las otras cuatro, reubicando las celdas de las tres primeras columnas a la derecha del cuadrado para completar las 8 diagonales (como se muestra en las líneas trazadas en la figura 5), los elementos de cada una de las diagonales, siempre suman 260, valor igual a lo que suman los elementos de todas las filas y columnas.

52	61	4	13	20	29	36	45			
14	3	62	51	46	35	30	19	14		
53	60	5	12	21	28	37	44	53	60	
11	6	59	54	43	38	27	22	11	6	59
55	58	7	10	23	26	39	42	55	58	7
9	8	57	56	41	40	25	24	9	8	
50	63	2	15	18	31	34	47	50		
16	1	64	49	48	33	32	17			

Figura 5

- Ejemplo: si sumamos los elementos de la primera diagonal sería:

$$52 + 3 + 5 + 54 + 10 + 57 + 63 + 16 = 260$$

¹ Cuando el orden de los sub cuadrados es impar, no se cumple la condición de que sus elementos sumen un valor constante.

Diagonales semejantes son perfectamente construibles en el otro sentido, ubicando algunos elementos a la izquierda, de forma que se completen las ocho, de igual forma cada una contiene ocho elementos que, al igual que en el caso anterior suman 260, esto se observa en la figura 6.

				52	61	4	13	20	29	36	45		
		19	14	3	62	51	46	35	30	19			
	37	44	53	60	5	12	21	28	37	44			
38	27	22	11	6	59	54	43	38	27	22			
26	39	42	55	58	7	10	23	26	39	42			
	25	24	9	8	57	56	41	40	25	24			
		47	50	63	2	15	18	31	34	47			
			16	1	64	49	48	33	32	17			

Figura 6

- Ejemplo: si sumamos los elementos de la primera diagonal desde la derecha:

$$52 + 19 + 37 + 38 + 26 + 25 + 47 + 16 = 260$$

- Esta propiedad se cumple además en diagonales de doble sentido verticales, si extendemos el cuadrado en elementos en la parte superior, que permitan completar las ocho diagonales, como se observa en la figura 7. Los elementos de cada diagonal también suman 260.

- Ejemplo: si sumamos la primera diagonal se tiene:

$$52 + 3 + 5 + 54 + 43 + 28 + 30 + 45 = 260$$

52	61	4	13	20	29	36	45						
14	3	62	51	46	35	30	19						
53	60	5	12	21	28	37	44						
11	6	59	54	43	38	27	22						
55	58	7	10	23	26	39	42						
9	8	57	56	41	40	25	24						
50	63	2	15	18	31	34	47						
16	1	64	49	48	33	32	17						
	61	4	13	20	29	36							
		62	51	46	35								
			12	21									

Figura 7

				56	41								
		2	15	18	31								
		1	64	49	48	33	32						
52	61	4	13	20	29	36	45						
14	3	62	51	46	35	30	19						
53	60	5	12	21	28	37	44						
11	6	59	54	43	38	27	22						
55	58	7	10	23	26	39	42						
9	8	57	56	41	40	25	24						
50	63	2	15	18	31	34	47						
16	1	64	49	48	33	32	17						

Figura 8

- Si construimos las diagonales de doble sentido verticales de abajo hacia arriba, como se observa en la figura 8, se tiene también que sus elementos suman el mismo valor, esto es 260.

- Así se puede observar que si sumamos la primera diagonal se tiene:

$$52 + 1 + 2 + 56 + 41 + 31 + 32 + 45 = 260$$

El cuadrado central contiene los elementos 54, 43, 10 y 23, (figura 9) que suman como ya se dijo 130. Si tomamos simétricamente cuatro elementos cualesquiera que equidisten de estos cuatro, la suma de esos elementos es también 130.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 9

- Así se tiene que:

$$62 + 35 + 2 + 31 = 130$$

$$52 + 45 + 16 + 17 = 130$$

$$53 + 44 + 9 + 24 = 130$$

- Los cuatro primeros elementos de cada fila al igual que los cuatro últimos suman también 130.
- Los cuatro primeros elementos de cada columna al igual que los cuatro últimos suman también 130.

2.1. Construcción

Este cuadrado, en su construcción responde a algunas normas que posibilitan sus resultados:

- Sus elementos son consecutivos del 1 al 64, por tanto la sumatoria total será igual a $(64 \cdot 65)/2 = 2080$, si se desea que cada fila sume un valor igual, éste debe ser $2080/8=260$, esto también debe cumplirse en las columnas.
- En cada fila, tendremos 8 elementos y por lo indicado anteriormente cada uno de ellos suman 260 y están conformados por cuatro pares de números, por tanto cada par debe sumar 65, $(260/4=65)$, por tanto deberemos distribuir los sesenta y cuatro elementos en treinta y dos grupos de pares que sumen 65, iniciando con la combinación (1,64), luego (2,63) y así hasta llegar a la combinación (32,33), esto permite una correcta distribución en sentido horizontal.
- En las columna ya no podemos utilizar aquello de la división exacta en cuatro pares, lo que utilizaremos más bien es dividir cada columna en dos pares que sumen 64 y dos que sumen 66, para que la suma de los cuatro sea los mismos 260 requeridos. Siguiendo la siguiente norma, combinaremos pares con pares de forma que sumen 66, además sumaremos impares con impares de forma que sumen 64.

Es decir las combinaciones que suman 66 serán: (2,64), (4,62), (6,60), (8,58), (10,56), (12,54), (14,52), (16,50), (18,48), (20,46), (22,44), (24,42), (26,40), (28,38), (30,36), (32,34).

Y las que suman 64 serán: (1,63), (3,61), (5,59), (7,57), (9,55), (11,54), (13,51), (15,49), (17,47), (19,45), (21,43), (23,41), (25,39), (27,37), (29,35), (31,33).

- d. Luego se ubican de tal forma que las dos distribuciones en las que cada número está presente sean posibles, así si deseamos ubicar el 2, deberemos recordar que en las combinaciones de las filas este elemento forma parte de la combinación (2,63) y para las columnas la suma es par, por tanto forma parte de la combinación (2,64). Entonces este elemento se ubicará conforme se muestra en la figura 10.

Además se debe tener en cuenta que los otros elementos (1, 63 y 64) presentes en el cuadro también deben cumplir lo de sus combinaciones para filas y columnas.

- e. El siguiente cuadro que se construya debería tener en cuenta el número 3, que respetando las combinaciones de las filas y las columnas construye la figura 11, donde se involucra además otros tres elementos (4, 62 y 61), que también deben cumplir sus combinaciones.

Así también construiremos los cuadros para el número 5, que toma los elementos (6, 60 y 59), que se observa en la figura 12. La figura 13 contiene los elementos relacionados con el número 7, que son los elementos (8, 57 y 58).

63	2
1	64

Figura 10

61	4
3	62

Figura 11

59	6
5	60

Figura 12

57	8
7	58

Figura 13

- f. Buscamos una distribución simétrica, por lo que el cuadrado se divide en dos partes, una mitad izquierda, de ocho filas por cuatro columnas, donde ubicamos estos cuadros alternando, comenzando con el primero en las dos filas inferiores, el de la figura 11 en las filas superiores, primera y segunda, el de la figura 11, invirtiendo las filas y columnas, en la tercera y cuarta desde arriba, y el de la figura 13, invirtiendo sus filas y columnas, en la parte inferior, en las filas 5 y 6 desde arriba, como se ve en la figura 14.

	61	4					
	3	62					
	60	5					
	6	59					
	58	7					
	8	57					
	63	2					
	1	64					

Figura 14

- g. Teniendo en consideración las reglas expuestas, construimos los cuadrados para los elementos del 9 al 16, y los ubicamos en sentido inverso, es decir el del 9 que contiene además los elementos (10, 56 y 55), lo ubicamos en las filas quinta y sexta desde arriba, el del 11, que además contiene los elementos (54, 12 y 53) lo ubicamos directamente en las filas tercera y cuarta, el relacionado con el 13 que contiene además a los números (14, 51 y 52), se ubicará en las dos primeras filas, invirtiéndolas, de igual forma, invirtiendo el cuadrado relacionado con el número 15 que además contiene los elementos (16, 49 y 50), se ubicará en la séptima y octava fila invirtiéndolas.

Se observa que las únicas columnas ocupadas son la segunda y tercera, por lo que para ubicar cada cuadro, separaremos las columnas, ubicando las primeras en la primera y las segundas en la cuarta, tal como se observa en la figura 15.

52	61	4	13				
14	3	62	51				
53	60	5	12				
11	6	59	54				
55	58	7	10				
9	8	57	56				
50	63	2	15				
16	1	64	49				

Figura 15

- h. Para rellenar las columnas de la quinta a la octava, lo haremos en función de las cuatro primeras columnas, calculando cada elemento con la siguiente norma: si el elemento de la columna uno de una fila cualquiera es mayor que 32, a ese valor restaremos 32 y su resultado se ubicará en la respectiva fila, para la columna sexta se calculará tomando en cuenta los valores de la segunda columna, las séptima y octava se construirán en función de la tercera y cuarta respectivamente, el resultado se observa en la figura 16, que justamente es el cuadrado Mágico de Benjamín Franklin.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figura 16

2.2. Análisis

Intentando entender esté cuadrado mágico explicare algunas ideas.

Las propiedades surgen justamente de la forma como se construye el cuadrado, así cada cuatro elementos consecutivos, en fila en columna o en cuadrado sumaran 130, la distribución simétrica de los elementos hace que todas las diagonales de doble sentido contengan elementos que produzcan un resultado idéntico y como también contienen ocho elementos, deben sumar 260, haciendo además que los cuatro elementos equidistantes de los elementos del centro sumen un valor igual, y como también son cuatro, estos deberán sumar 130.

Para entender mejor, construiremos un cuadro de cuatro columnas por ocho filas, donde cada elemento contendrá la suma de dos originales consecutivos, por cada fila (figura 17).

Está claro que si realizamos nuevamente esa operación se tendrá dos columnas donde todas contendrán el 130.

Si se realiza una operación similar, pero ahora sumando los números consecutivos en ca-

da columna tendremos un cuadro de cuatro filas por ocho columnas, como se observa en la figura 18. También se tiene que si sumamos los elementos consecutivos, tendremos 130 como resultado.

F1	F2	F3	F4
113	17	49	81
17	113	81	49
113	17	49	81
17	113	81	49
113	17	49	81
17	113	81	49
113	17	49	81
17	113	81	49

Figura 17

G1	66	64	66	64	66	64	66	64
G2	64	66	64	66	64	66	64	66
G3	66	64	66	64	66	64	66	64
G4	64	66	64	66	64	66	64	66

Figura 18

2.3. Variaciones

Combinación	
F1-F2-F3-F4	SI
F1-F2-F4-F3	SI
F1-F3-F2-F4	NO
F1-F3-F4-F2	NO
F1-F4-F2-F3	NO
F1-F4-F3-F2	NO
F2-F1-F3-F4	SI
F2-F1-F4-F3	SI
F2-F3-F1-F4	NO
F2-F3-F4-F1	NO
F2-F4-F1-F3	NO
F2-F4-F3-F1	NO
F3-F1-F2-F4	NO
F3-F1-F4-F2	NO
F3-F2-F1-F4	NO
F3-F2-F4-F1	NO
F3-F4-F1-F2	SI
F3-F4-F2-F1	SI
F4-F1-F2-F3	NO
F4-F1-F3-F2	NO
F4-F2-F1-F3	NO
F4-F2-F3-F1	NO
F4-F3-F1-F2	SI
F4-F3-F2-F1	SI

Figura 19

Combinación	
G1-G2-G3-G4	SI
G1-G2-G4-G3	SI
G1-G3-G2-G4	NO
G1-G3-G4-G2	NO
G1-G4-G2-G3	NO
G1-G4-G3-G2	NO
G2-G1-G3-G4	SI
G2-G1-G4-G3	SI
G2-G3-G1-G4	NO
G2-G3-G4-G1	NO
G2-G4-G1-G3	NO
G2-G4-G3-G1	NO
G3-G1-G2-G4	NO
G3-G1-G4-G2	NO
G3-G2-G1-G4	NO
G3-G2-G4-G1	NO
G3-G4-G1-G2	SI
G3-G4-G2-G1	SI
G4-G1-G2-G3	NO
G4-G1-G3-G2	NO
G4-G2-G1-G3	NO
G4-G2-G3-G1	NO
G4-G3-G1-G2	SI
G4-G3-G2-G1	SI

Figura 20

Teniendo en cuenta lo expuesto en el análisis anterior, se debe tener en cuenta que si deseamos modificar el cuadrado mágico de Benjamín Franklin, deberemos intercambiar columnas o filas manteniendo la estructura de cuadros 2×2 que permitieron su construcción.

Del ordenamiento presente en la figura 15 existen 24 posibles permutaciones de filas y columnas, más como vemos en la figura 19, únicamente 8 cumplen aquello de que la mitad derecha suma lo mismo que la mitad izquierda. De igual forma existen 24 posibles permutaciones de columnas de lo presentado en la figura 16, más tan solo 8 de ellas cumplen aquello de que la mitad inferior suma igual que la mitad superior, tal como se ilustra en la figura 20.

En la figura 17 se tienen todos las posibles combinaciones de los cuatro grupos presentados en la figura 16, vemos que de las 24 posibles, 8 mantienen las características, y 16 no, por tanto existen 8 posibilidades de nuevos cuadrados mágicos con las propiedades del cuadrado mágico horizontal.

Las combinaciones para columnas en cambio se entenderán si partimos de la figura 15, en este caso es posible intercambiar F1 con F2, manteniendo el total de la mitad izquierda, se puede cambiar F3 con F4, haciendo que el total en la mitad derecha se mantenga y simultáneamente deben cambiarse la F1 y F2 con la F3 y F4, para que no se altere el total por mitades,

en total tendremos $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Es posible demostrar lo indicado generando las 24 combinaciones y viendo cuántas de ellas mantienen las propiedades indicadas, en la figura 18 se observa que estas son ocho.

Para concluir podemos decir que si el deseo es calcular cuántas variaciones puedan construirse intercambiando simultáneamente filas y columnas, lo que se deberá hacer es multiplicar 8 por 8 y se puede afirmar que, con base en este estudio, el cuadrado mágico de Benjamín Franklin, genera otros 63, es decir existen 64 cuadrados 8×8 , que se sujetan a las propiedades propuestas por el famoso científico. No he podido encontrar en la literatura científica explicación de cómo se construye el curioso cuadrado ni de cómo encontrar variaciones del mismo, por lo que estimo importante este descubrimiento.

Para reforzar lo indicado a continuación presento tres cuadrados de orden 8×8 , que se sujetan a las propiedades propuestas.

La figura 21 resulta de cambiar G4 con G1, G3 con G2 y además F2 con F1, y cumple las propiedades expuestas.

	G4		G3		G1		G2	
F2	37	44	21	28	53	60	5	12
	27	22	43	38	11	6	59	54
F1	36	45	20	29	52	61	4	13
	30	19	46	35	14	3	62	51
F3	39	42	23	26	55	58	7	10
	25	24	41	40	9	8	57	56
F4	34	47	18	31	50	63	2	15
	32	17	48	33	16	1	64	49

Figura 21

La figura 22 resulta de cambiar G2 con G1, G3 con G4 y además F3 con F4, y cumple las propiedades expuestas.

	G2		G1		G4		G3	
F1	4	13	52	61	36	45	20	29
	62	51	14	3	30	19	46	35
F2	5	12	53	60	37	44	21	28
	59	54	11	6	27	22	43	38
F4	2	15	50	63	34	47	18	31
	64	49	16	1	32	17	48	33
F3	7	10	55	58	39	42	23	26
	57	56	9	8	25	24	41	40

Figura 22

La figura 23 resulta de cambiar G2 con G1, G3 con G4 y además F3 con F1, F4 con F2, F2 con F3 y F4 con F1, se cumplen las propiedades expuestas.

Así podemos exponer los sesenta y cuatro cuadrados mágicos, tipo Benjamin Franklin.

Se puede concluir entonces que existen 64 formas de ubicar el conjunto de números ente-

	G2		G1		G4		G3	
F3	7	10	55	58	39	42	23	26
	57	56	9	8	25	24	41	40
F4	2	15	50	63	34	47	18	31
	64	49	16	1	32	17	48	33
F2	5	12	53	60	37	44	21	28
	59	54	11	6	27	22	43	38
F1	4	13	52	61	36	45	20	29
	62	51	14	3	30	19	46	35

Figura 23

ros, del 1 al 64, de tal forma que se construya un cuadrado mágico, con las características del presentado por el famoso inventor.

Basándome en las propiedades de los números naturales, podemos construir cuadrados mágicos tomando cada elemento distinto, afectándolo por una transformación lineal cualquiera para generar otro conjunto de sesenta y cuatro elementos, donde estos, colocándolos en los respectivos lugares donde se ubicaban los elementos originales construyen otro cuadrado mágico que cumple las condiciones, obviamente el nuevo cuadrado ya no será con los sesenta y cuatro elementos consecutivos, será con elementos distintos que respondan a la transformación lineal, estando claro que sus constantes de sumatoria responderán a su vez a la nueva estructura.

Así si tomo el cuadrado inicial y a cada elemento le afecto por la transformación lineal $3k - 2$, donde k es la variable a la cual se deberán asignar los valores del 1 al 64, generando la serie de números (1, 4, 7, 10, 13, ..., 184, 187, 190), cuya sumatoria puede calcularse de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{64} A_i = \sum_{k=1}^{64} 3k - 2 = 3 \sum_{k=1}^{64} k - 2 \sum_{k=1}^{64} 1$$

Que aplicando la formula de sumatoria de números consecutivos:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se tiene:

$$\sum_{k=1}^{64} A_i = 3 \cdot \frac{65 \cdot 64}{2} - 2 \cdot 64 = 3 \cdot 65 \cdot 32 - 128 = 6112$$

Por tanto los elementos de cada columna, fila ó diagonal doble sentido deberán sumar $6112/8 = 764$, cada semifila o semicolumna deberá sumar la mitad de eso, es decir 382, al igual que los elementos de los cuadrados 2×2 , los cuadrados 4×4 , deben sumar 4 veces el ultimo valor, esto es 1528, al igual que la suma de las esquinas, los cuadrados 6×6 deben sumar 3438.

Se puede observar dicho cuadrado en la figura 24.

Es posible corroborar que se cumplen todas las condiciones propuestas, reiterando que en este caso los elementos no son consecutivos, responden a la transformación lineal propuesta.

Se tiene también que los totales de las sumas guardan entre si una relación, que también obedece a la transformación lineal, así:

$$3 \cdot 280 - 8 \cdot 2 = 780 - 16 = 764$$

154	181	10	37	58	85	106	133
40	7	184	151	136	103	88	55
157	178	13	34	61	82	109	130
31	16	175	160	127	112	79	64
163	172	19	28	67	76	115	124
25	22	169	166	121	118	73	70
148	187	4	43	52	91	100	139
46	1	190	145	142	97	94	49

Figura 24

260 Es el total por columna fila o diagonal doble sentido del cuadrado original y 764 el resultado de la suma de los elementos respectivos generados por la transformación lineal, de igual forma, el total de la suma de las esquinas que equidistan del centro es 130 en el cuadrado inicial y 382 de los generados por la transformación lineal, y se cumple que:

$$3 \cdot 130 - 4 \cdot 2 = 390 - 8 = 382$$

El cuatro que multiplica al dos se interpreta como que en este caso se tienen cuatro elementos, cada uno de los cuales afecta con una cantidad constante de 2.

Por ultimo veremos que sucede cuando sumamos dos cuadrados mágicos del tipo de B.F. si adicionamos elemento a elemento se construye un nuevo cuadro, que mantiene las propiedades del cuadrado de B.F.

Esto lo podemos corroborar con un ejemplo, las figuras 25 y 26 son dos cuadrados mágicos del tipo B.F., la suma elemento a elemento de estos dos, se tiene en la figura 27.

201	237	9	45	73	109	137	173
49	5	241	197	177	133	113	69
205	233	13	41	77	105	141	169
37	17	229	209	165	145	101	81
213	225	21	33	85	97	149	161
29	25	221	217	157	153	93	89
193	245	1	53	65	117	129	181
57	-3	249	189	185	125	121	61

Figura 25

Que a su vez cumple con las propiedades expuestas, así por fila columna o diagonal invertida suma 1244 ($260 + 984$), los cuadrados de 2×2 , semifila, semicolumna o esquinas de cuadrados 622 ($130 + 492$), y así cada resultado cumpliendo también con ser la sumatoria de los respectivos resultados de los cuadrados de las figuras 25 y 26.

20	29	36	45	52	61	4	13
46	35	30	19	14	3	62	51
21	28	37	44	53	60	5	12
43	38	27	22	11	6	59	54
23	26	39	42	55	58	7	10
41	40	25	24	9	8	57	56
18	31	34	47	50	63	2	15
48	33	32	17	16	1	64	49

Figura 26

221	266	45	90	125	170	141	186
95	40	271	216	191	136	175	120
226	261	50	85	130	165	146	181
80	55	256	231	176	151	160	135
236	251	60	75	140	155	156	171
70	65	246	241	166	161	150	145
211	276	35	100	115	180	131	196
105	30	281	206	201	126	185	110

Figura 27

3. Construcción de Cuadrado Mágico 16×16 , Tipo Benjamin Franklin (B.F.)

3.1. Objetivo

Con lo anteriormente expuesto, me propongo a continuación construir un cuadrado mágico de 16×16 , que cumpla las propiedades del propuesto por Benjamín Franklin.

3.2. Análisis

El cuadrado deseado es de 16 columnas y 16 filas, por tanto contiene 256 números, enteros del 1 al 256, lo que permite concluir que el total de la sumatoria de todos sus elementos será de $256 \times 257/2 = 32896$, se desea que cada fila contenga 16 elementos que sumen un mismo valor, este valor será $32896/16 = 2056$. Consecuentemente cada semifila tendrá 8 elementos que deben sumar $2056/2 = 1028$, para este caso se tendrá además que cada cuarto de fila deberá sumar $1028/2 = 514$.

Igual razonamiento se podrá hacer para las columnas, por tanto los elementos de cada columna deberán sumar 2056, de cada semicolumna 1028 y de cada cuarta parte de columna 514.

Por otra parte el cuadrado de 16×16 contiene 64 cuadrados 2×2 independientes que por tanto deberán sumar $32896/64 = 514$, valor equivalente a la suma de los elementos de cada cuarto de fila o de cada cuarto de columna.

Con la intención de construir los mismos, se establecerán dos normas básicas que posibiliten

la construcción de cada cuadrado de orden 2×2 .

Para las filas cada par deberá sumar $514/2 = 257$, esto da duplas de la forma (1,256), (2,255), (3,254), ..., (128,129), es decir se tendrán 128 duplas.

Para las columnas, la primera de ellas deberá sumar 256, con elementos impares, esto da 64 duplas de la forma (1,255), (3,253), (5,251), ..., (127,129), y la segunda columna deberá sumar 258 con elementos pares, así se generarán también 64 duplas de la forma (2,256), (4,254), (6,252), ..., (128,130).

Con lo cual podremos construir cuadrados de la forma:

255	2	253	4	251	6	249	8	247	10	245	12
1	256	3	254	5	252	7	250	9	248	11	246

En total deberán construirse 64, respetando el esquema planteado. Luego ubicaremos estos cuadrados de forma simétrica, es decir alternando, siguiendo el siguiente proceso².

1. Iniciando en la fila inferior, la doceava, ubicaremos el cuadrado del 1 en las columnas cuarta y quinta, desde la izquierda. El cuadrado del tres lo ubicaremos, invirtiendo filas y columnas en las dos primeras filas y en las mismas columnas, el cuadrado del 5 en las filas tercera y cuarta, el del siete invirtiendo sus filas, lo ubicamos en las filas decimotercera y decimocuarta, y así hasta llenar las columnas cuarta y quinta, alternando columnas directas o columnas invertidas, iniciando desde la inferior, luego la superior hasta concluir por el centro en las filas cuarta y quinta, como se observa en la figura 28.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
F1				254	3											
F2				4	253											
F3				251	6											
F4				5	252											
F5				245	12											
F6				11	246											
F7				244	13											
F8				14	243											
F9				242	15											
F10				16	241											
F11				247	10											
F12				9	248											
F13				250	7											
F14				8	249											
F15				255	2											
F16				1	256											

Figura 28

² Numeraremos a las filas de la primera a la decimosexta, de arriba hacia abajo, y las columnas de igual forma de la primera a la decimosexta de izquierda a derecha. Además, a cada cuadrado de orden 2×2 , lo designaremos en función del menor valor que esté presente en el mismo, así los expuestos anteriormente, de izquierda a derecha se designarán, cuadrados del 1, del 3, del 5, del 7, del 9 y del 11.

2. Luego tomamos los cuadrados desde el del 17 hasta aquél del 31. Empezamos ubicándolas en orden inverso a la del grupo anterior, esto es iniciando en las filas novena y décima, manteniendo la alternabilidad ya expuesta anteriormente, y ubicando las partes correspondientes a cada cuadrado en las columnas tercera y séptima, cambiando las columnas de cada cuadro pequeño, se puede observar esto en la figura 29.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
F1		30		254	3		227									
F2		228		4	253		29									
F3		27		251	6		230									
F4		229		5	252		28									
F5		21		245	12		236									
F6		235		11	246		22									
F7		20		244	13		237									
F8		238		14	243		19									
F9		18		242	15		239									
F10		240		16	241		17									
F11		23		247	10		234									
F12		233		9	248		24									
F13		26		250	7		231									
F14		232		8	249		25									
F15		31		255	2		226									
F16		225		1	256		32									

Figura 29

3. Ahora ubicaremos los cuadrados, desde aquél que corresponde al 33 hasta el que se relaciona con 47, cambiando las columnas e iniciando desde la última fila, luego las primeras, con las alternabilidades ya expuestas, ubicando las partes en la columna octava y la primera como se observa en la figura 30.
4. A continuación, e iniciando por las filas centrales, ubicaremos, respetando el orden de las columnas, los cuadrados, desde el que corresponde al 49, hasta el que se construyó en función del 63, estos los ubicamos en las columna tercera y sexta, como se puede ver en la figura 31, donde además vemos que se ha llenado ya toda la parte izquierda del cuadrado, esto es de la primera columna hasta la octava. Los elementos que se encuentran son los números del 1 al 64 y del 193 al 256.
5. Por último ubicaremos los elementos de las columnas novena a la decimosexta, así para cada elemento de la columna novena, tomamos el valor correspondiente a esa fila de la columna primera y si éste es menor que 128, sumamos 128, en cambio si es mayor le restaremos 128, ubicando su resultado en la respectiva celda, para la décima columna aplicamos lo mismo pero a los elementos de la segunda columna, y así hasta construir la decimosexta columna en base a los de la octava, el resultado de este procedimiento se observa en la figura 32, donde el cuadrado se ha concluido y además se tiene que se cumplen todas las condiciones del cuadrado de B.F.

Se tiene que todos los elementos de cada fila, columna y diagonales dobladas suman 2056, en cada semifila y cada semicolumna sus elementos suman 1028, cada cuarta parte de fila o columna contiene elementos cuya sumatoria es 514, al igual de los elementos que constituyen esquinas de cualquier rectángulo interior ó los elementos de cualquier cuadrado 2×2 , que en este caso existen 225. Tenemos también que los elementos de los cuadrados 4×4 , que en

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
F1	35	30		254	3		227	222								
F2	221	228		4	253		29	36								
F3	38	27		251	6		230	219								
F4	220	229		5	252		28	37								
F5	44	21		245	12		236	213								
F6	214	235		11	246		22	43								
F7	45	20		244	13		237	212								
F8	211	238		14	243		19	46								
F9	47	18		242	15		239	210								
F10	209	240		16	241		17	48								
F11	42	23		247	10		234	215								
F12	216	233		9	248		24	41								
F13	39	26		250	7		231	218								
F14	217	232		8	249		25	40								
F15	34	31		255	2		226	223								
F16	224	225		1	256		32	33								

Figura 30

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16
F1	35	30	195	254	3	62	227	222								
F2	221	228	61	4	253	196	29	36								
F3	38	27	198	251	6	59	230	219								
F4	220	229	60	5	252	197	28	37								
F5	44	21	204	245	12	53	236	213								
F6	214	235	54	11	246	203	22	43								
F7	45	20	205	244	13	52	237	212								
F8	211	238	51	14	243	206	19	46								
F9	47	18	207	242	15	50	239	210								
F10	209	240	49	16	241	208	17	48								
F11	42	23	202	247	10	55	234	215								
F12	216	233	56	9	248	201	24	41								
F13	39	26	199	250	7	58	231	218								
F14	217	232	57	8	249	200	25	40								
F15	34	31	194	255	2	63	226	223								
F16	224	225	64	1	256	193	32	33								

Figura 31

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	
F1	35	30	195	254	3	62	227	222	163	158	67	126	131	190	99	94	2056
F2	221	228	61	4	253	196	29	36	93	100	189	132	125	68	157	164	2056
F3	38	27	198	251	6	59	230	219	166	155	70	123	134	187	102	91	2056
F4	220	229	60	5	252	197	28	37	92	101	188	133	124	69	156	165	2056
F5	44	21	204	245	12	53	236	213	172	149	76	117	140	181	108	85	2056
F6	214	235	54	11	246	203	22	43	86	107	182	139	118	75	150	171	2056
F7	45	20	205	244	13	52	237	212	173	148	77	116	141	180	109	84	2056
F8	211	238	51	14	243	206	19	46	83	110	179	142	115	78	147	174	2056
F9	47	18	207	242	15	50	239	210	175	146	79	114	143	178	111	82	2056
F10	209	240	49	16	241	208	17	48	81	112	177	144	113	80	145	176	2056
F11	42	23	202	247	10	55	234	215	170	151	74	119	138	183	106	87	2056
F12	216	233	56	9	248	201	24	41	88	105	184	137	120	73	152	169	2056
F13	39	26	199	250	7	58	231	218	167	154	71	122	135	186	103	90	2056
F14	217	232	57	8	249	200	25	40	89	104	185	136	121	72	153	168	2056
F15	34	31	194	255	2	63	226	223	162	159	66	127	130	191	98	95	2056
F16	224	225	64	1	256	193	32	33	96	97	192	129	128	65	160	161	2056
	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	2056	

Figura 32

este caso existen 169, suman 2056, los cuadrados 6×6 , que son 121, contienen elementos que suman todos 4626, los 81 cuadrados 8×8 tienen elementos que suman 8224, los 49 cuadrados 10×10 contienen elementos que suman 12850, los 25 cuadrados 12×12 contienen elementos que suman 18504 y los 9 cuadrados 14×14 tienen elementos que suman 25186³.

3.3. Variaciones al Cuadrado 16×16

Si queremos construir cuadrados mágicos intercambiando filas debemos cambiar pares de filas que estén en la misma mitad superior o inferior de la tabla, teniendo en cuenta que la suma de sus columnas coincidan, siendo así se mantendrán todas las propiedades. Si cambiamos dos pares de filas donde los valores sumados por columna coincidan, el resultado será un cuadrado que no cumpla la propiedad del cuarto de columna.

Los conjuntos de filas que se ubican de la fila primera a la octava, pueden dividirse en cuatro grupos, además, por la propiedad de los cuartos de filas, por cada una que se fije se tendrán cuatro que cumplan todas las condiciones y dos adicionales que no cumplen las de la cuarta parte de la columna. Como hay cuatro, se tendrán dieciséis que cumplen todas las propiedades expuestas y ocho más que cumplen todas excepto la de los cuartos de cada columna.

Un análisis similar se puede realizar también con las últimas filas, de la novena a la dieciséis, en total tendremos entonces doscientas cincuenta y seis ($16 \times 16 = 256$), posibilidades de arreglos que cumplen todas las condiciones y sesenta y cuatro más ($8 \times 8 = 64$) cumplirán todas las reglas excepto la última de los cuartos de columna.

También se puede cambiar todas las ocho filas superiores con las inferiores, lo que duplica las posibilidades, esto da 512 cuadrados que cumplen todas las propiedades y 128 más que no cumplen únicamente la última.

Para las columnas, los resultados serán idénticos, ya que responden a un similar razona-

³ Aquí se ha introducido una nueva condición, que la cuarta parte de las filas o de las columnas coincidan en suma.

miento. Entonces tendremos 512 combinaciones que cumplen todas las reglas y 640 que cumplen todas excepto la del cuarto de fila.

Entonces hay 262144 posibilidades de construir cuadrados mágicos de orden 16 que cumplan todas las leyes y 409600 que cumplen todas excepto la de cuartos de filas o columnas. Estas cantidades son grandes, sin embargo, con referencia a la cantidad total de combinaciones $256!$ (el factorial de 256), la cantidad es mínima.

Vemos un ejemplo con la figura 33.

35	30	195	254	3	62	227	222	163	158	67	126	131	190	99	94
221	228	61	4	253	196	29	36	93	100	189	132	125	68	157	164
46	19	206	243	14	51	238	211	174	147	78	115	142	179	110	83
212	237	52	13	244	205	20	45	84	109	180	141	116	77	148	173
38	27	198	251	6	59	230	219	166	155	70	123	134	187	102	91
220	229	60	5	252	197	28	37	92	101	188	133	124	69	156	165
43	22	203	246	11	54	235	214	171	150	75	118	139	182	107	86
213	236	53	12	245	204	21	44	85	108	181	140	117	76	149	172
34	31	194	255	2	63	226	223	162	159	66	127	130	191	98	95
224	225	64	1	256	193	32	33	96	97	192	129	128	65	160	161
39	26	199	250	7	58	231	218	167	154	71	122	135	186	103	90
217	232	57	8	249	200	25	40	89	104	185	136	121	72	153	168
42	23	202	247	10	55	234	215	170	151	74	119	138	183	106	87
216	233	56	9	248	201	24	41	88	105	184	137	120	73	152	169
47	18	207	242	15	50	239	210	175	146	79	114	143	178	111	82
209	240	49	16	241	208	17	48	81	112	177	144	113	80	145	176

Figura 33

Al igual que ocurre en órdenes inferiores, cualquier cuadrado de orden 16 responderá a cualquier combinación lineal manteniendo las propiedades, aunque con sucesiones de números ya no consecutivas, donde las constantes de cada propiedad se obtendrán también aplicando la combinación lineal a cada uno de los resultados iniciales.

Y por último, se tendrá también que la suma de cuadrados mágicos B.F. 16×16 , da como resultado otro cuadrado mágico de iguales propiedades, para calcular las constantes de cada propiedad se deberán sumar las respectivas constantes de cada cuadro original.

4. Método General de Construcción de un Cuadrado Mágico B.F.

EXPLICACIÓN: Según lo analizado, la construcción de los cuadrados mágicos B.F. se basa en construir cuadrados 2×2 , que contengan sin repetición todos los elementos del cuadrado, los elementos de cada tabla son números consecutivos que inician en 1 y van hasta el orden del cuadrado elevado al cuadrado.

Esos cuadrados tienen la estructura que muestra la figura 34. En dicho cuadro se cumplen varias condiciones a tener en cuenta.

$a + b = c + d$, es decir horizontalmente deben sumar un valor constante, que debe ser igual a 1 más el máximo valor presente, que es el orden al cuadrado. Por ejemplo, si deseamos construir

c	d
a	b

Figura 34

cuadrados mágicos B.F. 8×8 , el máximo será 64 y la suma será 65, si deseamos cuadrados B.F. 16×16 , el máximo será 256, dando una suma de 257, si el orden del cuadrado es 24×24 , el máximo será 576, que da un resultado de 577, como suma constante horizontal y así sucesivamente, sumando los totales de las dos filas tendremos entonces el doble. En el caso de 24×24 , sumarán 1144.

Verticalmente, en cambio tendremos la sumatoria $a + c$ y $b + d$, que por construcción serán iguales a la suma vertical menos uno, con elementos impares, e igual a la sumatoria vertical más uno, cuando los elementos son pares, así la primera columna, en el caso de la 24×24 , sumará 576 y la segunda 578, de forma que los totales por columnas coincidan con el total por filas, para nuestro caso 1144.

c1	d1	c2	d2	c3	d3	c4	d4
a1	b1	a2	b2	a3	b3	a4	b4

Figura 35

Para el análisis recordemos entonces que las filas 2×2 suman un valor constante, y las columnas tienen dos posibles valores que se diferencian con la suma horizontal en más 1 o menos uno, por lo que sus totales coinciden. Entonces, teniendo en cuenta que un cuadrado 4×4 , contiene 16 elementos, que los podemos separar en cuatro cuadrados 2×2 (figura 35), para luego ubicarlos de la siguiente manera para construir nuevos cuadrados 4×4 : el primer cuadrado en la parte inferior, en la superior el segundo cuadrado, éste invirtiendo filas y columnas, el tercer cuadrado lo ubicamos una columna a cada lado, en la parte superior y el cuarto lo ubicamos en la parte inferior, invirtiendo filas y columnas.

c3	b2	a2	d3
a3	d2	c2	b3
b4	c1	d1	a4
d4	a1	b1	c4

Figura 36

Cuadrado 4×4 , (figura 36), donde la suma de cada par horizontal que coincidan en los cuadrados pequeños es constante que la designaremos K.

$$a1 + b1 = c1 + d1 = a2 + b2 = c2 + d2 = a3 + b3 = c3 + d3 = a4 + b4 = c4 + d4 = K$$

Verticalmente tendremos dos resultados posibles que se repetirán en los cuatro subcuadrados, así $a1 + c1 = a2 + c2 = a3 + c3 = a4 + c4 = K - 1$, con elementos impares, y $b1 + d1 = b2 + d2 = b3 + d3 = b4 + d4 = K + 1$, con elementos pares.

Aclarando que en los cuadrados inferiores invertimos las columnas con la finalidad de que la suma total coincida, ya que de esa manera las sumas por filas o por columnas es siempre constante e igual a $2K$.

Para las filas se tiene que:

$$c3 + d3 + b2 + a2 = K + K = 2K$$

$$a3 + b3 + d2 + c2 = K + K = 2K$$

$$b4 + a4 + c1 + d1 = K + K = 2K$$

$$d4 + c4 + a1 + b1 = K + K = 2K$$

Para las columnas se tiene que:

$$c3 + a3 + b4 + d4 = K - 1 + K + 1 = 2K$$

$$b2 + d2 + c1 + a1 = K + 1 + K - 1 = 2K$$

$$a2 + c2 + d1 + b1 = K - 1 + K + 1 = 2K$$

$$b3 + d3 + a4 + c4 = K + 1 + K - 1 = 2K$$

Además para las esquinas rectangulares tendremos que:

$$c3 + d3 + d4 + c4 = K + K = 2K$$

$$a3 + b3 + a4 + d4 = K + K = 2K$$

$$a1 + b1 + a2 + b2 = K + K = 2K$$

$$c1 + d1 + c2 + d2 = K + K = 2K$$

Se puede observar también en este caso que las diagonales doble sentido, se comportan de distinta manera, las derecha-izquierda son: $(c3, d2, c1, d4)$, $(b2, c2, d1, a1)$, $(a2, b3, a4, b1)$ y $(d3, a3, b4, c4)$; las izquierda-derecha son: $(d3, c2, d1, c4)$, $(a2, d2, c1, b1)$, $(b2, a3, b4, a1)$ y $(c3, b3, a4, d4)$, que si sumamos sus elementos, los resultados son diversos, se debe anotar en cambio que si vemos las otras diagonales en dos direcciones tenemos, las de abajo-arriba son $(c3, d2, c2, d3)$, $(a3, c1, d1, b3)$, $(b4, a1, b1, a4)$ y $(d4, b2, a2, c4)$ y las de arriba-abajo son $(d4, c1, d1, c4)$, $(b4, d2, c2, a4)$, $(a3, b2, a2, a3)$ y $(c3, a1, b1, d3)$, estas ocho en cambio tienen elementos de dos cuadrados que sabemos en cada caso suman K , en consecuencia todas estas diagonales doble dirección suman $2K$.

Se debe anotar también que las medias filas suman una constante K , no así las medias columnas que suman $K + 1$ ó $K - 1$.

Por lo indicado no existen cuadrados B.F. de orden cuatro por cuatro.

Es también obvio que como nos basamos en construcciones de orden 2×2 , y lo que hacemos es ir uniéndolas una a continuación de otra, siempre aumentara 2 en su orden, por lo que no pueden existir cuadrados B.F. de orden impar.

Si intentamos construir un cuadrado mágico B.F. de orden 6×6 , como sabemos que cada columna de orden 2×2 , puede sumar $K + 1$ ó $K - 1$, y cada columna del cuadrado 6×6 , estará compuesta por 3 de orden 2×2 alternando la suma, es decir $(K - 1) + (K + 1) + (K - 1) = 3K - 1$ en unos casos y $(K + 1) + (K - 1) + (K + 1) = 3K + 1$ en otros, que no son iguales, no se cumplirá que la suma de las columnas se mantiene constante. Lo mismo sucederá con los cuadrados cuyo orden es el doble de un número impar, es decir de orden 6×6 , 10×10 , 14×14 , 18×18 , 22×22 y en general de orden $(2(2n - 1)) \times (2(2n - 1))$, donde n es elemento de los números naturales.

Para el caso del cuadrado mágico B.F. de 8×8 , iniciaremos indicando que este contiene 64 elementos distintos, distribuidos en 16 cuadrados 2×2 , que designaremos de la manera que se observa en la figura 37.

c1	d1	c2	d2	c3	d3	c4	d4	c5	d5	c6	d6
a1	b1	a2	b2	a3	b3	a4	b4	a5	b5	a6	b6
c7	d7	c8	d8	c9	d9	c10	d10	c11	d11	c12	d12
a7	b7	a8	b8	a9	b9	a10	b10	a11	b11	a12	b12
c13	d13	c14	d14	c15	d15	c16	d16				
a13	b13	a14	b14	a15	b15	a16	b16				

Figura 37

63	2	61	4	59	6	57	8	55	10	53	12
1	64	3	62	5	60	7	58	9	56	11	54
51	14	49	16	47	18	45	20	43	22	41	24
13	52	15	50	17	48	19	46	21	44	23	42
39	26	37	28	35	30	33	32				
25	40	27	38	29	36	31	34				

Figura 38

Para claridad en la explicación respetaremos este orden y llamaremos cuadrado n -ésimo al que esté estructurado de la siguiente manera:

Así los dieciséis cuadrados 2×2 , llenados con elementos se observan en la figura 38.

Se deben indicar las relaciones que deben existir entre los elementos.

Entre los elementos del primer cuadrado se tiene la siguiente relación: $a1 + b1 = 65$, $c1 + d1 = 65$, $d1 = a1 + 1$ y $c1 = b1 - 1$, que puede generalizarse para cualquier cuadrado y se tendrá que entre los elementos de un cuadrado n se cumple que:

$$an + bn = 65, cn + dn = 65, dn = an + 1 \text{ y } cn = bn - 1. (K = 65)$$

Además se tiene relaciones entre los elementos de distintos cuadrados así:

$$an = a1 + 2 \times (n - 1)$$

$$bn = b1 + 2 \times (n - 1)$$

$$cn = c1 + 2 \times (n - 1)$$

$$dn = d1 + 2 \times (n - 1)$$

donde n es un entero entre 1 y 16, que caracteriza el cuadrado 2×2 , al que cada elemento pertenece.

Entonces si sumamos los elementos del primer cuadrado 2×2 , tendremos que:

$$a1 + b1 + c1 + d1 = a1 + 65 - a1 + (65 - a1) + (65 - d1) + d1 = 130 = 2K$$

Si realizamos el cálculo para el n -ésimo cuadrado:

$$\begin{aligned} &an + bn + cn + dn = \\ &= a1 + 2 \times (n - 1) + b1 - 2 \times (n \times 1) + c1 - 2 \times (n \times 1) + d1 + 2 \times (n - 1) = \\ &= a1 + b1 + c1 + d1 = 130 = 2K \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que todas las filas suman K (65) y las columnas, la primera $K - 1$ (64) y la segunda $K + 1$ (66), como vimos anteriormente.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
F1	b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
F2	d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
F3	c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
F4	a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
F5	c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
F6	a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
F7	b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
F8	d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 39

A continuación ubicamos los cuadrados de orden 2×2 en un cuadrado de orden 8×8 , como se observa en la figura 39.

Dividimos la tabla horizontalmente en dos partes iguales, es decir de cuatro columnas cada una.

Ubicamos en la segunda y tercera columna los cuatro primeros cuadrados 2×2 , el primero en la parte inferior, séptima y octava fila, el segundo, en la parte superior, primera y segunda fila, el tercero, invirtiendo filas y columnas, en la parte superior, tercera y cuarta fila, y el cuarto, también invirtiendo sus filas y columnas en la parte inferior, quinta y sexta fila. Una columna del cuadrado 2×2 se ubicará en la primera columna del cuadrado actual y la otra en la cuarta, allí ubicaremos los siguientes cuatro cuadrados: invirtiendo el orden, el quinto ira en la parte inferior, filas quinta y sexta, el sexto en la parte superior filas tercera y cuarta, el séptimo, invirtiendo sus filas y columnas en la parte superior, primera y segunda fila y el octavo, invirtiendo sus filas y columnas en la parte inferior, séptima y octava fila.

Los siguientes cuatro cuadrados 2×2 , del noveno al decimosegundo, los ubicaremos separando sus columnas: la primera en la columna quinta y la otra en la octava. Iniciamos invirtiendo columnas del noveno cuadrado y ubicándolo en la parte inferior, filas séptima y octava, el décimo, también invirtiendo columnas, lo ubicaremos en la parte superior, primera y segunda fila, el decimoprimer cuadrado, invirtiendo filas, se ubicará también en la parte superior, primera y segunda fila, y el decimosegundo, también invirtiendo filas, se ubicará en la parte inferior, en las filas quinta y sexta.

Para ubicar los últimos cuatro cuadrados 2×2 , usaremos las columnas sexta y séptima, y procedemos tomando el cuadrado decimotercero, invirtiendo sus columnas y lo ubicamos en la parte inferior, quinta y sexta fila, el decimocuarto cuadrado, invirtiendo columnas, lo ubicamos

en la parte superior, tercera y cuarta fila, el decimoquinto cuadrado, invirtiendo sus filas, lo ubicaremos en la parte superior, primera y segunda fila y, el último cuadrante, invirtiendo sus filas, lo ubicaremos en la parte inferior, filas séptima y octava.

En la práctica, existe una forma de llenar la segunda mitad, una vez construida la primera, que ya se utilizó y que sustituiría a los pasos cuarto y quinto.

Con esta construcción veremos cómo se cumplen algunas propiedades.

Si sumamos los elementos de las esquinas se tendrá que:

$$\begin{aligned} b7 + c10 + d8 + a9 &= b1 - 2 \times 6 + c1 - 2 \times 9 + d1 + 2 \times 7 + a1 + 2 \times 8 = \\ &= a1 + b1 + c1 + d1 - 12 - 18 + 14 + 16 = a1 + b1 + c1 + d1 = 130 \end{aligned}$$

También se pueden hacer los cálculos respectivos para el cuadrado 2×2 que se ubica en el centro mismo, esto es el cuadrado que muestra la figura 40.

b6	c11
d5	a12

Figura 40

Tenemos que

$$\begin{aligned} b6 + c11 + d5 + a12 &= b1 - 2 \times 5 + c1 - 2 \times 9 + d1 + 2 \times 4 + a1 + 2 \times 10 = \\ &= b1 + c1 + d1 + a1 - 10 - 18 + 8 + 20 = b1 + c1 + d1 + a1 = 130 \end{aligned}$$

Esto se cumple para los elementos de las esquinas de cualquier rectángulo que tenga como centro el cuadrado anterior.

Tomemos algunos ejemplos: escogeremos esquinas de tres rectángulos distintos que cumplan la condición dada, que se observan en la figura 41.

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 41

$$b3 + c14 + d4 + a13 = b1 - 2 \times 2 + c1 - 2 \times 13 + d1 + 3 \times 2 + a1 + 2 \times 12 = b1 + c1 + d1 + a1 - 4 - 26 + 6 + 24 = b1 + c1 + d1 + a1 = 130$$

$$c2 + b15 + a1 + d16 = c1 - 2 \times 1 + b1 - 2 \times 14 + a1 + d1 + 2 \times 15 = c1 + b1 + a1 + d1 - 2 - 28 + 30 = c1 + b1 + a1 + d1 = 130$$

$$a6 + d11 + c5 + b12 = a1 + 2 \times 5 + d1 + 2 \times 10 + c1 - 2 \times 4 + b1 - 2 \times 11 = a1 + d1 + c1 + b1 + 10 + 20 - 8 - 22 = a1 + d1 + c1 + b1 = 130$$

Y así podríamos ver que para cualquier conjunto de elementos que sean esquina de un rectángulo que tenga como centro el cuadrado dado, la suma es 130.

Otra propiedad importante es aquella de las diagonales doble sentido, en este caso existen 16 diagonales izquierda-derecha, 16 derecha-izquierda, 16 abajo-arriba y 16 arriba-abajo, calculemos la suma de los elementos de algunas de ellas.

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 42

En la figura 42 se tiene una diagonal doble sentido derecha-izquierda, si sumamos sus elementos tendremos:

$$\begin{aligned}
 & b7 + a2 + a3 + b6 + d5 + c4 + c1 + d8 = \\
 & = b1 - 2 \times 6 + a1 + 2 \times 1 + a1 + 2 \times 2 + b1 - 2 \times 5 + d1 + 2 \times 4 + c1 - 2 \times 3 + c1 + d1 + 2 \times 7 = \\
 & = 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 - 12 + 2 + 4 - 10 + 8 - 6 + 14 = 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 = \\
 & = 2(b1 + a1 + c1 + d1) = 260
 \end{aligned}$$

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 43

También podemos construir una de igual forma como se observa en la figura 43, si sumamos sus elementos tendremos:

$$\begin{aligned}
 & b15 + a10 + c6 + d3 + b4 + a5 + c9 + d16 = \\
 & = b1 - 2 \times 14 + a1 + 2 \times 9 + c1 - 2 \times 5 + d1 + 2 \times 2 + \\
 & + b1 - 2 \times 3 + a1 + 2 \times 4 + c1 - 2 \times 8 + d1 + 2 \times 15 = \\
 & = 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 - 28 + 18 - 10 + 4 - 6 + 8 - 16 + 30 = 2(b1 + a1 + c1 + d1) = 260
 \end{aligned}$$

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 44

Veamos ahora la diagonal doble sentido izquierda-derecha, que se observa en la figura 44, la suma de sus elementos es:

$$\begin{aligned}
 & d2 + a2 + c6 + d11 + b12 + a5 + c1 + b1 = \\
 & = d1 + 2 \times 1 + a1 + 2 \times 2 + c1 - 2 \times 5 + b1 - 2 \times 11 + d1 + 2 \times 10 + a1 + 2 \times 4 + c1 + b1 = \\
 & = 2d1 + 2a1 + 2c1 + 2b1 + 2 + 2 - 10 + 20 - 22 + 8 = 2(d1 + a1 + c1 + b1) = 260
 \end{aligned}$$

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 45

También hagamos un cálculo en los elementos de la diagonal abajo-arriba que se observa en la figura 45, su sumatoria es:

$$\begin{aligned}
 & c6 + d3 + a4 + b5 + c12 + d13 + a14 + b11 = \\
 & = c1 - 2 \times 5 + d1 + 2 \times 2 + a1 + 2 \times 3 + b1 - 2 \times 4 + c1 - 2 \times 11 + \\
 & \quad + d1 + 2 \times 12 + a1 + 2 \times 13 + b1 + 2 \times 10 = \\
 & = 2c1 + 2d1 + 2a1 + 2b1 - 10 + 4 + 6 - 8 - 22 + 24 + 26 - 20 = 2(c1 + d1 + a1 + b1) = 260
 \end{aligned}$$

Por último calcularemos la sumatoria de la diagonal arriba-abajo que se observa en la figura 46, los cálculos son:

$$\begin{aligned}
 & b7 + a1 + d1 + b5 + c12 + a16 + d16 + c10 = \\
 & = b1 - 2 \times 6 + a1 + d1 + b1 - 2 \times 4 + c1 - 2 \times 11 + a1 + 2 \times 15 + d1 + 2 \times 15 + c1 - 2 \times 9 = \\
 & = 2b1 + 2a1 + 2d1 + 2c1 - 12 - 8 - 22 + 30 + 30 - 18 = 2(b1 + a1 + d1 + c1) = 260
 \end{aligned}$$

Se han realizado los cálculos y los elementos de las 64 diagonales doble sentido cumplen la propiedad (suma igual a 260).

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 46

Como consecuencia directa de la construcción, sabemos que cada par de elementos ubicados a continuación de forma vertical suman 65 y si se ubican de forma horizontal suman 64 o 66, entendiendo que al ubicarlas se tuvo la precaución de que siempre estén dentro de la misma mitad, ya sea izquierda o derecha o superior o inferior. Esto hace que cualquier subcuadrado de orden 2×2 , de los 49 que existen dentro del cuadrado B.F. cumple que sus elementos sumarán siempre 130.

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 47

Como consecuencia de lo anterior si tomamos subcuadrados de orden 4×4 , existen 9, estos contienen 4 cuadrados 2×2 disjuntos, como los presentados en la figura 47, por lo que su sumatoria sera $4 \times 130 = 520$, esto se puede observar en la figura 39. Asimismo un cuadrado 6×6 contiene 9 subcuadrados 2×2 disjuntos, por lo que sus elementos sumaran $9 \times 130 = 1170$.

Por esta razón, afirmaremos que dentro de un cuadrado mágico la sumatoria de los elementos de cualquier subcuadrado $m \times m$, siempre que m sea par será una constante, igual a:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 \times K$$

Es obvio que los subcuadrados de orden impar, no contienen cuadrados completos de orden 2×2 , por lo que la suma de sus elementos no cumple la propiedad de ser constante.

La construcción del cuadrado B.F. hace que se cumplan estas propiedades y es más se pueden generar otras, combinando las anteriores o simplemente utilizando las propiedades de sus elementos, igual o más interesantes que las indicadas, veremos una que demuestra lo estipulado.

En la figura 48 tomamos 8 elementos que si los sumamos se tiene un valor de 260, es decir

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 48

2K, si trasladamos esta construcción a cualquier otra ubicación del cuadrado el resultado será idéntico.

Por un lado se tiene:

$$\begin{aligned}
 &b7 + a2 + c6 + d3 + a7 + b2 + d6 + c3 = \\
 &\quad = b1 - 2 \times 6 + a1 + 2 \times 1 + c1 - 2 \times 5 + d1 + 2 \times 2 + \\
 &\quad + a1 + 2 \times 6 + b1 - 2 \times 1 + d1 + 2 \times 5 + c1 - 2 \times 2 = \\
 &= 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 - 12 + 2 - 10 + 4 + 12 - 2 + 10 - 4 = 2(b1 + a1 + c1 + d1) = 260
 \end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned}
 &d13 + a16 + a13 + d16 + d12 + a9 + c5 + b8 = \\
 &\quad = d1 + 2 \times 12 + a1 + 2 \times 15 + a1 + 2 \times 12 + d1 + 2 \times 15 + d1 + 2 \times 11 + a1 + 2 \times 8 \\
 &\quad + c1 - 2 \times 4 + b1 - 2 \times 7 = 3d1 + 3a1 + b1 + c1 + 24 + 30 + 24 + 30 + 22 + 16 - 8 - 14 \\
 &\quad = d1 + a1 + b1 + c1 + 124 + 2d1 + 2a1 = 130 + 124 + 4 + 2 = 260
 \end{aligned}$$

Vemos que el resultado es idéntico.

b7	c2	d2	a7	d10	a15	b15	c10
d7	a2	b2	c7	b10	c15	d15	a10
c6	b3	a3	d6	a11	d14	c14	b11
a6	d3	c3	b6	c11	b14	a14	d11
c5	b4	b4	d5	a12	d13	c13	b12
a5	d4	c4	b5	c12	b13	a13	d12
b8	c1	d1	a8	d9	a16	b16	c9
d8	a1	b1	c8	b9	c16	d16	a9

Figura 49

Ahora veremos los resultados de la suma de los elementos de las estructuras de la figura 49.

Para la primera sumatoria tenemos:

$$\begin{aligned}
 b7 + c6 + a2 + d2 + a15 + d15 + b11 + c10 &= \\
 &= b1 - 2 \times 6 + c1 - 2 \times 5 + a1 + 2 \times 1 + d1 + 2 \times 1 + \\
 &\quad + a1 + 2 \times 14 + d1 + 2 \times 14 + b1 - 2 \times 10 + c1 - 2 \times 9 = \\
 &= 2b1 + 2c1 + 2a1 + 2d1 - 12 - 10 + 2 + 2 + 28 + 28 - 20 - 18 = 2(b1 + c1 + a1 + d1) = 260
 \end{aligned}$$

Y para el otro grupo se tiene:

$$\begin{aligned}
 a5 + b4 + c1 + a4 + d1 + b5 + a12 + b12 &= \\
 &= a1 + 2 \times 4 + b1 - 2 \times 3 + c1 + a1 + 2 \times 3 + d1 + b1 - 2 \times 4 + \\
 &\quad + a1 + 2 \times 11 + b1 - 2 \times 11 = 3a1 + 3b1 + c1 + d1 + 8 - 6 + 6 - 8 + 22 - 22 \\
 &= a1 + b1 + c1 + d1 + 2(a1 + b1) = 130 + 2 \times 65 = 130 + 130 = 260
 \end{aligned}$$

Resultados también iguales.

Como ya se ha dicho, respetando la estructura original por tanto se pueden construir muchísimas estructuras y sus elementos mantendrán la propiedad de la constante en su sumatoria.

5. Cuadrados Mágicos B.F. de mayor orden

Se explicó anteriormente el por qué no es posible construir cuadrados mágicos de este tipo de orden impar, ni dobles de impares, por lo que no es posible construirlos de orden 9×9 , 10×10 ($2 \times 5 = 10$), 11×11 .

En el orden 12×12 , es completamente factible construir los cuadrados 2×2 disjuntos para rellenarlo, sin embargo recordando que las columnas de esos cuadrados 2×2 suman valores distintos, y que la semicolumna del cuadrado 12×12 deberá contener tres de esas columnas, en consecuencia la sumatoria de los elementos de estas no serían constantes ni iguales a la mitad de la suma de los elementos de las columnas, por lo que no cumplirían esta propiedad y sus derivadas, en consecuencia no es posible construir un cuadrado mágico B.F. de orden 12×12 . De este análisis, se puede desprender entonces que para que las semicolumnas sumen resultados iguales, estas deben tener cuatro elementos o una cantidad múltipla de ese valor. Por las razones expuestas no será posible construir cuadrados mágicos de orden 13×13 , 14×14 y 15×15 con los métodos desarrollados.

El de orden 16×16 , es perfectamente construible y ya lo hemos presentado con su proceso de construcción, sus derivadas y sus propiedades adicionales.

Para concluir con el análisis diremos que:

“SON CONSTRUIBLES CUADRADOS MÁGICOS B.F. DE ORDEN $P \times P$, SIEMPRE QUE P SEA UN ENTERO MÚLTIPLO DE 8.”

5.1. Construcción de un Cuadrado Mágico B.F. 24×24

5.1.1. Análisis

A sabiendas de que es posible construir un cuadrado mágico B.F. de orden 24×24 , ya que 24 es múltiplo de 8, deberemos anotar ciertas cuestiones:

- a. Un cuadrado mágico B.F. contendrá 24 filas y 24 columnas.
- b. Por tanto contendrá 576 celdas ($24 \times 24 = 576$).
- c. El cuadrado mágico en cuestión contendrá los números enteros del 1 al 576.
- d. La suma de todos sus elementos por tanto será $(576 \times 577)/2 = 166176$.
- e. Cada columna contendrá 24 elementos que deberán sumar 6924 ($166176/24 = 6924$).
- f. De igual forma cada fila estará compuesta por 24 elementos que sumen 6924.
- g. Los elementos de cada semifila o semicolumna deberán sumar 3462 ($6924/2 = 3462$).
- h. En este caso se podrá dividir cada fila o cada columna en cuatro partes, cada una de ella contendrá cuatro elementos que deberán sumar 1731 ($3462/2 = 1731$).
- i. Los cuadrados básicos 2×2 necesarios para su construcción, deberán sumar 1731, $K = 1731$, al igual que los elementos esquina de cualquier rectángulo que se forme en su interior en base de un cuadrado 2×2 centro.
- j. Existirán 24 diagonales arriba-abajo, 24 abajo-arriba, 24 izquierda-derecha y 24 derecha-izquierda, compuestas cada una por 24 elementos cuya sumatoria será igual a la sumatoria de los elementos de una fila o una columna (6924).

5.1.2. Construcción

Primero deberemos construir los cuadrados 2×2 utilizando todos los elementos del 1 al 576, y cumpliendo con las siguientes normas:

- a. Las filas estarán conformadas por pares de números cuya suma sea 577, siguiendo la siguiente estructura (1,576), (2,575), (3,574), ... así hasta (288,289), obteniendo 288 pares.
- b. Las primeras columnas estarán conformadas por duplas de números impares cuya suma sera 576, constituidas de la forma (1,575), (3,573), (5,571), ... así hasta (287,289), obteniéndose 144 combinaciones.
- c. Las segundas columnas estarán conformadas por duplas de números pares cuya suma sea 578, estructuradas de la forma (2,576), (4,574), (6,572), ... así hasta (288,290), obteniéndose de igual manera 144 combinaciones.
- d. Se construirán 144 cuadrados 2×2 , donde los elementos de sus filas sumen 576, los elementos de la primera columna suman 576 y de la segunda 578.
- e. Estos 144 cuadrados 2×2 , serán ubicados, mediante un proceso que mantendrá la alternabilidad y que dividiendo el cuadrado en mitades superior, inferior e izquierda y derecha, permita mantener las propiedades, esto es que los cuadrados 2×2 adjuntos coloquen el valor 576 sobre y debajo del 578, de forma que cada cuatro columnas la suma sea siempre 1152.

En la página 154 se puede observar dicho cuadrado mágico, que cumple todas las propiedades solicitadas, y además tiene una adicional.

Si tomamos doce elementos seguidos de una columna, iniciando en una fila impar, su sumatoria es igual a la de la semifila o semicolumna, 3462.

- Los 529 subcuadrados 2×2 contienen elementos que suman 1154.

- Los 441 subcuadrados 4×4 contienen elementos que suman 4616 $((4/2)2 \times 1154 = 4616)$.
- Los 361 subcuadrados 6×6 contienen elementos cuya suma es 10386 $((6/2)2 \times 1154 = 10386)$.
- Los 289 subcuadrados 8×8 contienen elementos cuya suma es 18464 $((8/2)2 \times 1154 = 18464)$.
- Los 225 subcuadrados 10×10 contienen elementos cuya suma es 28850 $((10/2)2 \times 1154 = 28850)$.
- Los 169 subcuadrados 12×12 contienen elementos cuya suma es 41544 $((12/2)2 \times 1154 = 41544)$.
- Los 121 subcuadrados 14×14 contienen elementos cuya suma es 56546 $((14/2)2 \times 1154 = 56546)$.
- Los 81 subcuadrados 16×16 contienen elementos cuya suma es 73856 $((16/2)2 \times 1154 = 73856)$.
- Los 49 subcuadrados 18×18 contienen elementos cuya suma es 93474 $((18/2)2 \times 1154 = 93474)$.
- Los 25 subcuadrados 20×20 contienen elementos cuya suma es 115400 $((20/2)2 \times 1154 = 115400)$.
- Los 9 subcuadrados 22×22 contienen elementos cuya suma es 139634 $((22/2)2 \times 1154 = 139634)$.
- Los 12 elementos de las 48 semifilas y de las 48 semicolumnas suman todos 3462.
- Los cuatro elementos que forman cualquiera de las 288 sextas partes de cada fila o cada columna suman 1154.
- Las 96 diagonales doble sentido, contienen todas 24 elementos que suman 6924, al igual que suman todas las filas y todas las columnas.
- El cuadrado centro es el que se presenta en la figura 50, cuyos elementos suman 1154, y si formamos cualquier rectángulo dentro del cuadrado mágico B.F. 24×24 , los elementos de sus esquinas sumarán también 1154.

508	309
71	266

Figura 50

- Aquí también es posible formar muchas estructuras que al moverlas dentro del cuadrado mágico, la sumatoria de sus elementos sea constante.

6. Conclusiones

Este trabajo ha utilizado una metodología deductiva, desmenuzando las propiedades del cuadrado B. F. y estudiando pormenorizadamente los asombrosos resultados de este cuadrado matemático, para llegar a entender su esencia y permitir su generalización: se han construido otros cuadrados, de orden mayor que el primero, generando reglas claras para su aplicación y comprobando que los cuadrados obtenidos verifican todas las condiciones. Finalmente podemos concluir que:

- El Cuadrado Matemático de Benjamin Franklin se basa en arreglos 2×2 .
- Para la construcción de estos cuadrados matemáticos, es preciso construir esos arreglos 2×2 y luego ubicarlos convenientemente.
- El orden de un cuadrado matemático que cumpla las condiciones establecidas en el cuadrado Benjamin Franklin, será siempre un múltiplo de 8.
- Conforme aumentamos el orden de estos cuadrados, se verifican más condiciones adicionales.
- Benjamin Franklin fue un genio de los números.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	574	435	142	3	478	531	46	99	526	483	94	51	286	147	430	291	190	243	334	387	238	195	382	339
2	4	141	436	573	100	45	532	477	52	93	484	525	292	429	148	285	388	333	244	189	340	381	196	237
3	571	438	139	6	475	534	43	102	523	486	91	54	283	150	427	294	187	246	331	390	235	198	379	342
4	5	140	437	572	101	44	533	476	53	92	485	524	293	428	149	284	389	332	245	188	341	380	197	236
5	566	443	134	11	470	539	38	107	518	491	86	59	278	155	422	299	182	251	326	395	230	203	374	347
6	12	133	444	565	108	37	540	469	60	85	492	517	300	421	156	277	396	325	252	181	348	373	204	229
7	563	446	131	14	467	542	35	110	515	494	83	62	275	158	419	302	179	254	323	398	227	206	371	350
8	13	132	445	564	109	36	541	468	61	84	493	516	301	420	157	276	397	324	253	180	349	372	205	228
9	558	451	126	19	462	547	30	115	510	499	78	67	270	163	414	307	174	259	318	403	222	211	366	355
10	20	125	452	557	116	29	548	461	68	77	500	509	308	413	164	269	404	317	260	173	356	365	212	221
11	555	454	123	22	459	550	27	118	507	502	75	70	267	166	411	310	171	262	315	406	219	214	363	358
12	21	124	453	556	117	28	549	460	69	76	501	508	309	412	165	268	405	316	261	172	357	364	213	220
13	554	455	122	23	458	551	26	119	506	503	74	71	266	167	410	311	170	263	314	407	218	215	362	359
14	24	121	456	553	120	25	552	457	72	73	504	505	312	409	168	265	408	313	264	169	360	361	216	217
15	559	450	127	18	463	546	31	114	511	498	79	66	271	162	415	306	175	258	319	402	223	210	367	354
16	17	128	449	560	113	32	545	464	65	80	497	512	305	416	161	272	401	320	257	176	353	368	209	224
17	562	447	130	15	466	543	34	111	514	495	82	63	274	159	418	303	178	255	322	399	226	207	370	351
18	16	129	448	561	112	33	544	465	64	81	496	513	304	417	160	273	400	321	256	177	352	369	208	225
19	567	442	135	10	471	538	39	106	519	490	87	58	279	154	423	298	183	250	327	394	231	202	375	346
20	9	136	441	568	105	40	537	472	57	88	489	520	297	424	153	280	393	328	249	184	345	376	201	232
21	570	439	138	7	474	535	42	103	522	487	90	55	282	151	426	295	186	247	330	391	234	199	378	343
22	8	137	440	569	104	41	536	473	56	89	488	521	296	425	152	281	392	329	248	185	344	377	200	233
23	575	434	143	2	479	530	47	98	527	482	95	50	287	146	431	290	191	242	335	386	239	194	383	338
24	1	144	433	576	97	48	529	480	49	96	481	528	289	432	145	288	385	336	241	192	337	384	193	240

Cuadrado Benjamin Franklin 24×24

Referencias

- [1] PASLES, Paul C., "Benjamin Franklin's Numbers", Princeton University Press or AMAZON, "Benjamin Franklin, Magician?", Franklin Gazette, 2000.
- [2] PASLES, Paul C., "The Lost Squares of Dr. Franklin", American Mathematical Monthly, Junio-Julio 2001.
- [3] PASLES, Paul C., "The Lost Squares of Dr. Franklin", American Mathematical Monthly, Junio-Julio 2001.
- [4] PASLES, Paul C., "Benjamin Franklin", MacTutor Entry, Junio 2001.
- [5] PASLES, Paul C., "Diggin for Squares", Math Horizons, Abril 2001.
- [6] PASLES, Paul C., "Franklin's Other 8-Square", Journal of Recreational Mathematics, 31:3, 2003.
- [7] PASLES, Paul C., "A Bent for Magic", Mathematics Magazine, 79:1, 2006.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	195	62	899	894	67	190	771	1022	3	254	835	958	131	126	963	830	707	574	387	382	579	702	259	510	515	766	323	446	643	638	451	318
2	829	964	125	132	957	836	253	4	1021	772	189	68	893	900	61	196	317	452	637	644	445	324	765	516	509	260	701	580	381	388	573	708
3	198	59	902	891	70	187	774	1019	6	251	838	955	134	123	966	827	710	571	390	379	582	699	262	507	518	763	326	443	646	635	454	315
4	828	965	124	133	956	837	252	5	1020	773	188	69	892	901	60	197	316	453	636	645	444	325	764	517	508	261	700	581	380	389	572	709
5	203	54	907	886	75	182	779	1014	11	246	843	950	139	118	971	822	715	566	395	374	587	694	267	502	523	758	331	438	651	630	459	310
6	821	972	117	140	949	844	245	12	1013	780	181	76	885	908	53	204	309	460	629	652	437	332	757	524	501	268	693	588	373	396	565	716
7	206	51	910	883	78	179	782	1011	14	243	846	947	142	115	974	819	718	563	398	371	590	691	270	499	526	755	334	435	654	627	462	307
8	820	973	116	141	948	845	244	13	1012	781	180	77	884	909	52	205	308	461	628	653	436	333	756	525	500	269	692	589	372	397	564	717
9	211	46	915	878	83	174	787	1006	19	238	851	942	147	110	979	814	723	558	403	366	595	686	275	494	531	750	339	430	659	622	467	302
10	813	980	109	148	941	852	237	20	1005	788	173	84	877	916	45	212	301	468	621	660	429	340	749	532	493	276	685	596	365	404	557	724
11	214	43	918	875	86	171	790	1003	22	235	854	939	150	107	982	811	726	555	406	363	598	683	278	491	534	747	342	427	662	619	470	299
12	812	981	108	149	940	853	236	21	1004	789	172	85	876	917	44	213	300	469	620	661	428	341	748	533	492	277	684	597	364	405	556	725
13	219	38	923	870	91	166	795	998	27	230	859	934	155	102	987	806	731	550	411	358	603	678	283	486	539	742	347	422	667	614	475	294
14	805	988	101	156	933	860	229	28	997	796	165	92	869	924	37	220	293	476	613	668	421	348	741	540	485	284	677	604	357	412	549	732
15	222	35	926	867	94	163	798	995	30	227	862	931	158	99	990	803	734	547	414	355	606	675	286	483	542	739	350	419	670	611	478	291
16	804	989	100	157	932	861	228	29	996	797	164	93	868	925	36	221	292	477	612	669	420	349	740	541	484	285	676	605	356	413	548	733
17	223	34	927	866	95	162	799	994	31	226	863	930	159	98	991	802	735	546	415	354	607	674	287	482	543	738	351	418	671	610	479	290
18	801	992	97	160	929	864	225	32	993	800	161	96	865	928	33	224	289	480	609	672	417	352	737	544	481	288	673	608	353	416	545	736
19	218	39	922	871	90	167	794	999	26	231	858	935	154	103	986	807	730	551	410	359	602	679	282	487	538	743	346	423	666	615	474	295
20	808	985	104	153	936	857	232	25	1000	793	168	89	872	921	40	217	296	473	616	665	424	345	744	537	488	281	680	601	360	409	552	729
21	215	42	919	874	87	170	791	1002	23	234	855	938	151	106	983	810	727	554	407	362	599	682	279	490	535	746	343	426	663	618	471	298
22	809	984	105	152	937	856	233	24	1001	792	169	88	873	920	41	216	297	472	617	664	425	344	745	536	489	280	681	600	361	408	553	728
23	210	47	914	879	82	175	786	1007	18	239	850	943	146	111	978	815	722	559	402	367	594	687	274	495	530	751	338	431	658	623	466	303
24	816	977	112	145	944	849	240	17	1008	785	176	81	880	913	48	209	304	465	624	657	432	337	752	529	496	273	688	593	368	401	560	721
25	207	50	911	882	79	178	783	1010	15	242	847	946	143	114	975	818	719	562	399	370	591	690	271	498	527	754	335	434	655	626	463	306
26	817	976	113	144	945	848	241	16	1009	784	177	80	881	912	49	208	305	464	625	656	433	336	753	528	497	272	689	592	369	400	561	720
27	202	55	906	887	74	183	778	1015	10	247	842	951	138	119	970	823	714	567	394	375	586	695	266	503	522	759	330	439	650	631	458	311
28	824	969	120	137	952	841	248	9	1016	777	184	73	888	905	56	201	312	457	632	649	440	329	760	521	504	265	696	585	376	393	568	713
29	199	58	903	890	71	186	775	1018	7	250	839	954	135	122	967	826	711	570	391	378	583	698	263	506	519	762	327	442	647	634	455	314
30	825	968	121	136	953	840	249	8	1017	776	185	72	889	904	57	200	313	456	633	648	441	328	761	520	505	264	697	584	377	392	569	712
31	194	63	898	895	66	191	770	1023	2	255	834	959	130	127	962	831	706	575	386	383	578	703	258	511	514	767	322	447	642	639	450	319
32	832	961	128	129	960	833	256	1	1024	769	192	65	896	897	64	193	320	449	640	641	448	321	768	513	512	257	704	577	384	385	576	705

Cuadrado Benjamin Franklin 32×32

- [8] MURPHY, Frank, *“Ben Franklin and The Magic Square”*, Amazon.
- [9] PICKOVER, Cliff, *“The Zen of Magic Squares, Circles and Stars”*, Princeton University Press.
- [10] ANDREWS, W. S., *“Magic Squares and Cubes”*, Chapter 3, *“The Franklin Squares”*, New York, Dover, 1960.
- [11] AMELA, M. A., *“Structured Franklin Squares”*.
- [12] FRANKLIN, Benjamin, *“The Autobiography of Benjamin Franklin”*, 1793. Reprinted New York: Dover, 1996.
- [13] MADACHY, J. S., *“Magic and Antimagic Squares”*, Chapter 4 in Madach’s Mathematical Recreations. New York: Dover, pp. 103–113, 1979.
- [14] PAPPAS, T., *“The Magic Square of Benjamin Franklin”*, The Joy of Mathematics. San Carlos, California, Wide World Publ./Tetra, p. 87, 1989.

Sobre el autor:

Nombre: Marco Vinicio Vásquez Bernal

Correo electrónico: marvas123@hotmail.es

Institución: School of Mathematics, Yachay Tech. Yachay City of Knowledge, Urcuqui, Ecuador.

Críticas

Informe sobre el libro: “El Asesinato de Pitágoras”,
Marcos Chicot

A report of the book: “El Asesinato de Pitágoras”,
Marcos Chicot

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 156–162, ISSN 2174-0410

Recepción: 10 Jun'14; Aceptación: 20 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Este artículo presenta una reseña de la novela “El asesinato de Pitágoras” de Marcos Chicot, novela finalista al premio planeta. Un texto donde historia y ficción se alían para ofrecer un paseo por la Antigua Grecia y el mundo de los pitagóricos. La novela es una combinación de intriga, romance y acción.

Palabras Clave: Divulgación matemática, Pitágoras, Libros con contenido matemático.

Abstract

This paper presents a report of the book “El asesinato de Pitágoras” de Marcos Chicot. It was finalist for the Planeta prize. It is a text where history and fiction are together to offer a story of the Antigua Greece and the pitagoricos. The novel is based on real historical events and it is a combination of intrigue, romance, and action.

Keywords: Mathematic divulgation, Pitágoras, Books with mathematical content.

1. Ficha técnica

Título: El Asesinato de Pitágoras.

Autor: Marcos Chicot.

De la colección “Imperdibles”

Editado por: Duomo Editorial

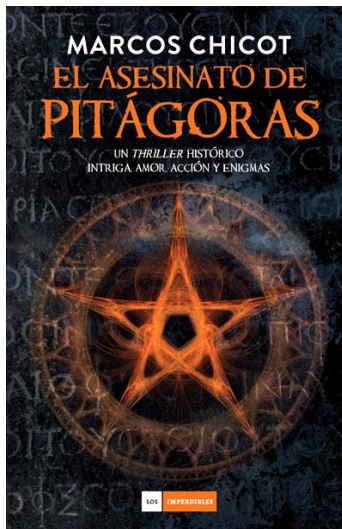


Figura 1. Izqda: Portada del Libro. Drcha: Marcos con portada en e-book.

2. Argumento

La novela nos sitúa en el año 510 a. C. Los Pitagóricos se han convertido en un grupo influyente y poderoso en Grecia. Su líder, el ya anciano filósofo Pitágoras, es un personaje con gran poder político.

Pitágoras se siente viejo y planea nombrar un sucesor entre sus grandes maestros cuando en la comunidad pitagórica se inicia una serie de asesinatos. Las muertes acontecen de forma sorprendente y aparentemente inexplicable, poniendo de manifiesto que la persona que las ejecuta posee gran inteligencia y maldad, además de un conocimiento matemático a nivel del mismísimo Pitágoras.

El investigador egipcio Akenón, amigo de Pitágoras, es requerido para identificar al, o los, asesinos. Un desafío en el que arriesgará la vida.

Se trata de una novela en la que gran parte de los hechos y los personajes son reales. A través de ella, el lector se adentra en la Antigua Grecia y las matemáticas de la época encabezadas por los conocimientos de los pitagóricos.

3. Sobre las matemáticas de la novela

Comenzaremos diciendo que, como en propio autor expone en su página web refiriéndose a temas relacionados con la novela, “El Asesinato de Pitágoras es un thriller puro, donde aparecen algunos enigmas o elementos matemáticos cuyo papel en la trama se comprende perfectamente sin necesidad de hacer ningún esfuerzo ni tener conocimientos previos”. Por ello no está destinada sólo a lectores expertos en matemáticas, sino a todo tipo

de lectores que sientan alguna afición por las matemáticas y su evolución a lo largo de la historia, así como por la historia en sí misma.

Son muchos los temas matemáticos que aparecen citados en la obra, en ocasiones de una forma superficial y en otras con mayor profundidad: el Teorema de Pitágoras, la Tetraktys, las proporciones, los números irracionales, los poliedros regulares, el número pi, las raíces cuadradas, el pentagrama pitagórico o pentáculo que contiene la sección áurea, son algunos con los que nos podemos topar en la lectura.

Como no podía ser de otra forma, en esta novela, el Teorema de Pitágoras tiene cierto protagonismo en relación con algunas de las cuestiones matemáticas que aparecen, como son el cálculo de los decimales del número pi o la existencia de las magnitudes inconmensurables (los números irracionales).

Destacar además que, a lo largo del libro, aparecen pequeños capítulos dedicados a presentar y definir algunos de los conceptos matemáticos que han aparecido en la novela: Sección Áurea, el Teorema de Pitágoras o los números irracionales. Extraídos de la Enciclopedia Matemática (Socram Ofisis, 1926).

Pero, en nuestra opinión, la belleza matemática de la obra se centra en los números irracionales. Los pitagóricos solo conocían la existencia de los números racionales. Una crisis profunda del pensamiento pitagórico la marcó la existencia de los números inconmensurables, desconocidos en ese momento por los pitagóricos, a pesar de estar incluidos en el propio teorema de Pitágoras.

Aunque algunos autores atribuyen al propio Pitágoras el descubrimiento de los inconmensurables, se suele conceder su autoría a Hipasos de Metaponto (siglo V a.c.), hacia el año 480 a.C., de quien se dice que murió asesinado por los pitagóricos por difundir ese conocimiento fuera de la hermandad. La novela muestra una versión de este descubrimiento y sus consecuencias realmente ingeniosa.

Sobre el número pi, en "El asesinato de Pitágoras" el sibarita Glauco, que ansiaba tener los conocimientos de los pitagóricos pero sin renunciar a su "sibarítica" vida, convoca un premio que consiste en que la persona que sea capaz de calcular con exactitud al menos 4 decimales del número pi recibirá diez veces el peso de Glauco en oro, lo que resulta un claro desafío a Pitágoras, quien solamente conoce con exactitud el primer decimal. Hay un ganador del premio que, haciendo uso del Teorema de Pitágoras en un método de duplicación de polígonos, es capaz de calcular hasta 8 decimales del número pi. ¿Adivinas quién gana el premio? Lee el libro y lo sabrás.

En la página web dedicada al libro del autor, puede consultarse un vídeo donde Chicot presenta el método de cálculo del número pi siguiendo el Teorema de Pitágoras con la idea que se expone en la novela.

4. Información adicional

El autor cuenta con una página web: <http://www.marcoschicot.com/> en la que se enlaza con la página de la novela <http://www.marcoschicot.com/es/el-asesinato-de-pitagoras>. Animamos al lector a visitarla porque puede encontrarse en ella material de interés. Cuenta con diversos puntos como son:

- 1- La historia detrás de la novela
- 2- Reseñas de prensa
- 3- Reseñas de blogs de literatura
- 4- Comentarios de lectores
- 5- Descripción de la novela
- 6- Material adicional

En la página es posible acceder a información sobre temas matemáticos interesantes (consultar el último de los puntos).

En estos momentos, el autor está a punto de publicar su siguiente novela “La hermandad” donde Akenón y la hija de Pitágoras volverán a correr aventuras.

5. Conclusiones

Se nos presenta un libro interesante y ameno, de fácil lectura. No son necesarios conocimientos matemáticos para su lectura si bien se disfruta más teniéndolos. Las matemáticas actúan como hilo vertebrador del argumento. Se encuadra dentro de los libros de intriga y aventura, con un toque de romanticismo. Asesinatos, guerras entre ciudades, discusiones en el Foro, intentos por arrebatar el poder político que detentaban los pitagóricos, envidias de los que no han podido acceder a la comunidad pitagórica, etc. son buena parte de los acontecimientos narrados, muchos reales y otros extrapolados o directamente producto de la imaginación del autor. No olvidemos que se conoce bastante poco de la vida de Pitágoras y su época. Los pequeños toques ilustrativos de algunos conceptos matemáticos (el número pi, la sección áurea, etc.) son muy claros y están planteados para el lector no versado en las matemáticas. Aseguramos que se parará muy bien leyéndolo y que al final se terminará demasiado pronto. Estamos seguros de que os gustará y os hará pasar un rato entretenido.

Referencias

- [1] CHICOT, Marcos. *El asesinato de Pitágoras*. Duomo Editorial. Colección Imperdibles, Barcelona, 2013.
- [2] CHICOT, Marcos. *Marcos Chicot (página web del autor)*. <http://www.marcoschicot.com/>.

- [3] CHICOT, Marcos. *Marcos Chicot (página web del libro)*. <http://www.marcoschicot.com/es/el-asesinato-de-pitagoras>.
- [4] IBÁÑEZ, Raúl. *El asesinato de Pitágoras, historia y matemáticas (y II)*, <http://culturacientifica.com/2013/12/18/el-asesinato-de-pitagoras-historia-y-matematicas-y-ii/> . Blog de la Universidad del País Vasco

Sobre el autor:

Nombre: Equipo Editorial

Correo Electrónico: ma08@caminos.upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Entrevistas

Franco Bagnoli: El físico cercano

Franco Bagnoli: The Close Physicist

Rosa María Herrera

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 2, pp. 163–170, ISSN 2174-0410

Recepción: 14 Abr'14; Aceptación: 10 Sep'14

1 de octubre de 2014

Resumen

Franco Bagnoli desarrolla su actividad científica de investigador, profesor y divulgador con buen humor, inteligencia y eficacia y con un entusiasmo que contagia interés a todo aquel que tiene la fortuna de acercarse a él. Sabe combinar el rigor científico con la claridad expositiva y la sencillez, y su atenta humanidad acorta distancias. Su admirable talento para hacer que las cosas más complejas parezcan asequibles atrae a público de todas las edades. Estas notas pretenden ser un extracto de su excepcional personalidad.

Palabras Clave: Física, Divulgación, Experimentación.

Abstract

Franco Bagnoli develops his scientific activity as researcher, professor and communicator with a good sense of humor, intelligence, and efficiency. He transmits enthusiasm and interest to anyone who is fortunate enough to approach him. He knows how to combine scientific rigor with clarity of exposition, and his attentive humanity shortens distances. His admirable talent for making that complex things seem affordable attracts audiences of all ages. These notes are intended as an introduction to his exceptional personality.

Keywords: Physics, Research, Communication.

Introducción

Franco Bagnoli es un físico toscano, generoso, amable, conocedor de los secretos de la tecnología de la comunicación, trabajador, activo, dispuesto a ayudar, padre cariñoso de dos hijas encantadoras, y un buen amigo de sus amigos. En la Universidad de Florencia, donde trabaja, tuve la impresión de que todo el mundo le quiere. Conoce bien varios idiomas, entre ellos el español, y tiene un sentido del humor fantástico. Es un ser humano entrañable y un gran conocedor del mundo de la divulgación y tiene la habilidad de encontrar el punto que engancha a cada persona. Es un comunicador nato. Pero esto solo es una aproximación. Invito al lector a charlar con él.

Para mí es agradable su amistad creo que porque consigue que se me olviden los problemas cotidianos; sus bromas, su alegría contagiosa, su vitalidad no deja nunca de sorprenderme y me encanta. A pesar de los desacuerdos y discrepancias que tenemos, no sabría imaginar el mundo sin las “ocurrencias” de Franco.

Como experimentado divulgador realiza numerosas actividades, desde la dirección de la asociación cultural Caffescienza (www.caffescienza.it) de Florencia, hasta el fantástico espectáculo divulgador “La fisica de tutti i giorni” (la física de todos los días), y si esto no fuese suficiente escribe relatos científico-humorísticos. Además hay que añadir su trabajo como investigador en sistemas complejos y su tarea de profesor de física estadística y teoría de la información. El lector no se extrañará si le confieso que a veces me pregunto, pero ¿de dónde saca el tiempo Franco?



Figura 1. Franco Bagnoli

Con estos mimbres empiezo a formular algunas preguntas:

1. *La fisica di tutti i giorni*

-Franco, sabes que me divierto muchísimo viendo los vídeos de la “fisica di tutti i giorni”, explícame, por favor, cómo se te ocurrió esta idea (casi campaña) en favor de la física de las cosas corrientes.

Tal vez conviene presentar primero lo que es la “física de todos los días”. Veamos, se trata en general de experimentos hechos con materiales “pobres” o de poco valor, que se pueden encontrar en casa o comprar con pequeño gasto de dinero. Empecé con esta tarea como soporte de mi actividad docente. El objetivo es mostrar que verdaderamente la física forma parte de la vida, porque los estudiantes a veces contestan a mis preguntas con “¿tengo que usar la física como usted enseña, o puedo decir lo que pienso en realidad?”

Otro objetivo es mostrar cómo fenómenos aparentemente distintos se pueden explicar con las mismas leyes.

-Esto es verdaderamente interesante, Franco, porque es cierto que a los estudiantes la mayor parte de las veces les cuesta aprender las relaciones entre los elementos de la naturaleza. Yo creo, como aseveraba Poincaré (más o menos traducido libremente), “que en realidad no podemos saber lo que son las cosas, sino las relaciones que hay entre ellas”.

Después de haber preparado experimentos para mis estudiantes, vi que se pueden usar también como un espectáculo. En este caso, las explicaciones deben ser más “ligeras” y es

mejor si los experimentos se introducen a través de anécdotas, citas (fragmentos literarios o películas), chistes, cómics...

-¿Cómo te inspiras para preparar los experimentos de la “fisica di tutti i giorni” para un público no vinculado a la universidad?

Hay muchas vías de inspiración: libros de divulgación, youtube, historietas (comics), películas y novelas. Muchos experimentos son copia de otros que han dado buen resultado, otros son originales o por lo menos hechos de una forma original. Por ejemplo, el del agua sobre-enfriada se presentaba normalmente con un termostato en un ambiente de laboratorio (¡30 kg de refrigerador para enfriar 4 botellas!). Pero, pensando que la sal hace descender la temperatura del hielo (otro experimento interesante), pasamos a usar un cubo, hielo y sal, el resultado es que así funciona mucho más fácilmente, no cuesta nada y es posible enfriar muchas botellas al mismo tiempo. Además, un buen comienzo puede ser la novela “Ghiaccio-nove” (Hielo nueve) del inglés *Cat’s cradle* de Vonnegut.

-¿Cuál es el público mejor predispuesto, o más entusiasta: los niños, los jóvenes, los mayores? ¿Quiénes se atreven a hacer preguntas con más libertad y más creatividad?

Los niños son necesarios, porque se emocionan mucho e involucran a todo el público. Yo he hecho demostraciones en jardines de infancia (4-5 años) explicando cómo funcionan las moléculas de agua con aceite, cómo puede el jabón disolver el aceite, cómo funciona un globo, Y haciéndolos jugar. Es un público muy atento. Claro que con los niños hay que utilizar explicaciones diferentes y otros recursos, y no se puede emplear las introducciones literarias.

Los ancianos están muy interesados y hacen muchas preguntas. Este curso voy a dar un curso de 10 horas de la “física de todos los días” en la universidad para mayores.

Los jóvenes normalmente no muestran mucho interés; sin embargo, algunos apasionados del café-ciencia siguen los espectáculos y todos los clips que ponemos en Youtube. Claro que ya suelen tener formación en física, y por lo tanto la demostración no les aporta información nueva, pero sirve para que lo pasen bien...

-¿En general, qué le interesa más a tu público?

Los resultados espectaculares que no se imaginan de antemano. El éxito máximo creo que lo obtenemos con el experimento del agua sobre-enfriada, porque aparecen procesos sorprendentes y muy inesperados.

-¿Consigues muchas veces, o al menos en ocasiones, que la gente pierda el miedo a la física?

No sé, nunca he tenido ocasión de controlarlo o hacer una medida... voy a preguntar a mis ancianos al finalizar el curso. El problema no es el miedo, es que la física no es natural (es muy reciente en la historia humana), pero trata de cosas comunes (no solo planetas, o moléculas, u otras cosas extrañas), por lo tanto, para abordarla se necesita olvidar la “física intuitiva” (aristotélica) que es natural y que se usa para manipular la realidad, y aprender la física galileana. Claramente es una cosa esquizofrénica y comprendo que los estudiantes intentan usar dos compartimentos separados. Pero nosotros, físicos, también usamos dos compartimentos: normalmente en mis espectáculos pregunto al público sobre qué piensan que va a suceder en el experimento que estoy a punto de hacer, y (a veces) incluso los físicos se equivocan (pero mucho menos que el resto de los participantes).



Figura 2. Experimento del agua sobre-enfriada

- Franco estoy de acuerdo en lo esencial, pero con algunas matizaciones, como ya te dije en una conversación reciente, yo creo que la intuición que se usa para manipular la realidad no es estática y va evolucionando con el tiempo y la formación a medida que la humanidad ha ido adquiriendo conocimiento.

Quizá en las situaciones más extremas nuestra intuición sea más primitiva, en peligro de muerte o así, pero la gente con conocimiento, creo que manipula el mundo sin “pensar” de distinta manera a como lo hace la gente con poca formación y creo que lo que es aplicable a individuos aislados se puede aplicar al conjunto de la humanidad.

-¿Qué te satisface más divulgar física o enseñar física a los estudiantes de ingeniería?

Divulgar no es un trabajo para mí (en el sentido de que la universidad aprueba lo que hago, pero no me sirve para mejorar mi posición, ni tiene valor para que promocióne profesionalmente...) pero lo hago porque me divierte. ¿Quién sabe lo qué sucederá en el futuro?

Yo enseño regularmente un curso avanzado a los estudiantes de ingeniería informática ('laurea magistrale'¹, último año) y claramente esto me satisface. He enseñado física elemental durante muchos cursos, hasta hace 5 años, y he vuelto a impartir esta materia este año (no voy a volver el año próximo). No estoy satisfecho para nada de cómo se enseña la física. Repetir todos los años el mismo espectáculo (las clases), corregir miles de tareas y ver que el 90% de los estudiantes no mejoraron en absoluto... Según algunos estudios, la actividad cerebral de los estudiantes durante una clase es la misma que cuando ven la televisión: completamente plana. Estoy de acuerdo con Eric Mazur (“peer instruction”)²: el curso se puede seguir por internet, en clase se debería discutir.

Me gustaría muchísimo usar experimentos como estímulo didáctico, pero para hacer esto se necesita ya conocer un poco de física elemental (mecánica, termodinámica, fluidos, electromagnetismo), porque en la vida real es difícil separar las disciplinas...

¹ Equivalente a la licenciatura en España

² http://en.wikipedia.org/wiki/Peer_instruction

2. Ciencia para los ciudadanos y con los ciudadanos

A estas alturas el lector se habrá dado cuenta ya de que Franco es una persona comprometida socialmente, y ya ha podido comprobar que muy preocupado por llegar a todos los sectores de la población, pero no solo a escala local, sino que también es un experto en el mundo de las tecnologías de comunicación (TIC), y está en contacto con gente alrededor del mundo. Para completar su perfil, me gustaría señalar que como investigador científico de la "Università di Firenze" (Universidad de Florencia) su actividad se centra en los sistemas complejos [1].

No obstante a mí me interesa destacar aquí su dimensión humana para presentar al lector su aspecto más solidario y generoso.

- Franco, ya sé que te pido mucho, pero podrías hacerme aquí un resumen de tu experiencia como director de la asociación cultural Caffè-Scienza Firenze [2].

¡Esto va ser largo! La asociación Caffè-Scienza (café-ciencia) organiza, obviamente, café-científicos, que básicamente consisten en conferencias de temas de interés por su actualidad, o por otras razones, en las cuales el público es quien pilota. En otras palabras, el invitado no es un conferenciante en sentido tradicional, y la comunicación se realiza entre los asistentes que lo deseen, así todos los presentes son potenciales "emisores y receptores", y las preguntas del público son las que orientan la conversación, es decir, constituyen la parte fundamental del evento.

No se trata pues de divulgación, la idea es "extraer" conocimiento de los expertos sobre temas que tienen que ver con la ciencia y la tecnología, pero sin que los profesionales conduzcan la conversación: para que se entable una relación de igualdad entre los especialistas y el público (aquí difiere de la divulgación). Después de nueve años y casi 100 café-ciencia (hasta el 2009, el director fue Paolo Politi³) creo que nos proponemos llevar a cabo al menos dos tareas que suponen retos importantes.

Por una parte, tenemos que "facilitar" la creación de otras experiencias similares: hacer red. Esto lo hemos iniciado con un proyecto europeo (SciCafe) y uno nacional italiano (La scienza ha fatto rete!).

Por otra, podemos "exportar" el método "café-ciencia" a otras áreas: tenemos otro proyecto europeo, SciCafe2.0, que pretende a usar "discusiones paritarias con expertos" (café-ciencia) sobre varios temas socio-tecnológicos usando una técnica mixta internet-presencial. El hecho real del que se parte es que hay muchos casos en los que la gente ha de colaborar (ahorrar energía, compartir vehículos, etc.) y para facilitar esto se usa la tecnología (aplicaciones móviles, por ejemplo). Pero estas aplicaciones sirven solo si hay muchas personas que las usan, y entonces surge el problema de cómo empezar, cómo detectar cuáles son los aspectos que no funcionan, cómo mejorar... La idea es usar el método de los café-ciencia para llevar a cabo esta labor. Pero esto es un proyecto de investigación que se va a canalizar a través de la universidad.

Como asociación, Caffè-Scienza continúa con su actividad habitual; es decir, organizando los encuentros usuales, que solo se interrumpen en verano porque hace calor y el número de

³ Paolo Politi es físico y trabaja en Florencia (ISC-CNR).

asistentes disminuye, aunque en ocasiones se celebra algún café-ciencia extraordinario, como regalo estival.



Figura 3. Logo del café científico de Florencia

3. Otras cosas

Debe saber el lector que Franco también realiza pequeños programas radiofónicos, en ocasiones relacionados con las sesiones habituales de Caffè-Scienza, que contienen entrevistas de profundización a alguno de los expertos destacados, lleva a cabo asimismo divulgación en sentido convencional; siempre que se presenta la ocasión, escribe y quién sabe cuántas cosas más.

Las actividades de Caffè-Scienza Firenze se pueden seguir normalmente vía streaming, como es natural el idioma utilizado es el italiano; y con distinto grado de interés son pocas la veces que dejan indiferente, yo me conecto desde Madrid.

Estoy contenta por la generosidad y la paciencia que tiene siempre Franco conmigo en todos los sentidos, y en esta ocasión también por su gentileza y amabilidad al prestarse a esta pequeña entrevista cordial y amistosa.

Franco me pide que rebaje el tono lisonjero y hagiográfico de mi trabajo en este escrito, y que señale las veces en que es un poco brusco conmigo, o que indique otros defectos; bueno pues lo constato tiene defectos, pero yo también y es más ¡aunque resulte sorprendente! no conozco a nadie que no los tenga, y qué; las disonancias que a veces tenemos no cambian en nada el sentimiento de gran afecto y admiración que siento por él, es un buen y querido amigo, aunque nos separen fronteras y un pequeño trozo de mar, por decirlo un poco poéticamente, como a mí me gusta.

Por último, me gustaría señalar que Franco mira la física de manera un poco diferente a otros físicos que conozco, y por tanto algunas veces ayuda a comprender el mundo físico compartiéndolo de manera sencilla con personas que tienen miradas no especializadas, su experta visión del mundo es mucho más completa, en bastantes ocasiones, que si se limitara a

actuar como un académico encerrado en su despacho o en su laboratorio. Y no sigo que finalmente conseguiré que se enfade conmigo...

Referencias

- [1] BAGNOLI, Franco. <http://francobagnoli.complexworld.net>
- [2] BAGNOLI, Franco et al. <https://sites.google.com/site/scicafewebbook/>
- [3] Caffè-Scienza. <http://www.caffescienza.it>
- [4] Presentaciones Caffè-Scienza
<http://www.youtube.com/watch?v=gkyLiGSSwh0&list=PLDr3X5MVwp3L1KrRmWd6pKv1aJEGnZ6rN>

Sobre la autora:

Nombre: Rosa María Herrera

Correo Electrónico: herrera.rm@gmail.com

Institución: Grupo de Investigación en Mecánica Celeste (SEAC)

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

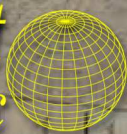
Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.



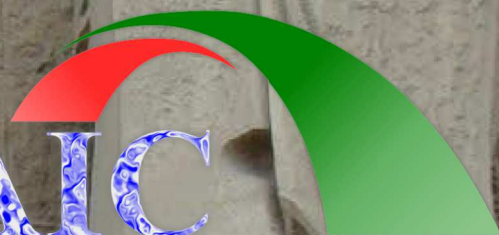
Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

G.I.E

*Pensamient
Matemàtic*



MAIC



1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

