

EXPERIENCIAS DOCENTES

EL ABANDONO ACADÉMICO: ANÁLISIS Y PROPUESTAS
PALIATIVAS. DOS PROYECTOS DE LA UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA DE MADRID

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

LOS CURIOSOS PROBLEMAS DE MEZCLAS DE ALCUINO
DE YORK

ARITMÉTICA DE LOS VALORES DE LA FUNCIÓN ZETA DE
RIEMANN EN ARGUMENTOS ENTEROS

CRÍTICAS

INFORME SOBRE EL LIBRO: "EL ENIGMA DE FERMAT.
TRES SIGLOS DE DESAFÍO A LA MATEMÁTICA", ALBERT
VIOLANT

CUENTOS MATEMÁTICOS

MATEMÁTICAS PARA TODOS

INVESTIGACIÓN

ARQUITECTURA PARAMÉTRICA DISCRETA: EXPLORACIÓN
EN EL ÁMBITO DE LA GEOMETRÍA ORTOGONAL

CÁLCULO FRACCIONARIO Y DINÁMICA NEWTONIANA

PROGRAMACIÓN EN PARALELO GPGPU DEL MÉTODO DE
DIFERENCIAS FINITAS FTCS PARA LA ECUACIÓN DEL
CALOR

ESTIMACIÓN DE SUCESOS RAROS MEDIANTE REDES
BAYESIANAS

JUEGOS MATEMÁTICOS

NÚMEROS TRIANGULARES CUADRADOS
(LA CUADRATURA DEL TRIÁNGULO)

UNA SUCESIÓN MATEMÁTICA CURIOSA

ENTREVISTA A:

PABLO AMSTER:
LA MÚSICA DE
LA MATEMÁTICA



Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen IV, Número 1, Abril 2014

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC

Foto de portada / Escultura "Sueños reflejados" de Anish Kapoor en la Real Academia de las Artes de Londres

Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

y

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid



Volumen IV, Número 1, ISSN 2174-0410

Coordinación Comité Editorial

Mariló López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Javier Rodrigo Hitos

José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Ascensión Moratalla de la Hoz,

Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Raquel Caro Carretero, Fernando Chamizo Lorente,

Luis Garmendia Salvador, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador,

Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla

1 de abril de 2014

Índice de Artículos

Editorial del Número 1 (Vol. IV) 1

Experiencias Docentes

El abandono académico: análisis y propuestas paliativas. Dos proyectos de la Universidad Politécnica de Madrid 7
Ana Casaravilla

Historias de Matemáticas

Los curiosos problemas de mezclas de Alcuino de York 17
Antonio M. Oller Marcén

Aritmética de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros 33
Anier Soria Lorente

Cuentos Matemáticos

Matemáticas para todos 45
José Miguel Bel Martínez

Investigación

Arquitectura paramétrica discreta: exploración en el ámbito de la geometría ortogonal 49
Oscar del Castillo Sánchez

Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana 77
Antón Lombardero Ozores

Programación en paralelo GPGPU del método en diferencias finitas FTCS para la ecuación del calor 107
Vicente Cuellar Moro, Miguel Martín Stickle y Manuel Pastor Pérez

Estimación de sucesos raros mediante Redes Bayesianas 127
Francisco Soler Flores y José Ángel Olivas Varela

Juegos Matemáticos

Números triangulares cuadrados (la cuadratura del triángulo) 137
Dionisio Pérez Esteban

Una Sucesión Matemática Curiosa 141
Marco Vinicio Vásquez Bernal

Críticas

Informe sobre el libro: “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, Albert Violant 149
Javier Rodrigo Hitos

Entrevistas

Pablo Amster: La Música de la Matemática 157
Rosa María Herrera

Editorial del Número 1 (Vol. IV)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 001-006, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Mar'14; Aceptación: 25 Mar'14

1 de abril de 2014

Resumen

Presentamos el primer número del cuarto volumen de la Revista "Pensamiento Matemático" que nuevamente incluye diversos artículos encuadrados en las diferentes secciones habituales de la Revista, cubriendo un amplio espectro de la Matemática y sus aplicaciones.

Abstract

We present the first number of the fourth volume of the "Mathematical Thinking" Journal. It includes some papers framed in the different sections of the Journal. The articles cover a wide range of the Mathematics topics and its applications.

Introducción

Comenzamos nuestro cuarto año de publicación con el primer número del año 2014. Cuatro años de esfuerzo, trabajo, dedicación y perseverancia, características éstas con las que todo el equipo que hace PM se siente identificado.

Queremos aprovechar este número para agradecer el esfuerzo de todos aquellos compañeros que, de una manera u otra, colaboran desinteresadamente con esa Revista. Nos reconforta en gran medida saber que nuestro proyecto resulta cada vez de mayor interés para la comunidad docente con cada nuevo número publicado, creciendo cada día en número de lectores y colaboradores.

Seguimos con el espíritu de que Pensamiento Matemático esté dirigida a un público lo más amplio posible pretendiendo introducir a sus lectores en la belleza y aplicaciones de las matemáticas. Por ello en este número se encuentran artículos que nuevamente tratan diversos campos de la Matemática, sus aplicaciones y curiosidades.

A continuación presentamos brevemente los artículos que componen el presente número en sus diferentes secciones.

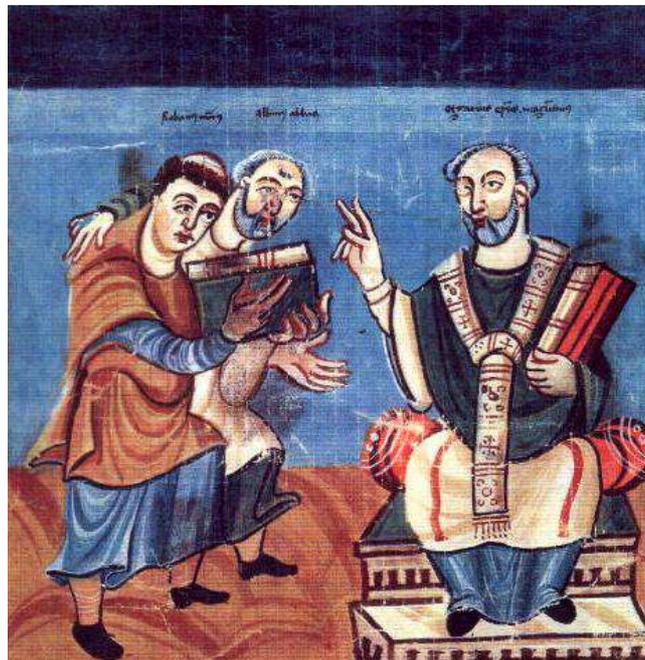
Experiencias Docentes

El artículo "[El abandono académico: análisis y propuestas paliativas. Dos proyectos de la Universidad Politécnica de Madrid](#)" presenta el abandono de los estudios superiores, el cual preocupa en las universidades de todo el mundo y tiene una incidencia relevante en las titulaciones de ingeniería y arquitectura en España. Son múltiples los análisis y estudios sobre el abandono que,

con diversos enfoques, pueden encontrarse en la literatura. Sin embargo, no hay unidad de criterio para conceptualizar el fenómeno, establecer medidas que permitan comparar la dimensión real del abandono en instituciones, países y situaciones distintas y, consecuentemente, proponer medidas eficientes para mejorar las tasas de permanencia y minimizar las consecuencias negativas –tanto de carácter personal como social– del abandono de estudios superiores a nivel general. Se presentan aquí dos proyectos promovidos por la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) cuyo objetivo es profundizar en el conocimiento del abandono y determinar propuestas paliativas con aplicabilidad en diferentes contextos. Uno de ellos es un Proyecto Transversal de Innovación Educativa, de carácter interno a la UPM, que involucra a un gran número de profesores y centros de esta universidad. El otro es un Proyecto Internacional financiado por la Unión Europea, en el que participan veinte universidades de dieciséis países, doce de América Latina y cuatro europeos, que lidera la UPM. Ambos coinciden en el tiempo (2011-2014) y comparten, entre otras características, una visión integradora del abandono como fenómeno que debe ser abordado desde la perspectiva de responsabilidad conjunta del estudiante y de la institución.

Historias de Matemáticas

En *“Los curiosos problemas de mezclas de Alcuino de York”* se presentan los problemas “de mezclas” contenidos en la colección medieval *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York y se analizan posibles métodos de resolución, puramente aritméticos, que pudo haber seguido el autor del texto original. Pensamos que un análisis de este tipo puede tener interesantes implicaciones didácticas a la hora de afrontar el paso de la Aritmética al Álgebra.



Rabano Mauro apoyado por Alcuino ofrece una obra a Otgar de Maguncia.

“Aritmética de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros” trata sobre el carácter aritmético de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros y en particular en impares, el cual hoy día aún continúa siendo un problema abierto dentro de la comunidad matemática. Este artículo se dedica a presentar los principales resultados alcanzados por varios matemáticos desde el siglo XVII hasta la actualidad, correspondientes al carácter aritmético que siguen los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros.

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

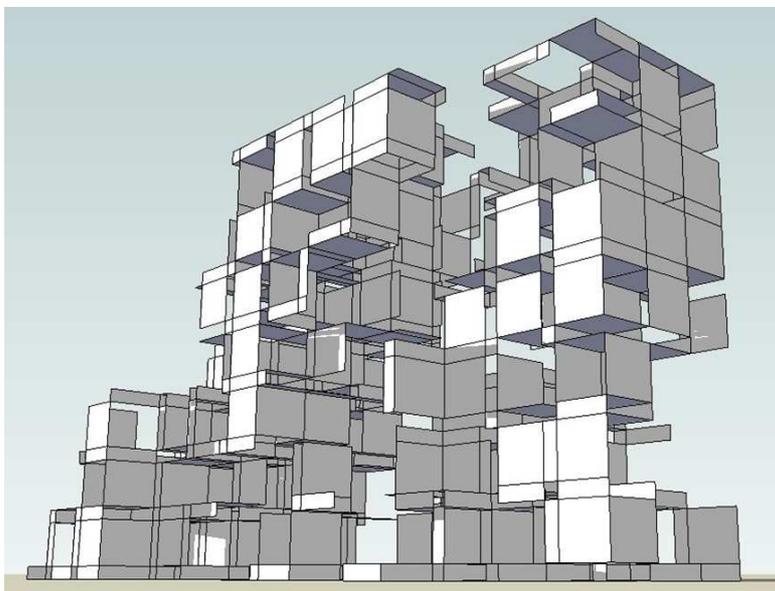
Función zeta de Riemann.

Cuentos Matemáticos

“Matemáticas para todos” es un relato que trata de poner de manifiesto cómo tras la “ignorancia” matemática puede haber atrevimiento por el que se puede llegar a cualquier resultado por extraño que éste resulte, todo ello llevado en un tono narrativo ameno y divertido.

Investigación

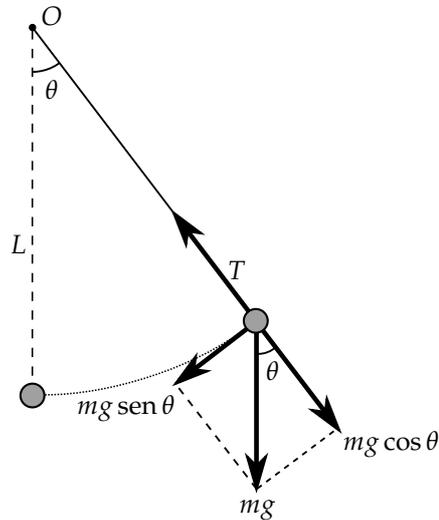
“Arquitectura paramétrica discreta: exploración en el ámbito de la geometría ortogonal” trata sobre la idea de arquitectura paramétrica, la cual tiene una vertiente instrumental en el uso de software orientado a la gestión de la información del proyecto arquitectónico, en particular cuando se emplean geometrías complejas. Sin embargo, la idea de que la forma, sin importar su geometría, esté matemáticamente definida mediante un número limitado de parámetros puede ser de gran alcance en lo que se refiere a las posibilidades de generación de variaciones por modificación de dichos parámetros, manipulación de la forma en procesos de optimización y por la relación entre las estructuras matemático-formales producidas y la idea clásica de unidad formal de la obra de arte.



“Ciudad – Alea”; imagen obtenida mediante generación de una malla tridimensional consistente en una alternancia a la que se aplica una eliminación aleatoria de planos.

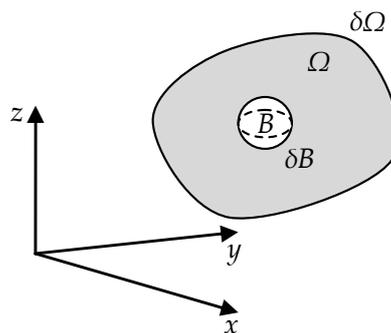
“Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana” presenta el Cálculo Fraccionario como una útil herramienta que abre la posibilidad de extender los conceptos de derivada e integral a órdenes no enteros. En este contexto, cabe plantearse una generalización de la segunda Ley de Newton en la que se sustituya la derivada segunda interviniente por otra de orden α ($1,5 < \alpha \leq 2$). En

este trabajo se estudian algunos sistemas clásicos (péndulo, proyectil y resorte) bajo este nuevo enfoque.



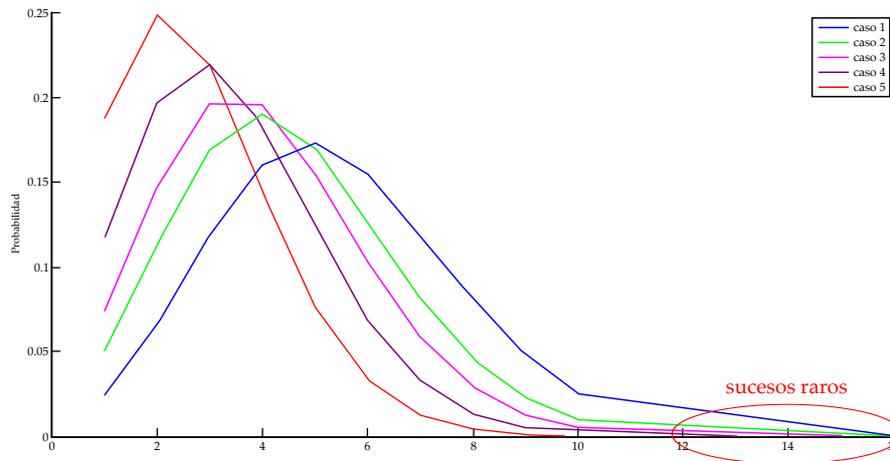
Fuerzas que intervienen en el péndulo

En *“Programación en paralelo GPGPU del método en diferencias finitas FTCS para la ecuación del calor”* se muestran las ventajas de la programación en paralelo resolviendo numéricamente la ecuación del calor en dos dimensiones a través del método de diferencias finitas explícito centrado en el espacio FTCS. De las conclusiones de este trabajo se pone de manifiesto la importancia de la programación en paralelo para tratar problemas grandes, en los que se requiere un elevado número de cálculos, para los cuales la programación secuencial resulta impracticable por el elevado tiempo de ejecución. En la primera sección se describe brevemente los conceptos básicos de programación en paralelo. Seguidamente se resume el método de diferencias finitas explícito centrado en el espacio FTCS aplicado a la ecuación parabólica del calor. Seguidamente se describe el problema de condiciones de contorno y valores iniciales específico al que se va a aplicar el método de diferencias finitas FTCS, proporcionando pseudocódigos de una implementación secuencial y dos implementaciones en paralelo. Finalmente tras la discusión de los resultados se presentan algunas conclusiones.



Esfera arbitraria B contenida en una región Ω . δB denota el límite de B .

En *“Estimación de sucesos raros mediante Redes Bayesianas”* podremos ver cómo la teoría y aplicaciones de sucesos de baja probabilidad de ocurrencia o sucesos raros está en boga en los últimos años debido a su importancia práctica en muy diferentes campos, como seguros, finanzas, ingeniería o ciencias del medio ambiente. Este trabajo presenta una metodología para predecir sucesos raros basada en Redes Bayesianas que permite a su vez estudiar situaciones alternativas.



Sucesos raros y sus distribuciones según los valores de las variables predictoras

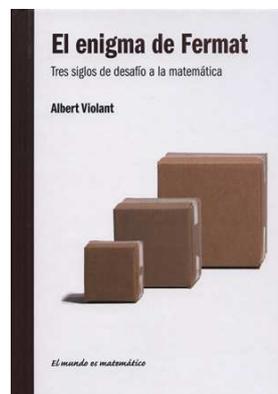
Juegos Matemáticos

En *“Número triangulares cuadrados (la cuadratura del triángulo)”* se pone de manifiesto cómo entre los números triangulares, se encuentran camuflados algunos cuadrados. En este artículo se les desenmascara, y en el proceso nos topamos con algunos personajes interesantes: fracciones continuas, ecuación de Pell, aproximación de soluciones, etc.

En *“Una Sucesión Matemática Curiosa”* se pone de manifiesto que existe una sucesión de números naturales, que inician en cero y va aumentando cada vez el entero correspondiente al orden del elemento de la misma, que tiene un comportamiento a primera vista curioso, mas al realizar un estudio de la misma se entiende a cabalidad este comportamiento. La sucesión genera además ciertos resultados interesantes, como el poder determinar resultados para la potencia de cualquier número entero, en función de sus elementos.

Críticas

En *“Informe sobre el libro: ‘El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática’, Albert Violant”* se presenta un informe sobre dicho libro, perteneciente a la colección “El mundo es matemático”, de la que ya se comentó otro libro en un artículo anterior del autor.



Portada del libro.

Entrevistas

“Soy matemático. En una época era músico, o al menos eso creía. Después empecé a decir que era buen matemático entre los músicos y buen músico entre los matemáticos. Pero ahora me asumo como matemático, aunque siga haciendo algo de música. Quizás la diferencia es que ahora que no me siento músico la disfruto más”. Este es el autorretrato arrancado a Pablo Amster al empezar este trabajo, conociéndole un poco esto es muy escaso, pero es una herramienta válida para poner en contacto al lector y al matemático.



Pablo Amster.



No queremos cerrar esta breve introducción a nuestro nuevo número sin agradecer a la Universidad Politécnica de Madrid el haber otorgado al GIE Pensamiento Matemático el Premio al Mejor Grupo de Innovación Educativa 2013 de la Universidad. Son estos reconocimientos los que animan a los equipos a seguir trabajando en la difusión, investigación y enseñanza de cualquier disciplina, por ello muchas gracias.

“La perseverancia es el trabajo duro que hay que hacer cuando uno se cansa del trabajo duro que ya hizo.”

Newt Gingrich

“Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad.”

Albert Einstein

“La peor derrota de una persona es cuando pierde su entusiasmo.”

H.W. Arnold

El Comité Editorial

Experiencias Docentes

El abandono académico: análisis y propuestas paliativas. Dos proyectos de la Universidad Politécnica de Madrid

Academic dropout: Analysis and palliative proposals. Two projects at the Polytechnic University of Madrid

Ana Casaravilla

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 007-016, ISSN 2174-0410

Recepción: 10 Dic'13; Aceptación: 15 Mar'14

1 de abril de 2014

Resumen

El abandono de los estudios superiores preocupa en las universidades de todo el mundo y tiene una incidencia relevante en las titulaciones de ingeniería y arquitectura en España. Son múltiples los análisis y estudios sobre el abandono que, con diversos enfoques, pueden encontrarse en la literatura. Sin embargo, no hay unidad de criterio para conceptualizar el fenómeno, establecer medidas que permitan comparar la dimensión real del abandono en instituciones, países y situaciones distintas y, consecuentemente, proponer medidas eficientes para mejorar las tasas de permanencia y minimizar las consecuencias negativas –tanto de carácter personal como social– del abandono de estudios superiores a nivel general. Se presentan aquí dos proyectos promovidos por la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) cuyo objetivo es profundizar en el conocimiento del abandono y determinar propuestas paliativas con aplicabilidad en diferentes contextos. Uno de ellos es un Proyecto Transversal de Innovación Educativa, de carácter interno a la UPM, que involucra a un gran número de profesores y centros de esta universidad. El otro es un Proyecto Internacional financiado por la Unión Europea, en el que participan veinte universidades de dieciséis países, doce de América Latina y cuatro europeos, que lidera la UPM. Ambos coinciden en el tiempo (2011-2014) y comparten, entre otras características, una visión integradora del abandono como fenómeno que debe ser abordado desde la perspectiva de responsabilidad conjunta del estudiante y de la institución.

Palabras Clave: Abandono en la Educación Superior, Proyectos de Innovación Educativa UPM, Proyecto ALFA-GUIA.

Abstract

Dropout in higher education is a concern in universities worldwide and has a significant impact in our country, especially in engineering and architecture degrees. There are multiple and different perspectives to analyze this phenomenon; however, there is not a unified approach to conceptualize it. Adequate ways to measure and compare the dropout dimension in different institutions or countries have not been found so far. Consequently, it is difficult to find effective procedures to improve retention rates and to minimize negative consequences -both personal and social- of the abandonment of higher education. This article is about two projects which have been promoted by the Technical University of Madrid (UPM) whose main objective is to deepen the knowledge of academic attrition and to determine palliative approaches to be applied in different contexts. One of them is a UPM Inner Transverse Educational Innovation Project, involving a large number of teachers and schools of the UPM. The second one is an International Project lead by the UPM and funded by the European Union. This project involves twenty universities and sixteen countries, twelve in Latin America and four in Europe. Both projects have been developed simultaneously (2011-2014) and share, among other characteristics, the integrated viewpoint that the dropout phenomenon should be addressed by considering both the student and the institution responsibility.

Keywords: Dropout in Higher Education, Educational Innovation Projects at the UPM, ALFA-GUIA Project.

1. Introducción

El abandono de los estudios superiores preocupa en las universidades de todo el mundo y tiene una incidencia relevante en nuestro país, y muy especialmente, en las titulaciones de ingeniería y arquitectura. Son múltiples los análisis sobre el abandono que, con diferentes propósitos, pueden encontrarse en la literatura especializada. En ellos se estudian las causas que influyen en el abandono de estudios, se elaboran modelos de predicción con el objetivo de medir el riesgo de abandono, o se presentan diversas teorías que, a lo largo del tiempo y con diferentes enfoques, han intentado explicar los motivos y circunstancias por los que un estudiante decide dejar los estudios que comenzó, en un cierto momento. Estos análisis suelen presentar el abandono como un hecho puntual, que se produce al desvincularse el alumno de los estudios iniciado. Son, por ello, en exceso simplistas ya que no toman en consideración lo que sucede después de que el alumno abandona la carrera, ni las consecuencias de este hecho en su futuro académico, profesional y personal.

Por otro lado, no hay unidad de criterio a la hora de conceptualizar el fenómeno (ni tan siquiera una definición de “abandono” generalmente asumida por la comunidad universitaria). Tampoco se han podido establecer –hasta ahora– formas de medición que permitan comparar la dimensión real del abandono en instituciones, países y situaciones distintas. Consecuentemente, ante esta falta de criterios homogéneos, no es posible proponer medidas eficientes de carácter general para mejorar las tasas de permanencia y minimizar las consecuencias negativas –tanto de carácter personal como social– del abandono de estudios superiores.

Se presentan aquí dos proyectos promovidos por la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) cuyo objetivo común es doble. En primer lugar, profundizar en el conocimiento del abandono en toda su complejidad, presentando un marco conceptual, ciertos instrumentos y

modelos de predicción, y algunas pautas para el estudio del fenómeno, con aplicabilidad en diferentes contextos. Y, en segundo término, ofrecer propuestas, suficientemente contrastadas, para la reducción de los índices de abandono en nuestras universidades.

Uno de ellos es un Proyecto Transversal de Innovación Educativa, de carácter interno a la UPM, que involucra a un gran número de profesores y centros de esta universidad. El segundo es un Proyecto Internacional, financiado por la Unión Europea, en el que participan veinte universidades de dieciséis países, doce de América Latina y cuatro europeos, que lidera asimismo la UPM. Ambos proyectos coinciden en el tiempo (2011-2014) y comparten, entre otras características, una visión integradora del abandono como fenómeno que debe ser abordado desde la perspectiva de la responsabilidad conjunta del estudiante y de la institución.

2. El proyecto internacional GUIA

Los días 13, 14 y 15 de noviembre de 2013 se celebró en Ciudad de México la Tercera Conferencia Latinoamericana sobre **AB**andono en la **E**ducación **S**uperior (**III-CLABES**), que reunió a un número aproximado de 400 participantes de 115 instituciones distintas. Esta Conferencia (y las dos ediciones anteriores celebradas en 2011 en Managua, Nicaragua, y en 2012 en Porto Alegre, Brasil) forma parte de las actividades que se desarrollan en el marco del Proyecto **GUIA** (Gestión Universitaria Integral del Abandono) incluido en el programa ALFA de la Unión Europea, que lidera la Universidad Politécnica de Madrid (UPM).

En el Proyecto GUIA participan veinte Instituciones de Educación Superior (IES) de doce países latinoamericanos y cuatro europeos que, durante el trienio 2011-2014, han estado colaborando –y continuarán haciéndolo– con los siguientes objetivos:

- profundizar en el conocimiento de los factores que influyen en el abandono académico;
- construir una red de instituciones y organismos preocupados por este problema presente, en mayor o menor grado, en todo el mundo;
- recopilar, evaluar y difundir buenas prácticas encaminadas a su reducción; y
- proponer la implementación de programas institucionales vinculados a los sistemas de garantía de calidad que incidan positivamente en la mejora de la permanencia.

El conjunto de las universidades socias del proyecto GUIA reúne a más de 800.000 estudiantes de América Latina y Europa, distribuidos en instituciones de carácter tanto público como privado. La gestión del proyecto, a cargo de la UPM, presenta un desafío importante derivado de la dispersión geográfica de los socios, así como de su diversidad cultural, ya que las Instituciones de Educación Superior (IES) que participan en GUIA tienen muy diferentes características en cuanto a tamaño, organización, áreas de estudio, etc.

El portal Web del proyecto **GUIA** es un referente para todas las instituciones, organismos y personas comprometidas con el objetivo de reducir el abandono estudiantil en la Educación Superior. En él se puede encontrar información seleccionada para profundizar en el conocimiento del abandono, su prevención, y sobre las medidas y planes de actuación que las diferentes universidades vienen adoptando para su reducción. También es un punto de

encuentro donde contactar con instituciones, profesores e investigadores interesados en el objetivo común de mejorar las tasas de permanencia en la educación superior.



Figura 1. Portal GUIA, referencia para el análisis del abandono en la educación superior en Latinoamérica.

3. El proyecto transversal UPM

La dirección del Proyecto GUIA, con el profesor Jesús Arriaga a la cabeza, ha mantenido una vinculación muy importante con los Servicios de Innovación Educativa de la UPM. En la convocatoria de Proyectos Transversales 2011-12 se desarrolló el proyecto *“Análisis del Absentismo y Abandono en las titulaciones de grado de la UPM y propuestas para la mejora de los índices de permanencia”*, coordinado por la profesora Ana Casaravilla –directora adjunta del proyecto GUIA– para tratar de analizar desde diversos ángulos el complejo tema del

abandono en nuestra universidad, justo en el momento de la incorporación al “modelo de Bolonia”.

Participaron en este proyecto ocho Grupos de Innovación Educativa (GIE) y un total de más de ochenta profesores y alumnos becarios, junto con un grupo numerosísimo de docentes que colaboraron en la recogida de información y en otras actividades. Mediante el análisis de los datos objetivos recogidos del Observatorio de la UPM, y de los datos de seguimiento académico recabados a los distintos profesores, asignaturas y centros, se realizaron estudios sobre distintos factores asociados al abandono para todas las titulaciones de grado, y también se elaboraron análisis comparativos por titulaciones y por áreas de conocimiento.

Para conocer la percepción de los estudiantes, se desarrollaron dos tipos de análisis mediante la contratación de una empresa especializada:

- Cuantitativo, con realización de encuestas telefónicas (CATI) al colectivo de alumnos en situación de abandono¹. Los alumnos en situación de abandono de titulación en 2010-11 fueron en total 772 (de los 5588 alumnos de nuevo ingreso en la UPM) y se obtuvieron 258 encuestas finales válidas de este colectivo, junto con 153 encuestas válidas realizadas a estudiantes activos que actuaron como grupo de control, y
- Cualitativo, con entrevistas en profundidad a un grupo de doce estudiantes representativos del colectivo de abandono, para analizar detalladamente los factores determinantes en su decisión, así como las circunstancias y consecuencias de la misma.

Además, sobre una muestra no probabilística de carácter voluntario de la población de alumnos matriculados en la UPM en el curso 2011-12 en todas las titulaciones –tanto del “plan antiguo” como del “plan Bolonia”– (41720 estudiantes), se realizó una encuesta sobre el *valor motivacional de las prácticas docentes*, en la que participaron 501 alumnos de ocho escuelas de la UPM. El instrumento aplicado, validado por expertos externos, arrojó resultados muy interesantes cuyo resumen se recoge en una tabla donde figuran aquellas estrategias docentes con valoraciones más altas, tanto en el sentido “motivador” como “desmotivador” para el alumno.

Así mismo, se indagó sobre la opinión de los docentes, seleccionando un grupo de 42 profesores de los que habían presentado un porcentaje bajo de absentismo en las aulas, y se llegó a establecer mediante entrevistas con ellos un *decálogo de buenas prácticas* docentes motivadoras de la permanencia.

Los resultados más relevantes del trabajo realizado pueden encontrarse en [Proyectos Transversales UPM \(Absentismo-Abandono\)](#). Además, se han resumido en el [Libro Digital: Análisis del Absentismo y Abandono en las titulaciones de grado de la UPM y propuestas para la mejora de los índices de permanencia](#), publicado en la Colección Digital Politécnica.

¹ Se considera que un estudiante matriculado en una titulación, en una universidad, en el curso n, “abandona”, cuando no se matricula en la misma titulación en el curso n+1. Entre ellos, un caso particular es el de los alumnos que se matriculan el curso n+1 en otra titulación de la misma universidad. A éstos se les considera “reubicados” dentro de la propia institución.



Figura 2. “Análisis del Absentismo y Abandono en las titulaciones de grado de la UPM y propuestas para la mejora de los índices de permanencia”, libro digital publicado en CDP.

Uno de los “descubrimientos” de las investigaciones realizadas que “sorprendió” mucho a los profesores de matemáticas que participábamos en el proyecto, fue la respuesta dada por los estudiantes que habían iniciado una titulación de grado en la UPM en 2010-11 y la habían abandonado el curso siguiente respecto a cuáles fueron las asignaturas más difíciles a las que se habían enfrentado en ese primer curso universitario... ¿Difícil de adivinar?

Un 45,7% de los 184 alumnos que contestaron esta pregunta del cuestionario respondió en primer lugar la asignatura “matemáticas” (en alguna de sus modalidades de primer curso: cálculo y álgebra principalmente). Bastante por detrás quedaron en cuanto a dificultad las asignaturas de física, dibujo y otras.

Queridos colegas, ¡los matemáticos tenemos muy mala fama entre nuestros estudiantes de ingeniería! Y eso a pesar de los excelentes docentes y las magníficas iniciativas –como las que se presentan en el Aula de Pensamiento Matemático– que tienen la loable intención de acercar a los alumnos a un mundo de razonamiento lógico activo y creativo, despojándolo de ropajes innecesariamente trascendentes que paralizan y bloquean el aprendizaje. Será preciso trabajar aún más en esa línea, para evitar que nos convirtamos en una de las causas de frustración, fracaso y, finalmente, abandono de nuestros estudiantes.

Como continuación de los trabajos del Proyecto Transversal 2011-12, se desarrolla actualmente un nuevo proyecto que coordina la profesora Alfonso García “El índice de permanencia como criterio de calidad, y propuestas para rebajar las tasas de abandono en las titulaciones de grado de la UPM”, en el que se ha propuesto considerar la tasa de permanencia

del primer año como indicador de calidad, y se define un protocolo para la implantación, seguimiento y evaluación de las actuaciones dirigidas a su mejora.



Figura 3. Presentación de la ponencia "Protocolo de calidad para la tasa de permanencia a un año en la UPM", por Ana Casaravilla en III-CLABES. Noviembre 2013.

Así mismo, tras la formulación de un decálogo de buenas prácticas motivadoras de la permanencia en las aulas en el Proyecto Transversal de Absentismo y Abandono 2011-12, se trabaja actualmente en un *instrumento de autoevaluación de la práctica docente* que permite al profesorado, de forma voluntaria y confidencial, conocer su situación respecto de la misma.

Los resultados del cuestionario de autoevaluación se reflejan en un informe personal que promueve la reflexión acerca de la práctica educativa del profesor y le ofrece orientaciones para su mejora. Además, el análisis de los resultados globales (anonimizados) de los registros obtenidos permite realizar una radiografía actualizada de la realidad docente del profesorado de la UPM, frente a la definida como "ideal" a partir del decálogo de buenas prácticas mencionado anteriormente.

Los motivos de abandono de los estudiantes son múltiples, y no es fácil proponer medidas paliativas para algunos tipos de factores influyentes en el mismo, como son los de carácter social, económico o, incluso, familiar y personal. Sin embargo, la institución tiene una alta responsabilidad –y al mismo tiempo capacidad de intervención directa– en algunas otras variables. En nuestros trabajos se han determinado algunas de las acciones que la universidad puede emprender con el objetivo de reducir los índices de abandono:

- ofrecer adecuada información y acompañamiento
- dar apoyo académico mediante tutorías y ayudas específicas
- promover sistemas de evaluación compatibles con el aprendizaje comprensivo
- estimular las actividades innovadoras y las actitudes docentes motivadoras de la permanencia
- facilitar la integración a la vida universitaria con programas de mentoría

- ofrecer horarios que permitan compatibilizar el seguimiento de los estudios con la actividad laboral
- flexibilizar el currículo académico permitiendo la movilidad...

Estas y otras acciones, realizadas de forma coordinada entre los agentes implicados (autoridades académicas, profesores y gestores) pueden lograr que los alumnos que ingresan a una titulación de la UPM no vean frustradas sus expectativas de conseguir su graduación, o de redirigir su elección de carrera, mejorando así los índices de permanencia –con éxito– en la institución, y optimizando los recursos económicos y personales dedicados a la enseñanza universitaria.

Es un gran reto, ante el que ninguno de nosotros puede sentirse ajeno.

Referencias

- [1] ARRIAGA, J. et al. *La acción académica posterior tomada por el estudiante que abandona. Elemento necesario para un "Sistema nacional de registro de Información sobre abandono"*. Actas de la Segunda Conferencia Latinoamericana sobre Abandono en la Educación Superior (II-CLABES), pp. 83-90. Madrid. 2012.
- [2] CASARAVILLA, A. et al. *Un análisis del pre-abandono en estudios de Ingeniería y Arquitectura*. Actas de la Segunda Conferencia Latinoamericana sobre Abandono en la Educación Superior (II-CLABES), pp. 66-72. Madrid. 2012.
- [3] COROMINAS, E. *La transición a los estudios universitarios. Abandono o cambio en el primer año de Universidad*, pp.127-151. Revista de Investigación Educativa, 19,1. Murcia. 2001.
- [4] GARCÍA, A. et al. *Protocolo de calidad para la tasa de permanencia a un año en la Universidad Politécnica de Madrid*. Actas de la Tercera Conferencia Latinoamericana sobre Abandono en la Educación Superior (III-CLABES), pp. 985-995. Madrid. 2013.
- [5] GLENN, P. A. & RYAN, M. P. *Increasing one-year retention rates by focusing on academic competence: an empirical odyssey*. Journal of College Student Retention, v.4, n.3, pp. 297-324. Minnesota. 2003.
- [6] GONZÁLEZ, M. C. et al. *El abandono de los estudios universitarios: factores determinantes y medidas preventivas*. Revista española de pedagogía, 236, pp. 71-86. Madrid. 2007.
- [7] ROHR S. L. *How well does the SAT and GPA predict the retention of science, technology, engineering, mathematics, and business students*. Journal of College Student Retention, v.14, n.2, pp.195-208. Minnesota. 2012.
- [8] VILLAR, A. *Del abandono de los estudios a la reubicación universitaria*. Revista de la Asociación de Sociología de la Educación (RASE), 3(2), pp.267-283. Madrid. 2011.
- [9] VRIES, W. et al. *¿Desertores o decepcionados? Distintas causas para abandonar los estudios universitarios*. Revista de la educación superior. Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior de México (ANUIES), XL(4), n.160, pp.31-49. México. 2011.

- [10] COMISIÓN EUROPEA. ESTRATEGIA EUROPA 2020. 2010. Accesible el 27 de septiembre de 2013 en http://www.mecd.gob.es/inee/publicaciones/indicadores-educativos/Indicadores-Internacionales/UE.html#Objetivos_ET2020_2011
- [11] CONFERENCIA DE RECTORES DE LAS UNIVERSIDADES ESPAÑOLAS (CRUE). *La universidad Española en cifras*. 2010. Accesible el 27 de septiembre de 2013 en <http://www.crue.org/export/sites/Crue/Publicaciones/UEC2010VOLL.pdf>

Sobre la autora:

Nombre: Ana Casaravilla.

Directora adjunta del proyecto GUIA. Catedrática de Bachillerato y Profesora de la ETSEM-UPM (jubilada). Premio de Innovación Educativa UPM 2007 y Mención Especial en los premios UPM de Innovación Educativa 2012.

Correo Electrónico: ana.casaravilla.gil@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas

Los curiosos problemas de mezclas de Alcuino de York

The curious mixing problems by Alcuin of York

Antonio M. Oller Marcén

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 017–032, ISSN 2174-0410

Recepción: 27 Ago'13; Aceptación: 15 Mar'14

1 de abril de 2014

Resumen

En este trabajo se presentan los problemas “de mezclas” contenidos en la colección medieval *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York y se analizan posibles métodos de resolución, puramente aritméticos, que pudo haber seguido el autor del texto original. Pensamos que un análisis de este tipo puede tener interesantes implicaciones didácticas a la hora de afrontar el paso de la Aritmética al Álgebra.

Palabras Clave: Matemática medieval, Algebrización, Mezclas, Aritmética.

Abstract

In this work we present the “mixing” problems contained in the medieval collection *Propositiones ad acuendos juvenes* by Alcuin of York and possible, purely arithmetic, solving methods that could have been used by the author are analyzed. We think that such an analysis can have interesting didactical implications when facing the transition from Arithmetic to Algebra.

Keywords: Medieval mathematics, Algebrization, Mixing, Arithmetic.

1. Introducción

El Álgebra, entendida como el arte de resolver ecuaciones, es posiblemente uno de los mayores avances en la historia de las Matemáticas. Problemas de enunciado complicado y difíciles de manejar se convierten en ecuaciones para algunas de las cuales, además, se posee un procedimiento algorítmico de resolución. Sin embargo el Álgebra también tiene sus peligros si no se usa adecuadamente. Uno de los más importantes es que es muy fácil obviar el significado de las manipulaciones que uno está efectuando. Se olvida a veces que los números que aparecen en el problema no son realmente entes abstractos sino que generalmente simbolizan cantidades de magnitud y al operar con ellos no deberíamos perder

de vista lo que significa cada una de las operaciones y resultados parciales (Livneh y Linchevski, 2007).

En la enseñanza actual, sin embargo, se tiende a introducir el Álgebra muy tempranamente, cuando todavía el manejo aritmético de los alumnos no es el adecuado. Entendemos que la Aritmética va más allá de la mera aplicación de los algoritmos de la suma, resta, multiplicación o división; y que ha de incluir el manejo significativo de las magnitudes y las operaciones con ellas. La proporcionalidad, que sería un buen banco de pruebas en el que poner en juego todos estos conocimientos (Gairín y Escolano, 2009), se convierte a menudo en una aplicación mecánica de la Regla de Tres (Gómez, 2006) con la que es muy fácil caer en la tentación de introducir una incógnita y adelantar la entrada en escena del Álgebra. Esta tentación es tanto mayor cuanto mayor es la complejidad de los problemas considerados. En especial los problemas de repartos proporcionales (Gómez, 1999) y los de mezclas (lo que se conocía antaño como Regla de Aligación) tienden a afrontarse actualmente de un modo puramente algebraico, con la pérdida de significado que ello conlleva.

Pensamos que el uso de textos antiguos en el aula puede ser una buena forma de mejorar los procesos de aprendizaje de las Matemáticas (Richard, Meavilla y Fortuny, 2010) y, en particular, de facilitar el proceso de transición de la Aritmética al Álgebra. En concreto el uso de textos de épocas en las que el Álgebra no era conocida o no estaba aún completamente generalizada (Fernández, 1997). Así, puede ser útil realizar actividades de diversos tipos, por ejemplo:

1. Estudiar cómo se resolvían originalmente ciertos problemas sin ayuda del Álgebra, tratando de comprender los razonamientos detrás de las soluciones.
2. Comparar una solución algebraica con una aritmética del mismo problema, comentando las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas.
3. Tratar de buscar la Aritmética que se esconde detrás de un razonamiento algebraico simbólico.

Evidentemente, para poder realizar este tipo de actividades es necesaria por parte del docente una labor previa de investigación y de análisis de textos que se adecuen al propósito perseguido (Meavilla, 2004). En este trabajo hemos analizado una serie de problemas que consideramos interesantes desde un punto de vista aritmético dentro de la colección medieval de problemas titulada *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York. Hemos elegido una serie de problemas que, bajo una clasificación moderna, podrían clasificarse como “de mezclas” y que admiten un tratamiento muy rico sin necesidad de recurrir al Álgebra.

El artículo se organiza del siguiente modo: En la segunda sección se da un breve apunte biográfico de Alcuino de York, se describen someramente las *Propositiones* y se refieren las fuentes consultadas. En la tercera sección se justifica la elección de los problemas analizados y en la cuarta se presentan las traducciones y se da una clasificación más fina de los mismos. En las secciones sexta, séptima y octava se hace un estudio exhaustivo de cada uno de los grupos de problemas que constituyen la anterior clasificación; se presenta un procedimiento moderno de resolución y también se hace una discusión sobre los procedimientos que pudo haber utilizado Alcuino para resolver esos problemas. Por último se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Alcuino de York y las *Propositiones ad acuendos juvenes*

Aunque no es el objetivo de este trabajo presentar una detallada biografía de Alcuino de York ni analizar detenidamente y al completo la obra indicada, no está de más que dediquemos algunas líneas a dar un breve apunte biográfico y a describir las *Propositiones*.

Alcuino de York nació en la actual Inglaterra en la primera mitad del siglo VIII. Estudió en la escuela benedictina de York, por aquel entonces un importante centro cultural, donde también enseñó y que llegó a dirigir. Hacia el año 782 se trasladó a la Escuela Palatina en Aquisgrán por invitación de Carlomagno; allí pasó dos periodos: de 782 a 790 y de 793 a 796. Tras este último periodo se retiró como abad a la abadía de San Martín en Tours, donde murió.

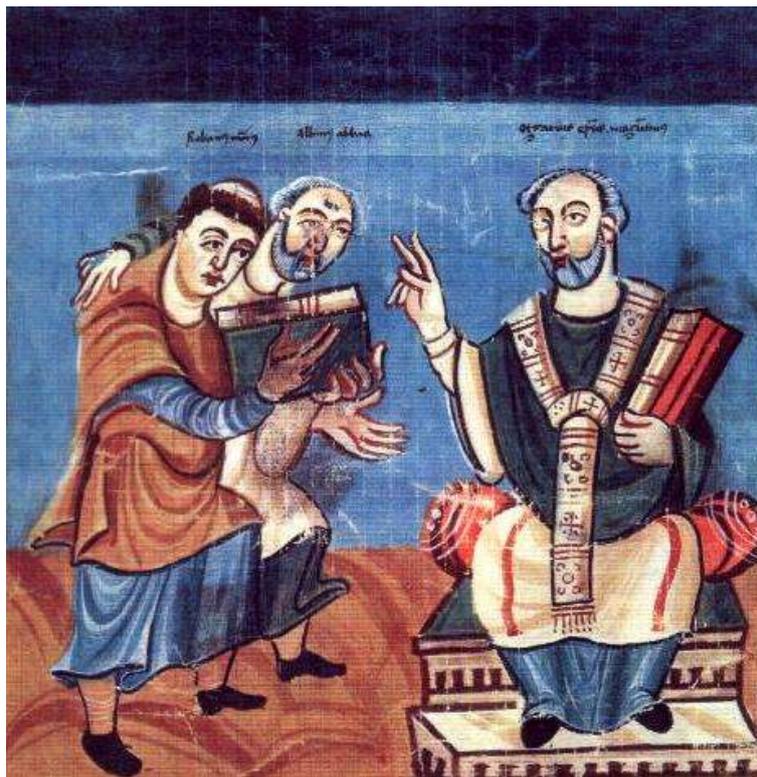


Figura 1. Rabano Mauro apoyado por Alcuino ofrece una obra a Otgar de Maguncia¹

La obra en la que nos vamos a detener se titula en el latín original *Propositiones ad acuendos juvenes* o, lo que es lo mismo, *Problemas para aguzar a los jóvenes*. Se trata de una colección de 53 (o 56, según las fuentes) problemas de diverso carácter: los hay aritméticos, geométricos e incluso aparecen ejemplos de lo que hoy llamaríamos “Matemática recreativa”. El interés de la obra radica en que, en muchos casos, se trata de problemas que aparecen por primera vez en la tradición occidental y que recogen tradiciones orientales (donde los textos recopilatorios de problemas y soluciones tenían una tradición muy anterior) de origen incierto. El texto presenta los enunciados de los problemas junto con sucintas soluciones que, en el caso de

¹ Alcuino de York Carolingian Manuscript manuscriptum Fuldense ca. 831/40, Österreichische Nationalbibliothek Wien.

respuestas numéricas, incluyen tan sólo la respuesta junto con una comprobación de su corrección.

Para estudiar el texto hemos recurrido a dos fuentes que, además, están disponibles en la red. Son las siguientes:

- Contenida en *Beati Flacci Albini seu Alcuini, Abbatis et Caroli Magni Imperatoris Magistri. Opera Omnia: Operum pars octava: Opera Dubia*. Ed. D. Frobenius [Froster], Ratisbona, 1777. Revisada y republicada por J.P. Migne como: *Patrologiae Cursus Completus: Patrologiae Latinae, Tomus 101*, Paris, 1863, columnas 1143-1160.
- Contenida en *Venerabilis Vedae, Anglo-Saxonis Presbyteri. Opera Omnia: Pars prima. Sectio II – dubia et spuria: De Arithmeticitis propositionibus, tomus I*, Joannes Herwagen, Basilea, 1563. Columnas 153-146. Revisada y republicada por J.P. Migne como: *Patrologiae Cursus Completus: Patrologiae Latinae, Tomus 90*, Paris, 1904, columnas 665-676. *Aliae propositiones ad acuendos juvenes* se encuentra en las columnas 667-676.

Como hemos dicho, ambos textos (las reediciones de J.P. Migne) se hayan disponibles en la página web [1]. En el primero de ellos aparecen 53 problemas, en el segundo son 56; los problemas que aparecen en ambos textos tienen enunciados y títulos idénticos

Hasta la fecha la única traducción completa y comentada de esta obra al castellano se encuentra en el Capítulo 1 de (Meavilla, 2011). Las traducciones de los problemas que se presentan más adelante son del propio autor. Se ha tenido en cuenta la traducción inglesa que se encuentra en (Hadley y Singmaster, 1992) que, sin embargo, omite ciertos detalles que no modifican en nada los enunciados de los problemas.

3. Los problemas objeto de estudio

De entre los problemas que forman parte de la obra hemos elegido centrarnos en un tipo muy concreto de problemas que denotaremos como problemas “de mezclas”. Las razones que nos llevan a elegir estos problemas, que ya se han esbozado en la introducción, son las siguientes:

1. El número de problemas de este tipo es bastante elevado. En concreto aparecen ocho problemas de un total de 56 y, además, presentan una regularidad en los enunciados que motiva un análisis detallado.
2. Los problemas de mezclas constituyeron en el pasado una de las principales aplicaciones de las técnicas relacionadas con la proporcionalidad. Con la llegada del Álgebra, sin embargo, el tratamiento dado a estos problemas (cuya resolución puramente aritmética era complicada y a veces incompleta por la falta de unicidad en la solución) se volvió mucho más mecánico. Parece interesante tratar de estudiar las soluciones dadas a estos problemas en un tiempo y un lugar en los que el Álgebra era desconocida.

4. Los problemas “de mezclas” en las *Propositiones ad acuendos juvenes*

De los 56 (o 53, según la fuente consultada) problemas que constituyen la obra de Alcuino, nos vamos a centrar en aquellos que podrían clasificarse como “de mezclas”. En principio puede resultar chocante bautizar de este modo estos problemas; sobre todo después de leer los enunciados; sin embargo, veremos más adelante que este calificativo está plenamente justificado.

En concreto son ocho los problemas de este tipo que se encuentran en las *Propositiones*. Sus enunciados son los siguientes, se ha seguido la numeración de Hadley y Singmaster (1992):

- Problema 5 (*Propositio de emptore denariorum*):

“Dijo un mercader: quiero comprar 100 cerdos por cien denarios; sin embargo pagaría 10 denarios por un macho, 5 por una hembra y uno por dos lechones. Diga, aquel que sepa, ¿cuántos machos, cuántas hembras y cuántos lechones debe haber de forma que no sobre ni falte ninguno?”

- Problema 32 (*Propositio de quodam patrefamilias*):

“Cierta paterfamilias disponía de 20 sirvientes. Ordenó que les fueran repartidos 20 modios de maíz del siguiente modo: que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quién pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños debe haber?”

- Problema 33 (*Propositio de alio patrefamilias erogante suae familiae annonam*):

“Cierta paterfamilias disponía de 30 sirvientes entre los que ordenó repartir 30 modios de maíz. Ordenó que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Resuelva, quién pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños había?”

- Problema 33a (*Alia*):

“Cierta paterfamilias disponía de 90 sirvientes entre los que ordenó repartir 90 modios de maíz. Ordenó que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quien pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños había?”

- Problema 34 (*Propositio altera de patrefamilias partiente familiae suae annonam*):

“Cierta paterfamilias disponía de 100 sirvientes, entre los que pretendió repartir 100 modios de maíz, de manera que los hombres recibieran tres modios, dos las mujeres y los niños medio modio. Diga pues, aquél que vale, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños había?”

- Problema 38 (*Propositio de quodam emptore in animalibus centum*):

“Quiso cierto hombre comprar 100 animales de distintas clases por 100 sueldos, de forma que los caballos se compren por tres sueldos, los bueyes por 1 y 24

ovejas por 1 sueldo. Diga, aquél que vale, ¿cuántos los caballos, cuántos los bueyes y cuántas fueron las ovejas?”

- Problema 39 (*Propositio de quodam emptore in oriente*):

“Cierta hombre quiso comprar en oriente 100 animales de diversas clases por 100 sueldos, para lo que ordenó a un sirviente que por un camello se recibieran 5 sueldos, 1 por un asno y 20 ovejas se compraran por 1 sueldo. Diga, quién quiera, ¿cuántos camellos, asnos y ovejas se obtuvieron a cambio de los 100 sueldos?”

- Problema 47 (*Propositio de episcopo qui jussit XII panes dividi*):

“Cierta obispo ordenó repartir 12 panes entre el clero. Previó así que cada sacerdote recibiera dos panes; un diácono medio y un lector la cuarta parte. Obrando así el número de clérigos y de panes resulta el mismo. Diga, quién quiera, ¿cuántos sacerdotes, diáconos y lectores debe haber?”

Si analizamos con detenimiento los enunciados podemos ver que en todo ellos hay algo a repartir (modios de maíz, panes o dinero) y sobre todo que, una vez hecho el reparto todos los receptores han recibido en promedio lo mismo: una unidad. Si compramos 100 animales por 100 denarios el precio medio es de un denario por animal, si repartimos 12 panes entre 12 personas cada persona recibe un pan por término medio y lo mismo si repartimos 20 modios de maíz entre 20 personas. Así pues, todos estos problemas se reducen a tener que calcular la cantidad correspondiente de cada componente de una mezcla conocidos los precios de cada componente y el precio medio final (que en este caso, para redondear las cosas, es 1).

Que, de hecho, estos problemas pueden atacarse empleando técnicas similares a las utilizadas en los problemas clásicos de mezclas es algo que ya observó Leonardo de Pisa (Fibonacci). En su importante obra *Liber Abaci* podemos encontrar, por ejemplo, el siguiente enunciado que es esencialmente idéntico a los que acabamos de presentar (Sigler, 2002, p. 249):

“Un hombre compra carne de cerdo a tres denarios la libra, de ternera a dos denarios la libra y de cabra a medio denario la libra. ¿Cómo ha de hacer para comprar siete libras de carne por siete denarios en total?”

Lo interesante es que este enunciado se encuentra en la última parte del capítulo undécimo de la obra. Dicha última parte lleva el título de “Métodos para mezclar cosas análogas”. La ubicación del problema bajo este epígrafe demuestra la fina observación de Fibonacci y justifica nuestra clasificación.

Observando detenidamente los enunciados anteriores se observa que algunos de ellos obedecen a una estructura idéntica. Salvo el problema 47, cuyo contexto poco tiene que ver con los demás, podemos formar dos grupos con el resto de problemas, afinando así nuestra clasificación:

1. Problemas de compra de animales:

Estos problemas no sólo comparten el contexto, sino que en todos ellos la cantidad de animales a comprar (y, por tanto, de dinero a gastar) es la misma (100

sueldos o 100 denarios) y se hace variar el precio de cada una de las tres clases de animales. En este grupo se incluyen los problemas 5, 38 y 39.

A partir de estos ejemplos podríamos definir una familia de problemas $C(a,b,c)$ cuyo enunciado sería el siguiente: "Se desean comprar 100 animales de tres clases a un precio total de 100 sueldos. Los animales del primer tipo cuestan a sueldos, los del segundo tipo cuestan b y, por último, c animales del tercer tipo cuestan 1 sueldo. ¿Cuántos animales de cada clase deben comprarse?"

Con esta notación el problema 5 sería $C(10,5,2)$; el problema 38 sería $C(3,1,24)$ y el problema 39 sería $C(5,1,20)$. Este problema y otros similares se conocen como "problema de los cien pájaros"

2. Problemas de reparto de maíz:

Nuevamente el contexto en estos problemas es el mismo pero, de forma simétrica al grupo anterior, en este caso se fija la cantidad de maíz que debe recibir cada tipo de sirviente y se hace variar la cantidad total de maíz a repartir (y, por tanto, el número de sirvientes). En este grupo se incluyen los problemas 32, 33, 33a y 34.

También en este caso vamos a definir una familia de problemas $R(n)$ cuyo enunciado sería: "Se han de repartir n modios de maíz entre n sirvientes de tal forma que los hombres reciben 3 modios, las mujeres 2 y los niños medio. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños ha de haber?"

Los problemas que aparecen en el texto serían, respectivamente, $R(20)$, $R(30)$, $R(90)$ y $R(100)$.

5. Las soluciones de Alcuino a sus problemas

En su obra Alcuino da soluciones a todos los problemas planteados. Sin embargo tan sólo se limita a indicar la solución numérica y a comprobar que, efectivamente, se trata de una solución. Muchos de los problemas planteados poseen varias soluciones aunque Alcuino sólo da una. En (Hadley y Singmaster, op. cit.) se presentan todas las soluciones admisibles de los problemas. A continuación presentamos las que da Alcuino:

- Problema 5: 1 macho, 9 hembras y 90 lechones.
- Problema 32: 1 hombre, 5 mujeres y 14 niños.
- Problema 33: 3 hombres, 5 mujeres y 22 niños.
- Problema 33a: 6 hombres, 20 mujeres y 64 niños.
- Problema 34: 11 hombres, 15 mujeres y 74 niños.
- Problema 38: 23 caballos, 29 bueyes y 48 ovejas.
- Problema 39: 19 camellos, 1 asno y 80 ovejas.
- Problema 47: 5 sacerdotes, 1 diacono y 6 lectores.

Además de dar estos valores, como ya hemos dicho, Alcuino efectúa los cálculos oportunos para comprobar que se trata efectivamente de soluciones del problema propuesto.

Sin embargo no hay ningún tipo de indicación o pista sobre cómo ha obtenido dicha solución. Puesto que, dada la época en la que fue escrita la obra, es poco probable que Alcuino estuviera familiarizado con técnicas algebraicas hemos de suponer que – de existir – el método utilizado hubo de ser puramente aritmético (cuando no de mero ensayo y error). En las secciones que siguen vamos a tratar de presentar, aunque sea de modo hipotético, algunas posibles formas de pensar que pudo haber seguido Alcuino a la hora de resolver los problemas y que justificarán por qué las respuestas dadas son las que son y no otras de entre las posibles. Los problemas se analizarán por bloques, teniendo en cuenta la clasificación anterior. Tan sólo el Problema 47 recibirá, dado su carácter único, un tratamiento individualizado.

6. El problema 47

Recordemos el enunciado del problema: “Cierta obispo ordenó repartir 12 panes entre el clero. Previó así que cada sacerdote recibiera dos panes; un diácono medio y un lector la cuarta parte. Obrando así el número de clérigos y de panes resulta el mismo. Diga, quién quiera, ¿cuántos sacerdotes, diáconos y lectores debe haber?”. La solución de Alcuino: 5 sacerdotes, 1 diácono y 6 lectores.

6.1 Enfoque moderno

Actualmente resolveríamos este problema mediante el planteamiento del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 12 \end{cases}$$

Donde x sería el número de sacerdotes, y el de diáconos y z el de lectores. Manipulando adecuadamente las ecuaciones se reduce el sistema dado al siguiente:

$$\begin{cases} 7x + y = 36 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

Evidentemente, este sistema tiene infinitas soluciones que vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 36 - 7\lambda \\ z = -24 + 6\lambda \end{cases}$$

Ahora bien, no hay que olvidar que, por las condiciones del problema, x , y y z han de ser enteros no negativos por lo que λ ha de ser un entero no negativo que cumpla $4 \leq \lambda \leq 36/7$. Es decir, $\lambda = 4$ ó 5 . Así pues, las posibles soluciones son las ternas $(4,8,0)$ y $(5,1,6)$. La primera, fácil de encontrar por tanteo, posiblemente no fuera aceptable por parte del autor ya que implica que no hay lectores, lo que en cierto modo contraviene las condiciones del problema.

6.2 ¿Cómo pudo haberlo hecho Alcuino?

Observamos en primer lugar que lo que queremos hacer es repartir 12 panes entre 12 personas de tal forma que cada uno reciba en promedio un pan. Como cada sacerdote recibe 2 panes, cada vez que “cogemos” un sacerdote la media empeora en una unidad. Por su parte,

cada diácono mejora la media en media unidad (pues recibe medio pan cada uno) y, por último, al recibir un cuarto de pan, cada lector mejora la media en tres cuartos.

Ahora, para que la media sea de un pan por persona, las desviaciones de la media que acabamos de señalar deben compensarse; es decir, el número de sacerdotes debe ser igual a la mitad de los diáconos más las tres cuartas partes de los lectores. Como el número de sacerdotes es entero positivo se sigue que la mitad de los diáconos más las tres cuartas partes de los lectores tiene que ser entero positivo. Esto último sólo puede pasar si el doble de los diáconos más el triple de los lectores es múltiplo de 4.

Además, el número de diáconos y el de lectores tienen que cumplir lo siguiente:

1. Cada uno de ellos es mayor o igual que 1 y menor o igual que 10.
2. La suma de ambos es menor o igual que 11.

De esto se deduce que el múltiplo de 4 buscado es mayor que 5 y menor o igual que 32; es decir, uno de entre la lista: 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32. Para cada uno de estos valores tenemos las siguientes posibilidades (teniendo en cuenta las dos indicaciones anteriores):

- Para el 8: 1 diácono y 2 lectores.
- Para el 12: 3 diáconos y 2 lectores.
- Para el 16: 2 diáconos y 4 lectores ó 5 diáconos y 2 lectores.
- Para el 20: 1 diácono y 6 lectores ó 4 diáconos y 4 lectores ó 7 diáconos y 2 lectores.
- Para el 24: 9 diáconos y 2 lectores ó 6 diáconos y 4 lectores ó 3 diáconos y 6 lectores.
- Para el 28: 5 diáconos y 6 lectores ó 2 diáconos y 8 lectores.
- Para el 32: 1 diácono y 10 lectores.

Para terminar, basta obtener el número de sacerdotes correspondiente a cada caso y comprobar si se cumplen las condiciones del problema. Razonando de este modo se comprueba que, de la lista obtenida, la única solución posible es 1 diácono, 6 lectores y 5 sacerdotes; que es precisamente la dada por Alcuino en su obra.

7. Los problemas de reparto de maíz $R(n)$

Recordemos el enunciado general de estos problemas: "Se han de repartir n modios de maíz entre n sirvientes de tal forma que los hombres reciben 3 modios, las mujeres 2 y los niños medio. ¿Cuántos hombres mujeres y niños ha de haber?" En el texto de Alcuino aparecen $R(20)$, $R(30)$, $R(90)$ y $R(100)$ y las soluciones dadas son, respectivamente: 1 hombre, 5 mujeres y 14 niños; 3 hombres, 5 mujeres y 22 niños; 6 hombres, 20 mujeres y 64 niños y 11 hombres, 15 mujeres y 74 niños.

7.1 Enfoque moderno

El problema $R(n)$ puede traducirse en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = n \\ 3x + 2y + \frac{z}{2} = n \end{cases}$$

Donde x representa el número de hombres, y el de mujeres y z el de niños. Manipulando el sistema dado se puede obtener el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = n \\ 5x + 3y = n \end{cases}$$

Al igual que sucedía más arriba el sistema obtenido tiene infinitas soluciones que vienen dadas, por ejemplo, por:

$$\begin{cases} x = \frac{n}{5} - 3\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = \frac{4n}{5} - 2\lambda \end{cases}$$

La forma de presentar estas soluciones (hay arbitrariedad a la hora de elegir el parámetro) está motivada por el hecho de que, en los casos considerados por Alcuino, n es un múltiplo de 5 y así para que las soluciones dadas sean enteras es suficiente con que lo sea λ . Además, para que las soluciones sean no negativas habrá que exigir que $0 < \lambda \leq \frac{n}{15}$. Así, se tienen las siguientes soluciones para los casos estudiados por Alcuino:

- $R(20)$: Tiene que ser $\lambda = 1$ y la solución única es la dada en el texto original.
- $R(30)$: Tiene que ser $\lambda = 1$ ó 2 , la solución dada es la correspondiente a $\lambda = 1$ puesto que en el otro caso se obtiene $x=0$ que posiblemente a ojos de Alcuino incumpliera las condiciones del problema.
- $R(90)$: En este caso $\lambda = 1, \dots, 6$. Si $\lambda = 6$ se obtiene $x=0$ que no es aceptable, pero en los otros casos las soluciones son totalmente admisibles. La presentada por Alcuino es la correspondiente a $\lambda = 4$.
- $R(100)$: En este caso de nuevo $\lambda = 1, \dots, 6$ y todas las posibilidades son admisibles. Sin embargo Alcuino solo presenta el caso $\lambda = 3$.

7.2 ¿Cómo pudo haberlo hecho Alcuino?

En primer lugar hay que observar que conocida una solución para un cierto problema $R(n)$ es fácil construir soluciones para otros $R(m)$. Por ejemplo es muy fácil observar que si (x,y,z) es una solución de $R(n)$, entonces (kx,ky,kz) es solución de $R(kn)$. Esta afirmación no requiere de demostración puesto que se sigue de forma casi directa de las condiciones del problema. Pese a todo, Alcuino no parece haber observado este hecho puesto que la solución que ofrece para $R(90)$ no es el triple de la que ofrece para $R(30)$ ni la de $R(100)$ es cinco veces la de $R(20)$.

Otra relación que salta a la vista entre los problemas que propone Alcuino es que hay dos parejas de problemas cuyo parámetro difiere en lo mismo: 10 unidades. En este sentido, si somos capaces de construir una solución de $R(n+k)$ a partir de una solución de $R(n)$ de un modo concreto podremos construir del mismo modo una solución de $R(m+k)$ a partir de una de $R(m)$. La propiedad en cuestión es la siguiente: Si (x,y,z) es solución de $R(n)$ y $(x+a,y+b,z+c)$

es solución de $R(n+k)$, entonces conociendo una solución (x',y',z') de $R(m)$ se tiene que $(x'+a,y'+b,z'+c)$ será solución de $R(m+k)$. Además se debe cumplir que $a + b + c = k = 3a + 2b + \frac{c}{2}$.

Resumamos las soluciones dadas por Alcuino a los problemas de reparto de maíz que plantea en su obra (como antes x es el número de hombres, y el de mujeres y z el de niños):

Tabla 1. Soluciones de Alcuino a los problemas de reparto de maíz.

	R(20)	R(30)	R(90)	R(100)
x	1	3	6	11
y	5	5	20	15
z	14	22	64	74

Vamos a tratar de imaginar un hipotético itinerario de resolución de cada uno de los problemas por parte de Alcuino. Partimos de la hipótesis de que la idea de que se pueden fabricar unas soluciones a partir de otras no debía serle desconocida. Proponemos lo siguiente:

1. Resuelve $R(20)$ por un método similar al presentado más arriba para el Problema 47. Esto resulta razonable porque, además, la solución a este problema es única.
2. Se busca una solución de $R(30)$ pero no rehaciendo el problema, sino buscando una solución a partir de la anterior de manera aditiva. Lo más fácil en este caso es no sumar nada a una de las cantidades (a la y , por ejemplo; es decir, $b=0$ con la notación anterior) y entonces las condiciones del problema dan una relación entre las otras cantidades. En nuestro caso se deduce que ha de ser $4a=c$ y por tanteo se puede llegar a que $a=2$ y $c=8$ (si damos valores sucesivos a a es el primer caso que sirve) y obtener la solución de Alcuino.
3. Se obtiene la solución de $R(90)$ triplicando la de $R(30)$, obteniendo $(x,y,z)=(9,15,66)$. Esta solución no es la dada por Alcuino.
4. Se obtiene la solución de $R(100)$ aplicando a la solución de $R(90)$ la misma transformación que aplicamos a la solución de $R(20)$ para obtener la de $R(30)$; es decir, sumar 2 unidades a la x , nada a la y y 8 a la z . Se obtiene la solución dada por Alcuino.

En todo el relato anterior lo único que no encaja con las soluciones dadas por Alcuino es la de $R(90)$. Sin embargo estamos convencidos de que es poco probable que a la hora de resolver los problemas la idea de Alcuino fuera resolver uno tras otro repitiendo algún método similar al del Problema 47; sobre todo teniendo en cuenta que los cuatro problemas aparecen sucesivamente en el texto. Más aún, el Problema 33a, que es el que corresponde a $R(90)$ no aparece en algunas ediciones del texto por lo que no sería descabellado pensar que en un proceso de copia o transcripción se perdiera la solución o se sustituyera la original por otra. En cualquier caso, todo esto queda en el terreno de la especulación.

8. Los problemas de compra de animales (o de los cien pájaros) $C(a,b,c)$

El enunciado general de estos problemas es el siguiente: “Se desean comprar 100 animales de tres clases a un precio total de 100 sueldos. Los animales del primer tipo cuestan a sueldos, los del segundo tipo cuestan b y, por último, c animales del tercer tipo cuestan 1 sueldo. ¿Cuántos animales de cada clase deben comprarse?”. En el texto de Alcuino se resuelven los problemas $C(10,5,2)$; $C(3,1,24)$ y $C(5,1,20)$ y las soluciones presentadas son, respectivamente: 1 macho, 9 hembras y 90 lechones; 23 caballos, 29 bueyes y 48 ovejas y 19 camellos, 1 asno y 80 ovejas.

8.1 Enfoque moderno

Como venimos haciendo hasta ahora, el problema puede traducirse en un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ ax + by + \frac{z}{c} = 100 \end{cases}$$

Donde x es el número de animales del primer tipo (que cuestan a sueldos cada uno), y la cantidad de animales del segundo tipo (cuyo precio unitario es de b sueldos) y z es la cantidad de animales del tercer tipo (que cuesta 1 sueldo cada grupo de c de ellos). Podemos transformar el sistema en otro equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ c(a-1)x + c(b-1)y - (c-1)z = 0 \end{cases}$$

Que, de nuevo, posee infinitas soluciones dadas por (si $ac \neq 1$):

$$\begin{cases} x = \frac{100(c-1) - (bc-1)\lambda}{ac-1} \\ y = \lambda \\ z = \frac{100c(a-1) + c(b-a)\lambda}{ac-1} \end{cases}$$

Discutir el carácter entero y no negativo de las soluciones es en este caso bastante más complicado que en los ejercicios anteriores – y lo omitiremos – debido al mayor número de parámetros. Sin embargo es interesante indicar que cuando $b=1$, como sucede en los Problemas 38 y 39 (que además son consecutivos en el texto), la discusión es algo más sencilla.

Las soluciones dadas por Alcuino se obtienen para $\lambda = 9, 48$ y 1 respectivamente. La unicidad de las soluciones aparece discutida en (Hadley y Singmaster, 1992).

8.2 ¿Cómo pudo haberlo hecho Alcuino?

A la hora de intentar indagar el proceso que pudo haber seguido Alcuino para dar sus soluciones a estos problemas, hemos de tratar por separado el problema $C(10,5,2)$ de los otros. En los otros dos casos, $C(3,1,24)$ y $C(5,1,20)$ se tiene que el precio de los animales del segundo tipo coincide con el precio medio que se quiere pagar. Esto hace que el problema admita un análisis mucho más sencillo.

Para justificar la afirmación anterior vamos a analizar en detalle el problema $C(5,1,20)$. Como el precio medio que se quiere obtener es de 1 sueldo, cada vez que compramos un animal del primer tipo empeoramos ese precio en 4 sueldos y cada vez que compramos un animal del tercer tipo lo mejoramos en diecinueve veinteavos de sueldo. Como el precio de los animales del segundo tipo es justamente el precio medio que se busca, el número de animales de este tipo que compremos no influye en absoluto en el precio medio. Como en el Problema 47, la pérdida que se produce al comprar animales del primer tipo se debe compensar con la ganancia al comprar animales del tercero; es decir, cada animal del primer tipo debe compensarse con $\frac{80}{19}$ del tercer tipo. Para que los valores obtenidos sean enteros es obvio que habremos de tomar 19 animales del primer tipo (camellos en este caso) que se compensarán con 80 del tercero (ovejas en este caso). El resto de animales hasta llegar a 100 habrán de ser asnos.

El problema $C(3,1,24)$ admite un análisis similar, sólo que en este caso cada animal del primer tipo debe compensarse con $\frac{48}{23}$ del tercero y de ahí se sigue el resultado. De hecho, el problema $C(a,1,c)$ admite en general la solución $(x, y, z) = (c - 1, 101 - ac, c(a - 1))$ que se obtiene razonando de forma idéntica a la anterior y que, en general, no será única.

En el caso del problema $C(10,5,2)$ el análisis es más complejo puesto que no podemos despreocuparnos de ninguno de los tipos de animales. Lo que podemos hacer es estudiar separadamente la relación entre cada uno de los dos primeros tipos de animales (los que tienen un precio superior a la media) y los animales del tercer tipo (que tienen un precio inferior a la media). Haciendo esto se obtiene que por cada macho debe haber 18 lechones y que por cada hembra ha de haber 8 lechones. Como en total ha de haber 100 animales se sigue que, a lo sumo, hay 9 hembras (si hubiera 10, habría 80 lechones y si hubiera al menos 1 macho con los 18 lechones que conlleva excederíamos los 100 animales). Así pues, procediendo por tanteo, la primera opción es comprar 9 hembras, que se han de compensar con 72 lechones; quedan por comprar 19 animales que, casualmente (si es que existen las casualidades), se pueden completar con 1 macho y los 18 lechones que conlleva. Así pues podemos afirmar que la solución dada por Alcuino es la primera que se obtiene por tanteo después de un sencillo análisis inicial.

9. Conclusiones

Hemos presentado un análisis pormenorizado de los problemas “de mezclas” que aparecen en las *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York. Además de resolverlos mediante técnicas algebraicas modernas, hemos llevado a cabo una discusión sobre los procedimientos que pudo haber seguido el autor a la hora de presentar sus soluciones, aunque se ha de tener en cuenta que las ideas presentadas no pueden ser más que meras hipótesis dado que Alcuino tan sólo indica las soluciones numéricas a sus problemas sin dar la más mínima pista sobre cómo llegó hasta ellas.

Pensamos que un análisis de estos hipotéticos procesos de resolución, además de por su interés puramente histórico, puede ser beneficioso, entre otras, por las siguientes razones:

1. Entender los procesos puramente aritméticos de resolución de estos problemas obliga a tener una mayor y más profunda comprensión de la situación problemática a la que se enfrenta. Por ejemplo:

- ¿Qué tipo de valor es admisible como solución?
- ¿Qué restricciones impone el enunciado del problema?
- ¿De qué forma están relacionadas las magnitudes involucradas?
- ¿Qué relación hay entre las soluciones de dos problemas de similar estructura?

2. Un análisis detenido de los pasos seguidos al resolver aritméticamente el problema puede ayudar a entender y justificar la modelización algebraica del problema así como las manipulaciones necesarias para resolverlo.

3. Los posibles errores o vacíos en los razonamientos aritméticos pueden ayudar a explicar el porqué de algunos de los errores que cometen los alumnos.

Referencias

- [1] COOPERATORUM VERITATIS SOCIETAS. *Documenta Catholica Omnia*, <http://www.documentacatholicaomnia.eu>
- [2] FERNÁNDEZ, F. (1997) *Aspectos históricos del paso de la aritmética al Álgebra*, Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, N° 14, pp. 75-98.
- [3] GAIRÍN, J.M. Y ESCOLANO, R. (2009). *Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional*. Revista SUMA, N° 62, pp. 35-48.
- [4] GÓMEZ, B. (1999). *Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de "compañías"*, RELIME, N° 2(3), pp. 19-29.
- [5] GÓMEZ, B. (2006). *Los ritos en la enseñanza de la regla de tres*. En José Mariano Vallejo, *el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*, pp. 49-69. Publicaciones Universidad de Córdoba.
- [6] HADLEY, J. Y SINGMASTER, D. (1992). *Problems to sharpen the young. An annotated translation of 'Propositiones ad acuendos juvenes' the oldest mathematical problem collection in Latin attributed to Alcuin of York*, Math. Gaz. N° 76, pp. 102-126.
- [7] LIVNEH, D. Y LINCHEVSKI, L. (2007). *Algebrification of Arithmetic: Developing algebraic structure sense in the context of Arithmetic*. En *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 217-224. Melbourne.
- [8] MEAVILLA, V. (2004). *Resolución no algebraica de problemas de móviles: un enfoque histórico*. Sigma: revista de matemáticas, N° 24, pp. 113-118.
- [9] MEAVILLA, V. (2011). *El lobo, la cabra y la col: Antología de problemas matemáticos recreativos*. Editorial Almuzara, Córdoba.

- [10] RICHARD, P.R; MEAVILLA, V. Y FORTUNY, J.M. (2010). *Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría*. Enseñanza de las Ciencias, N^o 28(1), pp. 95-112.
- [11] SIGLER, L.E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer Verlag, New York.

Sobre el autor:

Nombre: Antonio M. Oller Marcén

Correo Electrónico: oller@unizar.es

Institución: Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España.

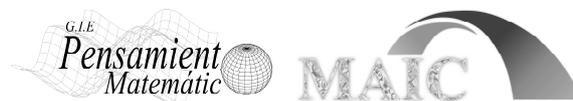
Historias de Matemáticas

Aritmética de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros

Arithmetic of the values of the Riemann's zeta function in integer arguments

Anier Soria Lorente

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 033–044, ISSN 2174-0410
Recepción: 25 Mar'13; Aceptación: 20 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

Hoy en día, el carácter aritmético de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros y en particular en impares, continúa siendo un problema abierto dentro de la comunidad matemática. Este artículo, se dedica a presentar los principales resultados alcanzados por varios matemáticos desde el siglo XVII hasta la actualidad, correspondientes al carácter aritmético que siguen los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros.

Palabras Clave: Apéry, Euler, función zeta de Riemann.

Abstract

At present, arithmetical character of the values of the Riemann's zeta function in integer arguments and in particular in odd arguments, keep being an open problem into the mathematical community. This paper, dedicates to show the principal results obtained for several mathematicians from the century XVII until the present time.

Keywords: Apéry, Euler, Riemann's zeta function.

1. Introducción

El problema de calcular la suma de la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad (1)$$

para $s \geq 2$ entero, había atraído la atención de varios matemáticos desde el siglo XVII, en particular para $s = 2$. Por lo que a principios del siglo XVIII las series infinitas pasan a ser

uno de los temas estrellas dentro del universo matemático de la época. El estudio de que si convergían hacia un número o si se hacían cada vez más grandes sería uno de los retos de cualquier matemático de aquel entonces. En el siglo XVIII se interesaron en este problema varios matemáticos como Jacob Bernoulli, Daniel Bernoulli y Christian Goldbach, quienes obtuvieron algunos resultados preliminares sobre la suma de esta serie en el caso $s = 2$, los cuales pronto serían superados por Leonhard Euler que, en este marco conceptual, hizo su primer contacto con dicha serie en el caso $s = 2$ y pronto mejoraría los cálculos de sus predecesores. El problema de calcular la suma de la serie en el caso $s = 2$ no era fácil debido a su lenta convergencia, por ejemplo, para calcular el número al que converge, con una precisión de seis decimales, hay que sumar al menos un millón de términos de la serie. En efecto, como

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

sumando desde $k = n + 1$, por la propiedad telescópica de los extremos de la desigualdad anterior, se tiene que

$$\frac{1}{n+1} < \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n},$$

de tal forma que aproximar la serie con n lugares decimales requiere calcular la suma de al menos 10^n términos.

Se conoce que, Leibniz a propuesta de su mentor Huygens, calculó la suma de los recíprocos de los números triangulares. Descubrir que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

satisfizo tanto al joven Leibniz que impulsó su afición por las matemáticas, que luego le llevaría a co-descubrir el Análisis Matemático. Si la suma de los inversos de los números triangulares constituyó un problema fácil para Leibniz, no ocurrió lo mismo con la suma de los inversos de los números cuadrados $\zeta(2)$. El problema le fue planteado a Leibniz por Oldenburg, secretario de la Royal Society en 1673, aunque ya había sido abordado veinte años antes por Pietro Mengoli y por el mismo Walis (que dió el valor de 1,645 como aproximación de la suma de la serie). Leibniz comunicó a sus corresponsales Jacob y Johann Bernoulli el problema, y les dijo que en apariencia debía tener una solución tan simple como la de los números triangulares inversos. Y así lo pensaron Jacob y Johann Bernoulli, pero pronto se dieron cuenta de que algo no marchaba bien. No fue difícil demostrar por comparación que su suma estaba acotada superiormente por la suma de la serie de los inversos de los números triangulares

$$\frac{1}{n^2} < \frac{2}{n(n+1)}, \quad n > 1.$$

Pero el resultado preciso de la suma se les negaba, hasta tal punto que lanzaron públicamente este grito de socorro, "Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos". Desde entonces al problema se le conoce como Problema de Basilea y fue Johann Bernoulli, hermano menor de Jacob y en ese entonces mentor de Euler, quien seguramente le sugirió a este último investigar la evaluación de esa suma.

En 1729 Euler recibió una carta de su amigo Christian Goldbach donde le señala un método de aproximación que lo lleva a estimar el valor entre 1,64 y 1,66. Goldbach reta a Euler para que lo mejore. En el momento de recibir este desafío, Euler, que contaba sólo con 22 años de edad, se encontraba en la Academia de San Petersburgo enfrascado en varios problemas concretos de mecánica. Sin embargo, no se olvidó del reto y dos años más tarde, hizo pública una asombrosa aproximación de seis cifras decimales exactas, 1,643934, transformando habilidosamente la

serie en otra de convergencia mucho más rápida

$$\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 2^{n-1}} + \ln^2 2.$$

Varios años más tarde, un día que leía con interés una de las obras de Newton, la genialidad de Euler se desbordó al encontrar la idea de que el desarrollo en serie de la función seno estaba relacionado con la solución exacta del problema. Lo ingenioso sería utilizar el desarrollo del seno no solo como sumas sino también como producto de infinitos factores. Newton, precisamente en esta obra, utilizaba con mucha eficacia la relación entre los coeficientes de las potencias y las raíces de los polinomios. Esto mismo intentó Euler con la serie de los inversos de los cuadrados. Basándose en el desarrollo en series de potencias del seno

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Euler introduce la función

$$P(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Luego, utilizando el hecho de que los ceros de la función $P(z)$ se producen para los valores en que el numerador se anula (con excepción de $z = 0$, donde $P(0) = 1$, es decir, para todo $z = \pi n$, donde $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Entonces factoriza como si $P(z)$ fuese un polinomio

$$P(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) = 1 - \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}\right) z^2 + \dots = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots$$

De esta manera, comparando los términos de segundo grado, le lleva a Euler a obtener el maravilloso resultado $\zeta(2) = \pi^2/6$. Así le comunicaba Euler su extraordinario hallazgo a Daniel Bernoulli, el hijo de Johann, en una carta fechada en 1735, dando solución así al llamado Problema de Basilea [26], que sin lugar a dudas le abrió las puertas para ingresar a la élite matemática de su época. La deducción de Euler es una joya de las Matemáticas, la misma expresa muy bien el estilo de esa época prodigiosa. Cuando Euler hizo este cálculo hacía veintinueve años que Jacob había fallecido. Johann Bernoulli, reconciliado ya con la figura de su hermano mayor, comentó a Euler: "De este modo el deseo más ferviente de mi hermano se ha cumplido ... ¡Si estuviera aquí!".

Entre 1740 y 1744, utilizando las mismas herramientas Euler encontró la suma de las series de los inversos de las potencias pares de los números naturales hasta el orden 26

$$\zeta(26) = \frac{1315862}{11094481976030578125} \pi^{26}.$$

Todos estos triunfos, estimularon formidablemente a Euler para continuar extendiendo estos resultados. El espíritu inquieto y perspicaz de Euler no podía sentirse satisfecho con lo encontrado hasta el momento. Además, aún faltaban las sumas en el caso de n impar. De modo que en 1750 publica otro artículo donde señala los valores aproximados de las series armónicas de orden impar $n = 2k + 1$, para $k = 1, \dots, 7$. Y en su famoso Tratado de Cálculo Diferencial de 1755, al fin consigue exponer la elegante fórmula [14]

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde los B_{2k} son los llamados números de Bernoulli [1, 16]. En particular, $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $\zeta(2k)$ es irracional para cada $k \in \mathbb{N}$. De este modo, Euler dio un paso

muy importante en las matemáticas, pues generalizó un problema que se había resistido mucho tiempo, haciéndose muy famoso por el camino. Pero Euler no se quedó aquí, entusiasmado expuso la siguiente conjetura sobre el caso impar

$$¿ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k+1}} = \frac{p}{q} \pi^{2k+1} ?$$

donde p y q son números enteros. Los esfuerzos de Euler para probar la validez de esta conjetura fueron vanos. No obstante, puede servirle de consuelo que aún hoy, a más 255 años después, no se ha conseguido ni validar ni refutar su conjetura, la misma sigue siendo todo un misterio.

2. El resultado de Roger Apéry y sus consecuencias

Actualmente la serie (1) es conocida bajo el nombre de función zeta de Riemann [17, 18, 25, 46], quien la extendió al campo complejo, mostrando, y previendo, muchas de sus interesantes propiedades. Desafortunadamente Euler no obtuvo nada acerca de los casos impares, todos sus intentos por evaluar la función zeta de Riemann en argumentos impares $\zeta(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, fueron fallidos. Hasta la fecha, el carácter aritmético de estos números, exceptuando $\zeta(3)$; es decir, si son racionales o irracionales, sigue siendo un problema abierto dentro de la comunidad matemática.

Después de los estudios iniciados por Euler, nada se supo sobre la naturaleza aritmética de $\zeta(2k+1)$ para $k \in \mathbb{N}$, hasta que Roger Apéry, en el año 1979, sorprendió a la comunidad matemática con una demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$ [2]. De ahí el conocido teorema de Apéry, $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$. Él sólo brindó una breve descripción de su impresionante demostración, cuyos resultados se pueden encontrar de forma detallada en [2, 15, 47, 65]. Como reconocimiento a este resultado, la constante $\zeta(3)$, se denomina actualmente, constante de Apéry.

El método de obtención de los aproximantes, aunque ingenioso, no hacía, sin embargo, uso alguno de resultados que no hubieran sido conocidos por los matemáticos del siglo XVIII. ¡Una demostración que se le había escapado al gran Euler! Una excelente exposición puede encontrarse en Vander Poorten [65], quien dio una conferencia sobre la demostración de Apéry en el congreso internacional celebrado ese mismo año en Helsinki.

A partir de la demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$ dada por Apéry, se organizaron múltiples seminarios en los que se pretendía entender dicha demostración, con la finalidad de responder a las interrogantes acerca de las propiedades aritméticas de la función zeta de Riemann en enteros impares, lo cual tuvo lugar en el Institute for Advanced Study, dirigido por E. Bombieri. No obstante, hasta la fecha no se sabe siquiera si $\zeta(5)$ es irracional o no; algunos de los pocos resultados relacionados con dicho número se pueden encontrar en [51, 53, 61, 67, 68, 70]. Sin embargo, el resultado de Apéry inspiró a varios autores [8, 10, 12, 36, 43, 44, 58, 59, 71] a construir diferentes métodos para explicar la irracionalidad de $\zeta(3)$. Sorprendentemente, estos métodos conducen a la misma sucesión de aproximantes racionales de la clase de Apéry. En [8] se muestra que todos estos métodos coinciden, teniendo como origen común, un problema de aproximación simultánea. A este hecho se le denomina "fenómeno de Apéry".

Uno de ellos, se basa en una integral doble que involucra los polinomios de Legendre, la cual fue considerada por Beukers [8, 10, 11, 37]

$$\begin{aligned} r_n &= q_n \zeta(3) - p_n = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz(1-x)(1-y)(1-z))^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz, \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2, \quad y \quad p_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \gamma_{n,k}, \tag{3}$$

$$\gamma_{n,k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^3} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3} \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n}{j}^{-1},$$

son los aproximantes racionales de Apéry, y

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n (1-z)^n = \sum_{k=0}^n l_k^{(n)} z^k, \quad l_k^{(n)} = (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{n}{k},$$

denotan los polinomios de Legendre, ortogonales con respecto a la medida de Lebesgue en $(0, 1)$. Por otra parte, Beukers demostró de una manera sencilla que $r_n = \mathcal{O}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}\right)$, lo cual le permitió dar una nueva demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$. Es de vital importancia destacar, que para ciertas modificaciones de la integral de Beukers (2), se ha mejorado la medida de irracionalidad [30, 48] dada por Apéry [2, 65, 66].

De una manera similar a [23], Beukers [12] consideró un problema de aproximación racional en un intento por formular de un modo más natural la demostración de Apéry. Para ello introdujo la función racional

$$R_n(z) = \frac{(n-z+1)_n^2}{(-z)_{n+1}^2}, \tag{4}$$

donde $(t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$ denota el símbolo de Pochhammer [24], a partir del cual mediante el cálculo de su desarrollo en fracciones simples, dedujo de forma directa los aproximantes racionales de Apéry (3).

Sorokin en [58, 63], obtuvo los aproximantes racionales de Apéry (3) del mismo modo que Beukers, considerando el problema de aproximación racional

$$A_n(z) f_1(z) + B_n(z) f_2(z) - C_n(z) = \mathcal{O}\left(z^{-n-1}\right),$$

$$A_n(z) f_2(z) + 2B_n(z) f_3(z) - D_n(z) = \mathcal{O}\left(z^{-n-1}\right),$$

donde $A_n(z)$ y $B_n(z)$ son polinomios de grado exactamente n y

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = -\int_0^1 \frac{\log x}{z-x} dx, \quad f_3(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log^2 x}{z-x} dx.$$

De este modo, demostró que la solución de este problema viene dada por las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^1 (A_n(x) - B_n(x) \log x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

$$\int_0^1 ((A_n(x) - B_n(x) \log x) \log x) x^k dx = 0,$$

junto con la condición $A_n(1) = 0$. Luego, usando la convolución de Mellin [62, 63, 64] como un ingrediente crucial, consiguió lo siguiente

$$r_n = \int_0^1 \frac{(A_n(x) - B_n(x) \log x) \log x}{1-x} dx$$

$$= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y) dx dy,$$

lo cual implica la irracionalidad de $\zeta(3)$ de acuerdo con la estimación de Beukers dada en (2), véase [10].

Otra de las principales aportaciones que han sido desarrolladas para explicar la irracionalidad de $\zeta(3)$, fue propuesta por Nesterenko, quien en 1996 inspirado en la obra de Gutnik [23] consideró la siguiente modificación de la función racional (4) de Beukers

$$R_n(z) = \frac{(1-z)_n^2}{(z)_{n+1}^2}, \quad (5)$$

y de esta manera demostró que la sucesión residuo dada en (2) se podía escribir de la siguiente forma

$$r_n = - \sum_{k \geq 1} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{(1-k)_n^2}{(k)_{n+1}^2} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(1-v)_n^2}{(v)_{n+1}^2} \left(\frac{\pi}{\sin \pi v} \right)^2 dv,$$

donde L es la línea vertical $\operatorname{Re} z = C$, $0 < C < n+1$, orientada de arriba hacia abajo. De hecho, él aplicó a esta integral, el conocido método de Laplace [34, 35], lo cual le permitió llegar al mismo comportamiento de la sucesión residuo (2) encontrado por Beukers.

Más tarde, en el 2002, Zudillin basado en los resultados de Nesterenko, utilizó la función racional (5) y haciendo uso del algoritmo de Zeilberger [3, 4, 5, 6, 41, 42], obtuvo la relación de recurrencia de Apéry

$$(n+1)^3 y_{n+1} - (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)y_n + n^3 y_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

la cual satisfacen la sucesión de los numeradores p_n y denominadores q_n de los aproximantes racionales (3) a $\zeta(3)$ con condiciones iniciales

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 6, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 5,$$

donde a partir de la misma se prueba evidentemente la irracionalidad de $\zeta(3)$. Además, a partir de la relación de recurrencia anterior y de los aproximantes racionales (3) a $\zeta(3)$, Apéry [65] dedujo el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$\zeta(3) = \frac{6}{|5} - \frac{1}{|117} - \frac{64}{|535} - \dots - \frac{n^6}{|(2n+1)(17n^2+17n+5)} - \dots$$

También, de forma similar, en 1996 Nesterenko [36] propuso el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$2\zeta(3) = 2 + \frac{1}{|2} + \frac{2}{|4} + \frac{1}{|3} + \frac{4}{|2} + \frac{2}{|4} + \frac{6}{|6} + \frac{4}{|5} + \dots,$$

donde los numeradores a_n , $n \geq 1$, y los denominadores b_n , $n \geq 2$, están definidos mediante

$$\begin{aligned} b_{4k+1} &= 2k+2, & a_{4k+1} &= k(k+1), & b_{4k+2} &= 2k+4, \\ a_{4k+2} &= (k+1)(k+2), & b_{4k+3} &= 2k+3, \\ a_{4k+3} &= (k+1)^2, & b_{4k} &= 2k, & a_{4k} &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Luego, en el año 2009, Nesterenko publicó una nueva demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$ [38], demostrando para $l_n^3 \mathcal{B}_n, l_n^3 \mathcal{D}_n \in \mathbb{Z}$, lo siguiente

$$(-1)^n l_n^3 \sum_{k \geq 1} \frac{\partial}{\partial k} R(k) = (-1)^{n-1} l_n^3 (2\mathcal{B}_n \zeta(3) - \mathcal{D}_n) < (4/5)^n,$$

donde

$$\begin{aligned} R(k) &= k^{-2} \prod_{j=1}^{[(n-1)/2]} \frac{k-j}{k+j} \prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{k-j}{k+j}, \\ \mathcal{B}_n &= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} b_k \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(2b_k H_k^{(3)} + a_k H_k^{(2)} \right), \end{aligned}$$

con

$$b_k = (-1)^{n-1} \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + k}{k} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k}{k} \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{k} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k},$$

$$a_k = b_k \left(\frac{2}{k} + \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j} \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j} \right) \right),$$

lo cual prueba evidentemente el teorema de Apéry. Aquí, l_n denota el mínimo común múltiplo de $\{1, 2, \dots, n\}$ y $H_k^{(r)}$ el k -ésimo número armónico de orden r ($H_k^{(1)} = H_k$ y $H_0 = 0$) [16].

Se conoce además, que de los pocos resultados desarrollados para $\zeta(4)$, se encuentran los aportados por Zudilin en [74, 75], donde basado en la serie de tipo hipergeométrica

$$r_{n,z} = \frac{(-1)^{n+1}}{6} \sum_{k \geq 1} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{(1-k)_n^2 (k+n+1)_n^2 (2k+n)}{(k)_{n+1}^4} \right) = q_{n,z} \zeta(4) - p_{n,z} \tag{7}$$

$$= \mathcal{O} \left((3 - 2\sqrt{3})^{3n} \right),$$

dedujo la relación de recurrencia [77]

$$(n+1)^5 y_{n+1} - 3(2n+1) (3n^2 + 3n + 1) (15n^2 + 15n + 4) y_n - 3n^3 (9n^2 - 1) y_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \tag{8}$$

donde los aproximantes racionales involucrados en (7), la satisfacen con condiciones iniciales

$$q_{0,z} = 1, \quad q_{1,z} = 12, \quad p_{0,z} = 0, \quad p_{1,z} = 13,$$

y a partir de la misma obtuvo el desarrollo en fracciones continuas,

$$\zeta(4) = \frac{13}{\mathcal{P}(0)} + \frac{1^7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{\mathcal{P}(1)} + \frac{2^7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{\mathcal{P}(2)} + \dots$$

$$+ \frac{n^7 (3n-1) (3n) (3n+1)}{\mathcal{P}(n)} + \dots,$$

siendo $\mathcal{P}(n) = 3(2n+1)(3n^2+3n+1)(15n^2+15n+4)$. Cabe destacar, que la relación de recurrencia de segundo orden (8), no brinda aproximantes diofánticos que prueban la irracionalidad de $\zeta(4)$, sin embargo, presentan un eficiente y rápido algoritmo para el cálculo de esta constante. También, existen otros resultados, relacionados con el número $\zeta(4)$, los cuales han sido desarrollados en su gran mayoría por Zudilin (véase [14, 27, 60, 72, 74, 75, 77]).

En vista a extender el resultado anterior para $\zeta(5)$, Zudilin en [70] auxiliándose de las series hipergeométricas

$$F_n = n!^4 (-1)^n \sum_{k \geq 1} \left(k + \frac{n}{2} \right) \frac{(1-k)_n (k+n+1)_n}{(k)_{n+1}^6},$$

$$\tilde{F}_n = n!^4 (-1)^{n+2} \sum_{k \geq 1} \left(k + \frac{n}{2} \right) \frac{(-k)_{n+1} (k+n)_{n+1}}{(k)_{n+1}^6},$$

dedujo la siguiente relación de recurrencia de tercer orden

$$(n+1)^6 \alpha_0(n) y_{n+1} + \alpha_1(n) y_n - 4(2n-1) \alpha_2(n) y_{n-1} - 4(n-1)^4 (2n-1) (2n-3) \alpha_0(n+1) y_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \tag{9}$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_0(n) &= 41218n^3 - 48459n^2 + 20010n - 2871, \\ \alpha_1(n) &= 2(48802112n^9 + 89030880n^8 + 36002654n^7 \\ &\quad - 24317344n^6 - 19538418n^5 + 1311365n^4 \\ &\quad + 3790503n^3 + 460056n^2 - 271701n - 60291), \\ \alpha_2(n) &= 3874492n^8 - 2617900n^7 - 3144314n^6 \\ &\quad + 2947148n^5 + 647130n^4 - 1182926n^3 \\ &\quad + 115771n^2 + 170716n - 44541,\end{aligned}$$

la cual satisfacen la sucesión de los numeradores $p_{n,5}$ y denominadores $q_{n,5}$ de los aproximantes racionales a $\zeta(5)$ con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}p_{0,5} &= 0, & p_{1,5} &= \frac{87}{2}, & p_{2,5} &= -\frac{1190161}{64}, \\ q_{0,5} &= -1, & q_{1,5} &= 42, & q_{2,5} &= -17934.\end{aligned}$$

Además, comprobó que la sucesión $r_{n,5} = q_{n,5}\zeta(5) - p_{n,5} > 0$ también satisface la relación de recurrencia (9) y verificó que la misma y la sucesión de los denominadores $q_{n,5}$, satisfacen los siguientes límites

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |r_{n,5}|}{n} &= \log |\mu_2| = -1.08607936\dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{n,5}|}{n} &= \log |\mu_3|,\end{aligned}$$

donde

$$\mu_1 = -0.02001512\dots, \quad \mu_2 = 0.33753726\dots, \quad \mu_3 = -2368.31752213\dots,$$

son las raíces del polinomio característico $\mu^3 + 2368\mu^2 - 752\mu - 16$ de la relación de recurrencia (9). Con estos resultados, Zudilin presentó un eficiente y rápido algoritmo para el cálculo de esta constante $\zeta(5)$, puesto que la sucesión de números racionales $p_{n,5}/q_{n,5}$ converge a $\zeta(5)$ con una velocidad $|\mu_2/\mu_3| < 1.42521964 \cdot 10^{-4}$.

En el 2001, Ball y Rivoal [9, 49, 50, 54] probaron que la sucesión $\{\zeta(2k+1)\}_{k \geq 1}$ contiene una infinidad de irracionales. En otra dirección, para el 2002, el ruso Vladimir Zudilin, un investigador de la Universidad Lomonosov de Moscú, probó que al menos uno de los números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional [68]. Lo cierto es, que son escasos los resultados que existen acerca de las propiedades aritméticas de los números $\zeta(2k+1)$, con $k \in \mathbb{N}$, los cuales pueden consultarse en [19, 20, 21, 22, 33, 45, 52, 55, 56, 57, 69, 73, 76]

Referencias

- [1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York, 1972.
- [2] APÉRY, R., *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$* , Astérisque, Vol. 61, pp. 11–13, 1979.
- [3] ABRAMOV, S.A., *Applicability of Zeilberger's algorithm to hypergeometric terms*, In ISSAC'02: Proceedings of the 2002 international symposium on Symbolic and algebraic computation, New York, pp. 1–7, 2002.

- [4] ABRAMOV, S.A. and LE, H. Q., *A criterion for the applicability of Zeilberger's algorithm to rational functions*, *Discrete Math.*, Vol. 259, pp. 1–17, 2002.
- [5] ABRAMOV, S.A., *When does Zeilberger's algorithm succeed?*, *Appl. Math.*, Vol. 30, pp. 424–441.
- [6] ABRAMOV, S.A. and LE, H. Q., *Telescoping in the context of symbolic summation in Maple*, *J. of Symb. Comput.*, Vol. 38, pp. 1303–1326, 2004.
- [7] ALMKVIST, G., VAN STRATEN, D. and ZUDILIN, W., *Apéry limits of differential equations of order 4 and 5*, *Modular Forms and String Duality*, *Fields Inst. Commun. Ser.*, Amer. Math. Soc. & Fields Inst., Providence, Vol. 54, pp. 105–123, 2008.
- [8] ARVESÚ, J., *Orthogonal forms: A key tool for deducing Apéry's recurrence relation*, *J. Approx. Theory*, 2012.
- [9] BALL, K. and RIVOAL, T., *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs*, *Inv. Math.*, Vol. 146, pp. 193–207, 2006.
- [10] BEUKER, F., *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$* , *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 11, pp. 268–272, 1979.
- [11] BEUKER, F., *Legendre polynomials in irrationality proofs*, *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. 22, pp. 431–438, 1980.
- [12] BEUKER, F., *Padé approximations in number theory*, *Padé approximation and its applications*, (Amsterdam, 1980), *Lecture Notes in Math.*, Vol. 888, pp. 90–99, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [13] BEUKER, F., *Consequences of Apéry's work on $\zeta(3)$* , preprint of talk presented at the *Rencontres Arithmétiques de Caen, $\zeta(3)$ Irrationnel: Les Retombées*, 1995.
- [14] BALANZARIO, E. P., *Método elemental para la evaluación de la función zeta de Riemann en los enteros pares*, *Miscelánea Matemática*, Vol. 33, pp. 31–41, 2001.
- [15] COHEN, H., *Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apéry)*, *Séminaire de théorie des nombres*, Grenoble, 1978.
- [16] COHEN, J. and GUY, R., *The Book of Numbers*, Copernicus, Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [17] CALDERÓN, J., *La Función Zeta de Riemann*, Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco, *Rev. Real Academia de Ciencias*, Zaragoza, Vol. 57, pp. 67–87, 2007.
- [18] EDWARDS, H. M., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, Dover, New York, 1974.
- [19] FISCHLER, S., *Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal, ...]*, *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, Vol. 294, N° 990, pp. 27–62, 2004.
- [20] FISCHLER, S., *Restricted rational approximation and Apéry-type constructions*, *Indagationes Mathem.*, Vol. 20, pp. 201–215, 2009.
- [21] FISCHLER, S., W. Zudilin, *A refinement of Nesterenko's linear independence criterion with applications to zeta values*, *Math. Ann.*, Vol. 347, pp. 739–763, 2010.
- [22] FISCHLER, S., *Nesterenko's criterion when the small linear forms oscillate*, *Arch. Math.*, Vol. 98, pp. 143–151, 2012.
- [23] GUTNIK, L. A., *On the irrationality of certain quantities involving $\zeta(3)$* , *Acta Arith.*, Vol. 42, pp. 255–264, 1983.

- [24] GASPER, L. and RAHMAN, M., *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [25] GOURDON, X. and SEBAH, P., *The Riemann Zeta-function $\zeta(s)$: generalities, Numbers, constants and computation*, 2004.
- [26] GRANERO, F., *El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones*, La Gaceta de la RSME, Vol. 12, N° 4, pp. 721–737, 2009.
- [27] HANCL, J., *A simple proof of the irrationality of β^4* , Amer. Math. Monthly, Vol. 93, pp. 374–375, 1986.
- [28] HATA, M., *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math., pp. 99–125, 1990.
- [29] HATA, M., *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures et Appl., Vol. 69, pp. 133–173, 1990.
- [30] HATA, M., *A new irrationality measure for $\zeta(3)$* , Acta Arith., Vol. 92, pp. 47–57, 2000.
- [31] JIN, Y. and DICKINSON, H., *Apéry sequences and Legendre transforms*, J. Austral. Math. Soc., Vol. 68, pp. 349–356, 2000.
- [32] JAIN, L. and TZERMIAS, P., *Beukers' integrals and Apéry's recurrences*, J. Integ. Seq., Article 05.1.1, Vol. 8, 2000.
- [33] KRATTENTHALER, C. and RIVOAL, T., *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 186, N° 875, 2007.
- [34] LÓPEZ, J. L. and PAGOLA, P. J., *The Laplace's and Steepest Descents Methods Revisited*, International Mathematical Forum, Vol. 2, N° 7, pp. 297–314, 2007.
- [35] LÓPEZ, J. L. and PAGOLA, P. J., *Fórmulas explícitas para los coeficientes de los métodos de Laplace y Saddle Point*, XI Congreso de Matemática Aplicada, Ciudad Real, pp. 1–9, septiembre 2009.
- [36] NESTERENKO, Yu. V., *A few remarks on $\zeta(3)$* , Math. Notes, Vol. 59, N° 6, pp. 625–636, 1996.
- [37] NESTERENKO, Yu. V., *Integral identities and constructions of approximations to zeta values*, J. Théor. Nombres Bordx, Vol. 15, pp. 535–550, 2003.
- [38] NESTERENKO, Yu. V., *An Elementary Proof of the Irrationality of $\zeta(3)$* , Moscow University Mathematics Bulletin, Vol. 64, N° 4, pp. 165–171, 2009.
- [39] NIKISHIN, E. M. and SOROKIN, V. N., *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc. Providence, RI, Vol. 92, 1991.
- [40] OSLER, T. J., *A Computer Hunt for Apéry's*, Math. Spectrum, Vol. 35, N° 1, pp. 5–8, 2002.
- [41] PAULE, P., *A Mathematica Version of Zeilberger's Algorithm for Proving Binomial Coefficient Identities*, J. Symb. Comput., Vol. 20, pp. 673–698, 1995.
- [42] PAULE, P., *Symbolic summation—some recent developments*, In Computer Algebra in Science and Engineering—Algorithms, Systems, and Applications, pp. 138–162, 1995.
- [43] PRÉVOST, M., *A new proof of the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 67, pp. 219–235, 1996.
- [44] PRÉVOST, M. and SOROKIN, V. N., *Hermite-Padé Approximants and Apéry Theorem*, Technical Report L.M.P.A., 2007.

- [45] PILEHROOD, Kh. H., *Simultaneous generation for zeta values by the Markov-WZ method*, D. Math. Theor. Comput. Sci. DMTCS, pp. 115–124, 2008.
- [46] RIEMANN, B., *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Akad. Berlin, pp. 671–680, 1859.
- [47] REYSSAT, E., *Irrationalité de $\zeta(3)$* , Selon Apéry in: 20 année. Seminaire Delange–Pisot–Poitou, 1978.
- [48] RHIN, G. and VIOLA, C., *The Group Structure for $\zeta(3)$* , Acta Arith., Vol. 97, pp. 269–293, 2001.
- [49] RIVOAL, T., *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., pp. 267–270, 2000.
- [50] RIVOAL, T., *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, Thèse de doctorat, Laboratoire SDAD, Université de Caen, 2001.
- [51] RIVOAL, T., *Irrationalité d’au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$* , Acta Arith., pp. 157–167, 2002.
- [52] RIVOAL, T. and ZUDILIN, W., *Diophantine properties of numbers related to Catalan’s constant*, Math. Ann., Vol. 326, pp. 705–721, 2003.
- [53] RIVOAL, T., *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta*, Actes des journées arithmétiques de Lille (July, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux, pp. 351–365, 2003.
- [54] RIVOAL, T., *Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann*, Quadrature, Vol. 49, 2003.
- [55] RIVOAL, T., *Simultaneous generation of Koecher and Almkvist-Granville’s Apéry-like formulae*, Experiment. Math., Vol. 13, pp. 503–508, 2004.
- [56] RIVOAL, T., *Hypergeometric constructions of rational approximations of (multiple) zeta values*, in Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-Functions, G. Bhowmik et. al. (eds.), MSJ Memoirs, Mathematical Society of Japan, Tokyo, Vol. 21, pp. 167–183, 2010.
- [57] SÁNCHEZ, P. A., *Valores irracionales de la función zeta de Riemann en los impares*, Morfismos, Vol. 10, N° 2, pp. 15–43, 2006.
- [58] SOROKIN, V. N., *Hermite-Padé approximations for Nikishin systems and the irrationality of $\zeta(3)$* , Communications of the Moscow Math. Soc., Vol. 49, pp. 176–177, 1993.
- [59] SOROKIN, V. N., *Apéry’s theorem*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.], N° 3, pp. 48–52, 1998.
- [60] SOROKIN, V. N., *One algorithm for fast calculation of β^4* , Preprint (Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute for Applied Mathematics, Moscow), 2002.
- [61] SALIKHOV, V., *On multiple integrals represented as a linear form in $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2k-1)$* , J. Math. Sci., Vol. 146, N° 2, 2007.
- [62] SMET, Ch. and VAN ASSCHE, W., *Mellin transforms for multiple Jacobi-Piñeiro polynomials and a q -analogue*, J. Approx. Theory, pp. 782–806, 2010.
- [63] VAN ASSCHE, W., *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*, Contemp. Math., Vol 236, pp. 325–342, 1999.
- [64] VAN ASSCHE, W., *Hermite-Padé Rational Approximation to Irrational Numbers*, Comput. Meth. Funct. Theory, Vol. 10, N° 2, pp. 585–602, 2010.
- [65] VAN DER POORTEN, A. J., *A proof that Euler missed ... Apéry’s proof of the irrationality of $\zeta(3)$* , An informal report, Math. Intelligencer, Vol. 1, pp. 195–203, 1979.

- [66] ZUDILIN, W., *Difference equations and the irrationality measure of numbers*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 218, pp. 160–174, 1997.
- [67] ZUDILIN, W., *One of the eight numbers $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(17), \zeta(19)$ is irrational*, Mat. Zametki [Math. Notes], pp. 472–476, 2001.
- [68] ZUDILIN, W., *One of the eight numbers $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ is irrational*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys], pp. 149–150, 2001.
- [69] ZUDILIN, W., *Irrationality of values of zeta function at odd integers*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys], pp. 215–216, 2001.
- [70] ZUDILIN, W., *A third-order Apéry-like recursion for $\zeta(5)$* , Mat. Zametki [Math. Notes], pp. 796–800, 2002.
- [71] ZUDILIN, W., *An elementary proof of Apéry's theorem*, E-print math. NT/0202159, Moscow Lomonosov State University, pp. 1–8, 2002.
- [72] ZUDILIN, W., *Difference equation and permutation group for $\zeta(4)$* , Actes des 12^{èmes} rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux (2002).
- [73] ZUDILIN, W., *Irrationality of values of the Riemann zeta function*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. [Russian Acad. Sci. Izv. Math.], Vol. 66, N° 3, 2002.
- [74] ZUDILIN, W., *An Apéry-Like Difference Equation for Catalan's Constant*, Elect. J. Comb., Vol. 10, N° 1, pp. 1–10, 2003.
- [75] ZUDILIN, W., *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values*, Actes des 12^{èmes} rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux, pp. 593–626, 2003.
- [76] ZUDILIN, W., *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théorie Nombres Bordeaux, pp. 251–291, 2004.
- [77] ZUDILIN, W., *Binomial sums related to rational approximations to $\zeta(4)$* , Math. Notes, Vol. 75, pp. 594–597, 2004.
- [78] ZUDILIN, W., *Arithmetic hypergeometric series*, Russian Math. Surveys, pp. 163–216, 2011.

Sobre el autor:

Nombre: Anier Soria Lorente

Correo electrónico: asorial@udg.co.cu

Institución: Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.

Cuentos Matemáticos

Matemáticas para todos

Mathematics for all

José Miguel Bel Martínez

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 045-048, ISSN 2174-0410

Recepción: 7 Nov'13; Aceptación: 21 Mar'14

1 de abril de 2014

Resumen

El siguiente relato que trata de poner de manifiesto cómo tras la “ignorancia” matemática puede haber atrevimiento por el que se puede llegar a cualquier resultado por extraño que éste resulte, todo ello llevado en un tono narrativo ameno y divertido.

Palabras Clave: Matemáticas, operaciones.

Abstract

The following story tries to show that behind the “ignorance” you may find daring and reach whatever result no matter how strange this could result, everything carried in a fun and entertaining narrative tone.

Keywords: Mathematics, operations.

Erase una vez hace mucho tiempo en un remoto país, que un joven soldado llegó a un cuartel llevando tras de sí una reata de 28 caballos. Como es preceptivo, en la entrada le dieron el alto. El soldado mostró su credencial y el centinela llamó al cabo de guardia, que siguiendo la cadena de mando lo acompañó al despacho del sargento al que, después de pedir permiso, se presentó con el saludo de rigor.

- A sus órdenes mi sargento. Traigo conmigo los 28 caballos solicitados por este regimiento. Están amarrados y en estado de revista en la entrada al cuartel.

- Bien, soldado. Los estábamos esperando pues no tenemos ninguno. Lléalos al patio y después repártelos cabalmente entre las siete cuadras iguales que hay en él.

- Con gusto cumpliría su orden, mi sargento, pero el problema es no sé cómo hacerlo, pues soy analfabeto y de números, sólo sé contar con los dedos, y gracias.

El sargento, se rascó la cabeza bajo la gorra, torciendo el gesto.

- Es el caso, soldado, que aunque yo sí entiendo de cuentas, sólo sé sumar, algo que me enseñó a hacer el capitán, y esa operación requiere otros conocimientos superiores. Ve a su despacho y que él te resuelva el problema.

El soldado se presentó de igual manera al capitán, quién le dijo que él, enseñado a su vez por el coronel, aparte de sumar y restar, sólo alcanzaba a multiplicar, operación muy útil, pero insuficiente para la complejidad de aquel problema. Por ello, lo envió al coronel, para quién las matemáticas no tenían secreto alguno ya que incluso sabía dividir.

Tras solicitar su permiso, entró en su despacho, donde le puso al corriente de las diligencias hechas con sus subordinados.

El coronel se retrepó en la silla sonriendo con suficiencia.

- No te apures soldado, estás de suerte puesto que además de ser la máxima autoridad del regimiento, soy el único que domina con soltura la difícil operación de dividir, necesaria para este menester, así que yo te diré cuantos caballos has de meter en cada cuadra para que queden equitativamente repartidos.

Dicho esto, cogió papel y lápiz y se puso a la tarea. Escribió, como debe ser, el dividendo a la izquierda y el divisor a la derecha encerrado en su caja. Entre dientes, razonó:

- Dos entre siete, no cabe, por tanto cojo el ocho, que sí cabe. Ocho entre siete, a uno. Uno por siete, siete. De siete a ocho, uno y me bajo el dos, lo que nos da veintiuno, que entre siete son tres. Como el resto es cero, el resultando de la división es exactamente trece.

$$\begin{array}{r} 28 \quad | \quad 7 \\ 21 \quad 13 \\ \hline 0 \end{array}$$

- Ese es el número de caballos que has de meter en cada cuadra. Ve, hazlo y después di al sargento que te den vino, un chusco y un catre donde descansar. Puedes retirarte.

- A las órdenes de usía mi coronel -se despidió el soldado con un marcial taconazo.

Al pasar por la puerta del despacho del capitán éste le llamó interesándose por el resultado del problema, deseando impresionar con sus habilidades matemáticas al soldado.

- Si el coronel te ha dicho que son 13 los caballos que debes encerrar en cada cuadra, así será. No obstante, no estará de más que yo lo compruebe para asegurarnos de que esté bien hecha. Si multiplicamos los trece caballos que has de meter en cada cuadra por el número de estas, o sea, siete, forzosamente nos han de salir los veintiocho que traes. Veamos pues.

Con no menos pericia que el coronel, fue recitando los pasos de la delicada operación.

- Siete por uno, son siete. Vamos con el otro. Siete por tres, veintiuno, que sumado al siete de antes, hacen veintiocho: Justo y cabal, soldado. El coronel, como siempre, está en lo cierto. Cumple pues su orden.

$$\begin{array}{r} 13 \\ 7 \times \\ \hline 7 \\ 21 + \\ \hline 28 \end{array}$$

Tal y como le había ordenado el coronel, el joven se dirigió al despacho del sargento, mas no le hizo falta entrar, pues antes de llegar a la puerta, ya salió aquel a su encuentro ansioso por poner en práctica su dominio de la suma e impresionar también al soldado. Una vez que hubo conocido el resultado obtenido por el jefe y avalado por el oficial, dijo:

- Si el coronel y el capitán han calculado que debes meter trece caballos en cada cuadra, así habrá de ser, pero por asegurarnos y también porque veas la utilidad de la suma que, al

fin y al cabo, no deja de ser una multiplicación más trabajada, pasa y observa como hago la comprobación para que vayas sabiendo de cuentas, por si con los años medras en la milicia y llegas a ser clase de tropa o hasta suboficial, como yo.

Dicho lo cual, sacó lápiz y papel y dispuso, como debe ser en una suma bien hecha, los siete treces en una columna para después, sin encomendarse a Dios ni al diablo y sin hacer distinguos entre izquierda, derecha, arriba o abajo, sumó de corrido sin dejar ni uno todos los números que tenía delante.

- Así que tenemos... uno más tres, mas uno más tres... que hacen en total de... Mmmm... ¡Veintiocho!

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ \hline 28 \end{array}$$

- ¿Ves, como las matemáticas nunca fallan? Mete tranquilo las trece bestias por cuadra y ven después a que te facilite acomodo para que pases la noche.

El soldado llevó los caballos hasta los establos, abrió las puertas de aquellos reducidos espacios y contándolos con cuidado para no equivocarse, empezó a introducirlos una a uno.

Uuuno, dooos, treees, cuaaaatro, ciinco, seeeis...

Hasta seis llegaron a entrar; y ni uno más, pues los animales, espantados al verse hacinados en aquel cubículo desconocido y oscuro, organizaron tal barahúnda de coces, relinchos y mordiscos, que las paredes de la cuadra amenazaban con quebrarse. El joven, asustado, los hizo salir de nuevo, calmándolos después como pudo.

Veamos: tres hombres sabios no pueden estar equivocados y las matemáticas esas, de las que tan bien hablan todos, tampoco -se dijo-. Piensa, Rufino-que así se llamaba el soldado-, y cumple bien la orden que te han dado si es que quieres hacer carrera en la milicia.

Trece, trece, trece... -repetía angustiado para sí-. Recordó haber visto escrito aquel número en todas las operaciones: Trece. Y de golpe, una luz iluminó su entendimiento. ¿Qué es un trece sino un uno y un tres? Esperanzado, metió en la primera cuadra un caballo atravesado al fondo y tres perpendiculares a él en la parte delantera. Un uno y un tres. O sea, un trece. Trece caballos cómodamente ubicados. Cerró la puerta y repitió la misma operación en las otras seis cuadras, comprobando aliviado que no sobraba ni faltaba ninguno.

Mas poco duró la tranquilidad al bueno de Rufino pues el coronel, alarmado por el alboroto que se había organizado hacía un momento, bajó a ver qué sucedía.

- No se preocupe, mi coronel, que consciente de mi error, lo he enmendado y cada cuadra está ocupada por los trece caballos que usía indicó. Ahora duermen tranquilos en ellas.

- Eso parece, soldado, pero ya que he bajado, quiero comprobar que lo que dices es cierto. Abre las cuadras y contemos los animales que pernoctan en ellas.

- Es el caso, mi coronel, que ya están cerradas con llave y además los caballos han hecho un largo viaje. Es lástima que haya que despertarlos.

- Razón llevas muchacho, mas no hará falta tal cosa puesto que por suerte yo estoy aquí y con una simple división podremos contar los equinos sin necesidad de abrir ninguna puerta.

Échate al suelo y por el hueco que hay bajo una de ellas, cuenta las patas que veas.

El soldado obedeció al instante y, no sin trabajo, las contó.

- Cabalmente, cuento dieciséis, mi coronel.

- Bien, pues dividamos dieciséis por las cuatro patas que tiene un caballo y el resultado nos dará el número de ellos que hay dentro.

A falta de papel y lápiz, el coronel se agachó y con el dedo en la tierra del suelo hizo la consabida cuenta que recitó también en voz alta para que lo viera el ignorante soldado.

$$\begin{array}{r} 16 \quad | \quad 4 \\ 12 \quad | \quad 13 \\ 0 \end{array}$$

- Uno entre cuatro, no cabe, pasemos pues al seis. Seis entre cuatro, a uno; uno por cuatro es cuatro; cuatro a seis, dos y me bajo el uno. Doce entre cuatro, tres. Tres por cuatro, doce, al doce, cero.

Podemos dormir tranquilos, muchacho, y jurar ante Dios que trece, ni uno más ni uno menos, son los caballos que ahora mismo duermen en cada cuadra.

Y ahora, querido lector, ¿no crees que la Matemática, además de ciencia exacta, puede ser benévola con la ignorancia y también dejar lugar para la fantasía?

Sobre el autor:

Nombre: José Miguel Bel Martínez

Correo Electrónico: jmbelm@gmail.com

Institución: Ingeniero Técnico en Topografía (Colegiado N° 492), Instituto Geográfico Nacional, España.

Investigación.

Arquitectura paramétrica discreta: exploración en el ámbito de la geometría ortogonal

Discreet Parametric Architecture: an exploration in the realm of Orthogonal Geometry

Oscar del Castillo Sánchez

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 049–076, ISSN 2174-0410

Recepción: 1 Jul'13; Aceptación: 15 Mar'14

1 de octubre de 2013

Resumen

La idea de arquitectura paramétrica tiene una vertiente instrumental en el uso de software orientado a la gestión de la información del proyecto arquitectónico, en particular cuando se emplean geometrías complejas. Sin embargo, la idea de que la forma, sin importar su geometría, esté matemáticamente definida mediante un número limitado de parámetros puede ser de gran alcance en lo que se refiere a las posibilidades de generación de variaciones por modificación de dichos parámetros, manipulación de la forma en procesos de optimización y por la relación entre las estructuras matemático-formales producidas y la idea clásica de unidad formal de la obra de arte.

Palabras Clave: Arquitectura paramétrica, retículas espaciales, patrones, forma.

Abstract

The idea of parametric architecture has an instrumental side in the use of software oriented to the management of the information of the architectural project, in particular when complex geometries are involved. But the idea of defining form, regardless its geometry, by means of a limited number of parameters can be far reaching on account of the possibilities of generating variations by the modification of these parameters, the manipulation of form in optimization processes and the relation between the mathematical-formal structures generated and the classical concept of formal unity in a work of art.

Keywords: Parametric architecture, space grids, patterns, form.

1. Introducción:

Una de las consecuencias del uso del ordenador en la práctica del diseño arquitectónico ha sido el desarrollo de la llamada “arquitectura paramétrica”, la cual consiste,

a grandes rasgos, en el uso de modelos informáticos del proyecto tanto en la concepción como en la representación y materialización de edificios y sus componentes.

En este momento, la actividad en el ámbito de la arquitectura paramétrica abarca, por un lado, la reflexión teórica acerca de las posibilidades de este nuevo paradigma, como puede encontrarse por ejemplo en [1], y por otro, en el desarrollo de proyectos arquitectónicos que, haciendo uso del software especializado correspondiente, trata de explotar las posibilidades formales que, tanto a nivel de diseño como de construcción, estas nuevas herramientas permiten.

Hay, sin embargo, un aspecto poco explorado de las posibilidades de la idea de arquitectura paramétrica: la analogía entre la idea clásica de unidad formal –idea de unidad de naturaleza esencialmente matemática-, y la forma concebida desde un punto de vista paramétrico y algorítmico.

En este sentido, el nuevo paradigma proporcionaría una poderosa herramienta para pensar la forma, no solo las superficies de doble curvatura de las últimas arquitecturas sino también las formas ortogonales que conforman la mayoría de los edificios que se construyen. Esta auto-limitación en la aplicación del método a formas aparentemente convencionales pretende demostrar la relevancia de la idea de arquitectura paramétrica para toda actividad de concepción formal, con independencia de la naturaleza de las formas utilizadas.

Lo que aquí se propone es ensayar y apuntar, mediante algunos ejemplos, líneas concretas de desarrollo de estas ideas, en una especie de serialismo formal que busca resultados análogos a los obtenidos en otros ámbitos, en especial el de la música contemporánea.

2. Retículas espaciales

Observación: en el apéndice al final del presente trabajo se incluye la representación gráfica en planta y alzado de los proyectos de los cuales se han tomado las redes espaciales utilizadas aquí como ejemplo, mostrando la correspondencia entre la retícula espacial descrita y la realidad arquitectónica de la que esta se abstrae.

Cuando en el proyecto arquitectónico se hace uso de una geometría ortogonal y de las proyecciones planta / alzado / sección para su representación, la forma se define con frecuencia mediante una configuración de ejes o planos orientados en las direcciones de los tres ejes coordenados, una retícula o malla tridimensional que pauta el espacio y en referencia a la cual se disponen los elementos que integran la forma. Esta retícula, que en principio tiene un carácter meramente instrumental, facilitando tanto el control del proyecto como la transmisión de la información necesaria para su construcción, se convierte en última instancia en una herramienta de concepción de la forma [2], por cuanto permite definir a priori condiciones acerca de las relaciones dimensionales y formales entre distintas partes del proyecto. La malla espacial es por tanto un instrumento para pensar la forma.

Desde el punto de vista de la arquitectura paramétrica, las dimensiones que definen la retícula espacial del proyecto pueden ser consideradas como otros tantos parámetros que definen la forma y por tanto el universo de las posibles retículas espaciales constituye un espacio de configuraciones.

El caso más sencillo de retícula espacial es la retícula cúbica, que consiste en la repetición, según las tres direcciones del espacio, de una celda unidad cúbica (es decir, aquella celda en que sus tres lados miden lo mismo). En la fig. 1 se muestra el ejemplo de una retícula cúbica de 5 celdas en dirección X, 3 celdas en dirección Y y 1 celda en dirección Z.

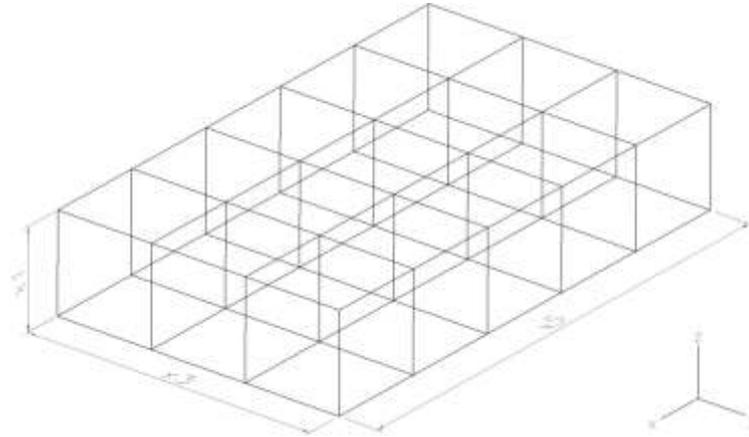


Figura 1. Ejemplo de retícula espacial cúbica de 5 x 3 x 1 celdas.

Este tipo de retícula es muy habitual en edificios de toda índole; se pueden citar como ejemplos el proyecto de Mies van der Rohe para el Convention Hall de Chicago [3], la iglesia Bagsvaerd en Copenhague, de Jorn Utzon [4], o el Pabellón de Cristal de la Casa de Campo de Madrid, de Francisco de Asís Cabrero et. al. [5].

La definición de esta forma requiere al menos cuatro parámetros (n_x , n_y , n_z , K) correspondiéndose estos al número de celdas en las direcciones x , y , z y a la dimensión de la celda cúbica unidad, respectivamente. El universo de las retículas cúbicas posibles constituye por tanto un espacio de configuraciones de 4 dimensiones. Así, en el caso mencionado del Convention Hall de Mies van der Rohe, la retícula espacial sería:

$$n_x = 24; n_y = 24; n_z = 4; K = 30' (914,4 \text{ cm}).$$

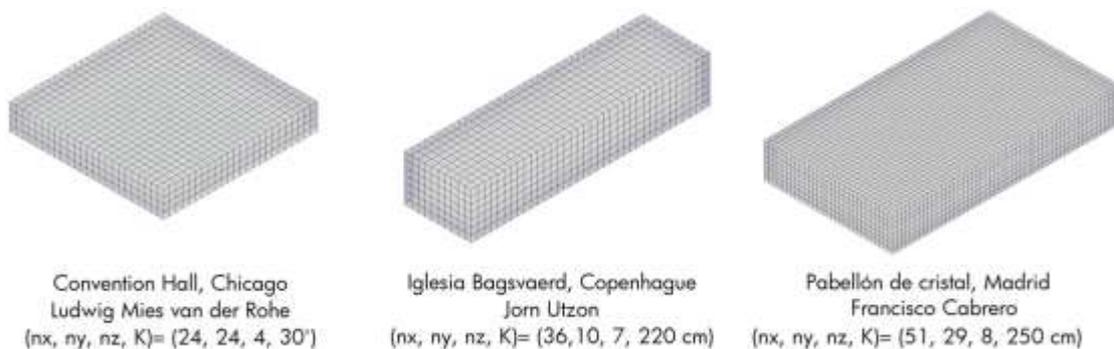


Figura 2. Representación gráfica de las retículas espaciales de los edificios mencionados.

Este es un edificio de 720 x 720 pies en planta (24 tramos de 30' cada uno en cada dirección) y 110 pies en alzado (≈ 4 tramos de 30'). En la iglesia Bagsvaerd: $(n_x, n_y, n_z, K) = (36, 10, \approx 7, 220 \text{ cm})$ y en el Pabellón de la Casa de Campo (solo la caja de vidrio): $(n_x, n_y, n_z, K) = (51, 29, \approx 8, 250 \text{ cm})$. A los efectos de este estudio se descartan, para simplificar en primera aproximación, las pequeñas desviaciones de nuestro esquema en la retícula, como es el caso

de dimensiones distintas en tramos extremos. Una sección en tres dimensiones del espacio de configuraciones para $K =$ constante para los tres casos anteriores sería tal y como se muestra en la fig. 3.

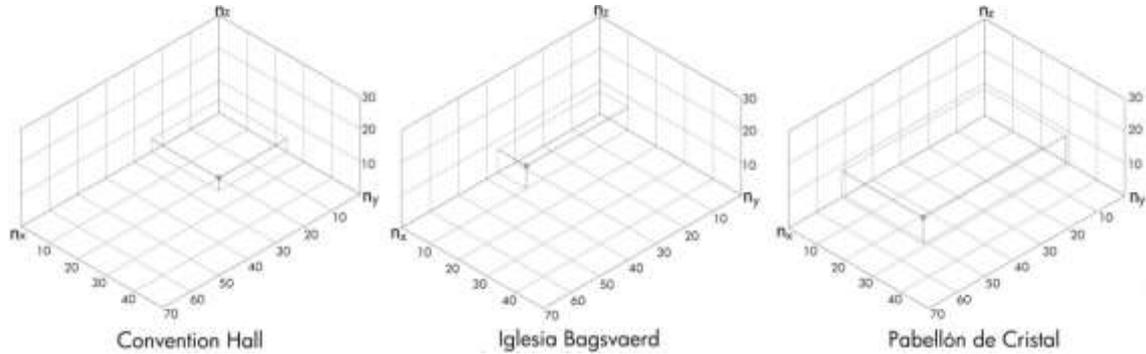
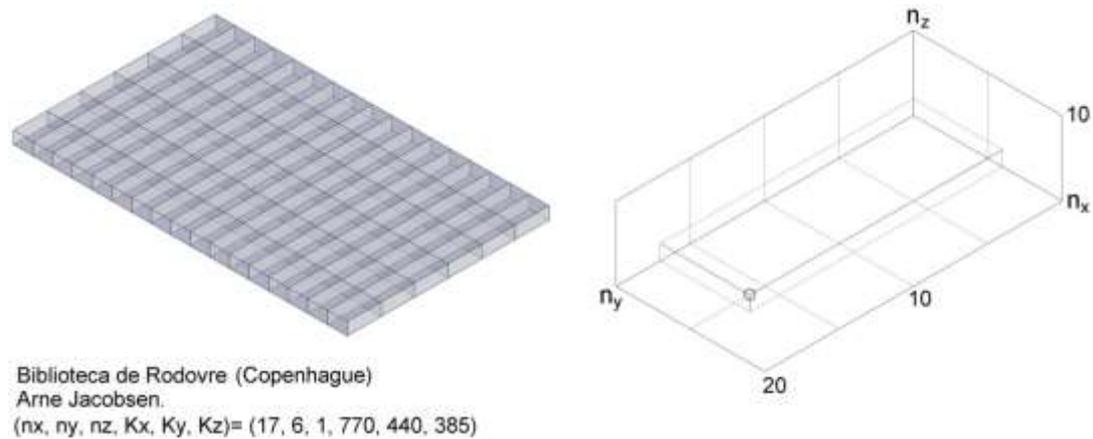


Figura 3. Sección tridimensional del espacio de configuraciones de redes espaciales cúbicas para un valor de K (lado de la celda unidad) determinado. Posición en el espacio de configuraciones de cada uno de los ejemplos dados.

Si en lugar de una celda cúbica se parte de una celda ortoédrica con sus tres lados distintos, cada configuración quedará definida por seis parámetros: $(n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_z)$, correspondiendo éstos al número de celdas en las direcciones x, y, z más la dimensión de la celda unidad en cada una de las direcciones anteriores. Por tanto, el espacio de configuraciones correspondiente será de dimensión 6, y al igual que en el caso anterior podrán realizarse secciones tridimensionales de dicho espacio fijando algunos parámetros.

Un ejemplo de este tipo de retícula sería la biblioteca de Rodovre en Copenhague, de Arne Jacobsen [6], en que: $(n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_z) = (17, 6, 1, 440, 770, 385)$, con valores de K en centímetros (fig. 4).



Biblioteca de Rodovre (Copenhague)
Arne Jacobsen.
 $(n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_z) = (17, 6, 1, 770, 440, 385)$

Figura 4. Red espacial correspondiente a la biblioteca de Rodovre; ejemplo de repetición de celdas ortoédricas en las tres direcciones del espacio con lados de dimensiones diversas. Sección del espacio de configuraciones para $(K_x, K_y, K_z) = (770, 440, 385)$.

Es frecuente en el diseño arquitectónico que los valores de K estén ligados entre sí mediante relaciones de proporcionalidad. Por ejemplo, aun cuando la retícula consista en una cuadrícula en planta ($K_x = K_y$), la dimensión vertical K_z puede ser distinta a las dos anteriores aunque proporcional a ellas, es decir: $K_x = K_y = c \cdot K_z$. Valores habituales en la arquitectura del

clasicismo para c son: 2 (doble cuadrado en alzado), $\varphi \approx 1,618$ (sección áurea), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, o bien relaciones fraccionarias como 3:2, 5:3, etc., de modo que la retícula queda definida del modo: $(n_x, n_y, n_z, K, K, c*K)$ o en el caso más general $(n_x, n_y, n_z, K, c_y*K, c_z*K)$, aunque no se produce aquí reducción en el número de parámetros.

Como ejemplo de lo anterior puede tomarse, de entre muchos otros, la biblioteca universitaria en Salamanca, obra de Carlos Punte [7], en que la estructura principal se inscribe en una cuadrícula de 615 x 615 cm y una distancia entre ejes de forjados de 357 cm. Por tanto: $(n_x, n_y, n_z, K, K, c*K) = (8, 5, 5, 615, 615, 357)$, donde $c = 615 / 357 = 1,737 \approx \sqrt{3}$ (fig. 5). En este caso, del uso de la proporción $\sqrt{3}$ permite que los rectángulos definidos en alzado por la estructura porticada sean subdivisibles en tres rectángulos verticales cuya proporción es a su vez $\sqrt{3}$, ya que el rectángulo de proporción $1:\sqrt{n}$ es subdivisible en n rectángulos semejantes a él (a este respecto, ver el alzado mostrado en el apéndice).

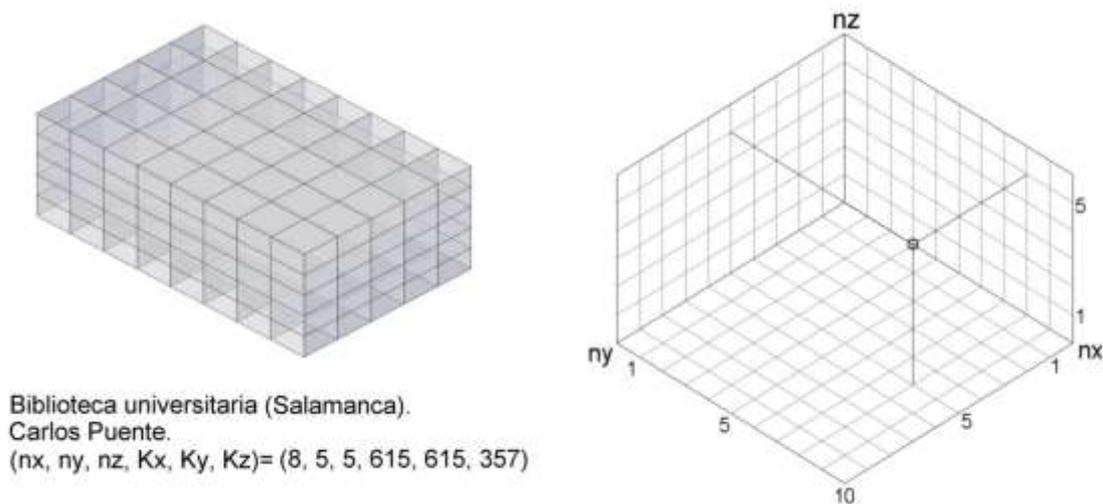


Figura 5. Red espacial correspondiente a la biblioteca de Salamanca; ejemplo de repetición de celdas ortoédricas en las tres direcciones del espacio con lados de dimensiones ligadas entre sí. Sección del espacio de configuraciones para $(K_x, K_y, K_z) = (615, 615, 357)$, con: $(n_x, n_y, n_z) = (8, 5, 5)$.

Esto en cuanto a la repetición pura de celdas iguales en las tres direcciones del espacio; sin embargo, también son posibles otras combinaciones como es la alternancia de dos medidas en cada dirección del espacio, lo que podría denotarse: $(n_x, n_y, n_z, K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2}, K_{z1}, K_{z2})$, en cuyo caso se necesitan 9 parámetros para definir la retícula. Tal es el caso del proyecto de Louis Kahn para el centro comunitario de Trenton [8], en que: $(n_x, n_y, n_z, K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2}, K_z) = (20 \frac{1}{2}, 10 \frac{1}{2}, 4, 10', 20', 10', 20', 8')$; los valores fraccionarios de n dan cuenta del hecho de que la retícula comience y termine con la misma dimensión. En este caso no se produce alternancia en dirección OZ (fig. 6).

Este es un tipo de retícula muy característico de la arquitectura Beaux-Arts, en que los espacios de circulación y servicio tienden a ocupar las bandas de dimensión menor de la retícula. Una derivación de esto es la retícula del tipo "tartán" (en referencia a los tejidos de las faldas escocesas), basada en una alternancia de dimensiones que por sus propiedades métricas es a priori adecuada para albergar los usos a incluir en el edificio.

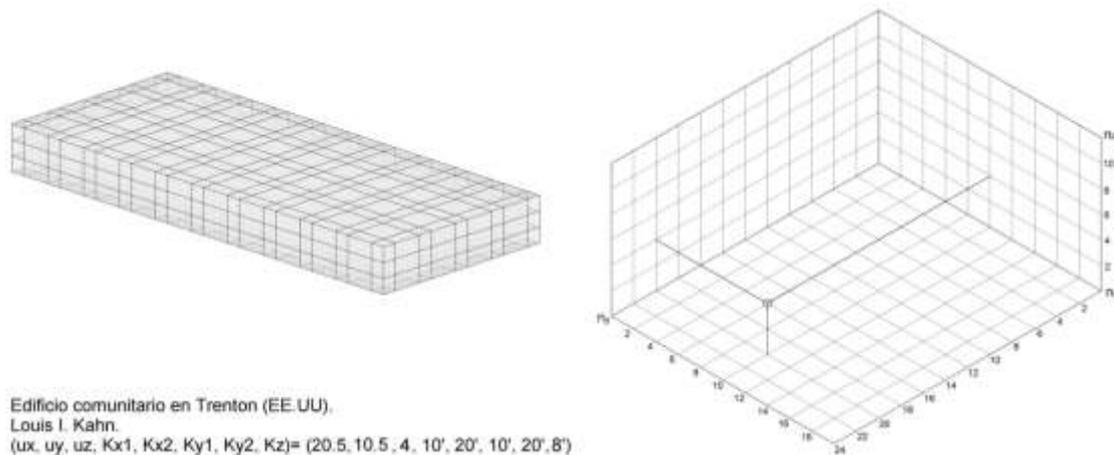


Figura 6. Red espacial correspondiente al centro comunitario en Trenton: $(n_x, n_y, n_z, K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2}, K_z) = (20 \frac{1}{2}, 10 \frac{1}{2}, 4, 10', 20', 10', 20', 8')$; espacio de configuraciones para los K dados.

Pueden definirse casos intermedios en que se presenta una alternancia de dimensiones solo en planta, con repetición simple en alzado, quedando $(n_x, n_y, n_z, K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2}, K_z)$ u 8 parámetros -como en el ejemplo anterior-, o a la inversa, repetición pura en planta y alternancia en alzado, o sea: $(n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_{z1}, K_{z2})$, y 7 parámetros.

La generalización de lo anterior conduce a aquellas retículas en que se repite, en cada dirección del espacio, una secuencia de dimensiones que forman una serie, pudiendo denotarse de la forma: $(n_x, n_y, n_z, (K_{x1}, K_{x2}, \dots, K_{xi}), (K_{y1}, K_{y2}, \dots, K_{yj}), (K_{z1}, K_{z2}, \dots, K_{zk}))$; sin embargo, en arquitectura moderna no son frecuentes retículas tan complejas ya que desde el punto de vista funcional pueden implicar una reducción de la flexibilidad de uso.

2.1 Exploración del espacio de configuraciones

Los casos anteriores cubren un amplio subconjunto del universo de las redes espaciales posibles, y si bien las retículas de proyectos reales pueden ser más complejas e incluir excepciones e irregularidades de todo tipo en orden a responder a requerimientos del programa o del contexto, lo dicho sirve ante todo para mostrar el modo en que el esqueleto dimensional del proyecto -lo que se ha llamado retícula o malla espacial- puede representarse paramétricamente, constituyendo la base para ulteriores transformaciones formales.

En orden a simplificar el proceso de generación de variaciones, supondremos que sólo determinadas dimensiones son válidas en el proyecto, lo que convierte el espacio de configuraciones en discreto en vez de continuo. Esto equivale al uso de una gama o escala predefinida de dimensiones, que puede o no estar constituida por múltiplos de un módulo básico. Posiblemente, el ejemplo más conocido de escala dimensional lo constituya el Modulor, de Le Corbusier, escala que no tiene carácter modular sino que se basa en la serie de Fibonacci, aprovechando sus propiedades aditivas [9].

Aquí se utilizará la serie dimensional generada por el módulo de 60 cm, que es ampliamente utilizada en proyectos contemporáneos, bien entendido que esto se trata de una simplificación de cara al ejercicio a realizar. La serie constará de los siguientes miembros: $S =$

{60, 120, 180, 240, 360, 540, 600, 660, 720, 780, 840, 900, 960...} (unidades en cm). Partiendo de esta escala se generará automáticamente, a modo de ejemplo, una serie de 16 redes espaciales que constituyen posibles estructuras geométricas para un mismo proyecto arquitectónico (fig. 7).

Para ello se mantienen constantes los valores (n_x, n_y, n_z, K_z) donde $(n_x, n_y) = (7, 5)$, y el valor de (n_z, K_z) se supondrá irrelevante. Los parámetros que se hacen variar son $(K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2})$, si bien K_{x1} y K_{x2} por un lado y K_{y1} y K_{y2} por otro son variables ligadas entre sí de modo que $K_{x1} + K_{x2} = 1200$ cm y $K_{y1} + K_{y2} = 1200$ cm. Por tanto, aunque el espacio de las variaciones resultantes es en principio de dimensión 4, dado que las medidas en cada dirección están ligadas dos a dos este espacio puede representarse en un plano (fig. 8).

De este modo es posible generar sistemáticamente las posibles redes espaciales asociadas a un proyecto determinado y a la escala dimensional que se considera adecuada al problema en cuestión. Una vez generadas será igualmente posible manipular estas redes espaciales mediante algoritmos predefinidos.

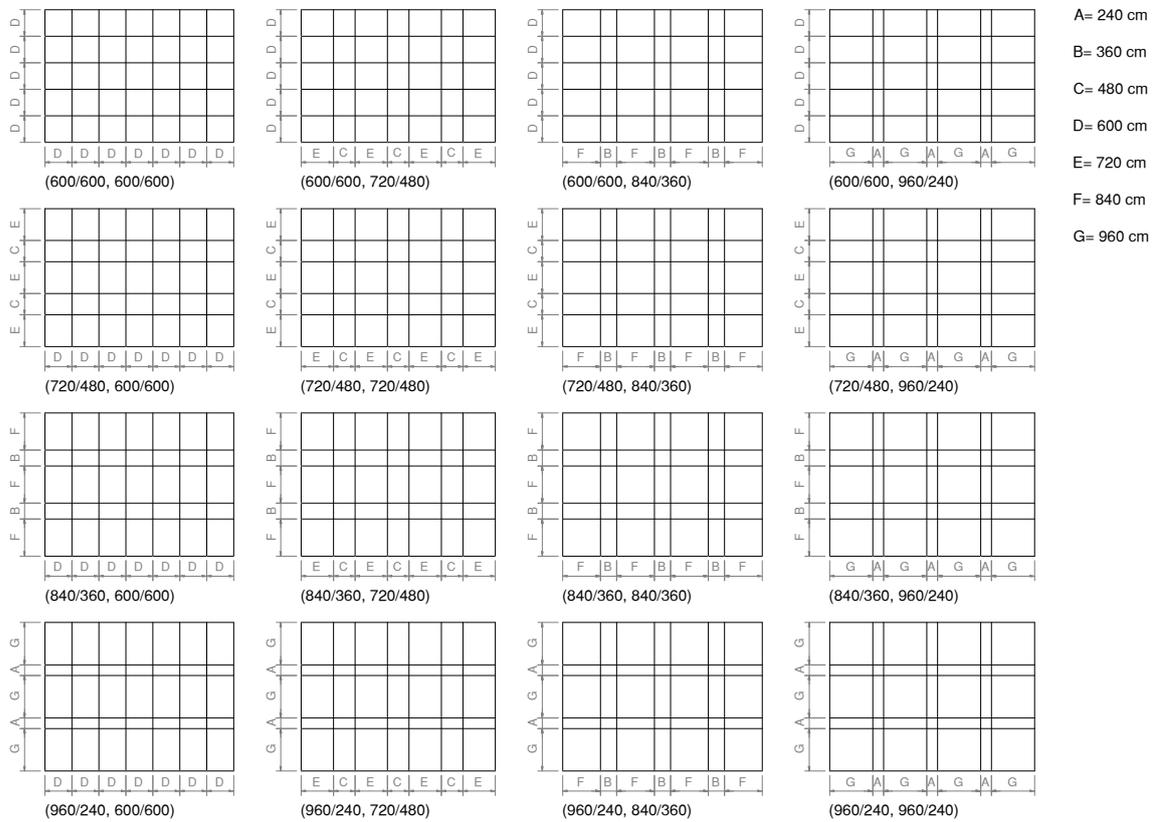


Figura 7. Redes espaciales generadas mediante trayectorias en el espacio de configuraciones, para $(n_x, K_z) = \text{constante}$. Se representa solo la planta.

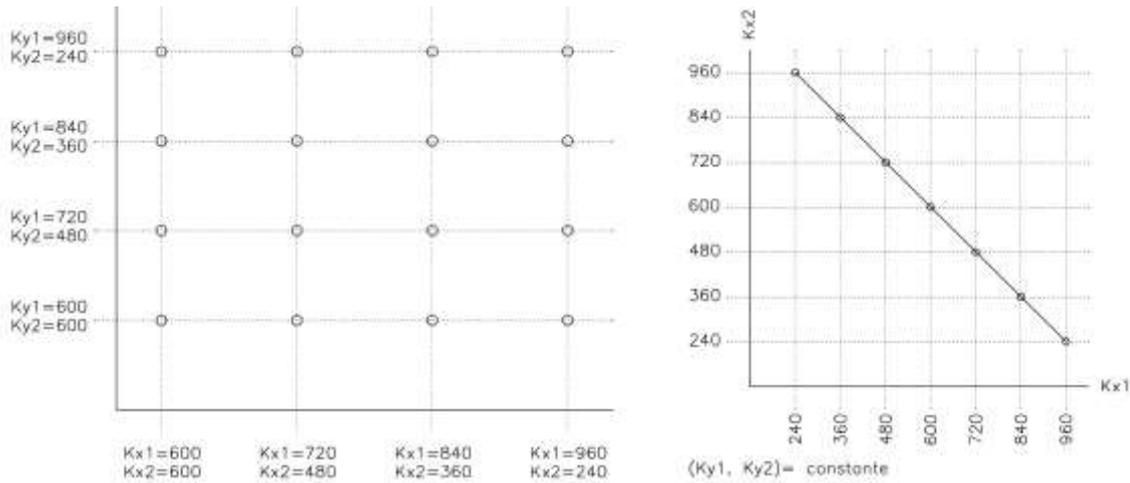


Figura 8. Espacio de variaciones del caso anterior, y sección del espacio de configuraciones para $(Ky1, Ky2) = \text{constante}$, mostrando la trayectoria en dicho espacio descrita en la generación de las variaciones de la figura x. Dicha trayectoria consiste en una recta debido a la condición impuesta: $Kx1 + Kx2 = 1200 \text{ cm}$.

2.2 Generación aleatoria de configuraciones

En determinados casos puede preferirse la generación aleatoria de configuraciones a su obtención sistemática, por ejemplo como estrategia heurística. Esto, que en el ámbito de las matemáticas puede relacionarse con métodos estocásticos de optimización (que en este contexto consistiría en la generación aleatoria de configuraciones para su evaluación y búsqueda de configuraciones óptimas), en el ámbito de las artes tiene su paralelo en procedimientos como los métodos aleatorios en música contemporánea: permiten la producción de material sin intervención de la voluntad del autor, o cuando menos de los mecanismos críticos o censores que favorezcan las variantes que se asemejan a lo conocido.

Como ejemplo de esto, las redes de la fig. 9 (lado izquierdo) se han generado del modo siguiente: se dispone una estructura básica consistente en un rectángulo horizontal de $3000 \times 1440 \text{ cm}$, dividido en tres bandas horizontales de $240, 480 \text{ y } 720 \text{ cm}$. A continuación, para cada banda se genera una serie cuyos términos son elementos de la escala dimensional de 7 términos $E = \{120, 240, 360, 600, 720, 840, 960\}$, tomados aleatoriamente. Esta serie, consistente en múltiplos de 120 cm al igual que la dimensión de 3000 cm , es tal que siempre es posible descomponer la dimensión total de 3000 cm en una suma de sumandos de esta serie, sin resto.

Para la generación de números pseudoaleatorios puede emplearse bien las instrucciones tipo RND o equivalentes normalmente disponibles en los compiladores, generadores basados en algoritmos tipo LCG (Linear Congruential Generator), que si bien muestran una distribución no homogénea de números aleatorios pueden servir para diseños con un número pequeño de grados de libertad; si se desea una distribución de números aleatorios realmente homogénea, es preferible construir un algoritmo específico; a este

respecto, puede consultarse [10] para una discusión acerca de las limitaciones del LCG y encontrar listados en lenguaje C con generadores alternativos.

En las fig. 9 se muestran las redes generadas según lo anterior (izquierda) y algunos ejemplos de aplicación del mismo procedimiento sobre un volumen cúbico (derecha).

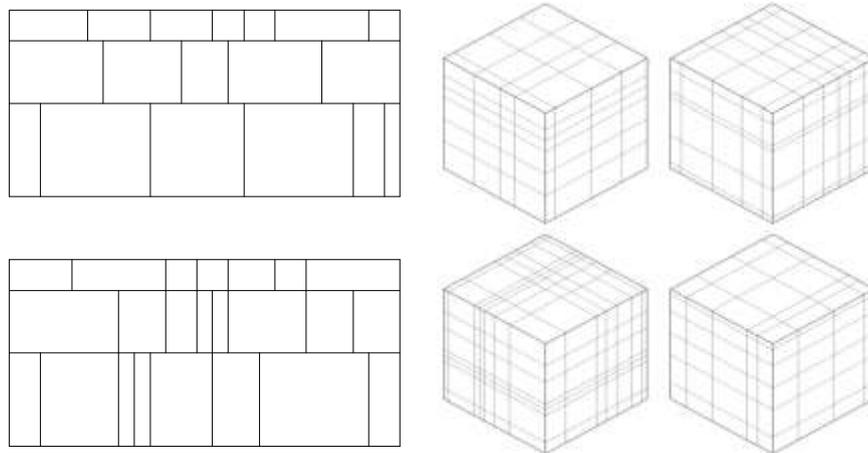


Figura 9. Redes generadas aleatoriamente; a la izquierda, en el plano; a la derecha, en el espacio.

3. Patrones de modificación de forma

Una vez definida la estructura formal básica del proyecto, ya sea de modo sistemático o aleatorio, será posible aplicar de modo similar otros algoritmos para la concreción ulterior de la forma. Esta definición formal se realizará aquí mediante dos operaciones básicas:

- Se asimilarán los planos virtuales definidos por la retícula espacial a elementos constructivos y estructurales concretos como son forjados, cubiertas, fachadas, muros o tabiques.
- A la forma resultante de la operación anterior se le aplicarán algoritmos de asignación de atributos formales, como pueden ser el grado de transparencia / opacidad (o dicho en términos arquitectónicos: sólidos / vacíos), según patrones concretos. El carácter algorítmico de esta asignación de patrones permite, al igual que ocurría con la generación misma de las retículas espaciales, una exploración bien sistemática bien aleatoria de las variaciones posibles.

De esta manera es posible aplicar en continuidad los mismos procedimientos tanto en la generación del esquema formal al nivel más genérico como en la definición de los detalles de la forma.

3.1 Asignación aleatoria de atributos

Como caso más sencillo de patrón de asignación de atributos podría tomarse el no-patrón, es decir, aquel algoritmo que aprovecha la capacidad del ordenador para generar números aleatorios.

No son infrecuentes los casos en que en arquitectura contemporánea se ha empleado el azar como recurso para la definición formal, a menudo aplicado en elementos convenientemente insertados en una estructura ordenada como soporte. Ejemplo de ello es el alzado a la Plaza del Cardenal Beluga de la ampliación del ayuntamiento de Murcia, obra de Rafael Moneo, que en palabras del propio autor “se organizó aleatoriamente” [11], tomando los forjados como elementos horizontales estables que sirven de apoyo a los montantes dispuestos aleatoriamente (fig. 11).

Para el análisis de este ejemplo se ha partido del alzado publicado en [12]. A falta de un plano con todas las cotas, se ha medido sobre el dibujo escalado, por lo que puede haber un mínimo error en las mediciones. Pequeñas imprecisiones aparte, el alzado parece estar pautado según un módulo de 30 cm, de modo que todas las pilastras tienen una anchura de 60 cm y los huecos entre ellas responden a las siguientes medidas:

$$A= 30 \text{ cm} / B= 60 \text{ cm} / C= 90 \text{ cm} / D= 120 \text{ cm} / E= 150 \text{ cm} / F= 180 \text{ cm} / G= 300 \text{ cm}.$$

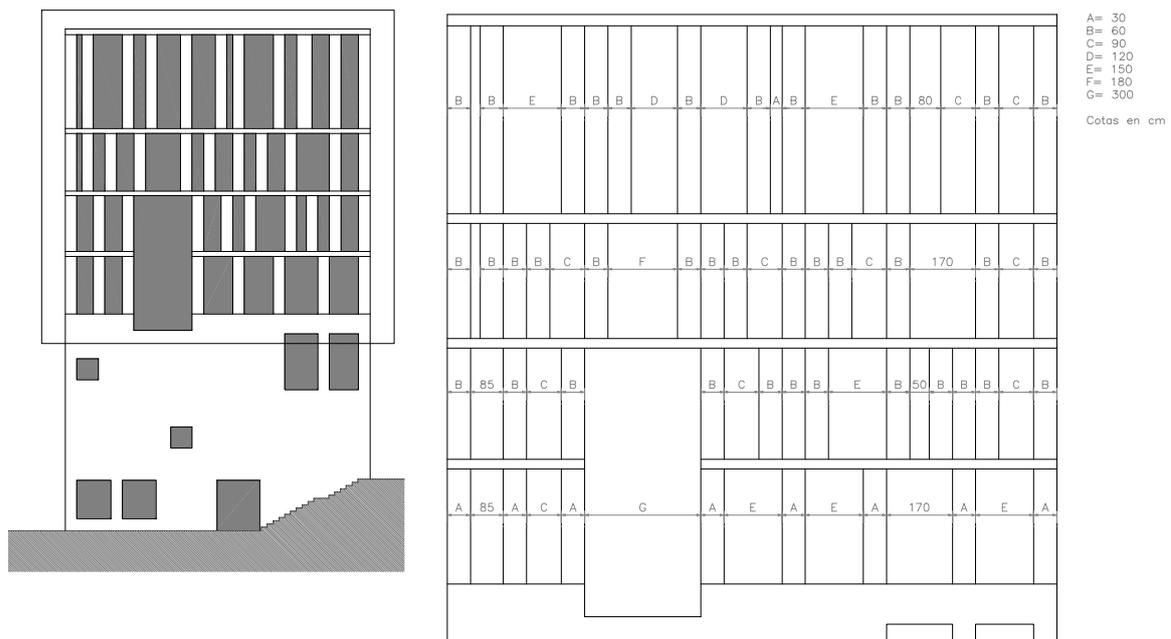


Figura 11. Alzado oriental de la ampliación del ayuntamiento de Murcia, obra de Rafael Moneo. Dibujo del autor.

Pese a lo anterior, se detectan algunas dimensiones que no encajan completamente en este patrón. De cara a la modelización del alzado, supondremos que la anchura total es de 1590 cm, y que las dimensiones empleadas se reducen a las enumeradas.

Si se define un algoritmo que genere secuencias de dimensiones formadas por la alternancia entre la dimensión fija de la pilastra, de 60 cm, y una dimensión tomada al azar de entre las de la serie mencionada, manteniendo la condición de que la suma de los elementos de la secuencia sea de 1590 cm, se obtienen formas muy similares a las del alzado anterior (fig. 12).

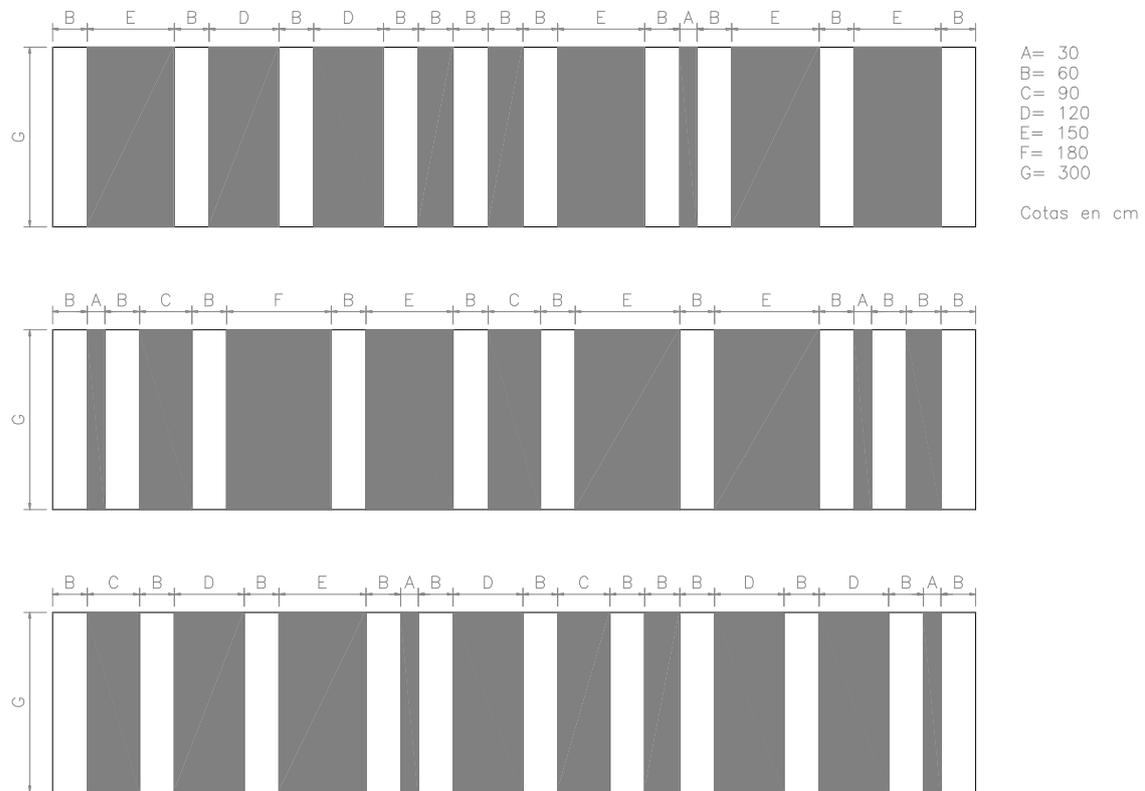


Figura 12. Ejemplos de secuencias aleatorias de sólido/vacío utilizando la misma escala de dimensiones que en la figura 11.

En cuanto a las dimensiones que no son múltiplos de 60 cm, es posible argumentar su conveniencia desde el punto de vista formal: evitan una rigidez visual excesiva, producida precisamente por el uso de dimensiones que son en todos los casos múltiplos exactos de un mismo módulo. Si se desea emplear este tipo de “contaminaciones” dimensionales es fácil adaptar el algoritmo para ello, toda vez que se tenga en cuenta que hay que introducir dos dimensiones “espurias” por fila para que la suma total de los intervalos encaje sin resto en la anchura total, como ocurre en el ejemplo mostrado. Esto es algo que puede descuidarse si se emplean solo dimensiones pertenecientes a la escala definida inicialmente, pues el carácter modular de las medidas garantiza la existencia de una secuencia de intervalos cuya suma sea igual a la anchura total sin restos.

Por tanto es posible definir un algoritmo que genere automáticamente secuencias válidas para la forma propuesta, de modo que puedan obtenerse fácilmente un gran número de variaciones para un mismo alzado.

Como aplicación de lo anterior, se elabora un algoritmo que combina la generación de mallas tridimensionales tal como se vio más arriba con la asignación aleatoria de atributos; en este caso las posiciones de la red contienen planos sin espesor a los que se asigna el valor “vacío” de forma aleatoria. De esta manera, la aplicación de patrones aleatorios se extiende a las tres dimensiones del espacio. Así se han obtenido las imágenes de las figs. 13 y 14.

La producción aleatoria de imágenes arquitectónicas tiene aquí el mismo sentido que en la escritura automática o la música estocástica mencionada más arriba: evitar el sesgo introducido por la mano que dibuja; es, por tanto, una estrategia heurística.

Existen otros ejemplos de asignación aleatoria de atributos distintos del par sólido / vacío, como la Colorium Tower en Dusseldorf, obra de Alsop Architects [13], en que los atributos asignados son colores de una paleta predefinida; sin embargo, la discusión se limitará aquí al par mencionado.

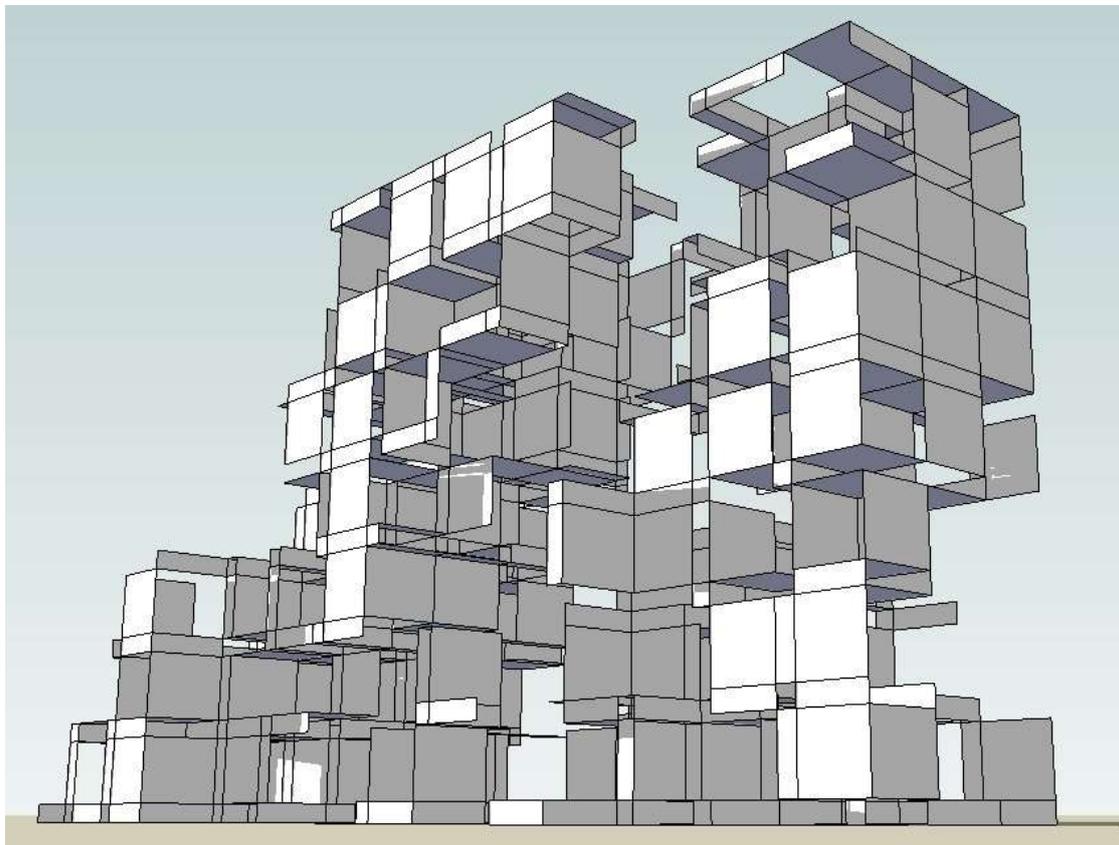


Figura 13. “Ciudad – Alea”; imagen obtenida mediante generación de una malla tridimensional consistente en una alternancia a la que se aplica una eliminación aleatoria de planos.



Figura 14. Habitantes de "Ciudad-Alea" dando paseos aleatorios de Markov.

3.2 Asignación de atributos conforme a patrones predefinidos

Para la asignación de atributos conforme a patrones predefinidos partiremos de la idea de "arquitectura de catálogo" enunciada por el crítico italiano Bruno Zevi [14]. Según esto, la composición del edificio consistiría en el ensamblaje sobre la retícula espacial de elementos predefinidos. En nuestra discusión esta idea es particularmente útil, ya que la definición del catálogo de atributos y a continuación la definición del patrón de su asignación completan el proceso de generación algorítmica de forma:



Aquí el patrón de asignación no será ya aleatorio, sino que supondrá un grado de simetría u orden, y los atributos ya no serán simplemente lleno / vacío o colores, sino que podrán consistir en principio en cualquier combinación de cualidades. En un planteamiento estructural, la combinación de cualidades de los distintos atributos formará igualmente una secuencia inteligible, lo que proporcionará un grado de simetría adicional a la forma.

Como ilustración de esto, se propone el siguiente ejemplo: se parte de una red espacial $R_1 (n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_z) = (6, 4, 4, 720, 720, 360)$, representada en la fig. 15. A continuación se define el catálogo de atributos a asignar a las celdas con caras contenidas en la envolvente de la red. En este caso dichos atributos consistirán en una serie de huecos que forman ellos mismos una secuencia tal que garantiza no solo la unidad formal del catálogo mismo sino también una relación de autosemejanza con la red definida, a la vez que se satisfacen otros requisitos puramente arquitectónicos como la legibilidad de las dimensiones del objeto.

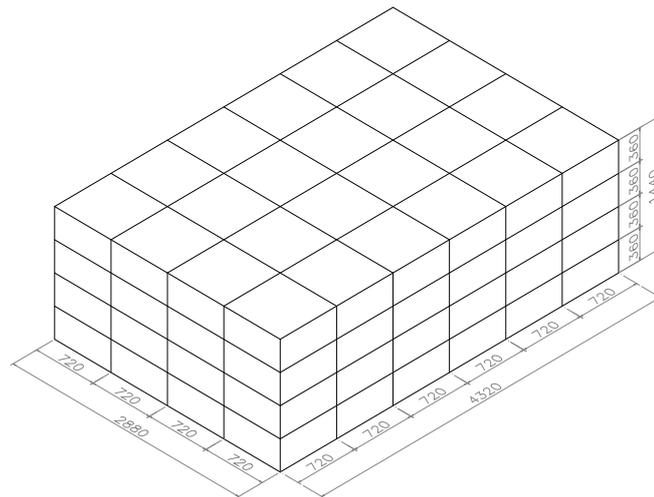


Figura 15. Red espacial $R_1 (n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_z) = (6, 4, 4, 720, 720, 360)$.

En esta red las celdas tienen todas las mismas dimensiones en alzado (720 x 360 cm), lo que facilita la definición del catálogo de atributos. En principio, el número de atributos a emplear será tal que responda a la simetría del patrón de aplicación a utilizar, de modo que no se produzcan adyacencias no deseadas de celdas con atributos iguales. Por otro lado, según el teorema de los cuatro colores (ver por ejemplo [15]), para colorear un mapa cualquiera sin que aparezcan regiones adyacentes del mismo color, basta utilizar cuatro colores distintos.

El teorema es aplicable en este caso ya que la envolvente de la retícula espacial es topológicamente equivalente a un plano.

Estos atributos se definen como huecos recortados en la cara de la celda básica de la red, y forman una progresión desde el atributo tipo $n=0$, que constituye el paño sólido sin hueco, hasta el tipo $n=3$, que consiste en un hueco de ancho $2^3 * 60 = 480$ cm y alto $2^3 * 60 / 2 = 240$ cm. Los huecos abiertos en el muro son alternativamente horizontales y verticales, en todos ellos el lado corto es la mitad del lado largo, y sus lados largos forman la sucesión: $L(n) = M * 2^n$, con $n = \{1, 2, 3\}$ y donde M es el módulo constructivo, en este caso $M = 60$ cm. Todos los huecos son rectángulos semejantes entre sí y a la cara de la celda unidad.

Por tanto, definiremos un catálogo con cuatro atributos (fig. 16):

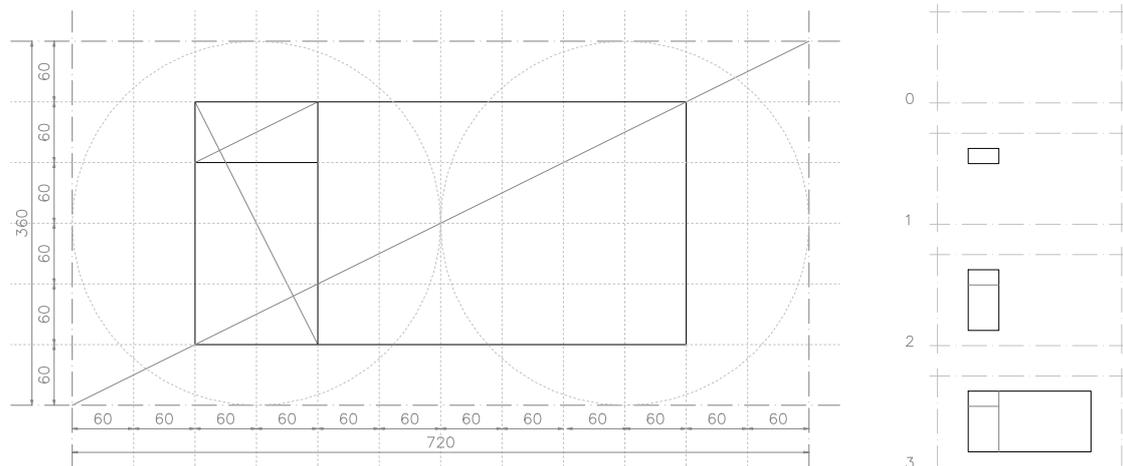


Figura 16. Catálogo de cuatro atributos (0, 1, 2, 3).

Puede definirse fácilmente un algoritmo que genere el catálogo; en concreto, si estamos utilizando POO (Programación Orientada a Objetos; en este caso, C++), puede definirse el hueco como objeto del modo siguiente:

```
class Hueco {
float h, v, lado_horizontal, lado_vertical;
public:
    Hueco(int n)
    {
        h= (1+pow(-1, (n+1))) / 2;
        v= (1+pow(-1, n)) / 2;
        lado_horizontal= 30*(pow(h*2, n+1) + pow(v*2, n));
        lado_vertical= 30*(pow(v*2, n+1) + pow(h*2, n));
    };
};
```

Forma un tanto enrevesada de definir en una sola expresión y con un solo parámetro (n) la dimensión y la orientación alternante de los huecos, haciéndose depender esta última de la paridad de n (n par \rightarrow hueco vertical / n impar \rightarrow hueco horizontal), de modo que:

$n=1 \rightarrow$ (lado_horizontal, lado_vertical)=(120 cm, 60 cm).

$n=2 \rightarrow$ (lado_horizontal, lado_vertical)=(120 cm, 240 cm).

$n=3 \rightarrow$ (lado_horizontal, lado_vertical)=(480 cm, 240 cm).

Como se puede comprobar, esto se corresponde con las dimensiones de los huecos tal como se indica en la fig. 16. En esta notación, lado_horizontal corresponde a la medida del lado horizontal del hueco y lado_vertical con la del vertical.

El último paso consiste en la definición del patrón de asignación de atributos. Suponiendo cada cara del ortoedro de partida dividido en cuatro regiones, un patrón posible sería el mostrado en la fig. 17. De entre las varias configuraciones posibles, en esta se evitan caras adyacentes con el mismo atributo y el patrón resultante posee interesantes propiedades adicionales en lo que a su simetría se refiere.

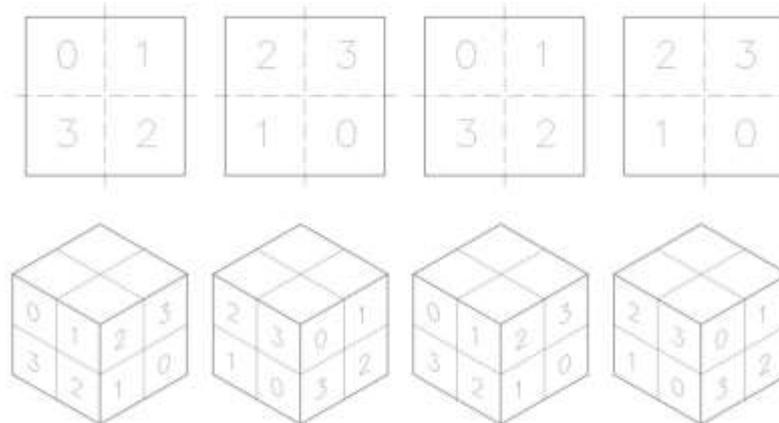


Figura 17. Patrón de asignación de atributos a celdas de la red espacial.

La subdivisión del ortoedro de partida (fig. 15) puede realizarse de modo parecido a como se han generado redes espaciales de forma sistemática, solo que por tratarse de un espacio de solo tres parámetros, relativamente reducido, podrían obtenerse todas las combinaciones posibles fácilmente. En la fig. 18 se muestran tres ejemplos de subdivisión de dicho ortoedro de cara a la asignación de atributos.

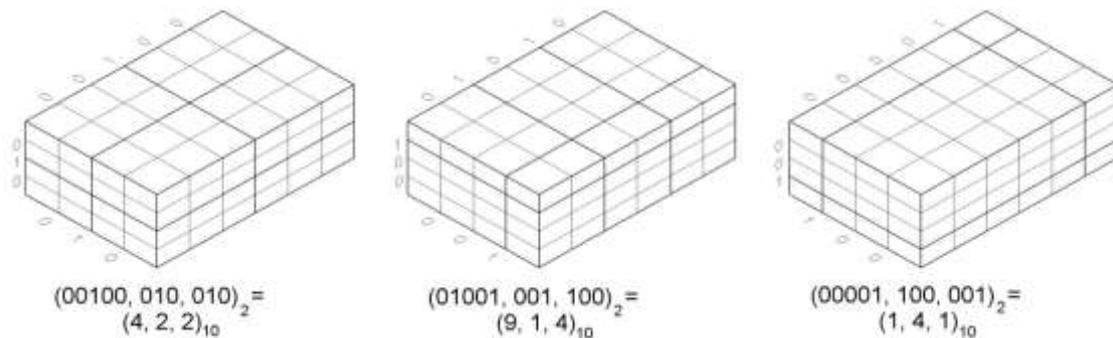


Figura 18. Subdivisión del ortoedro de partida en regiones. El parámetro que define las subdivisiones en cada cara del ortoedro se define a partir del número en base 2 obtenido asignando valor 0 a las celdas que no se corresponden con subdivisión y 1 a las que sí se corresponden con ésta.

Por tanto, sería posible generar sistemáticamente la totalidad del espacio de configuraciones o un subconjunto de este, y aplicarle el patrón de asignación de atributos indicado. En la fig. 19 se muestra el resultado de aplicar el patrón de atributos descrito para la subdivisión $(1, 4, 1)_{10}$ de la fig. 18. Notar que los atributos $n=1$ y $n=2$ se utilizan indistintamente en vertical y horizontal; esto responde a las necesidades de las estructuras visuales generadas, que son específicas de la subdivisión elegida, y de más difícil codificación.

El patrón presenta interesantes simetrías, resultantes precisamente del carácter sistemático empleado en la definición tanto del catálogo de atributos como del patrón de asignación. Por ejemplo, a la región con un atributo tipo n le corresponde siempre, en la cara opuesta del ortoedro, un atributo tipo $n-2$ (para $n \geq 2$; para $n \leq 2$, al atributo n le corresponde

un atributo $n+2$ en la cara opuesta del ortoedro). Estas simetrías proporcionan a la forma un grado superior de unidad, y son una buena razón para la aplicación de este tipo de procedimientos.

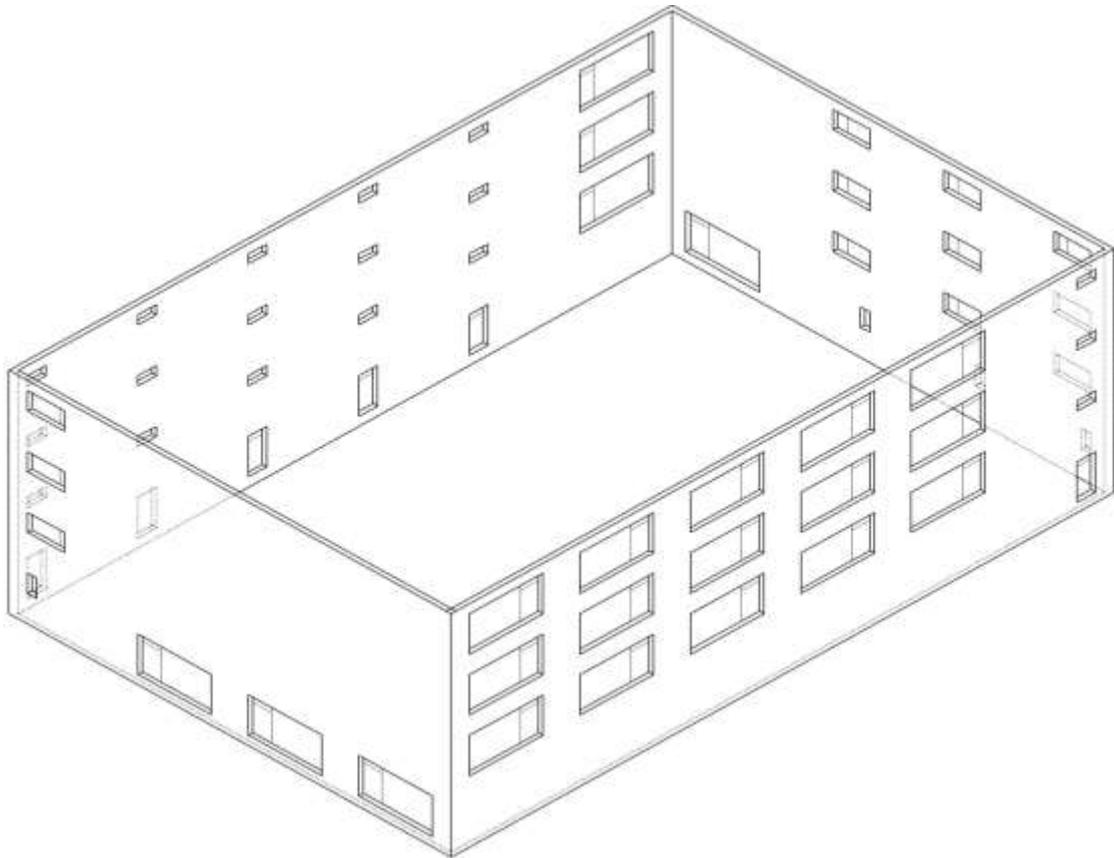


Figura 19. Aplicación, sobre la subdivisión $(1, 4, 1)_{10}$ de la figura 18, de los atributos definidos en la figura 16 asignados según el patrón descrito.

Con este ejemplo queda por tanto descrito el proceso completo de definición del proyecto desde la retícula espacial hasta la definición de su estructura de llenos y vacíos mediante el uso de algoritmos. El alzado de la fig. 19, con la secuencia de huecos obtenida, prácticamente define la estructura interna del objeto. La forma obtenida es deliberadamente convencional en orden a demostrar cómo la simetría entendida en sentido clásico se relaciona con la idea de forma generada algorítmicamente, solo que precisamente por su carácter algorítmico es fácil generar variantes ya sea con una intención heurística, ya sea con la de someter las formas obtenidas a procesos de optimización.

3.3 Autosemejanza

La idea matemática de autosemejanza tiene su equivalente en arquitectura en la idea de coherencia formal como uno de los recursos más extendidos para la unidad formal y la

simetría. La repetición de un único tema formal en los distintos niveles del proyecto es análoga a la idea de autosemejanza que caracteriza a los objetos fractales, bien entendido que se trata de una analogía instrumental, casi una metáfora, ya que en el objeto arquitectónico, con sus requerimientos materiales, funcionales y contextuales, es difícil aplicar rigurosamente esta idea, y además el concepto de fractal implica el paso al límite para que aparezca la dimensión fraccionaria, lo que evidentemente no ocurre en arquitectura.

No faltan proyectos en que se han utilizado objetos fractales directamente como formas arquitectónicas, en especial las figuras de Sierpinsky en sus distintas versiones. Dado que el número de estas figuras es limitado, y más aún el de aquellas utilizables como objetos arquitectónicos, éste es un camino que se agota con rapidez. Lo que aquí se propone es el uso de la metáfora fractal de un modo abierto, de dos maneras:

- Uso de la construcción de Mandelbrot, en un número limitado de iteraciones, para generar una estructura formalmente coherente, y que impuestas ciertas condiciones dimensionales a priori sea susceptible de albergar un uso y/o responder a un contexto dado en virtud de las propiedades formales resultantes del proceso de generación.
- En un sentido aún más laxo, tomar la construcción de Mandelbrot para la generación de forma sin más iteraciones, pues la operación de definir un iniciador y generar una forma por ensamblaje de dicho iniciador según un algoritmo que produzca una forma con un grado de simetría resultante de la aplicación misma del algoritmo es ya interesante de por sí.

En este sentido, tomamos de [16] el procedimiento de construcción de objetos fractales, como por ejemplo la llamada "punta de flecha de Sierpinsky" (fig. 20).

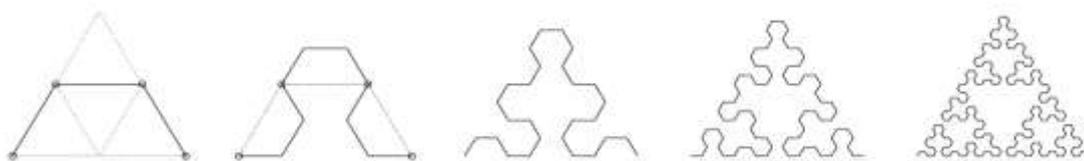


Figura 20. Procedimiento de construcción del fractal "punta de flecha de Sierpinsky".

Para la construcción de esta figura se parte de la línea quebrada de tres segmentos en forma de artesa, obtenida a partir de un triángulo equilátero. A este elemento se le denomina iniciador. A continuación se sustituye, en cada iteración, cada uno de los segmentos de la figura por el iniciador, reducido al tamaño necesario.

Aquí se procederá directamente en el espacio. Definimos un iniciador consistente en una "L" extruida, que quedará definida por los parámetros L (l_x , l_y , l_z , e), tal que l_x , l_y , l_z sean sus dimensiones según los ejes coordenados, y e sea el espesor de la "L" (fig. 21).

Es evidente que pueden emplearse otros iniciadores, tanto más simples (un plano, por ejemplo) como más complejos (U's, Z's); sin embargo se ha obtenido una gran variedad de objetos solo con modificar ligeramente algunos de los parámetros que lo definen, por lo que se limitará aquí el ámbito de búsqueda a este iniciador tipo.

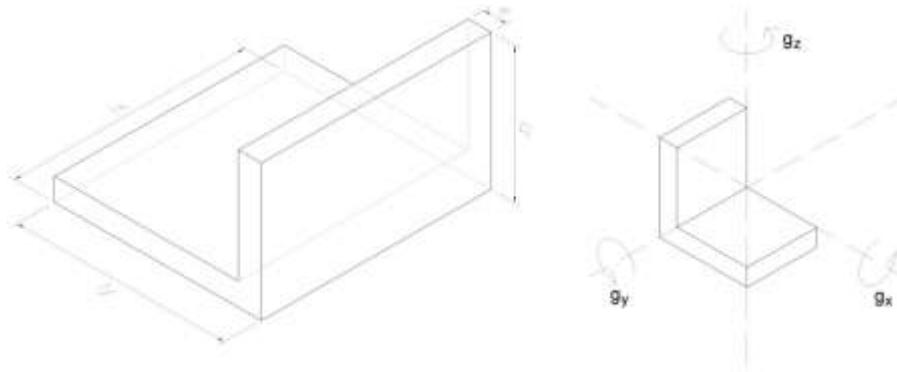


Figura 21. Iniciador en "L" y giros del iniciador en torno a los ejes coordenados.

Se definen las siguientes operaciones aplicables al elemento iniciador (operaciones asimilables en POO a funciones miembro de la clase de objetos que constituyen los iniciadores):

- Rotación en torno a un eje que pasa por el origen y es paralelo a uno de los ejes coordenados. El ángulo a rotar quedará definido por los parámetros (g_x, g_y, g_z) , siendo éstos los ángulos a rotar el elemento en cada iteración en torno a cada uno de los ejes coordenados.
- Traslación del elemento según un vector (v_x, v_y, v_z) .

De este modo, el objeto queda definido por los siguientes parámetros:

- $L(l_x, l_y, l_z, e)$: definición del elemento iniciador.
- $(g_x, g_y, g_z, v_x, v_y, v_z)$: ángulos de rotación y vector de desplazamiento del elemento. Dado que se está operando en el ámbito de la geometría ortogonal, solo se utilizarán aquí ángulos múltiplos de $\pi/2$.
- n : número de elementos de que consta la configuración (número de iteraciones).

Por tanto, cada configuración queda definida por un total de 11 parámetros, que constituyen las dimensiones del espacio de configuraciones del problema planteado. Normalmente, las trayectorias en este espacio serán tales que solo se modifique un número muy limitado de parámetros a la vez, en orden a hacer controlable la generación de variaciones.

Según lo anterior, para la configuración $L(l_x, l_y, l_z, e, g_x, g_y, g_z, v_x, v_y, v_z, n) = (100, 100, 100, 5, -60, -60, -60, 90, 90, 0, 20, 20, 20, 3)$ resultaría la fig. 22.

Un corto paseo por el espacio de configuraciones de esta forma nos da un buen número de ejemplos (fig. 23). Al igual que en los casos anteriores, es posible generar estas configuraciones al azar, o bien mediante trayectorias de búsqueda modificando sistemáticamente parámetros de la forma. En los ejemplos mostrados puede comprobarse como ligeras variaciones en el valor de un número reducido de parámetros produce grandes diferencias entre formas relativamente cercanas en el espacio de configuraciones.

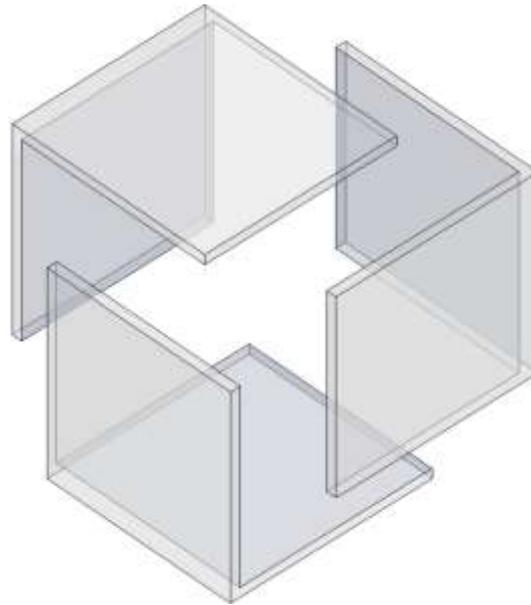


Figura 22. Representación isométrica de la configuración $L(l_x, l_y, l_z, e, g_x, g_y, g_z, v_x, v_y, v_z, n) = (100, 100, 100, 5, -60, -60, -60, 90, 90, 0, 20, 20, 20, 3)$. El origen de coordenadas se sitúa en el centro de la figura.

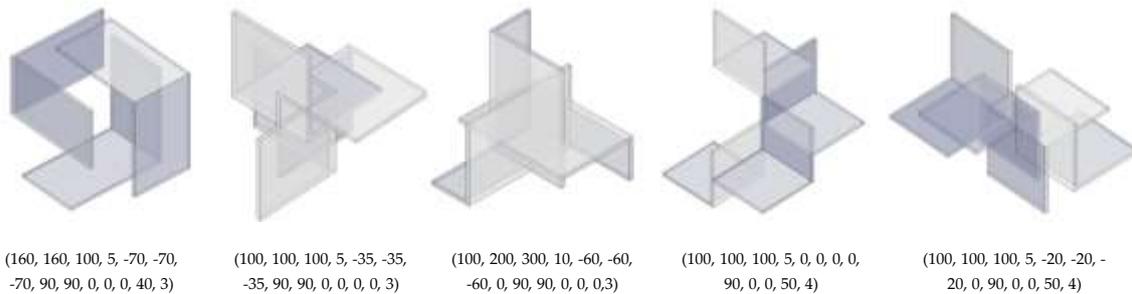


Figura 23. Ejemplo de generación de formas mediante la modificación de los parámetros que las definen.

A partir de aquí resulta sencilla la generación de estructuras formales de interés en el proceso del proyecto, bien sea por combinación de formas de este tipo, bien por la aplicación de iteraciones para obtener estructuras autosemejantes. A modo de ilustración se muestra en las figs. 24 y 25 un boceto de proyecto realizado por estos procedimientos.

4. Conclusión

El presente trabajo ha pretendido ser una exploración inicial, mediante una serie de ejemplos, en el uso de algoritmos matemáticos para la generación de formas arquitectónicas, y en la consiguiente aplicación a la forma arquitectónica de una línea experimental ya presente en otras actividades artísticas como la música, escultura o pintura. Las formas aquí empleadas han sido deliberadamente convencionales en orden a demostrar tanto el carácter matemático del concepto tradicional de unidad formal como la aplicabilidad de estas técnicas al común de la invención arquitectónica que de ello se deriva.

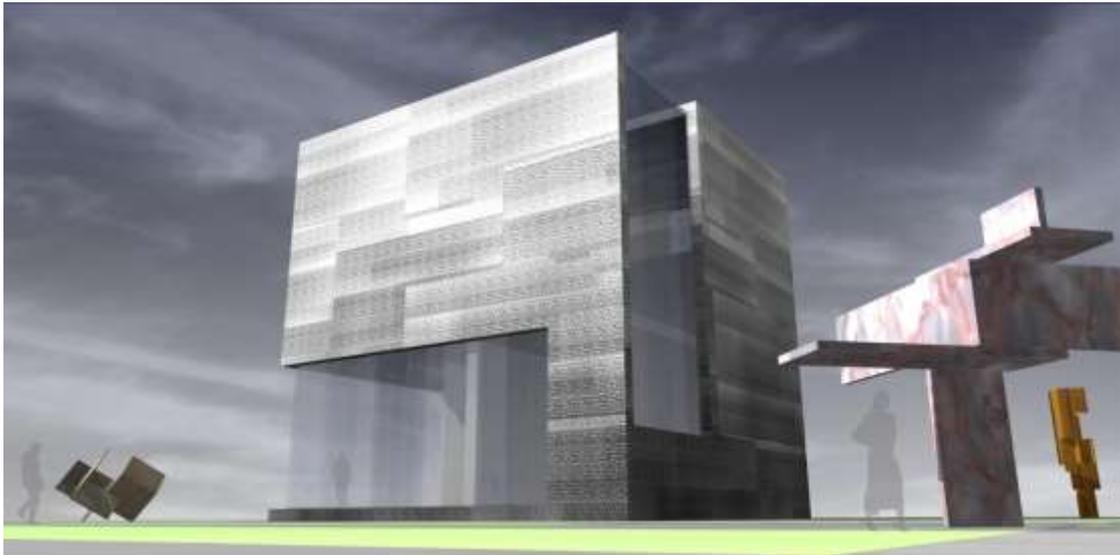


Figura 24. Proyecto de museo de esculturas algorítmicamente generadas.

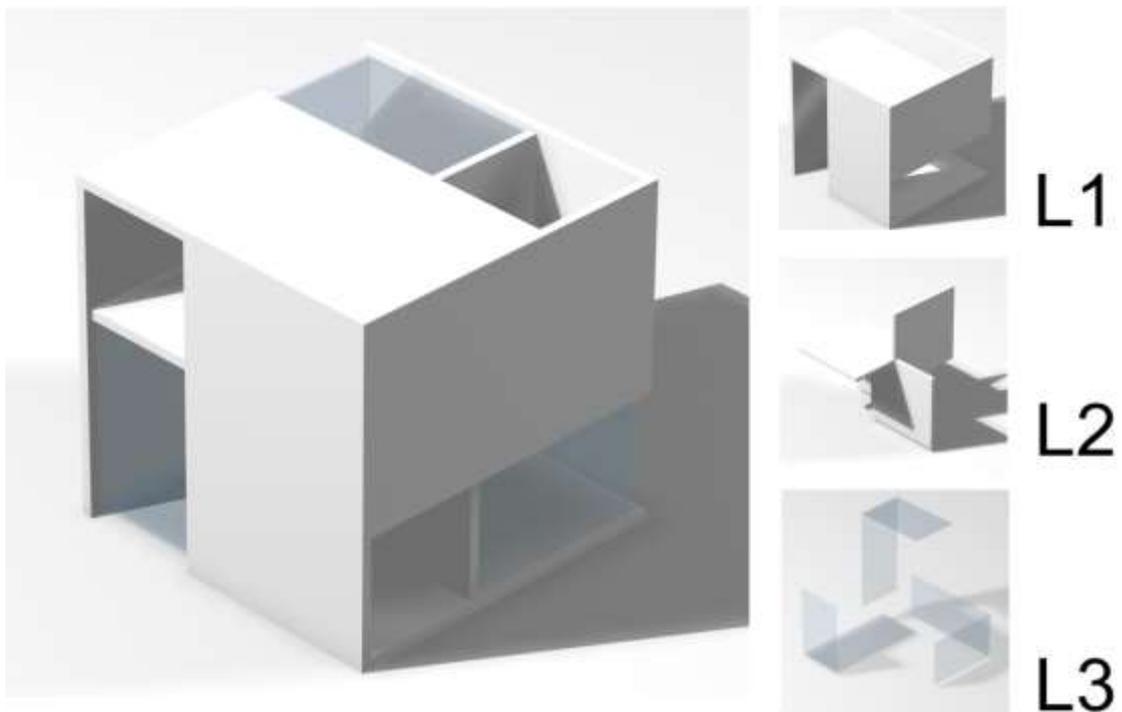


Figura 25. Elementos empleados para el proyecto de la figura 24:

L1 (1870, 1870, 1155, 55, -1065, -880, -860, 90, 90, 0, 0, 0, 0, 3); L2 (1045, 1072, 1100, 55, -220, -220, -220, 90, 90, 0, 0, 0, 0, 3); L3 (1471, 1045, 660, 11, -982, -778, -798, -90, 90, 0, 0, 0, 0, 3).

El objetivo de la aplicación de estas técnicas es el de ensanchar el universo de formas posibles, que ya no estaría limitado a un canon de formas consolidado por la autoridad o la

costumbre, o por una invención no sistemática, ampliando las posibilidades de innovación formal como ha ocurrido allí donde se han utilizado estas estrategias. La invención no sería entonces la de la forma concreta sino la del algoritmo que permite explorar un subconjunto del universo de formas posibles.

5. Apéndice

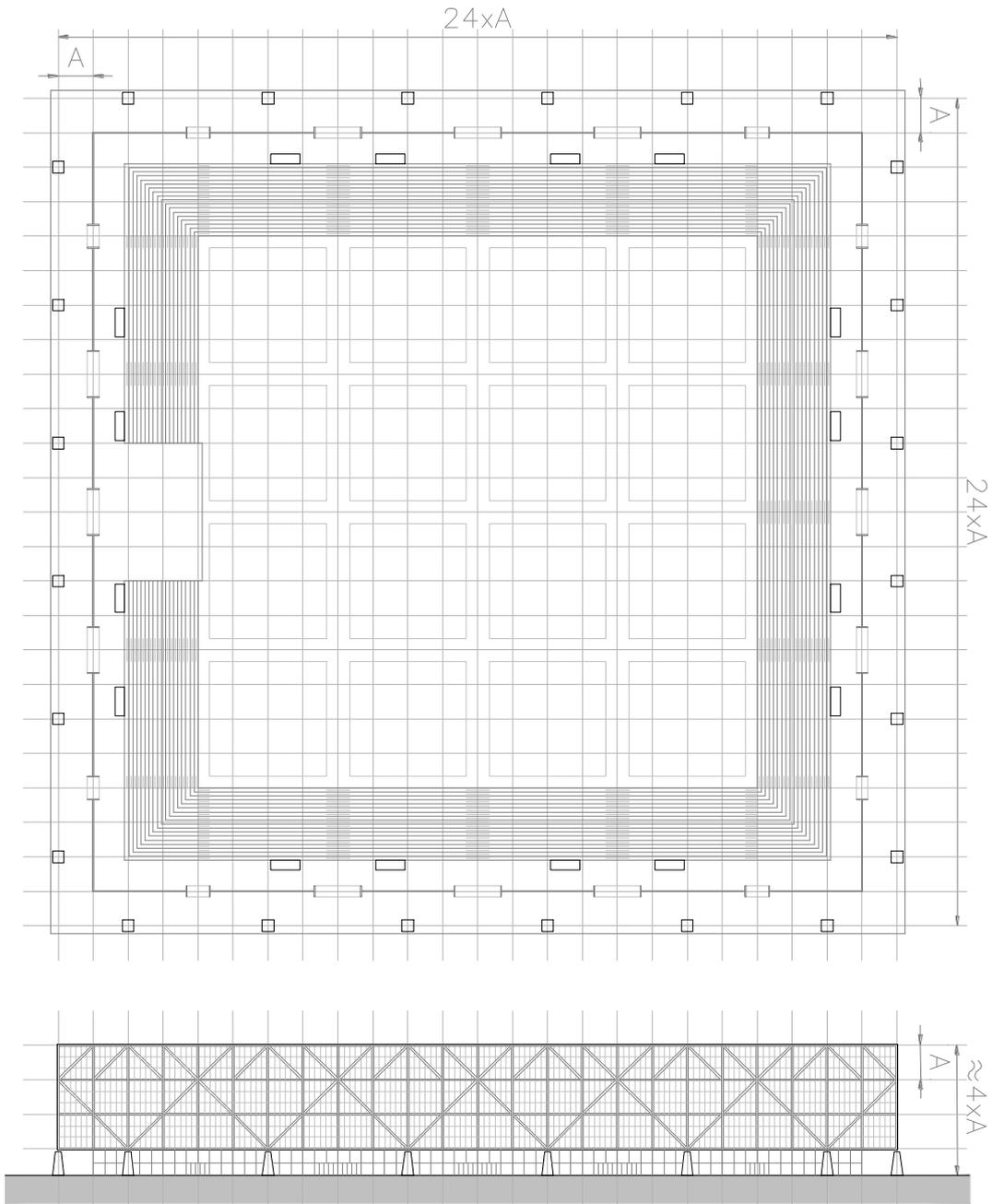


Figura 26. Convention Hall. Arquitecto: Ludwig Mies van der Rohe. Chicago (EE.UU), 1953-54. Dibujo del autor según [3].

Proyecto para el Convention Hall de Chicago. Ejemplo de malla cúbica con $K= 30'$ y $(n_x, n_y, n_z, K)= (24, 24, 4, 30')$. La planta baja tiene una altura de $20'$, por lo que no encaja en la malla de $30'$, aunque sí encajaría en una malla cúbica de $K= 10'$ que incluiría el nivel constructivo (por ejemplo, el despiece de fachada).

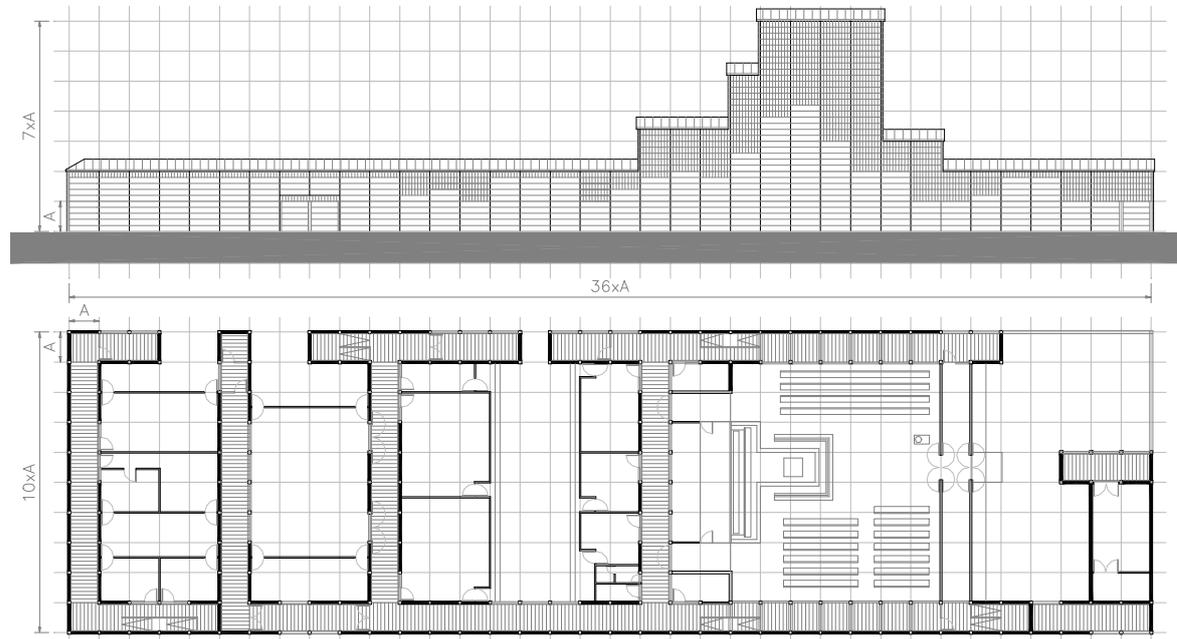


Figura 27. Iglesia en Bagsvaerd. Arquitecto: Jorn Utzon. Copenhague (Dinamarca), 1973-76. Dibujo del autor según [4].

Iglesia en el barrio de Bagsvaerd en Copenhague. Ejemplo de malla cúbica con $K= 220$ cm y $(n_x, n_y, n_z, K)= (36, 10, 7, 220)$. Notar que la cubierta no encaja en la malla descrita, aunque sí en la malla más fina de 44 cm encargada de la definición a nivel constructivo, malla que por ejemplo regula la altura de los paneles de hormigón prefabricado de la fachada. Esta malla constructiva resulta de la división en cinco partes de las celdas de la malla principal. El despiece de las planchas de zinc de la cubierta no parece encajar tampoco en la malla constructiva, como se ve en el alzado.

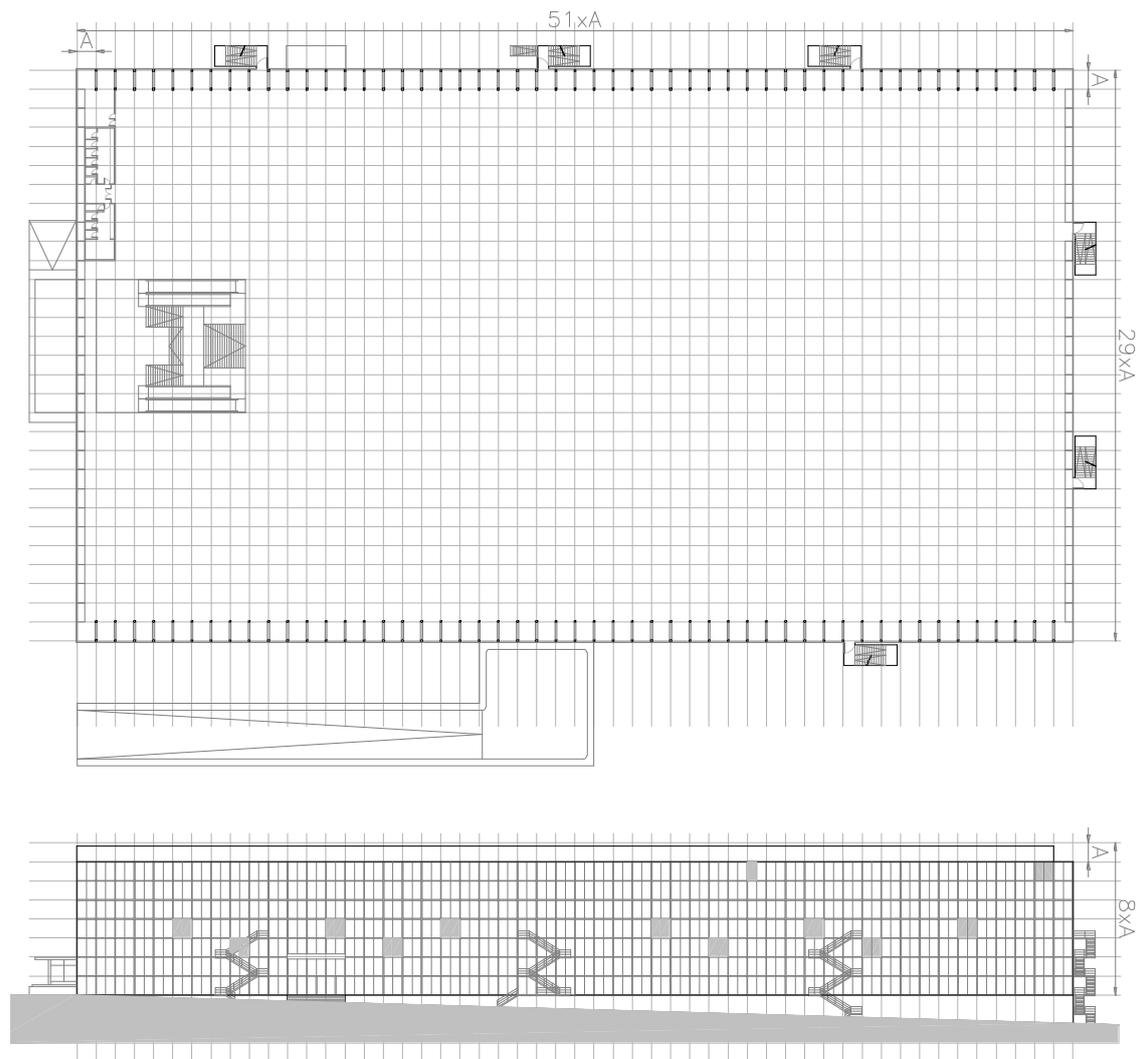


Figura 28. Pabellón de cristal de la Casa de Campo. Arquitecto: Francisco Cabrero. Madrid (España), 1964. Dibujo del autor según [5].

Ejemplo de malla cúbica en que $K=250$ cm. Esta malla regula sobre todo el despiece de las fachadas y el interjeje entre correas de cubierta, siendo la distancia entre pórticos de 500 cm, es decir, $2 \cdot K$.

En los planos puede comprobarse que: $(n_x, n_y, n_z, K) = (51, 29, 8, 250)$.

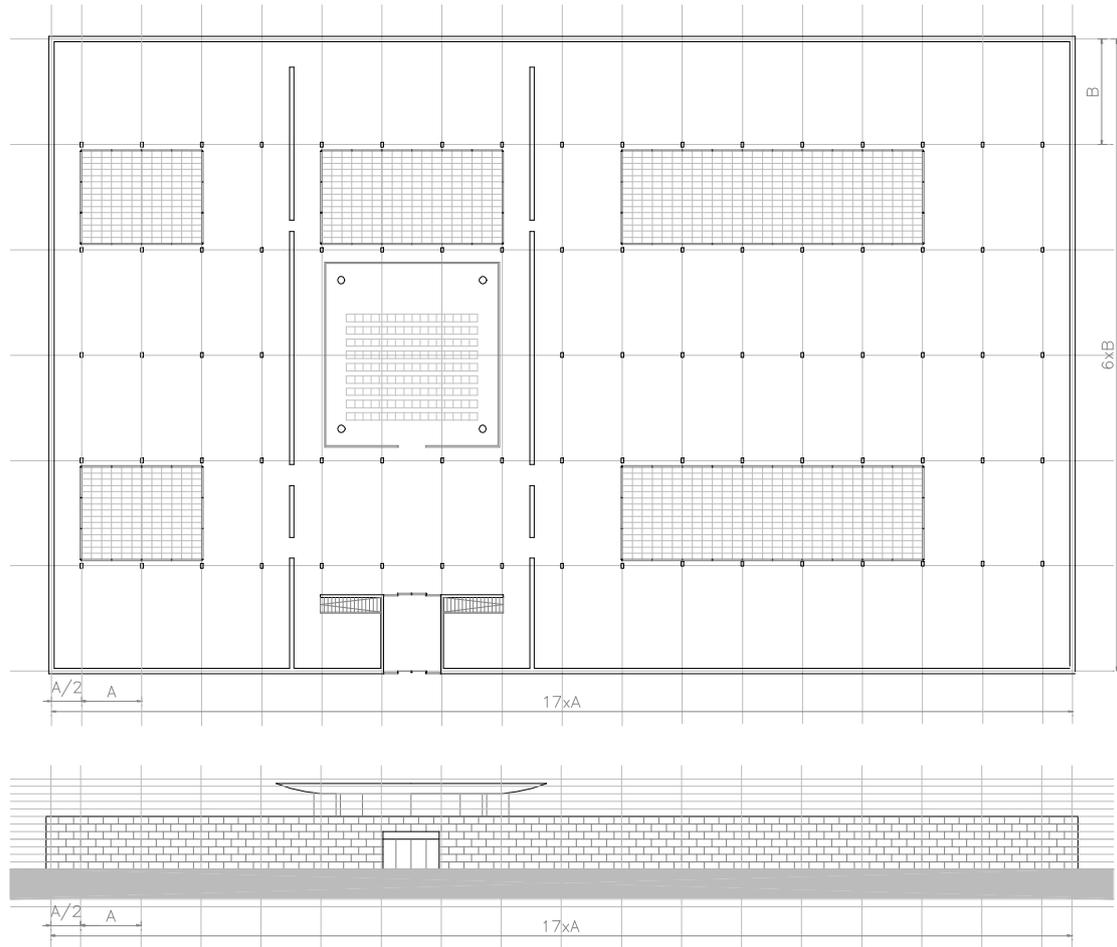


Figura 29. Biblioteca en Rodovre. Arquitecto: Arne Jacobsen. Copenhague (Dinamarca), 1961-69. Dibujo del autor según [6].

Ejemplo de malla anisotrópica en que $K_x \neq K_y \neq K_z$. En este caso: $A = K_x = 440$ cm, $B = K_y = 770$ cm y $C = K_z = 385$ cm, si se considera que $n_z = 1$; sin embargo, de este modo no entrarían en consideración ni la cubierta sobreelevada del salón de actos ni el sótano (no representado). Si se toma $C = 55$ cm, correspondiente a la altura de las hiladas del despiece de piedra de la fachada, se tendrá que la altura del sótano es de 275 cm = $5 * C$, la altura del cuerpo principal será de 385 cm = $7 * C$, y la altura de la cubierta del salón de actos será de 165 cm hasta el borde superior de las ventanas ($3 * C$) y de aproximadamente $4,5 * C = 245,5$ cm hasta el borde superior de la cubierta.

La configuración considerada en este trabajo es: $(n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_z) = (17, 6, 1, 440, 770, 385)$.

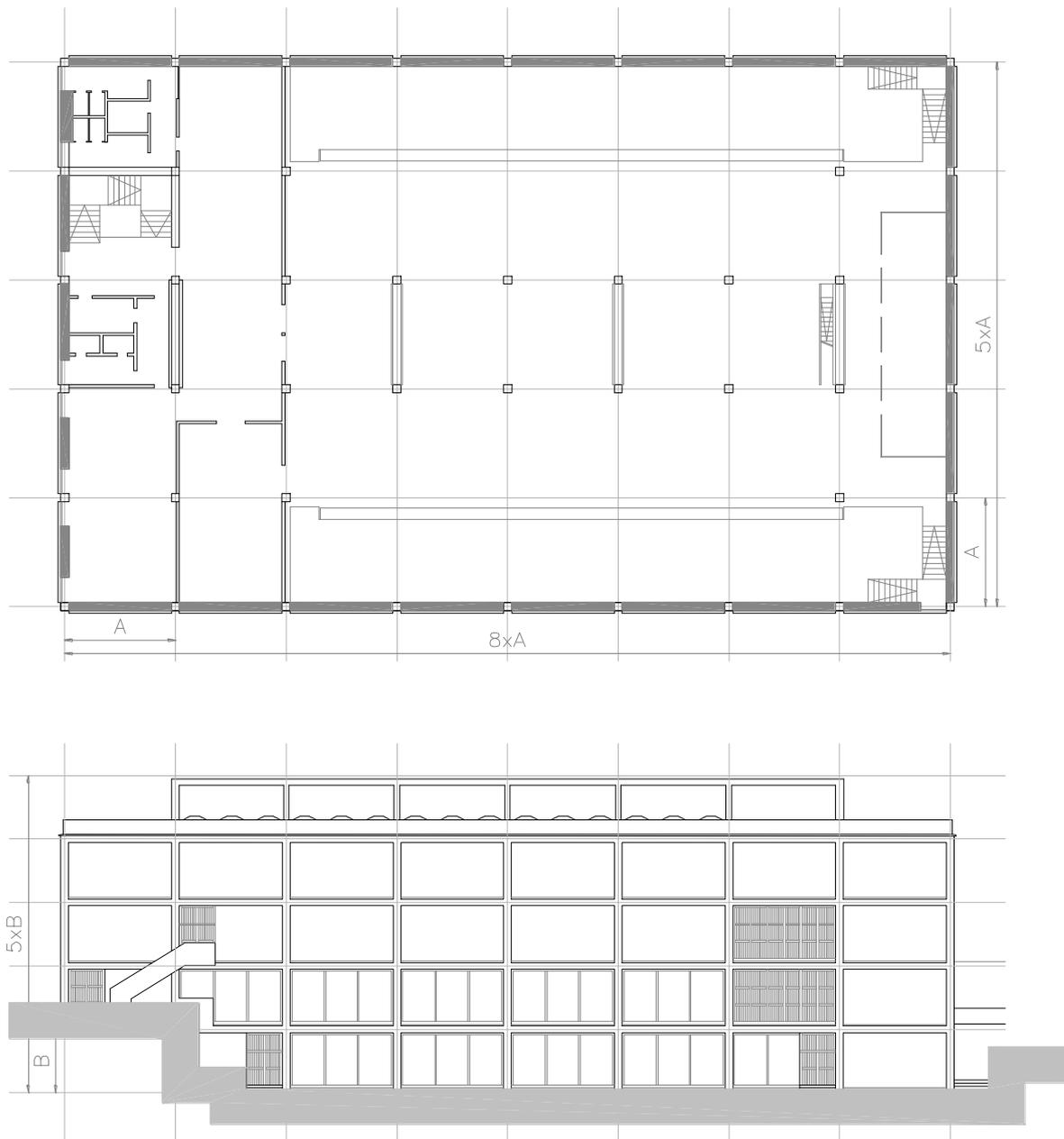


Figura 30. Biblioteca universitaria en Salamanca. Arquitecto: Carlos Puente. Salamanca (España), 1997-2000. Dibujo del autor según [7].

Ejemplo de malla en que se establecen relaciones proporcionales entre las dimensiones K_x , K_y , K_z . Si bien en planta la malla empleada es una cuadrícula ($K_x = K_y$), en alzado se tiene que: $K_z \approx \sqrt{3}$. En este caso: $(n_x, n_y, n_z, K_x, K_y, K_z) = (8, 5, 5, 615, 615, 357)$.

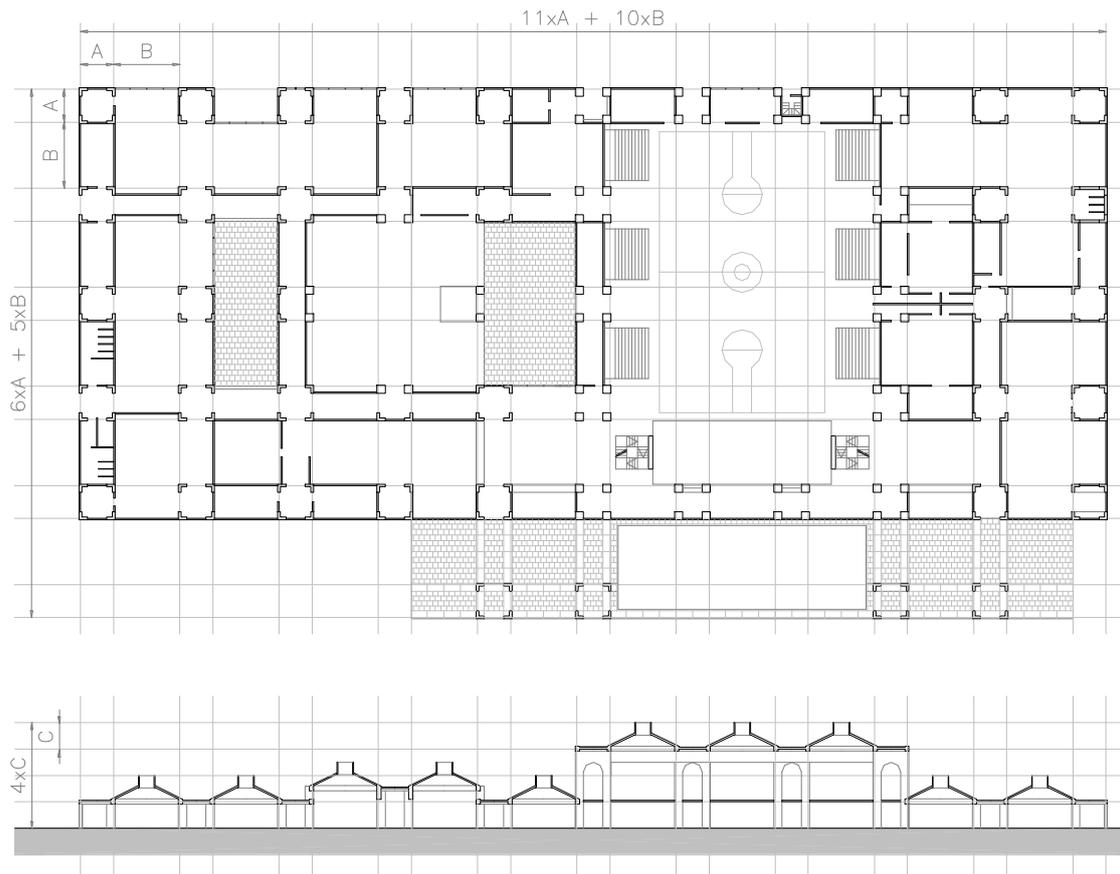


Figura 31. Proyecto de centro comunitario en Trenton. Arquitecto: Louis Kahn. Nueva Jersey (EE.UU), 1954-59. Dibujo del autor según [8].

Ejemplo de malla basada en la alternancia en planta de dos dimensiones. En este caso se tiene: $A = K_{x1} = K_{y1} = 10'$, y $B = K_{x2} = K_{y2} = 20'$. En dirección z se tiene una repetición pura con $C = K_z = 8'$.

Referencias

- [1] ORTEGA, Lluís (editor). *La digitalización toma el mando*. Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 2009.
- [2] LURÇAT, André. *Formes, composition et lois d'harmonie (vol. V)*, p. 207, Éditions Vincent, Fréal & Cie., París, 1957.
- [3] CARTER, Peter. *Mies van der Rohe at work*, pp. 101-107, Phaidon, Londres, 1999.
- [4] NIETO, Fuensanta y SOBEJANO, Enrique (editores). *Jorn Utzon*, pp. 87-93, Centro de Publicaciones - Secretaría General Técnica del Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid, 1995.
- [5] CÁNOVAS, Andrés y CASQUEIRO, Fernando (editores). *Pabellón de Cristal: Cabrero / Labiano / Ruíz*, pp. 154-165, Departamento de Proyectos Arquitectónicos, Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2008.

- [6] SOLAGUREN-BEASCOA, Félix. *Arne Jacobsen*, pp. 178, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1991.
- [7] REVISTA ARQUITECTURA COAM nº 323 (1º trimestre 2001), pp. 68-88, Revista de Arquitectura y Urbanismo del Colegio Oficial de Arquitectos de Madrid, Madrid, 2001.
- [8] RONNER, Heinz y JHAVERI, Sharad. *Louis I. Kahn: Complete work 1935-1974*, pp. 82-91, Birkhäuser, Basilea, 1987.
- [9] LE CORBUSIER. *El Modulor*. Editorial Poseidón, Barcelona, 1976.
- [10] PRESS, William. J., TEUKOLSKY, Saul A., VETTERLING, William T. y FLANNERY, Brian P. *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*, pp. 340-377, Cambridge University Press, Nueva York, 2007.
- [11] MONEO, Rafael. *Apuntes sobre 21 obras*, p. 445, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 2010.
- [12] REVISTA EL CROQUIS nº 98 "Rafael Moneo: 1995-2000", pp. 84, El Croquis editorial, El Escorial, 2000.
- [13] POWELL, Kenneth. *Will Alsop 1990-2000*, pp. 234-235, Laurence King Publishers Ltd., Londres, 2002.
- [14] ZEVI, Bruno. *El lenguaje de la arquitectura moderna*, pp. 17-24 (en particular imagen pág. 19), Editorial Poseidón, Barcelona, 1978.
- [15] WILSON, Robin. *Four colors suffice*, Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [16] MANDELBROT, Benoît. *La geometría fractal de la naturaleza*, p. 203, Tusquets Editores, Barcelona, 1997.

Sobre el autor:

Nombre: Óscar del Castillo Sánchez

Correo Electrónico: oscar.delcastillo@yahoo.co.uk

Profesión: Arquitecto

Investigación

Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana

Fractional Calculus and newtonian dynamics

Antón Lombardero Ozores

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 077–106, ISSN 2174-0410

Recepción: 14 Dic'13; Aceptación: 10 Ene'14

1 de abril de 2014

Resumen

El Cálculo Fraccionario abre la posibilidad de extender los conceptos de derivada e integral a órdenes no enteros. En este contexto, cabe plantearse una generalización de la segunda Ley de Newton en la que se sustituya la derivada segunda interviniente por otra de orden α ($1,5 < \alpha \leq 2$). En este trabajo se estudian algunos sistemas clásicos (péndulo, proyectil y resorte) bajo este nuevo enfoque.

Palabras Clave: cálculo fraccionario, derivada fraccionaria, integral fraccionaria, ecuaciones diferenciales fraccionarias, péndulo, proyectil, resorte.

Abstract

Fractional Calculus provides an opportunity to spread the concepts of derivative and integral to not integer orders. In this context, we may consider a generalization of Newton's second Law in which the second derivative is replaced by other of α order ($1,5 < \alpha \leq 2$). In this research some classical systems (pendulum, projectile and spring) are discussed under this new approach.

Keywords: fractional calculus, fractional derivative, fractional integral, fractional differential equations, pendulum, projectile, spring.

1. Introducción

Desde el punto de vista matemático, el estudio del movimiento de un cuerpo a partir de las fuerzas que actúan sobre él se reduce a aplicar la ecuación fundamental de Newton $F = ma$, teniendo en cuenta que F es la fuerza resultante o suma vectorial de las fuerzas que intervienen sobre el cuerpo. Se trata, en suma, de resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$F = mx'', \tag{1.1}$$

donde x es la función que determina el movimiento.

Puede ser interesante, como experimento físico-matemático, seguir este proceso desde una perspectiva más amplia, que utilice como punto de partida una versión generalizada de la segunda Ley de Newton. Esto es lo que se pretende con este trabajo, y para ello haremos uso del Cálculo Fraccionario.

El Cálculo Fraccionario es una activa rama del Análisis Matemático que nace de una idea muy básica: de la misma forma que una función se puede derivar o integrar un número entero de veces, ¿podemos hallar su derivada de orden $1/2$? ¿Y su integral π -ésima? Surgen así operadores diferenciales e integrales de orden racional, real e incluso complejo. Con estos cimientos se puede construir un nuevo edificio del Cálculo, que, sin perder de vista al Cálculo tradicional (al que no sustituye, sino que extiende), posee sus propios conceptos *fraccionarios*. Un ejemplo, entre otros muchos, es el de ecuación diferencial fraccionaria.

Como en cualquier área matemática viva, el interés del Cálculo Fraccionario no se restringe al plano teórico, siendo este notable. Los campos de aplicación práctica se incrementan año tras año. En particular, los modelos de derivadas fraccionarias proporcionan mejores representaciones que los modelos tradicionales en aquellos materiales con amortiguación interna.

Volviendo a la segunda Ley de Newton (1.1), autores como Ebaid [4] proponen una generalización fraccionaria de la misma en la forma

$$F = mD^\alpha x \quad (1.2)$$

en la que $D^\alpha x$ se entiende como la derivada de orden α de x ($1,5 < \alpha \leq 2$). A partir de la ecuación alternativa (1.2), seguiremos el procedimiento habitual para el estudio de la dinámica de algunos sistemas físicos clásicos: péndulo, proyectil y resorte. Este nuevo enfoque fraccionario de la dinámica conduce a resultados, ecuaciones e interpretaciones diferentes a las tradicionales, que pueden resultar de interés en el futuro.

2. Historia

El Cálculo Fraccionario (CF) puede ser considerado una disciplina tanto *antigua* como *nueva*. *Antigua* porque, de la mano del propio Leibnitz, ya da sus primeros pasos a finales del s. XVII, casi paralelamente al nacimiento del Análisis. *Nueva*, porque no es hasta la década de los setenta del pasado siglo cuando ha sido objeto intensivo de conferencias especializadas, tratados y artículos académicos.

Hasta tiempos recientes, el CF tenía reputación de teoría matemática sin aplicaciones, de un carácter un tanto esotérico. Pero en las últimas décadas se ha producido una explosión de la actividad investigadora en este campo, debido a que encuentra aplicación en las más diversas ramas científicas.

Sin embargo, fueron los padres del Análisis Matemático quienes dieron los primeros pasos. Quizá estimulados por la propia notación de Leibnitz para la derivada de orden n ,

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (2.1)$$

son éste y L'Hopital quienes, en una correspondencia del año 1695, se plantean por primera vez el sustituir n por el valor no entero $1/2$.

La denominación adoptada, Cálculo Fraccionario, perdura por razones históricas sin ser la más adecuada: las derivadas no sólo serán racionales, sino también reales, e incluso complejas, por lo que una designación más apropiada sería la de *cálculo de orden arbitrario*.

Tras los primeros tanteos de Leibnitz y L'Hopital, el CF siguió siendo abordado por algunas de las mentes matemáticas más privilegiadas. Euler (s. XVIII), Laplace, Lacroix, Fourier,

Riemann (s. XIX), Hardy y Littlewood (s. XX) se ocuparon del tema, pero la gran cantidad de problemas abiertos en esas épocas en el Análisis Matemático ordinario quizás fue lo que llevó a que no profundizaran en este tipo de planteamientos alternativos.

Destacan, a principios del s. XIX, las figuras de Abel y Liouville, que propician el salto cualitativo desde la Prehistoria a la Historia del CF. Abel estaba interesado en el problema de la tautócrona, es decir, en determinar la curva tal que el tiempo requerido por una partícula en deslizarse por ella hasta su punto más bajo fuera independiente del punto desde el que se soltase la partícula. Abel llegó a que dicha curva $g(x)$ debía satisfacer la ecuación integral

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} g(t) dt = k \quad (2.2)$$

El término izquierdo de la ecuación es, excepto por la constante multiplicativa $1/\Gamma(\frac{1}{2})$ la integral fraccionaria de orden $1/2$ de la función $g(x)$. Con ello Abel establece la primera aplicación práctica del CF.

Por su parte, Liouville publica una serie de artículos en los que lleva a cabo el primer gran intento de definir formalmente derivadas e integrales fraccionarias. Dichos trabajos hacen de Liouville el artífice de las bases fundamentales del CF. Su punto de partida consistió en extender la fórmula de la derivada de orden entero de una función exponencial a derivadas de orden α arbitrarias:

$$D^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax} \quad (2.3)$$

De los trabajos de Liouville y otros matemáticos posteriores surgen las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville (1870-1884). Estas definiciones son, junto con la integral fraccionaria de Gröndwald-Letnikov (1867-1868), las generalizaciones más popularizadas del CF, una disciplina en la que hay casi tantas propuestas alternativas de derivada e integral fraccionaria como estudiosos del tema. Otras fórmulas integro-diferenciales fraccionarias son la integral fraccionaria de Weyl (1917), la integral fraccionaria de Riesz (1936), o la derivada fraccionaria de Caputo (1967).

Por fin, tras más de tres siglos en los que el CF se desarrolla como un campo puramente teórico casi exclusivo de los matemáticos, varios autores señalan recientemente que las derivadas e integrales no enteras son especialmente apropiadas para la modelización matemática de materiales como los viscoelásticos y otros. Se ha demostrado que los modelos de orden fraccionario, con sus propiedades de *no localidad* y *memoria*, son, en ciertos casos, más adecuados que los clásicos de orden entero en áreas como Teoría de Materiales, Teoría del Transporte, Electromagnetismo, Teoría de la Señal, Teoría del Caos o Fractales. Desde hace cuatro décadas empiezan a aparecer los primeros tratados consagrados exclusivamente al tema, y el flujo de artículos, libros, conferencias internacionales, paquetes de software y grupos de investigación dedicados al CF se refuerza año a año.

El primer libro dedicado netamente a la materia es publicado en 1974 por Oldham y Spanier [11]. Posteriormente, son destacables el libro enciclopédico de Samko, Kilbas y Marichev [16], las obras de Miller y Ross [10], Podlubny [14] y el más reciente de Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Entre los retos actuales de los investigadores se encuentra el de dar una mayor consistencia, claridad y rigor a la teoría matemática sobre operadores fraccionarios. Se hace necesaria una unificación de los muchos conceptos que ahora hay dispersos, estableciendo algunas definiciones *estándar*. Queda también abierto el encontrar interpretaciones físicas y/o geométricas a las derivadas e integrales fraccionarias, de la misma forma que las tienen las de orden entero. En esta cuestión hay propuestas interesantes, sobre las que destaca el estudio de Podlubny [15].

3. Operadores fraccionarios

Las derivadas e integrales fraccionarias son generalizaciones de las habituales que las incluyen como casos particulares. Sin embargo no hay un consenso generalizado sobre *qué* son la derivada y la integral fraccionaria de una función, y nos encontramos con una gran variedad de propuestas. Definimos en esta sección algunos de los operadores fraccionarios más extendidos, deteniéndonos especialmente en la integral y derivada de Riemann-Liouville. Estos operadores facilitan la extensión con continuidad al semiplano $\{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > 0\}$ de las nociones clásicas de derivadas e integrales enteras.

3.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Para la simplificación del cálculo de la integral n -ésima de una función f , es bien conocida la llamada *Fórmula de Cauchy de la Integral Repetida*,

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \underbrace{\dots}_n \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

fácilmente demostrable por inducción. Dado que $(n-1)! = \Gamma(n) \forall n \in \mathbb{N}$, siendo $\Gamma(n)$ la función Gamma, observamos que el miembro derecho de (3.1) puede tener significado para valores no enteros de n . Por lo tanto es natural definir la integral fraccionaria de orden no entero como sigue.

Definición 1. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$). La *integral fraccionaria de Riemann-Liouville* de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) de f se define por

$$(I_a^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > a). \quad (3.2)$$

Observación 2. En la notación de la integral, $I_a^\alpha f$, especificamos el límite inferior de integración a . Por debajo de ese límite, y en general fuera del intervalo $[a, b]$ consideraremos o bien que la función no existe o bien que toma valor constante 0.

Observación 3. La función Gamma Γ está definida en todo el plano complejo excepto en los enteros negativos. Por ello, la exigencia $\Re(\alpha) > 0$ de la definición garantiza la existencia en casi todo punto de $I_a^\alpha f$ para toda f perteneciente a $L_1(a, b)$.

Observación 4. De la propiedad $\Gamma(n) = (n-1)!$ de la función Gamma se desprende que la integral fraccionaria (3.2) coincide con la integral α -ésima (3.1) cuando $\alpha \in \mathbb{N}$.

Observación 5. La definición (3.2) se denomina en ocasiones integral fraccionaria *por la izquierda* de Riemann-Liouville. Una integral alternativa, que no utilizaremos en este trabajo por ser menos frecuente en la literatura, es la integral fraccionaria *por la derecha*:

$$(I_b^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x < b) \quad (3.3)$$

Esta misma variante se da en casi todos los operadores fraccionarios.

Observación 6. A la expresión (3.2) se puede llegar también, como se ve en Miller y Ross [10], mediante razonamientos totalmente diferentes, como son las ecuaciones diferenciales o el cálculo complejo.

A continuación enunciamos una serie de propiedades básicas de los operadores de integración fraccionarios de Riemann-Liouville, con las que se ponen de manifiesto las analogías y diferencias con los operadores *enteros* clásicos. Las demostraciones de los resultados se pueden encontrar en Samko, Kilbas y Marichev [16], Podlubny [14] y Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Proposición 7 (linealidad). Sean $f, g \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces

$$I_a^\alpha [\lambda f + \mu g] = \lambda I_a^\alpha f + \mu I_a^\alpha g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Proposición 8 (semigrupo y conmutatividad). Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$). Entonces

$$I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^\beta I_a^\alpha f = I_a^{\alpha+\beta} f$$

en casi todo punto de $[a, b]$.

Proposición 9. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x)$$

en casi todo punto de $[a, b]$.

Observación 10. La Proposición 9 facilita extender la integral fraccionaria al caso $\alpha = 0$. Así, por I_a^0 denotaremos al operador identidad, i.e., $I_a^0 f(x) := f(x)$.

3.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Para la definición de la derivada fraccionaria de orden α , una posibilidad podría ser tomar la fórmula de la integral (3.2) y sustituir en ella α por $-\alpha$. Esta solución plantea dos problemas. El primero, muy evidente, es que para valores negativos de α la integral de (3.2) puede no ser convergente, además de que para los enteros negativos $\Gamma(\alpha)$ no está definida. En segundo lugar, debemos tener en cuenta que la derivación y la integración ordinarias no son operaciones recíprocas: es cierto que $[(d/dx)^n I_a^n f](x) = f(x)$, pero sin embargo $[I_a^n f^{(n)}](x) \neq f(x)$ ya que difieren en un polinomio de orden $n - 1$. La derivada entera es por tanto la inversa por la izquierda de la integral, y pretendemos que los operadores fraccionarios hereden esta propiedad: $D^\alpha I^\alpha = id$. Para ello, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se definirá como la derivada entera de una cierta integral fraccionaria.

Definición 11. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$). La *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville* de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) de f se define, si existe¹, por

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha f)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ y $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ es la n -ésima derivada usual.

Observación 12. Al contrario que la integral fraccionaria, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville sí permite órdenes imaginarios puros. Cuando $\Re(\alpha) = 0$, la derivada de orden $\alpha = i\theta$ se expresa de la siguiente manera:

$$(D_a^{i\theta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}} dt \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x > a) \quad (3.5)$$

¹ En el Teorema 19 se dan condiciones suficientes de existencia.

Observación 13. Cuando α es un número natural, $\alpha \in \mathbb{N}$, se tiene que $n = \alpha + 1$ y la derivada fraccionaria coincide con la derivada usual:

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} \left(I_a^{(\alpha+1)-\alpha} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} (I_a f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x).$$

En particular D_a^0 será el operador identidad, i.e., $D_a^0 f(x) = f(x)$.

Observación 14. Algo llama poderosamente la atención en la definición (3.4): se especifica un límite inferior de integración a . La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, al igual que otras definiciones de derivada fraccionaria, es un **operador no local**. Contrariamente al caso entero, esta derivada queda definida por medio de una integral que depende de los valores que la función tome a lo largo de un intervalo. Solamente cuando α es natural la derivada fraccionaria se convierte en un operador local. Las derivadas de orden fraccionario contienen parcial o totalmente la historia temporal o el comportamiento espacial de la función, promediadas de una cierta forma. Esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en candidatas idóneas para la modelización de fenómenos con *memoria*, aquellos en los que lo que ocurre en un punto del espacio o en un instante de tiempo depende de un intervalo (espacial o temporal) que contiene al punto o al instante.

Al igual que en el caso entero, la derivada fraccionaria de una función $f(x)$ existe bajo unas condiciones más restrictivas que la correspondiente integral. No basta, como ocurría con $I_a^\alpha f$, con que $f(x)$ sea de L_1 . Antes de enunciar el resultado principal sobre existencia, necesitamos la noción de continuidad absoluta.

Definición 15. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *absolutamente continua* en $[a, b]$, $f \in AC[a, b]$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia finita de intervalos disjuntos $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, que verifique $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ se cumple que $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Observación 16. El espacio $AC[a, b]$ coincide con el espacio de primitivas de funciones Lebesgue integrables:

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = k + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (\varphi \in L(a, b))$$

y en consecuencia una función f absolutamente continua tiene derivada $f'(x) = \varphi(x)$ en casi todo punto. Además, se deduce trivialmente que $k = f(a)$, con lo que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Observación 17. Ser absolutamente continua es una propiedad bastante fuerte: implica continuidad uniforme (y por tanto continuidad). Sin embargo es menos restrictiva que ser Lipschitziana: toda función de Lipschitz es absolutamente continua.

Observación 18. Denotamos por $AC^n[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$) al espacio de funciones f en $[a, b]$ tales que $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$. Es claro que $AC^1[a, b] = AC[a, b]$ y que el espacio $AC^n[a, b]$ consiste en todas las funciones representables por una integral de Lebesgue n -múltiple sumada a un polinomio de orden $n - 1$.

Teorema 19. Sea $f \in AC^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ verificando $\Re(\alpha) \geq 0$ y $[\Re(\alpha)] + 1 \leq n$. Entonces $D_a^\alpha f$ existe en casi todo punto de $[a, b]$.

Demostración. Ver en Samko, Kilbas y Marichev [16]. □

Corolario 20. Si $f \in AC[a, b]$, entonces $D_a^{i\theta} f$ existe en casi todo punto de $[a, b]$ para cualquier $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y se representa en la forma (3.5).

Enumeramos ahora las propiedades más relevantes de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (en todas ellas suponemos que existen las derivadas fraccionarias implicadas). La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville carece de algunas cualidades importantes, como la de *semigrupo* (ver Proposición 8), que sí cumple la integral. La relación $D_a^\alpha D_a^\beta f = D_a^{\alpha+\beta} f$ sólo es válida en casos muy específicos. Otra importante diferencia con el caso entero es que, en general, la derivada de una constante no nula no vale cero. Las demostraciones pueden encontrarse en Samko, Kilbas y Marichev [16] y Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Proposición 21 (linealidad). Sean $f, g \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$). Entonces

$$D_a^\alpha [\lambda f + \mu g] = \lambda D_a^\alpha f + \mu D_a^\alpha g \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Proposición 22. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$). Entonces, tomando valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $\Re(\alpha) \geq 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (D_a^\alpha f)(x) = f(x)$$

en casi todo punto de $[a, b]$.

El siguiente resultado refleja que, análogamente a lo que ocurre en el caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Proposición 23. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$). Entonces las igualdades

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x) \tag{3.6}$$

$$(D_a^\alpha I_a^\beta f)(x) = (I_a^{\beta-\alpha} f)(x), \quad \text{si } \alpha \leq \beta \tag{3.7}$$

$$(D_a^\alpha I_a^\beta f)(x) = (D_a^{\alpha-\beta} f)(x), \quad \text{si } \alpha \geq \beta \tag{3.8}$$

son ciertas en casi todo punto de $[a, b]$.

Sin embargo, también como en el caso entero, no es cierto el recíproco: la integral no es la inversa por la izquierda de la derivada. En consecuencia no se puede hablar estrictamente de operadores inversos.

Proposición 24. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces si $f_{n-\alpha} = I_a^{n-\alpha} f \in AC^n[a, b]$

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} f_{n-\alpha}^{(n-k)}(a), \tag{3.9}$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$, es cierto en casi todo punto de $[a, b]$.

Corolario 25. En las condiciones de la Proposición 24, se verifica que

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) + c_0 x^{\alpha-1} + c_1 x^{\alpha-2} + \dots + c_{n-1} x^{\alpha-n} \tag{3.10}$$

con $c_i \in \mathbb{C} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$.

Ya adelantábamos el hecho sorprendente de que la derivada fraccionaria no es nula para las funciones constantes. Esto se concluye del valor de la derivada de una potencia:

Proposición 26. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < \infty$), $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) y $\beta > 0$. Se verifica que

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \tag{3.11}$$

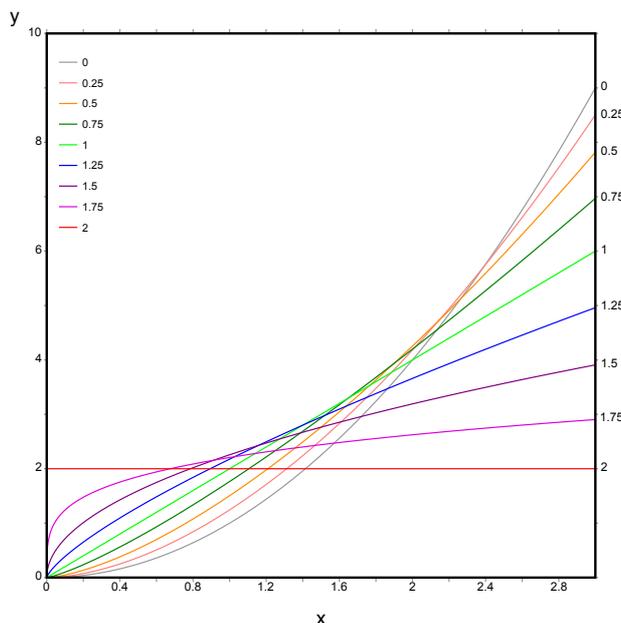


Figura 1. Evolución de las derivadas fraccionarias $D_0^\alpha x^2$, con α variando entre 0 (parábola) y 2 (función constante)

Observación 27. Como caso particular de (3.11), se tiene que cuando $\beta = \alpha - 1, \alpha - 2, \dots, \alpha - n$ ($n = [\Re(\alpha)] + 1$) la derivada de orden α -ésimo se anula, por lo que D_a^α anula las potencias $(x - a)^{\alpha-1}, (x - a)^{\alpha-2}, \dots, (x - a)^{\alpha-n}$.

Observación 28. Para el cálculo de la derivada de una función constante $f(x) = k$ hacemos tender β a 0 por la derecha en (3.11) e introducimos la constante multiplicativa k :

$$D_a^\alpha k = k \lim_{\beta \rightarrow 0} D_a^\alpha (x - a)^\beta = k \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha} = \frac{k}{\Gamma(1 - \alpha) (x - a)^\alpha}$$

3.3. Derivada fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville jugó un papel determinante en el desarrollo del cuerpo teórico del Cálculo Fraccionario, y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar de realizar modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales también de orden fraccional. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del Cálculo Fraccionario. El operador diferencial de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a la manera tradicional. La definición que sigue representó pues un notable avance práctico en el estudio de fenómenos físicos como los de tipo viscoelástico y otros.

Definición 29. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) y $f \in AC^n[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$), con $n = [\Re(\alpha)] + 1$. La derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f se define por

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(x) &:= \left(I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n f \right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (x > a) \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $f^{(n)}$ es la n -ésima derivada usual de f .

Observación 30. Al contrario que en la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, en la que primero se integra y luego se deriva, en la derivada de Caputo primero derivamos (n veces) y seguidamente integramos. En consecuencia, se trata de una definición más restrictiva, ya que requiere la integrabilidad de $f^{(n)}$. A pesar de ello, la hipótesis del Teorema 19 (que f pertenezca a $AC^n[a, b]$) sigue siendo una condición suficiente para garantizar la existencia de ${}^C D_a^\alpha f$ con cualquier orden α tal que $[\Re(\alpha)] + 1 \leq n$.

Las derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann-Liouville son buenas generalizaciones de la derivada ordinaria, en el sentido de que *respetan* los valores de las derivadas enteras usuales, concordando así entre ellas. Pero en el caso no entero no coinciden, como pone de manifiesto el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en Kilbas, Srivastava y Trujillo [9].

Proposición 31. Sea $\alpha \notin \mathbb{N}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$), $n = [\Re(\alpha)] + 1$ y $f \in L^1[a, b]$ una función para la que existen las derivadas fraccionarias de Caputo (${}^C D_a^\alpha f$) y Riemann-Liouville ($D_a^\alpha f$). Entonces se verifica la siguiente relación:

$$\left({}^C D_a^\alpha f\right)(x) = \left(D_a^\alpha f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (x > a) \quad (3.13)$$

Observación 32. Por lo tanto, para órdenes de derivación no enteros, las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville coincidirán cuando se cumpla

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad (3.14)$$

Observación 33. Como ejemplo de la no coincidencia de estos dos tipos de derivada fraccionaria, observemos las gráficas de $\left(D_0^{0.5} \cos\right)(x)$ y $\left({}^C D_0^{0.5} \cos\right)(x)$:

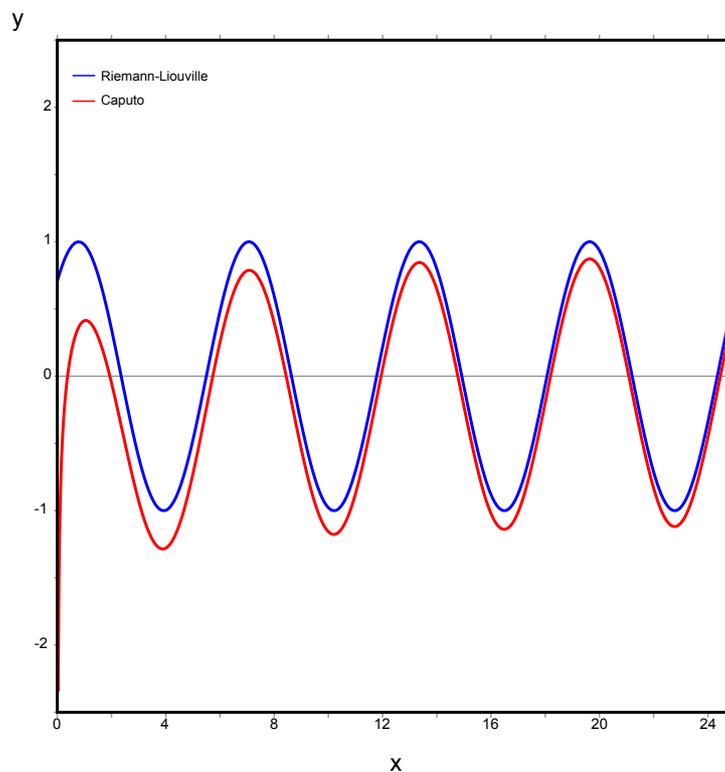


Figura 2. Comparativa de derivadas

La divergencia era de esperar ya que no se cumple la condición (3.14):

$$\cos(0) \neq 0.$$

La integral de Riemann-Liouville tampoco es la inversa por la izquierda de la derivada de Caputo. Pero en el *polinomio resto* obtenido al menos aparecen derivadas enteras, a diferencia de (3.9). Esta característica nos será de utilidad a la hora de resolver analíticamente algunas Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias:

Proposición 34. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$). Entonces si $f \in AC^n[a, b]$ o $f \in C^n[a, b]$

$$\left(I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \tag{3.15}$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}$ y $n = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}$.

Corolario 35. En las condiciones de la Proposición 34, se verifica que

$$\left(I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f\right)(x) = f(x) + c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} \tag{3.16}$$

con $c_i \in \mathbb{C} \ \forall i = 1, 2, \dots, n - 1$.

La derivada de Caputo puede considerarse por tanto como una *regularización* de la derivada de Riemann-Liouville efectuada mediante la sustracción de un polinomio de Taylor, a través de la cual se obtienen ciertas ventajas importantes, como las citadas condiciones iniciales enteras, unos requisitos menos restrictivos para el cumplimiento de la propiedad de semigrupo ${}^C D_a^\alpha {}^C D_a^\beta f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f$, y la no menos significativa característica que enunciamos a continuación.

Proposición 36. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) y sea $n = [\Re(\alpha)] + 1$. Se verifica que ${}^C D_a^\alpha (x-a)^k = 0 \ \forall k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Esta propiedad, demostrada en Kilbas, Srivastava y Trujillo [9], evidencia que el valor de la derivada fraccionaria de Caputo operada en una constante es nulo.

3.4. Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov

Al contrario que los operadores de Riemann-Liouville o Caputo, que obtienen sus definiciones de una integral repetida, el enfoque de Grünwald-Letnikov toma como punto de partida la derivada, en concreto de la siguiente fórmula para la derivada n -ésima, fácilmente deducible:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh). \tag{3.17}$$

Esta expresión puede ser generalizada para valores no enteros de n , teniendo en cuenta que para $\alpha > 0$ podemos interpretar $\binom{\alpha}{k}$ como

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)}. \tag{3.18}$$

Entonces, si consideramos una serie infinita se obtiene

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) \approx \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh).$$

Por otra parte, dado un h determinado, no tienen sentido términos de la serie para valores de k superiores a $\lceil \frac{x-a}{h} \rceil$, ya que en ese caso $f(x)$ tomaría valores fuera del intervalo de definición $[a, b]$. Se llega entonces a la definición que sigue.

Definición 37. Sea f una función acotada en $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$). La *derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov* de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) de f se define, si existe, por

$$f_a^{(\alpha)}(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{x-a}{h} \rceil} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) \quad (x > a) \quad (3.19)$$

donde $\binom{\alpha}{k}$ significa (3.18).

Observación 38. La derivada Grünwald-Letnikov sólo está definida para órdenes de derivación reales.

Observación 39. En Podlubny [14] se demuestra que los operadores diferenciales de Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov dan los mismos resultados para idénticos límites inferiores a y órdenes de integración reales $\alpha > 0$. Cabe preguntarse cuál utilizar ante un problema concreto. En la literatura relacionada con la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias se utiliza preferentemente la definición de Riemann-Liouville para la formulación de los problemas, y luego, a la hora de obtener la solución numérica, se pasa a la definición de Grünwald-Letnikov, muy apropiada para ser implementada en cálculos numéricos de tipo iterativo.

3.5. Otros operadores fraccionarios

Todos los operadores fraccionarios que hemos tratado se definían sobre un intervalo acotado de la recta real $[a, b]$. Las formas integrales de Riemann-Liouville y diferenciales de Caputo, con esta característica, serán las que utilizaremos en los cálculos a lo largo de este trabajo. Pero existen otros tipos de operadores, definidos sobre intervalos no acotados de la recta real, o incluso sobre el plano complejo. Otros están diseñados para funciones de varias variables.

El operador integral de Weil (también llamado de Liouville) es una extensión de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville al semieje no acotado $(-\infty, x]$:

$$(I_+^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (-\infty < x < \infty).$$

Esta forma, y su correspondiente forma diferencial, son especialmente adecuadas para realizar integración y derivación fraccionaria de funciones periódicas.

Pero hay una gran variedad de operadores fraccionarios. Otros registrados en la literatura especializada son el de Riesz, para derivadas e integrales fraccionarias de funciones de varias variables, Erdélyi-Kober, Hadamard, Bessel, Chen o Dzherbashyan.

4. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

De la misma forma que en el Cálculo ordinario, las ideas de derivación e integración fraccionarias conducen al concepto más avanzado de ecuación diferencial. Una relación involucrando uno o más operadores fraccionarios aplicados a una función desconocida f se conoce como ecuación diferencial fraccionaria² (EDF, de ahora en adelante). Gran parte de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene una correspondencia fraccionaria más o menos natural. Por

² En la obra pionera de Oldham y Spanier [11] aparecen con el curioso nombre de *ecuaciones diferenciales extraordinarias*, en oposición a las EDOs.

ejemplo, es conocido que una EDF de orden α necesita $[\Re(\alpha)] + 1$ condiciones iniciales para ser resuelta de manera única. Sin embargo surgen también notables diferencias, la primera de las cuales es el hecho de que una misma EDF tendrá diferentes significados según los operadores fraccionarios implicados sean los de Riemann-Liouville, Caputo u otros.

4.1. Definiciones y conceptos

Análogamente a la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, las EDF se dividen en ecuaciones lineales, homogéneas, no homogéneas, con coeficientes constantes o variables. Empezamos dando la definición más general para luego ir concretando casos más específicos.

Definición 40. Una ecuación diferencial fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) es una relación del tipo

$$(D_a^\alpha y)(x) = f \left[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x) \right] \quad (4.1)$$

donde $y(x)$ es una función compleja desconocida de dominio real, $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$ es una función conocida y $D_a^{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) son operadores diferenciales fraccionarios verificando $0 < \Re(\alpha_1) < \Re(\alpha_2) < \dots < \Re(\alpha_{m-1}) < \Re(\alpha)$ y $m \geq 2$.

Observación 41. Establecemos varias condiciones sobre los operadores $D_a^{\alpha_k}$ de la definición anterior. Han de ser operadores de tipo diferencial (en otro caso hablaríamos de ecuaciones integrales o íntegrodiferenciales). Además, se entiende que representan derivadas fraccionarias del mismo tipo (Riemann-Liouville, Caputo, etc.) y que tienen un límite inferior de integración a común.

Definición 42. Se denomina *solución* de la EDF anterior a cualquier función compleja de variable real $y(x)$ que verifique la igualdad (4.1).

Definición 43. Una ecuación diferencial fraccionaria lineal de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) es una relación del tipo

$$(D_a^\alpha y)(x) = a_0(x) y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x) (D_a^{\alpha_k} y)(x) + b(x) \quad (4.2)$$

donde $y(x)$ es una función compleja desconocida de dominio real, $a_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) y $b(x)$ son funciones complejas conocidas y $D_a^{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) son operadores diferenciales fraccionarios verificando $0 < \Re(\alpha_1) < \Re(\alpha_2) < \dots < \Re(\alpha_{m-1}) < \Re(\alpha)$ y $m \geq 2$.

Cuando se cumple que las funciones $a_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) y $b(x)$ son constantes se dice que la EDF lineal es *de coeficientes constantes*, y si se da que $b(x) = 0$ se denomina EDF lineal *homogénea*.

Problemas análogos a los de Cauchy y Dirichlet para ecuaciones diferenciales surgen también en el Cálculo Fraccionario. Aquí hemos de diferenciar explícitamente en función del tipo de operador fraccionario, ya que hay diferencias importantes en la formulación de las condiciones iniciales. Veremos los problemas de Cauchy para derivadas de Riemann-Liouville y Caputo.

Definición 44. Si utilizamos derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y queremos encontrar la solución $y(x)$ de la EDF

$$(D_a^\alpha y)(x) = f \left[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x) \right] \quad (4.3)$$

sujeta a las n condiciones iniciales

$$\left(D_a^{\alpha-k} y \right) (a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.4)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ y $n = \alpha$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, decimos que estamos ante un *problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville*.

Observación 45. En particular, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, el problema anterior se reduce al usual problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria de orden n .

Observación 46. Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, la n -ésima condición inicial,

$$(D_a^{\alpha-n}y)(a) = b_n$$

no verifica que $\alpha - n$ tenga parte real positiva. Debe ser interpretada por tanto como la integral fraccionaria

$$(I_a^{n-\alpha}y)(a) = b_n.$$

El planteamiento del problema anterior con derivadas de Riemann-Liouville obliga, para garantizar la existencia y unicidad de soluciones, a establecer inicialmente unas condiciones iniciales de orden no entero (4.4). Como ya se ha mencionado en (3.3) es difícil asignar una significación física a este tipo de condiciones iniciales. Por el contrario, el mismo problema planteado con derivadas de Caputo se expresa en términos de valores iniciales de derivadas de orden entero.

Definición 47. Si utilizamos derivadas fraccionarias de Caputo y queremos encontrar la solución $y(x)$ de la EDF

$$({}^C D_a^\alpha y)(x) = f[x, y(x), ({}^C D_a^{\alpha_1} y)(x), ({}^C D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, ({}^C D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)]$$

sujeta a las n condiciones iniciales

$$\left(\frac{d^k}{dx^k}y\right)(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.5)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$, decimos que estamos ante un *problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo*.

Las funciones de Mittag-Leffler son de especial importancia en el Cálculo Fraccionario. Igual que las exponenciales surgen de forma natural como soluciones de EDOs lineales, la familia de funciones de Mittag-Leffler juega un papel análogo en la solución de EDFs. De hecho, la propia exponencial e^x es un caso particular de la familia Mittag-Leffler, la cual puede considerarse una generalización de las exponenciales.

Definición 48. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, la *función de Mittag-Leffler de dos parámetros* $E_{\alpha, \beta}$ es la función compleja de variable compleja definida por la serie

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Observación 49. Algunos casos particulares.

Exponencial:

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

Suma de una progresión geométrica:

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}$$

Coseno hiperbólico de una raíz:

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

La transformada de Laplace es una herramienta comúnmente utilizada en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. También lo será en el ámbito fraccionario, permitiendo simplificar un problema de EDFs en otro equivalente más sencillo de tipo algebraico.

Definición 50. Dada una función f , que esté definida para todos los valores $t \geq 0$, se denomina transformada de Laplace de f a la función F dada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

siempre que exista la integral.

Observación 51. Para que dado un valor s exista la integral, debe cumplirse que $f(t)$ no crezca más rápidamente que e^{st} cuando $t \rightarrow \infty$. Concretamente, si f es continua a trozos y $|f(t)| \leq Me^{\nu t} \forall t \geq T > 0, M, \nu > 0$, entonces la transformada de Laplace de f existe para todo s con $\Re(s) > \nu$.

Observación 52. La transformada inversa de Laplace de F viene dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

donde la integración se realiza a lo largo de la línea vertical en el plano complejo $\Re(s) = c$, de forma que c sea mayor que la parte real de todas las singularidades de $F(s)$. \mathcal{L} y \mathcal{L}^{-1} son operadores inversos en el espacio cociente de funciones de dominio positivo dado por la relación *ser iguales en casi todo punto*.

Proposición 53. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) tales que existan los operadores fraccionarios $I_a^\alpha f$, $D_a^\alpha f$ y ${}^C D_a^\alpha f$. Las transformadas de Laplace de los operadores, de existir, toman los siguientes valores

$$\mathcal{L}\{I_a^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (\text{integral Riemann - Liouville}) \tag{4.6}$$

$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0) \quad (\text{derivada Riemann - Liouville}) \tag{4.7}$$

$$\mathcal{L}\{{}^C D_a^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{derivada Caputo}) \tag{4.8}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

Observación 54. Una vez más, el uso de derivadas fraccionarias de Caputo va a facilitar el proceso de resolución de problemas concretos. Al aplicar la transformada de Laplace a este operador podemos utilizar condiciones iniciales enteras clásicas, con clara interpretación física.

Observación 55. Si las condiciones iniciales son nulas el sumatorio se anula, y se obtiene la expresión simplificada

$$\mathcal{L}\{D_a^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$$

de forma que la derivada fraccionaria se puede expresar como

$$D_a^\alpha f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}\}.$$

Este resultado proporciona una nueva expresión para la derivada fraccionaria, válido tanto para Riemann-Liouville como para Caputo siempre que las condiciones iniciales se anulen.

En la aplicación del método de la transformada de Laplace para solucionar EDFs, resulta esencial conocer la relación existente entre las funciones de Mittag-Leffler y la transformada:

Proposición 56. Dados $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que para todo $t > 0$

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha) \right\} (s) = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad \left(\Re(s) > |a|^{1/\alpha} \right) \quad (4.9)$$

donde $E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z)$ es la derivada k -ésima de $E_{\alpha, \beta}$ en z . En consecuencia,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \right\} = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha) \quad (4.10)$$

Una última herramienta útil para la búsqueda de las soluciones de una EDF es la convolución de dos funciones y su relación con la transformada de Laplace.

Definición 57. Dadas $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in L_1[0, \infty)$, se define su *convolución* $f * g$ como la nueva función

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(t) g(x-t) dt$$

Teorema 58 (de convolución). Dadas $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in L_1[0, \infty)$ tales que existan las respectivas transformadas de Laplace $F(s), G(s)$. Entonces

$$\mathcal{L} \{f * g\} = F(s) G(s) \quad (4.11)$$

o, de forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s) G(s)\} = (f * g)(x). \quad (4.12)$$

4.2. Teoremas de existencia y unicidad

A continuación daremos condiciones suficientes para la existencia de soluciones únicas en problemas tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville. En general se comprobará que las EDF pueden tener soluciones integrables, bajo condiciones que se asemejan a las del Teorema de Picard del Cálculo ordinario. Más concretamente, en este trabajo se analizan las soluciones sobre el espacio de funciones $L^\alpha(a, b)$. Los teoremas que siguen, cuyas demostraciones se pueden encontrar en Kilbas, Srivastava y Trujillo [9], se fundamentan en la equivalencia de la existencia de soluciones con la resolución de ciertas ecuaciones integrales de Volterra y el uso del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Definición 59. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) y $(a, b) \subset \mathbb{R}$, se define el espacio de funciones $L^\alpha(a, b)$ como

$$L^\alpha(a, b) := \{g \in L(a, b) / D_a^\alpha g \in L(a, b)\}$$

Definición 60. Dada una función $f[x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}] \in I \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que cumple la *condición de Lipschitz para las variables* y_0, y_1, \dots, y_{m-1} cuando existe una constante $K > 0$ no dependiente de x tal que para todo $x \in I$ y cualquier par de m -uplas $(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}), (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}) \in B$ se cumple que

$$|f[x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}] - f[x, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}]| \leq \sum_{k=0}^{m-1} K |y_k - \bar{y}_k| \quad (4.13)$$

Teorema 61 (para Riemann-Liouville). Dado el problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville (4.3)-(4.4), si la función $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$ cumple la condición de Lipschitz (4.13) para las variables $y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$, y además se da que $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}] \in L_1(a, b)$ para cualquier $(y, y_1, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, se verifica que existe una solución única $y(x)$ al problema en el espacio $L^\alpha(a, b)$.

Teorema 62 (para Riemann-Liouville, caso lineal). *Sea la EDF lineal (4.2) cumpliéndose que $b(x) \in L_1(a, b)$. Si $a_k(x) \in L_\infty(a, b)$ o si $a_k(x)$ están acotadas en $[a, b]$ (para todo $k = 0, 1, \dots, m-1$), entonces el siguiente problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville*

$$(D_a^\alpha y)(x) = a_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)(D_a^{\alpha_k} y)(x) + b(x)$$

$$(D_a^{\alpha-k} y)(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

tiene una solución única $y(x)$ en el espacio $L^\alpha(a, b)$.

4.3. Soluciones de casos particulares

En este apartado resolveremos explícitamente algunos problemas tipo Cauchy cuyas soluciones van a ser utilizadas después en el estudio fraccionario del péndulo y del proyectil. Se trata de sencillas ecuaciones diferenciales fraccionarias de orden $\alpha \in (1, 2]$. Por simplicidad a la hora de traducir matemáticamente las condiciones iniciales, optamos de aquí en adelante por la derivada fraccionaria de Caputo, en conjunción con la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Como método para resolver las EDFs mostraremos dos caminos distintos: uno basado en (3.16) y en las propiedades elementales de los operadores fraccionarios; otro haciendo uso de la transformada de Laplace de forma semejante a la habitual para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.3.1. Método 1 (operadores fraccionarios)

Dada una función continua $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha \in (1, 2]$ vamos a resolver el problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo dado por

$$({}^C D_0^\alpha y)(x) = f(x) \quad (x > 0) \quad (4.14)$$

Como $1 < \alpha \leq 2$ se tiene que $n = [\alpha] + 1 = 2$, por lo que necesitamos dos condiciones iniciales en el límite inferior de integración 0:

$$y(0) = b_0 \quad (4.15)$$

$$y'(0) = b_1 \quad (4.16)$$

Si aplicamos el operador integral I_0^α sobre ambos miembros de la ecuación (4.14) obtenemos

$$(I_0^\alpha {}^C D_0^\alpha y)(x) = (I_0^\alpha f)(x)$$

lo que, en virtud de (3.16), resulta en que la solución general de la EDF es

$$y(x) = c_0 + c_1 x + (I_0^\alpha f)(x) \quad (4.17)$$

siendo c_1, c_2 constantes complejas dependientes de las condiciones iniciales.

Si introducimos la condición (4.15) en la solución (4.17) y, dado que $(I_0^\alpha f)(0) = 0$, llegamos a que $c_0 = b_0$.

Vamos a hacer uso de la segunda condición (4.16). Derivando (4.17) se obtiene

$$y'(x) = c_1 + (D_0^1 I_0^\alpha f)(x)$$

que en base a (3.7) vale

$$y'(x) = c_1 + \left(I_0^{\alpha-1} f\right)(x)$$

por lo que como $\left(I_0^{\alpha-1} f\right)(0) = 0$, se llega a $c_1 = b_1$.

Por tanto, la solución particular del problema (4.14)-(4.15)-(4.16) será:

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_1 x + \left(I_0^\alpha f\right)(x) \\ &= b_0 + b_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

que como era de esperar haciendo $\alpha = 2$ coincide con la conocida solución

$$y(x) = b_0 + b_1 x + \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

de la EDO

$$y''(x) = f(x)$$

con las mismas condiciones iniciales (4.15)-(4.16).

4.3.2. Método 2 (transformada de Laplace)

Vamos a tratar ahora una ecuación algo más complicada, que será una generalización de la conocida ecuación diferencial de oscilación $y''(x) = \lambda y(x) + f(x)$. Sustituyendo la segunda derivada por una derivada de Caputo de orden $\alpha \in (1, 2]$ obtenemos una EDF que denominaremos *ecuación de oscilación fraccionaria*. Para resolver el problema usaremos el método de la transformada de Laplace. Este sistema tiene la ventaja de que haciendo uso de la transformada podemos introducir las condiciones iniciales desde el primer momento, llegando directamente a la solución particular.

Dada una función continua $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in (1, 2]$ vamos a resolver el problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo dado por

$$\left({}^C D_0^\alpha y\right)(x) = \lambda y(x) + f(x) \quad (x > 0) \quad (4.19)$$

Como $1 < \alpha \leq 2$ se tiene que $n = [\alpha] + 1 = 2$, por lo que necesitamos dos condiciones iniciales en el límite inferior de integración 0:

$$y(0) = b_0 \quad (4.20)$$

$$y'(0) = b_1. \quad (4.21)$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación 4.19, para lo cual utilizamos el resultado (4.8) para el cálculo de la transformada de una derivada de Caputo, se llega a

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0) = \lambda Y(s) + F(s)$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$. Introduciendo las condiciones iniciales (4.20)-(4.21) y despejando $Y(s)$ obtenemos

$$Y(s) = b_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} + b_1 \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda} + \frac{F(s)}{s^\alpha - \lambda}.$$

Se trata ahora de aplicar la transformada inversa de Laplace a los dos miembros de la ecuación, para recuperar $y(x)$. Utilizando la linealidad de \mathcal{L}^{-1} ,

$$y(x) = b_0 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} \right) + b_1 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{F(s)}{s^\alpha - \lambda} \right). \tag{4.22}$$

Calculemos por separado las tres transformadas inversas. El resultado (4.10) proporciona el valor de las dos primeras de forma directa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} \right) = E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha) \tag{4.23}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda} \right) = x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) \tag{4.24}$$

Para el cálculo de $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} F(s) \right)$ utilizamos la propiedad (4.12),

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} F(s) \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} \right) * \mathcal{L}^{-1} (F(s)) \tag{4.25}$$

con lo que reducimos el problema a la obtención de $\mathcal{L}^{-1} (1/(s^\alpha - \lambda))$. De nuevo volvemos a recurrir a (4.10), estableciendo los valores $k = 0$, $\beta = \alpha$ y $a = \lambda$, con lo que resulta

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} \right) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha),$$

que junto con (4.25) proporciona

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda} F(s) \right) &= [x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha)] * f(x) \\ &= \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt \end{aligned} \tag{4.26}$$

En conclusión, (4.22), (4.23), (4.24) y (4.26) facilitan la solución particular al problema de Cauchy de partida:

$$y(x) = b_0 E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha) + b_1 x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt \tag{4.27}$$

Observación 63. Las funciones $E_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha)$, $x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha)$ forman, por tanto, un sistema fundamental de soluciones de la correspondiente EDF homogénea

$$\left({}^C D_0^\alpha y \right) (x) - \lambda y(x) = 0$$

con $\alpha \in (1, 2]$.

Observación 64. El problema (4.14)-(4.15)-(4.16) estudiado con el método anterior es un caso particular, más sencillo, de este. Basta tomar $\lambda = 0$ en la ecuación (4.19). Veamos que la solución obtenida aquí es coherente con la anterior. Haciendo $\lambda = 0$ en la solución (4.27) tenemos

$$y(x) = b_0 E_{\alpha,1}(0) + b_1 x E_{\alpha,2}(0) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(0) f(t) dt$$

y teniendo en cuenta que las funciones de Mittag-Leffler verifican $E_{\alpha,1}(0) = E_{\alpha,2}(0) = 1$, $E_{\alpha,\alpha}(0) = 1/\Gamma(\alpha)$, llegamos a la solución (4.18) esperada:

$$y(x) = b_0 + b_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Observación 65. Gorenflo y Mainardi [5] han obtenido una solución alternativa equivalente para este problema (con $\lambda = -1$). En su trabajo, la solución se expresa en términos de derivadas e integrales de funciones de Mittag-Leffler de un solo parámetro $E_\alpha(z)$:

$$y(x) = b_0 E_\alpha(-x^\alpha) + b_1 \left(I_0^1 E_\alpha \right) (-x^\alpha) + \int_0^x \frac{d}{dt} E_\alpha(-t^\alpha) f(x-t) dt$$

5. Algunas aplicaciones dinámicas

5.1. Péndulo simple

El péndulo simple es un sistema físico constituido por una partícula de masa m que, suspendida de un punto fijo O por medio de una varilla de longitud L , puede oscilar en un plano vertical fijo por efecto de la fuerza de la gravedad. La posición de la partícula en el instante t se especifica mediante el ángulo θ que la varilla forma con la vertical en ese momento.

El estudio del péndulo constituye uno de los problemas clásicos de la dinámica elemental, y todas sus componentes están perfectamente determinadas desde el punto de vista matemático. Lo que se pretende con este apartado es realizar un análisis del movimiento pendular enfocado desde la óptica más extensa del Cálculo Fraccionario, y para ello se va a generalizar la idea clásica de aceleración (derivada segunda de la posición) a una derivada fraccionaria de Caputo de un orden comprendido entre 1.5 y 2.

Obviamente el péndulo simple es un sistema idealizado, al que para su análisis vamos a exigir una serie de hipótesis simplificativas:

- La varilla que sujeta a la partícula carece de masa, es inextensible y siempre permanece rígida.
- El movimiento de la partícula se traza en dos dimensiones; es decir, la partícula no traza una elipse sino un arco.
- El sistema no pierde energía por efecto de la resistencia del aire ni por fricción alguna.

5.1.1. Ecuación diferencial fraccionaria

Para determinar la función del movimiento del *péndulo fraccionario* empezamos buscando la ecuación diferencial fraccionaria que modeliza dicho movimiento. La ecuación buscada tiene por incógnita la función $\theta(t)$, que determina en radianes el ángulo de la varilla en el instante t . La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo el efecto de dos fuerzas: su propio peso (mg , donde $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ es la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra cerca de su superficie) y la fuerza de tensión T ejercida por la varilla. Si descomponemos el peso en sus componentes tangencial y normal, observamos que la componente normal de esta fuerza se ve contrarrestada por la fuerza de tensión de la varilla. Por lo tanto, la única fuerza actuante en lo que concierne al movimiento del sistema será la componente tangencial del peso, que tendrá signo negativo por ir siempre en dirección opuesta al movimiento:

$$F(t) = -mg \operatorname{sen}(\theta(t)) \quad (5.1)$$

En el modelo clásico, se introduce esta fuerza en la segunda Ley de Newton,

$$F = ma, \quad (5.2)$$

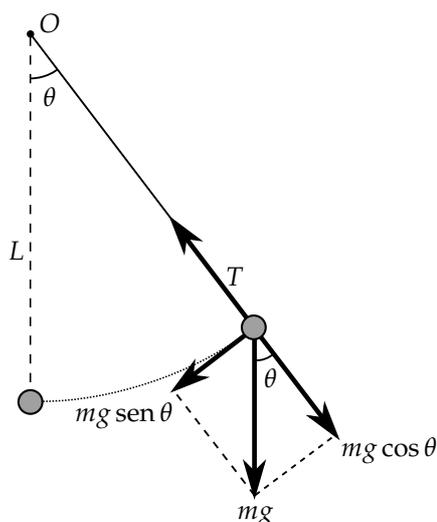


Figura 1. Fuerzas que intervienen en el péndulo

siendo a la aceleración tangencial del movimiento, y se llega así a la ecuación tradicional del péndulo. Aquí vamos a sustituir (5.2), en la que la aceleración $a(t)$ es la derivada segunda de la posición $r(t)$, por una fórmula alternativa más general haciendo uso de derivadas fraccionarias:

$$F(t) = m \left({}^C D_0^\alpha r \right) (t), \quad (5.3)$$

con $1,5 < \alpha \leq 2$.

Nos interesa una ecuación en la variable *ángulo de la varilla* $\theta(t)$, y no en la variable *posición de la partícula* $r(t)$. Por ser un movimiento a lo largo de un arco de circunferencia de radio L tenemos que $r(t) = L\theta(t)$, con lo que

$$\left({}^C D_0^\alpha r \right) (t) = L \left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t) \quad (5.4)$$

donde $\left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t)$ será la aceleración angular.

Finalmente, de (5.1), (5.3) y (5.4) obtenemos

$$-mg \operatorname{sen}(\theta(t)) = mL \left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t)$$

que nos lleva a la ecuación diferencial del péndulo en su generalización fraccionaria:

$$\left({}^C D_0^\alpha \theta \right) (t) + \frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta(t)) = 0 \quad (5.5)$$

siendo $1,5 < \alpha \leq 2$, que se reduce a la ecuación clásica $\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta(t)) = 0$ haciendo $\alpha = 2$.

5.1.2. Solución

La EDF (5.5) no tiene fácil solución, al no tratarse de una ecuación lineal debido al término no lineal $\operatorname{sen}(\theta(t))$. Ahora, recordemos que $\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$ cuando θ es pequeño; en particular, θ y $\operatorname{sen}(\theta)$ coinciden en las dos primeras cifras decimales cuando $\theta < \pi/12$.

Por lo tanto, si nos restringimos a oscilaciones de pequeña amplitud (como las que describe, por ejemplo, el péndulo de un reloj), parece razonable simplificar nuestro modelo matemático

sustituyendo $\sin(\theta)$ por θ en la ecuación (5.5)³. La ecuación resultante se reduce a

$$\left({}^C D_0^\alpha \theta\right)(t) + \frac{g}{L} \theta(t) = 0 \quad (5.6)$$

Esta EDF encaja dentro del tipo de las estudiadas en el Método de la transformada de Laplace. Si establecemos las condiciones iniciales del péndulo, es decir, ángulo de partida θ_0 y velocidad angular inicial v_0 ,

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (5.7)$$

$$\theta'(0) = v_0 \quad (5.8)$$

entonces utilizando la fórmula (4.27), y dado que en este caso $f = 0$, la solución particular, que determina la posición del péndulo en función del tiempo, es

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right) + v_0 t E_{\alpha,2} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right). \quad (5.9)$$

Por otra parte, en este sistema es habitual considerar nula la velocidad inicial de la partícula. Esto es, en origen el péndulo se *deja oscilar* sin ejercer sobre él ningún impulso. En esta situación la segunda condición inicial es

$$\theta'(0) = 0 \quad (5.10)$$

y la solución queda simplificada a

$$\theta(t) = \theta_0 E_{\alpha,1} \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right) = \theta_0 E_\alpha \left(-\frac{g}{L} t^\alpha\right). \quad (5.11)$$

En el caso particular $\alpha = 2$, teniendo en cuenta que

$$E_{2,1} \left(-\frac{g}{L} t^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{g}{L} t^2\right)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)^{2k} = \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

se obtiene la solución tradicional del péndulo linealizado $\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$ con condiciones iniciales (5.7)-(5.10):

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

5.2. proyectil

Otro problema dinámico clásico es el del proyectil. Se trata de un sistema en el que una partícula es proyectada formando un determinado ángulo con la superficie de la Tierra. El proyectil, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, describirá una curva de tipo parabólico. Esta trayectoria está perfectamente determinada matemáticamente incluso para el caso, un poco más complicado, en el que consideremos otras fuerzas intervinientes en el sistema además de la gravedad, como son las de rozamiento. Áreas como la balística han estudiado en profundidad este tema. Aquí, siguiendo trabajos como los de Ebaid [4] u Otero [12], vamos a estudiar el movimiento de un proyectil desde el enfoque fraccionario. Para ello, tal y como hicimos con el péndulo, utilizaremos como hipótesis inicial una fórmula generalizada de la segunda Ley de Newton.

Vamos a partir de unas hipótesis que simplifican el problema, de forma que la única fuerza actuante sea la gravedad:

³ Esto es lo que se hace en el estudio de la dinámica del péndulo *clásico*, y es razonable para valores pequeños del ángulo debido a que la solución constante cero es estable. En el caso fraccionario, la estabilidad de la solución cero, aunque parece obvia, es todavía un problema abierto (ver [3]).

- El medio no ofrece oposición al avance del proyectil ni por resistencia del aire ni por ninguna otra fricción.
- No hay curvatura de la superficie terrestre, que es plana y sin rugosidades.
- El movimiento se traza dentro de un plano vertical fijo OXY .
- La fuerza de la gravedad es uniforme, y no disminuye con la altura del proyectil.
- No se tiene en cuenta la fuerza de Coriolis, debida al movimiento de rotación de la Tierra.

5.2.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

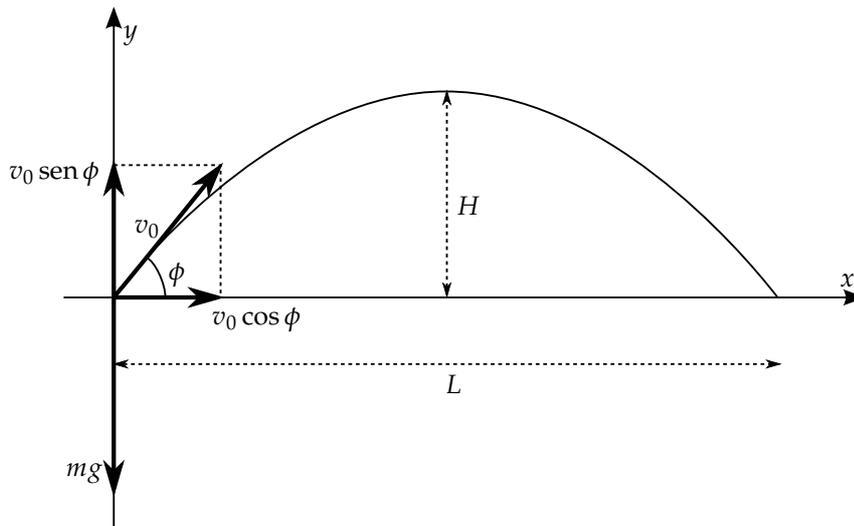


Figura 2. Fuerzas que intervienen en el proyectil

Supongamos que se lanza el proyectil, de masa m , con una velocidad inicial de módulo v_0 y formando un ángulo ϕ con la horizontal. Escogemos el plano OXY coincidiendo con el plano de la trayectoria, de forma que el origen O se corresponda con la posición inicial de la partícula. Podemos descomponer el movimiento en sus componentes horizontal y vertical, que serán independientes una de la otra. Como la única fuerza considerada, la fuerza gravitatoria, solo tiene componente vertical, la trayectoria será la composición de un movimiento rectilíneo uniforme horizontal con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical. Es decir, si $x(t)$ e $y(t)$ son las respectivas componentes horizontal y vertical del movimiento, lo anterior junto con la segunda Ley de Newton $F = ma$ nos lleva a las ecuaciones diferenciales clásicas del proyectil:

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = 0 \quad (5.12)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2}(t) = -mg \quad (5.13)$$

que con las condiciones iniciales comentadas,

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = v_0 \cos \phi \quad (5.14)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = v_0 \sin \phi \quad (5.15)$$

conducen a las conocidas soluciones del movimiento parabólico:

$$x(t) = v_0 t \cos \phi \quad (5.16)$$

$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen} \phi - \frac{g}{2} t^2. \quad (5.17)$$

Para aproximarnos al problema desde el punto de vista fraccionario sustituimos, tal y como hicimos al estudiar el péndulo, la fórmula clásica de Newton

$$F = ma$$

por la generalización

$$F(t) = m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t), \quad (5.18)$$

con $1,5 < \alpha \leq 2$. Así, aplicando el nuevo enfoque (5.18) a (5.12) y (5.13), y simplificando el factor común m , obtenemos las EDFs del *proyectil fraccionario*:

$$\left({}^C D_0^\alpha x \right) (t) = 0 \quad (5.19)$$

$$\left({}^C D_0^\alpha y \right) (t) = -g \quad (5.20)$$

siendo $1,5 < \alpha \leq 2$.

5.2.2. Soluciones

Las ecuaciones (5.19) y (5.20) son sencillas EDFs lineales del tipo de las estudiadas en el Método 1 (operadores fraccionarios) de la página 92. Si fijamos las condiciones iniciales (5.14)-(5.15) y aplicamos la fórmula obtenida para este tipo de ecuaciones (4.18) llegamos a las soluciones

$$x(t) = v_0 t \cos \phi \quad (5.21)$$

$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen} \phi - \frac{g t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (5.22)$$

donde hemos utilizado que $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = t^\alpha/\alpha$ y que $\alpha \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$. Estas son las ecuaciones paramétricas que rigen el movimiento del proyectil en el plano OXY partiendo de (5.18) como principio físico. Como es natural, al fijar $\alpha = 2$ se convierten en las soluciones tradicionales (5.16)-(5.17).

Eliminando la variable tiempo y unificando las dos ecuaciones paramétricas se llega a la ecuación algebraica que relaciona x e y , que, al contrario que en el caso $\alpha = 2$, donde se trata de una parábola, es un *polinomio fraccionario* de grado α :

$$y = \frac{-g x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1) (v_0 \cos \phi)^\alpha} + x \tan \phi \quad (5.23)$$

A continuación se estudian, para los casos fraccionario y clásico, las cuatro magnitudes más relevantes en el análisis del movimiento de proyectiles: alcance, ángulo óptimo, altura máxima y tiempo de vuelo. Cada uno de estos valores dependerá de ciertos parámetros, e indicaremos estas relaciones con notación de dependencia funcional. Todos los resultados parten de la hipótesis de un lanzamiento de proyectil (5.23) con condiciones iniciales (5.14)-(5.15). Las demostraciones de los resultados que siguen pueden encontrarse en Ebaid [4].

5.2.3. Alcance

Definición 66. Se denomina *alcance* (L) a la distancia horizontal recorrida por el proyectil entre el instante del lanzamiento y la toma de contacto con la superficie. Es decir, al valor $x(t)$ en el tiempo t de impacto con la superficie.

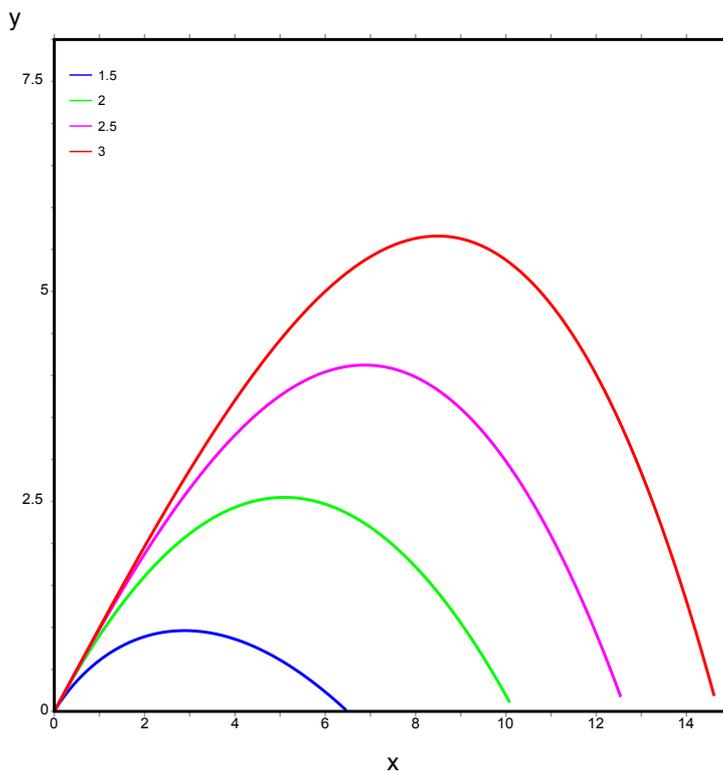


Figura 3. Comparación de trayectorias para diferentes valores de α ($\phi = \pi/4, v_0 = 10$)

Proposición 67. El alcance $L(\alpha, \phi, v_0)$ viene dado por

$$L(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} v_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\text{sen } \phi)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos \phi$$

y coincide con el alcance clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$L(2, \phi, v_0) = \frac{2v_0^2}{g} \text{sen } \phi \cos \phi$$

Proposición 68. Fijados α y v_0 , los alcances fraccionario y clásico coinciden solamente para un ángulo de lanzamiento concreto:

$$L(\alpha, \phi, v_0) = L(2, \phi, v_0) \iff \phi = \text{arc sen} \left(\frac{g \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_0} \right) \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right)$$

5.2.4. Ángulo óptimo

Definición 69. El ángulo óptimo (A) es el ángulo de lanzamiento (con respecto a la horizontal) con el que el proyectil consigue un mayor alcance.

Proposición 70. El ángulo óptimo $A(\alpha)$ viene dado por

$$A(\alpha) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right) \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq A(\alpha) < \frac{\pi}{2} \right)$$

y coincide con el ángulo óptimo clásico $\frac{\pi}{4}$ haciendo $\alpha = 2$.

Proposición 71. Fijados α y v_0 , el alcance máximo (que viene determinado por el ángulo óptimo) es

$$L_{max}(\alpha, v_0) = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1) v_0^\alpha}{g \sqrt{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y coincide con el alcance máximo clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$L_{max}(2, v_0) = \frac{v_0^2}{g}.$$

5.2.5. Altura máxima

Definición 72. La altura máxima (H) es el valor de $y(t)$ en el punto más elevado de la trayectoria del proyectil.

Proposición 73. La altura máxima $H(\alpha, \phi, v_0)$ viene dada por

$$H(\alpha, \phi, v_0) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (v_0 \sin \phi)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

y coincide con la altura máxima clásica haciendo $\alpha = 2$:

$$H(2, \phi, v_0) = \frac{v_0^2 \sin^2 \phi}{2g}.$$

Proposición 74. Fijados α y v_0 , las alturas máximas fraccionaria y clásica coinciden solamente para un ángulo de lanzamiento concreto

$$H(\alpha, \phi, v_0) = H(2, \phi, v_0) \iff \phi = \arcsen \left(\frac{g \left[(2 - \frac{2}{\alpha})^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_0} \right) \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$$

5.2.6. Tiempo de vuelo

Definición 75. El tiempo de vuelo (T) es el tiempo total en que el proyectil está en movimiento, desde su lanzamiento hasta que toma tierra.

Proposición 76. El tiempo de vuelo $T(\alpha, \phi, v_0)$ viene dado por

$$T(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{\Gamma(\alpha+1) v_0 \sin \phi}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y coincide con el tiempo de vuelo clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$T(2, \phi, v_0) = \frac{2v_0 \sin \phi}{g}$$

5.3. Resorte o muelle

Ciertos dispositivos elásticos, como los muelles o las tiras de goma, tienen la particularidad de recuperar su longitud inicial después de ser estirados. Este comportamiento elástico se debe

a la acción de una fuerza recuperadora que se opone al estiramiento. Supongamos que disponemos de un muelle que se encuentra suspendido de un extremo, y cuya longitud es l_0 . Al colgar del otro extremo un cuerpo de masa m , el muelle se estira hasta alcanzar la longitud l_1 , quedando entonces inmóvil. En ese momento el sistema está en lo que se denomina la *posición de equilibrio*, y esa posición del cuerpo se toma como origen coordenado de un sistema unidimensional. Denotemos por $x(t)$ la distancia del cuerpo a la posición de equilibrio en el instante t , considerando $x(t) > 0$ cuando el muelle está estirado (el cuerpo se mueve hacia abajo) y $x(t) < 0$ cuando está comprimido (el cuerpo se mueve hacia arriba). En este caso sí que vamos a tener en cuenta la fuerza de rozamiento ejercida por el medio (aire) sobre la masa suspendida, pero fijamos las siguientes hipótesis de partida:

- El muelle carece de masa.
- El movimiento del sistema muelle-cuerpo es unidimensional, trazándose dentro de una recta vertical fija.

5.3.1. Ecuación diferencial fraccionaria

Vamos a analizar qué fuerzas intervienen en el sistema. De acuerdo con la Ley de Hooke, la fuerza recuperadora F_H que un resorte ejerce sobre la masa es directamente proporcional a la distancia en la que el resorte se ha estirado o comprimido. Puesto que ésta es igual al desplazamiento de la masa m respecto de la posición de equilibrio, se deduce que

$$F_H(t) = -kx(t). \quad (5.24)$$

La constante de proporcionalidad $k > 0$ se llama *constante elástica* del muelle, y depende de sus características físicas. Obsérvese que F_H y x tienen signos opuestos.

Además, un cuerpo que se mueve en el aire está sometido a fricciones que se traducen en la aparición de una fuerza que tiende a frenarlo. Suele admitirse que el rozamiento del aire, a velocidades no excesivamente altas, influye sobre los cuerpos oponiendo una fuerza proporcional y de sentido contrario a la velocidad del cuerpo, es decir

$$F_R(t) = -cv(t) = -cx'(t). \quad (5.25)$$

La constante de proporcionalidad $c > 0$ se denomina *constante de amortiguamiento* y, en el caso del aire, dependerá de las condiciones atmosféricas.

Podría pensarse que no estamos teniendo en cuenta el peso mg del cuerpo como fuerza interviniente en el sistema. Por el contrario, el peso se ve contrarrestado permanentemente por una fuerza de igual módulo y signo contrario: la tensión ejercida por el muelle, que, fijado en un punto, sujeta en todo momento el cuerpo. Por lo tanto ambas fuerzas se compensan mutuamente, y la fuerza neta resultante es nula.

Tenemos así que la masa soporta la fuerza $F = F_H + F_R$. Para enfocar el problema del resorte desde el punto de vista fraccionario sustituimos de nuevo la fórmula de la segunda ley de Newton $F = ma$ por la generalización fraccionaria

$$F(t) = m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t), \quad (5.26)$$

con $1,5 < \alpha \leq 2$. De esta manera obtenemos la nueva EDF que gobierna la dinámica del muelle:

$$\begin{aligned} m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t) &= F_H(t) + F_R(t) \Rightarrow \\ m \left({}^C D_0^\alpha x \right) (t) + cx'(t) + kx(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

a la que podemos añadir unas condiciones iniciales que determinen la posición inicial de la masa,

$$x(0) = b_0, \quad (5.28)$$

y su velocidad inicial, o el impulso que se le transmite en el inicio del experimento,

$$x'(0) = b_1. \quad (5.29)$$

5.3.2. Soluciones

El problema de Cauchy dado por (5.27)-(5.28)-(5.29) no tiene fácil solución, y en la bibliografía existente no se resuelve completamente para estos parámetros particulares. Kilbas, Srivastava y Trujillo [9] han encontrado dos soluciones particulares de la ecuación (5.27):

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+1+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} + \\ & + \frac{c}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n+\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+\alpha+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+2+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} + \\ & + \frac{c}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k/m)^n}{n!} t^{\alpha n+\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n+1+\alpha+\alpha j-j)} \frac{(-c/m)^j t^{(\alpha-1)j}}{j!} \end{aligned} \quad (5.31)$$

No hay garantía de que estas dos soluciones formen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación. El encontrarlas se convierte en una cuestión bastante complicada. Por ejemplo, si α es un racional p/q con $p < q$, necesitaríamos p soluciones para configurar un sistema fundamental. Para un α real no racional, el proceso se complica más.

6. Conclusiones

De la misma forma que las propiedades de no localidad y memoria de los operadores fraccionarios han demostrado ser de utilidad en áreas como la mecánica de fluidos, la teoría de viscoelasticidad, el procesado de imagen y otras muchas, es razonable conjeturar que en sistemas físicos de la mecánica clásica pueda, bajo ciertas circunstancias, ocurrir algo parecido. Un siguiente paso en la investigación consistiría en determinar, a nivel práctico, si existen condiciones (de fricción del medio, climatológicas, gravitatorias, etc.) para las que los modelos fraccionarios expuestos representen la realidad de forma más precisa que los modelos clásicos.

En un plano más teórico, el Cálculo Fraccionario, como rama matemática reciente que es, proporciona innumerables líneas futuras de investigación. En relación a los aspectos tratados en este artículo señalamos el problema abierto de determinar la estabilidad de la solución trivial 0 en el péndulo fraccionario, y sobre todo la búsqueda de la solución general para sencillas ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales, como la obtenida en el problema del resorte.

Referencias

- [1] AGRAWAL, O. P., *A new lagrangian and a new Lagrange Equation of Motion for fractionally damped systems*, Journal of Applied Mechanics, vol. 68, (2001) 339-341.
- [2] BALEANU, D., ASAD, J. H., PETRAS, I., *Fractional-order two-electric pendulum*, Romanian Reports in Physics, vol. 64(4), (2012) 907-914.
- [3] CHEN, F., NIETO, J. J., ZHOU, Y., *Global attractivity for nonlinear fractional differential equations*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 13, (2012) 287-298.
- [4] EBAID, A., *Analysis of projectile motion in view of fractional calculus*, Applied Mathematical Modelling, 35, (2011) 1231-1239.
- [5] GORENFLO, R., MAINARDI, F., *Fractional Calculus: Integral and differential equations of fractional order*, CISM courses and lectures, vol. 378, (1997) 223-276.
- [6] HAUBOLD, H. J., MATHAI, A. M., SAXENA, R. K., *Mittag-Leffler functions and their applications*, Journal of Applied Mathematics, vol. 2011, (2009).
- [7] HEYMANS, N., PODLUBNY, I., *Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives*, Rheologica Acta, vol. 45(5), (2006).
- [8] KILBAS, A. A., *Some aspects of differential equations of fractional order*, Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat., vol. 98(1), (2004) 27-38.
- [9] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M., TRUJILLO, J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [10] MILLER, K. S., ROSS, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley and Sons, New York, 1993.
- [11] OLDHAM, K. B., SPANIER, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [12] OTERO, O., *Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario (Trabajo de Fin de Máster)*, Tutor: Juan José Nieto Roig, Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Matemáticas (2012).
- [13] PIERANTOZZI, T., *Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas (Tesis doctoral)*, Tutor: Vázquez, L., Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Matemáticas (2006).
- [14] PODLUBNY, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [15] PODLUBNY, I., *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fract. Cal. Appl. Anal, 5(4), (2002) 367- 386.
- [16] SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., MARICHEV, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Suiza, 1993.
- [17] SHIMA, H., *How far can Tarzan jump?*, European Journal of Physics, vol. 33(6) (2012) 1687-1696.
- [18] TENREIRO MACHADO, J., KIRYAKOVA, V., MAINARDI, F., *Recent history of fractional calculus*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 16(3), (2011) 1140-1153.
- [19] VÁZQUEZ MARTÍNEZ, L., *Una panorámica del cálculo fraccionario y sus aplicaciones*, Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat., vol. 98(1), (2004) 17-25.

- [20] VELASCO CEBRIÁN, M. P., *Modelos diferenciales y funciones especiales en el ámbito del cálculo fraccionario (Trabajo de Fin de Máster)*, Tutores: Trujillo, J. J. (Universidad de La Laguna) y Vázquez, L. (Universidad Complutense de Madrid) (2008).

Sobre el autor:

Nombre: Antón Lombardero Ozores

Correo electrónico: antonlo@educastur.princast.es

Institución: Departamento de Análise Matemática, Universidade de Santiago de Compostela, España.

Investigación

Programación en paralelo GPGPU del método en diferencias finitas FTCS para la ecuación del calor

FTCS finite difference scheme GPGPU parallel computing for the heat conduction equation

Vicente Cuellar Moro, Miguel Martín Stickle
y Manuel Pastor Pérez

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 107–126, ISSN 2174-0410

Recepción: 7 Ago'13; Aceptación: 10 Mar'14

1 de abril de 2014

Resumen

En el presente artículo se muestran las ventajas de la programación en paralelo resolviendo numéricamente la ecuación del calor en dos dimensiones a través del método de diferencias finitas explícito centrado en el espacio FTCS. De las conclusiones de este trabajo se pone de manifiesto la importancia de la programación en paralelo para tratar problemas grandes, en los que se requiere un elevado número de cálculos, para los cuales la programación secuencial resulta impracticable por el elevado tiempo de ejecución. En la primera sección se describe brevemente los conceptos básicos de programación en paralelo. Seguidamente se resume el método de diferencias finitas explícito centrado en el espacio FTCS aplicado a la ecuación parabólica del calor. Seguidamente se describe el problema de condiciones de contorno y valores iniciales específico al que se va a aplicar el método de diferencias finitas FTCS, proporcionando pseudocódigos de una implementación secuencial y dos implementaciones en paralelo. Finalmente tras la discusión de los resultados se presentan algunas conclusiones.

Palabras Clave: Computación en paralelo, GPU, Diferencias finitas, ecuación del calor.

Abstract

In this paper the advantages of parallel computing are shown by solving the heat conduction equation in two dimensions with the forward in time central in space (FTCS) finite difference method. Two different levels of parallelization are considered and compared with traditional serial procedures. We show in this work the importance of parallel computing when dealing with large problems that are impractical or impossible to solve them with a serial computing procedure. In the first section a summary of parallel computing approach is presented. Subsequently, the forward in time central in space (FTCS) finite difference method for the heat conduction equation is outlined, describing how the heat flow equation is derived in two dimensions and the particularities of the finite

difference numerical technique considered. Then, a specific initial boundary value problem is solved by the FTCS finite difference method and serial and parallel pseudo codes are provided. Finally after results are discussed some conclusions are presented.

Keywords: Parallel computing, GPU, finite differences, heat equation.

1. Parallel computing using graphic processing unit

1.1. Introduction

Traditionally, computer software has been written for serial computation. To solve a problem, an algorithm is constructed and implemented as a serial stream of instructions. These instructions are executed on a central processing unit (CPU) on one computer. Only one instruction may execute at a time. After that instruction is finished, the next is executed.

Parallel computing, on the other hand, uses multiple processing elements simultaneously to solve a problem. This is accomplished by breaking the problem into independent parts so that each processing element can execute its part of the algorithm simultaneously with the others. The processing elements can be diverse and include resources such as a single computer with multiple processors, several networked computers, specialized hardware, or any combination of the above.

Although the diversity of parallel machines is too big to describe them here, they can be classified into two big groups. On one side we have the distributed memory systems, on the other the shared memory systems. The distributed memory systems are those in which every computing unit has a private memory which only he can access directly. Shared memory systems are those in which each computing node can access all the memory of the system. It is important to note that these systems are sometimes combined as the computing unit in a distributed system is usually a parallel machine on its own, whether a multicore processor or any other type, which in itself is a system of the shared memory kind.

This distinction between models is critical as it describes how each system handles the fundamental problem of parallel computing, which is the data locality problem. Except in the simplest algorithms, often called “embarrassingly parallel problems” parallel machines have to deal with the access to information between its computing units, as some units need information calculated by different units.

Shared Memory Systems can have simplified solution compare to the distributed ones, as the whole system memory is available to every unit it is just a matter of synchronization and coherence rather than communication. Shared memory systems need to care only about avoiding race conditions over the data, they have to make sure the calculations of unit are completed before other units access that information. The main limitation of the Shared Memory Systems is the poor scaling, to go beyond certain sizes they need to be arranged as nodes in a Distributed Memory Model.

Distributed Memory Systems have additional needs, they need to establish and manage the communication of the information across the different nodes to solve the problem. This means additional complexity and requires a careful design not only of the system itself but also in the algorithms to avoid the communications from becoming a bottleneck.

The GPU is in itself a Shared Memory parallel machine. In general a multi-GPU system would constitute a Distributed Memory System, although it must be indicated that latest developments in some of the GPU languages as CUDA can make a multi-GPU system appear to the programmer as a Shared memory one at the cost of some performance loss.

Nowadays a GPU (graphics processing unit) can be used together with a CPU to accelerate general-purpose scientific and engineering applications. Among the different existing procedure to perform parallel computing, CPU + GPU is a powerful combination because CPUs consist of a few cores optimized for serial processing, while GPUs consist of thousands of smaller, more efficient cores designed for parallel performance. In this section the principal aspects concern the General Purpose Graphic Processing Unit (GPGPU) for parallel computing are outline.

1.2. Massively parallel Computing in Graphic Processors.

Simply known as GPU Computing or GPGPU (General Purpose Graphic Processing Unit) is a relatively new field in the parallel programming landscape that uses graphic processors for its calculations.

The usual applications of GPGPU include all sort of physical simulations, image and video processing, biological and chemical analysis, applications that require many linear algebra operations, MRI image reconstruction, and all sorts of financial calculations.

The closer model of computers that existed so far was vector computers, although the differences between vectors computers and GPUs are substantial, the algorithms designed for vector computers can be easily translated into a GPU version.

In practice GPU Computing brings a supercomputer performance to low cost desktop computers, enabling thousands of researchers and scientist to run simulations that were out of the reach before for purely economic reasons. Additionally the programming models for GPU Computing are simpler to deal with, so the development costs have gone down as well as the infrastructure costs.

The first apparent big difference between GPU computing and “traditional” parallel computing is the huge amount of execution threads in GPU computing. While conventional parallel computing rarely goes beyond few hundred threads, GPU computing goes several orders of magnitude beyond, in some cases launching kernels with millions of threads, although in reality only few thousands will run concurrently at any given time.

Execution threads in a GPU can be considered to be “lightweight”, their creation and management take few resources (“zero overhead scheduling”) in contrast with their CPU equivalents.

The development of programming languages for GPU computing is very recent. In 2001 Nvidia Corporation develops the first GPU that can easily be programmed. Shortly after that Thompson et al (2002) write the first academic paper exploring the use of GPU as vector computers for arithmetic floating point calculations. Ian Buck et al (2004)[5] created Brook, the first GPGPU language, as an extension of C. Shortly after that the first proprietary language emerges, CUDA in 2006. OpenCL the main open language is released in 2008 by the Khronos Group.

1.3. GPU Languages. CUDA.

CUDA is probably the most advanced and developed language, currently in its 5.0 version with a pretty solid 5.5 version as release candidate. CUDA development cycle brings a new major version every year. It is currently accessible as language extensions to C/C++ (Nvidia) and Fortran (Portland Group), as well as the compiler-directive language OpenACC. Nevertheless there are bindings and tools to connect CUDA with almost any language.

The latest architecture for GPU computing with CUDA is the Kepler one, it is a 28nm process, the most powerful card on said architecture is the Tesla K20X, having 2688 stream processors (CUDA cores) grouped in 14 SMX (Streaming multiprocessors). Even when we are running our calculations on a modest Geforce GT640 with only 2 SMX (384 sps) the algorithm provides substantial speedups compared to the serial version.

The CUDA GPUs are able to work with three different levels of parallelism. At the bottom level we find the execution thread, which will be executed by a Streaming Processor (SP). Above the single thread we have the execution block, which consists of a group of threads whose number go from one to tens of thousands (although rarely is less than 32 threads), a Block will be executed by the SPs grouped in a Streaming Multiprocessor (SMX), in the latest architecture the SMX holds 192 SP, every SMX is capable of running several execution blocks concurrently if it has enough hardware resources to do so. Finally there is a third level of parallelism, although is not frequently used, which is the streams, each stream can schedule many GPU functions (kernels) even memory transfer operations to and from the CPU, which depending on the hardware resources may run concurrently, streams are especially useful in multi-GPU configurations usually in combination with MPI (message passing interface).

Compared to other GPGPU languages CUDA provides both simplicity and depth, it can provide a great control of the hardware without requiring too many lines of code as opposed to OpenCL. CUDA enjoys a strong support from Nvidia, in form of many libraries, very extensive documentation and code examples available for free, despite CUDA proprietary nature. In the present article we focus only in the first two levels of parallelism, leaving for the third level a mere indication of how to scale the problem for multi-GPU environments.

2. Finite Difference Method for the Heat Conduction Equation

2.1. Introduction

There are many physical phenomena that are able to be properly represented by partial differential equations (PDEs). For instant heat flow through metallic bar, evolution of water wave motion or the static deformation of an elastic bar.

In general, a PDE in several spatial variables x, y, z , and time t is an equation G involving an unknown function $u = u(x, y, z, t)$, sometimes called the state variable, and some of its partial derivatives

$$G(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t \in I \quad (1)$$

where I is a given interval of time, often define as positive time $t \geq 0$, and Ω is a region in the space. A PDE model or an initial boundary value problem is a PDE supplemented with initial and boundary conditions that specify the state initially and on the boundary.

By a solution of the PDE (1) it is meant a function $u = u(x, y, z, t)$ defined on the space-time domain $(x, y, z) \in \Omega, t \in I$ that satisfies, upon substitution, the equation (1) identically on the domain.

In most practical cases coming from engineering practice PDEs are almost always solved numerically on a computer because most real world problems are too complicate to be solved analytically. By a numerical method we generally mean that the continuous PDE problem is replaced by a discrete problem that can be solved on a computer in finitely many steps. The result is a discrete solution known approximately at only finitely many points.

In this section we focus attention on the forward in time central in space (FTCS) finite difference method for the heat conduction equation. First we will set up a PDE model for the heat flow in three and two dimensions. As the heat equation describes a diffusive-like behaviour the finite difference procedure to solve the diffusion equation is outline subsequently.

2.2. Heat Flow in Three Dimensions

Many PDE models come from a basic balance law or conservation law. A conservation law, whose foundation goes back to Lavoisier's principal [2], is just a mathematical formulation of the basic fact that the rate at which a quantity changes in a given domain must equal the rate at which the quantity flows across the boundary plus the rate at which the quantity is created or destroy within the domain.

To set up a PDE model for the heat flow in three dimensions let Ω be a region in space where heat is flowing, and let $u = u(x, y, z, t)$ be the temperature at time t at the point (x, y, z) in Ω . We assume that the region is homogeneous and is characterized by a constant specific heat c and a constant density ρ . Now let B be an arbitrary sphere contained in Ω (Figure 1).

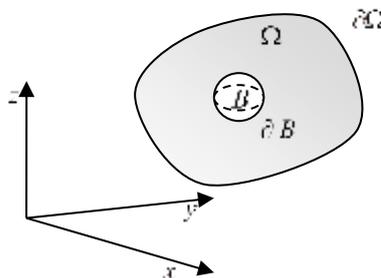


Figure 1. Arbitrary sphere B contained in a region Ω . ∂B denotes the boundary of B

We shall apply an energy balance principal to B that requires [1] that rate of change of the total amount of heat energy in B must equal the rate at which heat flows into B across its

boundary plus the rate at which heat energy is generated by any sources in B . The total amount of heat in a small volume element $dV = dx dy dz$ is $c \rho u dV$, and thus the total amount of heat energy in B is given by three-dimensional integral

$$\int_B c \rho u dV \quad (2)$$

We assume that the heat sources (or sinks) are given by a point function $f = f(x, y, z, t)$, where $f dV$ is the rate at which heat is generated in dV ; thus, the rate at which heat is generated is the whole of B is

$$\int_B f dV \quad (3)$$

Next, we introduce the heat flux vector $\phi = \phi(x, y, z, t)$; its direction corresponds to the direction of heat flow at position (x, y, z) at time t . The rate at which heat flows across a surface element dA oriented by a unit vector \mathbf{n} is $\phi \cdot \mathbf{n} dA$ (Figure 2). Consequently, the net rate that heat energy flows across the boundary of B , denoted by ∂B , is the surface integral

$$\int_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA \quad (4)$$

So, the conservation law or equivalently the energy balance law [1] is

$$\frac{d}{dt} \int_B c \rho u dV = - \int_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_B f dV \quad (5)$$

Now making use of the divergence theorem, under sufficient differentiability requirement on the vector field ϕ , we can write (5) as

$$\frac{d}{dt} \int_B c \rho u dV = - \int_B \operatorname{div}(\phi) dA + \int_B f dV \quad (6)$$

Bringing the time derivative under the integral on the left side and finally rearrange all the terms under one volume integral we get

$$\int_B (c \rho u_t + \operatorname{div}(\phi) - f) dV = 0 \quad (7)$$

As this balance law must hold for every sphere B in Ω , the integrand must vanish [1], giving the partial differential equation

$$c \rho u_t + \operatorname{div}(\phi) = f \quad (8)$$

For all t and all $(x, y, z) \in \Omega$. The equation (8) is the local form of the conservation law. It still contains two unknowns, the scalar temperature u and the vector heat flux ϕ . A constitutive relation can be postulate to connect the two. One such relation is the three dimensional version of Fick's law, or Fourier's heat conduction law, which states, consistent with the laws of thermodynamics, that heat flows down the gradient, or in symbols,

$$\phi = -K \operatorname{grad}(u) = -K(u_x, u_y, u_z) \quad (9)$$

where the proportionality constant K is the thermal conductivity. Substituting (9) in (8) and using the identity $\text{div}(\text{grad}(u)) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ we obtain the heat equation for the temperature $u = u(x, y, z, t)$ in three dimensions:

$$c \rho u_t - K(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f \tag{10}$$

Introducing the Laplacian of u , denoted by Δu , we finally get

$$u_t - \kappa \Delta u = \frac{1}{c \rho} f \tag{11}$$

where the constant $\kappa = K/(c \rho)$ is called the diffusivity. If there are no sources, $f(x, y, z, t) = 0$, then $u = u(x, y, z, t)$ satisfies the standard heat equation

$$u_t = \kappa \Delta u \tag{12}$$

Of course, these calculations can be made in two dimensions in order to describe heat flow in the plane. The two-dimensional analogue of (11) has the same expression where now $u = u(x, y, t)$, $f = f(x, y, t)$, and $\Delta u = u_{yy} + u_{zz}$.

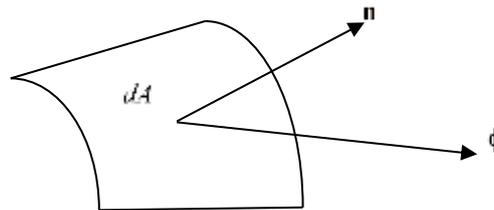


Figure 2. Heat flux through a surface element dA oriented by its unit normal vector \mathbf{n}

The auxiliary conditions to complete the PDE model for heat conduction includes an initial temperature condition

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega \tag{13}$$

and conditions on the boundary. There are two main types of boundary conditions that often occur in heat conduction problems. We can prescribe the temperature on the boundary of Ω , that is,

$$u(x, y, z, t) = g(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{14}$$

where g is given; this condition is called Dirichlet condition. We could also specify the heat flux on the boundary

$$-K \text{grad}(u) \cdot \mathbf{n} = l(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{15}$$

where l is given; this condition is called Neumann condition.

2.3. Forward in Time Central in Space Finite Difference Method

In order to illustrate the forward in time central in space (FTCS) finite difference method we applied it to the following one dimension diffusion equation problem

$$u_t = Du_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{16}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0 \tag{17}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{18}$$

The general idea of the finite difference method is to replace the partial derivatives in the equation by their difference-quotient approximations and then let the computer solve the resulting difference equation. The forward in time central in space scheme is a specific choice for the difference-quotient approximation [2,3].

The first step consist in discretize the region of space-time where we want to obtain a solution. In this case the region is $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$. We have put a bound on time because in engineering practice we only solve a problem up until a finite time. Discretizing means defining a lattice of points, also known as nodes, in this space-time region by

$$x_j = jh, \quad t_n = nk, \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad n = 0, 1, \dots, N \tag{19}$$

where the fix numbers h and k are the spatial and temporal step sizes, respectively. Here, $h = 1/J$ while $k = T/N$. The integer J is the number of subintervals in $0 \leq x \leq 1$ and the integer N is the number of time steps to be taken (Figure 3). At each node (x_j, t_n) of the lattice we seek an approximation, which we call U_j^n , to the exact value $u(x_j, t_n)$ of the solution. Note that the superscript n refers to time, and the subscript j refers to space. We regard U_j^n as two dimension array, or matrix, where n is a row index and j is a column index.

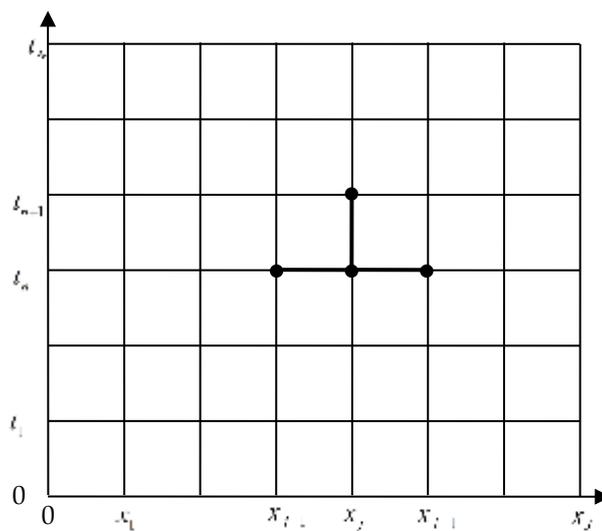


Figure 3. Discrete lattice and nodes involved in the FTCS finite difference method

To obtain equations for the U_j^n , we replace the partial derivatives in the PDE by their difference approximation. From calculus, using the Taylor series expansion in t , we might get [1, 2] the difference quotient

$$u_t(x_j, t_n) \approx \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{k} \quad (20)$$

And by the Taylor series expansion in x ,

$$u_{xx}(x_j, t_n) \approx \frac{u(x_{j-1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j+1}, t_n)}{h^2} \quad (21)$$

The first of these formulas is the usual forward in time difference approximation for a first derivative, and the second is central in space difference approximation for a second derivative. Making use of (20) and (21), the PDE (16) at the point (x_j, t_n) is replaced by the difference equation

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = D \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2} \quad (22)$$

Or, upon solving for U_j^{n+1} ,

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{Dk}{h^2} (U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n) \quad (23)$$

The difference equation (23) gives the approximate solution at the node (x_j, t_{n+1}) in terms of approximations at the three earlier nodes (x_{j-1}, t_n) , (x_j, t_n) , (x_{j+1}, t_n) , see Figure 3. These four points geometric arrangement form the stencil for the FTCS finite difference method in one dimension. Now we see how to fill up the lattice approximate values. We know the values at $t = 0$ from the initial condition (18). That is

$$U_j^0 = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (24)$$

We can observe that if $j = 0$ then U_{-1}^n appears in equation (23) and for $j = J$ then U_{J+1}^n also enters in equation (23). However, following (19) there are no nodes place at $j = -1$ neither at $j = J+1$. To solve this drawback [3] we consider the boundary conditions (17), namely we only consider equations in (23) with subscript j running from 1 to $J-1$ while

$$U_0^n = 0, \quad U_J^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

The difference formula (23) with $j = 1, \dots, J-1$ can now be applied at all the interior lattice points, beginning with the values at the $t = 0$ level, to compute the values at the $t = t_1$ level, then using those to compute the values at the $t = t_2$ level, and so on. Therefore, using the difference equation (23), we can march forward in time, continually updating the previous temperature profile.

A finite difference scheme like (23) is called explicit scheme because it permits the explicit calculation of an approximation at next time step in terms of values at a previous time step. Because of the error, called truncation error, that is present in (23) due to replacing derivatives by differences, the scheme is not always accurate. If the time step k is too large, then highly

inaccurate results will be obtained. It can be shown [3] that for a one dimension problem we must fulfil the stability condition

$$\frac{kD}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (26)$$

for the scheme to work; this condition limits the time step. This is why the forward scheme (23) is known to be conditionally stable. To obtain a method that is unconditionally stable we should consider an implicit difference method. However, these schemes involved the solution of a linear system to advance in time. The solution of algebraic linear systems scales poorly with the problem size, usually as an $O(n^3)$ problem, therefore in many cases it is often avoided when the objective is performance on large problems. From now on we will focus on the forward in time central in space scheme (23).

3. Case of application. Heat diffusion in two dimensions

The case of application consists in the following initial boundary value problem:

$$u_t = \frac{1}{16}(u_{yy} + u_{zz}) \quad (27)$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (28)$$

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (29)$$

Where Ω is the unit square in xy -plane. By the second section of the present work, this PDE model might be regarded as a heat conduction problem in two dimensions where the diffusivity has been set to $1/16$ with no heat source. Homogeneous Dirichlet boundary condition has been considered while initial temperature is given by (29).

After applying separation of variables method [4] to the initial boundary value problem define by (27)-(29) we get the following analytical solution

$$u(x, y, t) = e^{-0.5\pi^2 t} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad (30)$$

The same PDE model is numerically solved by the forward in time central in space (FTCS) finite difference method up until $T = 1$ s. To make a significant comparison between serial and different parallel computing implementations, the number J of subintervals for the spatial discretization, equal for x and y directions, varies in powers of two from 32 to 512. The number of time steps is set to $N = 100000$. Regarding the stability condition for two dimension case, being $h = 1/J$ and $k = T/N$, we get $\frac{k\alpha}{h^2} < \frac{1}{4}$. Therefore stable numerical simulations are performed for each value of J [3].

The FTCS finite difference method in two dimensions is associated with a five-point stencil. Therefore, calculation of every grid node value at time t_{n+1} requires reading the values of its four neighbour nodes at time t_n , (x_i, y_{j-1}, t_n) , (x_i, y_{j+1}, t_n) , (x_{i-1}, y_j, t_n) , (x_{i+1}, y_j, t_n) and the value at time t_n of the node itself (x_i, y_j, t_n) , as it is shown in Figure 4.

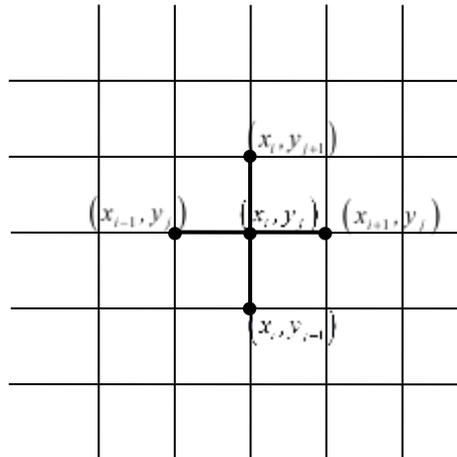


Figure 4. FTCS finite difference stencil scheme in two dimensions

Bearing in mind this five-point stencil structure, a serial pseudo code solution would contain code like:

Algorithm1 Simulation Loop

- 1: **for all** spatial step i in x direction **do**
 - 2: **for all** spatial step j in y direction **do**
 - 3: read node value U in position (x_i, y_j) at time step t_n
 - 4: read neighbour node values U for $(x_i, y_{j-1}), (x_i, y_{j+1})$
 $(x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j)$ at time step t_n
 - 5: calculate node value U for (x_i, y_j) at time step t_{n+1}
 - 6: write result into memory.
 - 7: **end for**
 - 8: **end for**
 - 9: **for all** nodes (x_i, y_j) that belong to boundary
 - 10: apply boundary conditions at time step t_{n+1}
 - 11: **end for**
-

For a naive GPU implementation the pseudo code solution would contain code like:

Algorithm2 Simulation Loop

The kernel is launched with one thread per grid node (x_i, y_j)

1: read node value U in position (x_i, y_j)

2: read neighbour node values U for $(x_i, y_{j-1}), (x_i, y_{j+1}), (x_{i-1}, y_j)$

(x_{i+1}, y_j) at time step t_n

3: calculate node value U for (x_i, y_j) at time step t_{n+1}

4: write result into memory.

Another kernel is launched with one thread per boundary node

5: apply boundary conditions at time step t_{n+1}

As we can see the most aparent change in the pseudo code comes from the fact that instead of having a nested loop to traverse the grid in the x and y directions, in the parallel version we simply launch a kernel (GPU subroutine) with as many threads as grid nodes. Although not all the threads run concurrently, high level of paralelism is achieved. Moreover the GPU will schedule and execute the threads in a manner that while some threads are waiting for the values they need from memory, other threads are being executed, this is called "latency hiding" wich is another reasons GPUs can run so fast calculations. Effective latency hiding requires launching more threads than Streaming Processors are available at the GPU. The particular tuning of the parameters like threads per block and total number of threads must be adapted for every particular algorithm.

We can improve over the naive version when we consider the second level of parallelism as we can use the on-chip shared memory that every SMX has. In the second version we start using better the GPU hardware, in particular as we are working at the SMX level we can employ the on-chip shared memory.

Shared memory presents one of the best opportunities to obtain a large increase in performance if the algorithm can work within the restriction imposed by its limited size.

Fetching values from shared memory is much faster than reading global memory. With shared memory we have a latency of around 8 cycles, while uncached global memory has a latency of up to 600 cycles. That is almost two orders of magnitude.

The main obstacle in the use of shared memory is its limited size. In the best of cases we have available around 48 Kb of shared memory per SMX which means around 6.000 values in double precision or 12.000 in single precision.

The benefit of using shared memory is better understood if we consider that in the case of this stencil operation we can reduce the memory bandwidth in use to a fifth of the naive implementation.

Any GPU subroutine can be classified from a performance point in two rough groups. "Memory Bandwidth Bound" or simply Memory-Bound are algorithms whose performance is limited by the latencies of memory Access, that is the number of floating point operations they execute cannot compensate for the time each thread has to wait to fetch the values is using, in other words a faster clock rate in the GPU would not yield the result any faster.

“Computationally Bound” kernels in the other hand, have enough computations so the clock rate in the SP is the limiting factor, in this case increasing the clock frequency would result in the increase of performance. A given implementation can be either memory or computationally bound, as the computation threshold is usually several times higher that would be ideally the limit we would like to reach.

Most implementations, specially the naive ones, are “Memory-Bound”. The main reason for that is how the hardware is built. As the computational power of a chip depends of the number of transistors in the chip that means is directly proportional to the “effective computational area” of the chip, while the bandwidth is proportional to the perimeter of the chip. This may change in the future with the advent of 3D-stack chips, but for the time being is the main challenge to current chip architectures.

So our second implementation tries to reduce the amount of times we need to fetch values from global memory, as it can be seen that we are reading five times every value from global memory, one for the calculation of the node himself and another four for the calculation of its neighbours.

The new implementation is now divided in two fundamental phases, the first one consist of loading the node value into shared memory, the second one consists in reading the necessary values from shared memory to perform the calculation.

There are two very important aspects to consider in this implementation. First given the limitation of shared memory size we have to divide the grid into “tiles” that fit shared memory, this also requires some overlap between the tiles so all the threads have access to all the necessary values. This introduces a small redundancy as the “halo” threads are only used for memory loads and not for calculation.

The second aspects is a mere practical one, we need to introduce a synchronization barrier at block level. We need to make sure that all the threads belonging to the same block have finished loading their node values into shared memory before we make the calculation.

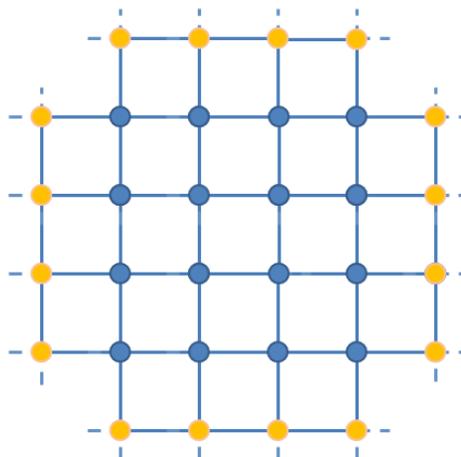


Figure 5. Simplified tile division of the grid for each SMX. Calculation nodes are in blue while “halo” nodes are yellow.

Algorithm3 Simulation Loop

The kernel is launched with as many halo-overlapping blocks as necessary.

One thread per grid node (x_i, y_j) in the block + enough threads for the “halo” nodes.

- 1: read node value U in position (x_i, y_j)
 - 2: store node value in shared memory
 - 3: **synchronization barrier** at block level
 - 4: read neighbour node values U for $(x_i, y_{j-1}), (x_i, y_{j+1}), (x_{i-1}, y_j), (x_{i+1}, y_j)$
- at time step t_n
- 5: calculate node value U for (x_i, y_j) at time step t_{n+1}
 - 6: **if** node is not in halo **do**
 - 7: write result into global memory
 - 8: **end if**
- Another kernel is launched with one thread per boundary node
- 9: apply boundary conditions at time step t_{n+1}

4. Results and Discussion

In Figure 6 the numerical temperature profile for $t = 0, 0.25, 0.5, 1$ s obtained with the FTCS for $J = 32$ and $N = 1000$ is presented. We observed how the maximum and minimum temperatures, attained at time $t = 0$, are $u = 1$ and $u = -1$, respectively. As the time integration proceeds this temperature profile tends to dump out, leading to an almost zero temperature in the whole domain at time $t = 1$ s.

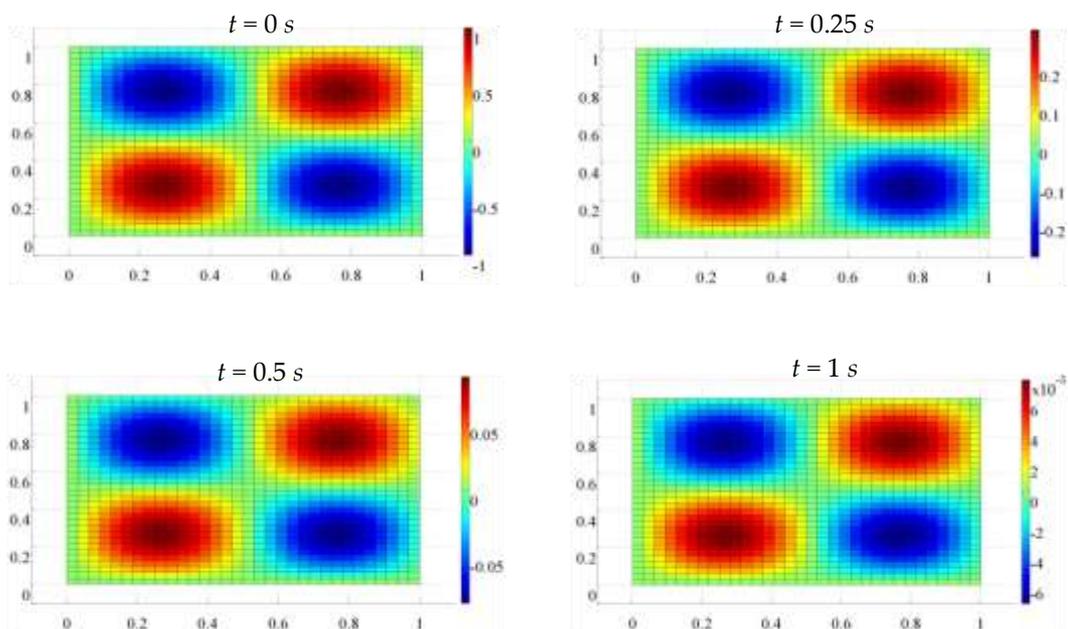


Figure 6. Temperature profile for times $t = 0, 0.25, 0.5, 1$ s

In order to verify that numerical solutions are reproducing adequately the heat conduction phenomena, the approximate solution achieved with FTCS scheme is compared with exact solution (30). To this end the error profile for $t = 0, 0.25, 0.5, 1 s$, measure as the absolute value of the difference of the approximate and the exact solution is displayed in Figure 7 for $J = 32$ and $N = 1000$

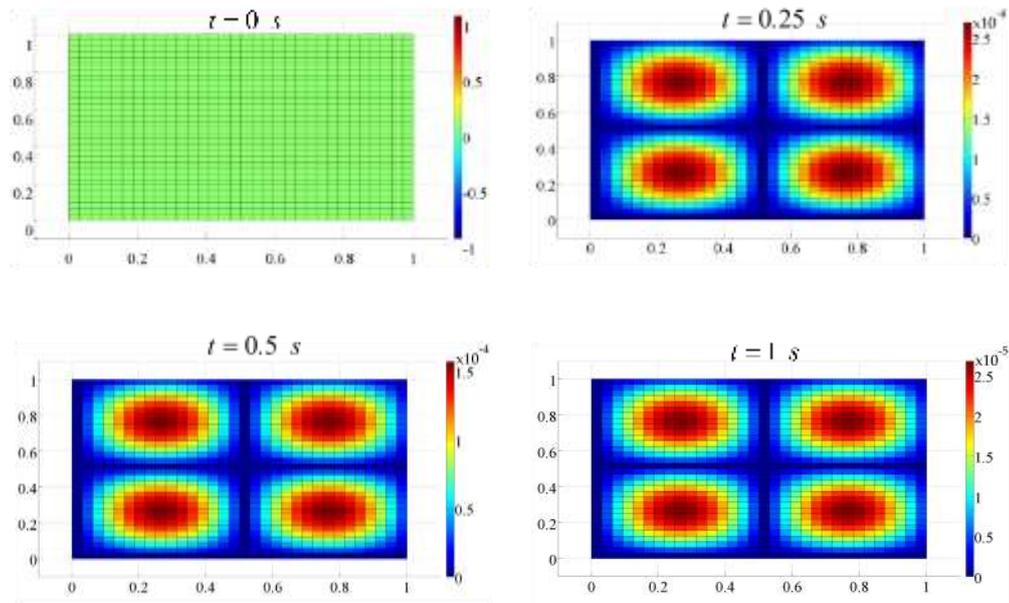


Figure 7. Absolute error profiles for times $t = 0, 0.25, 0.5, 1 s$

In this last figure it is clear that numerical and analytical solutions are almost coincident. Obviously at initial time no difference exists. As the time integration proceeds, some error appears in the numerical solution, being higher at nodes $(0.25, 0.25), (0.25, 0.75), (0.75, 0.25), (0.75, 0.75)$, which are the nodes where maximum and minimum temperature is attained.

Once it has been shown numerical solutions reproduce correctly the heat conduction problem in 2D, running time comparisons for the different implementations are analyzed subsequently.

We decided to run the parallel version in the last three GPU architectures developed by Nvidia. These are, Tesla, Fermi and Kepler which is the latest one. Although we decide to report only the two most diverse cards the Quadro FX3800 and the Geforce GT640, as the results for the GT420 card didn't add any interesting insights that were not provided by the other two (Table 1)

Table 1. Hardware used in the comparison.

Processor	Architecture Name	Chipset	Process	Clock Mhz	Memory Band. Gb/sec	SMX	SP	Power Draw (W)
Intel Xeon	Bloomfield	W3520	45 nm	2660				130
Quadro FX3800	Tesla	GT200	55 nm	600	51.2	24	192	108
Geforce GT640	Kepler	GK107	28 nm	728	28.5	2	384	50

We also provide the speedup per streaming multiprocessor to account the difference between each card, as the Tesla one was a high end card at the time of its release (Quadro FX3800) while the other two are low-end cards (Geforce GT420 and GT640).

In Figure 8 we can observed the running time in milliseconds for different number of subintervals for the spatial discretization and the different implementations considered. It is clear that an important running time improvement is achieved when parallel instead of serial implementation is considered.

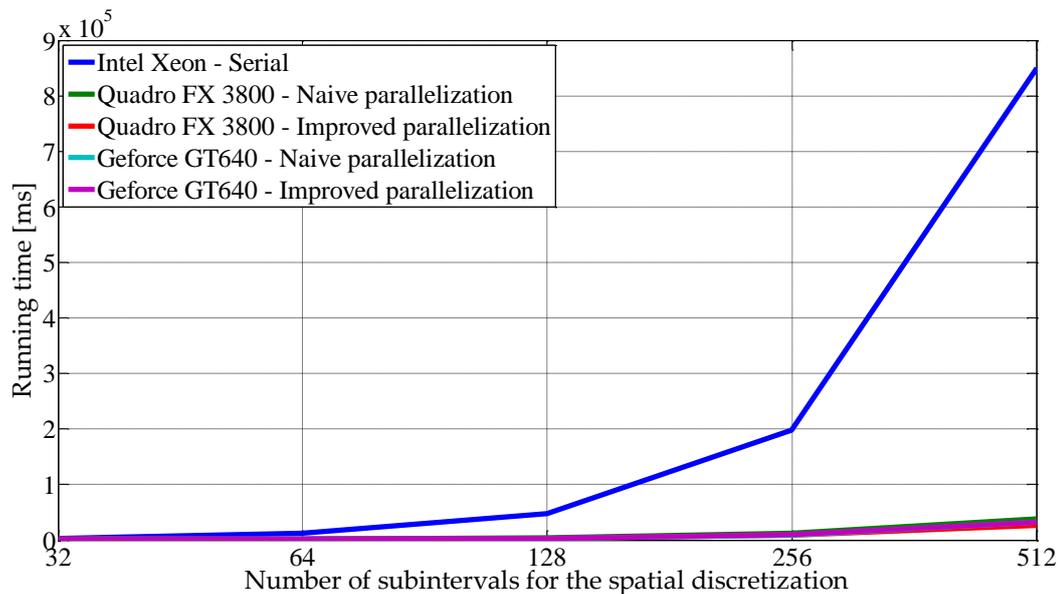


Figure 8. Running times in milliseconds.

A different way to cluster data of Figure 8 is to consider the relative speed up between serial and parallel computations. This is shown in Table 2. Again, it is clear the important speed up achieve when parallel instead of serial implementation is considered.

Table 2. Speed up against serial version

Algorithm	Processor	32x32	64x64	128x128	256x256	512x512
Naive parallel.	FX3800	1.4x	5.2x	11.8x	16.8x	22.5x
Improved parallel.	FX3800	1.7x	6.0x	13.8x	22.0x	31.7x
Naive parallel.	GT640	2.0x	7.1x	16.9x	21.5x	26.7x
Improved parallel.	GT640	2.0x	7.3x	17.1x	20.9x	26.3x

From Table 2 it can be observed how time scales with the grid size. In principle this is an $O(n^2)$ problem, meaning the execution time (per time step) should scale roughly with the square of the grid size (spatial steps), so a 64×64 grid should take four times as much as the 32×32 grid. This is observed in the serial version of the algorithm, with some irregularities maybe caused by cache sizes.

In the GPU implementations we see a better scaling up to sizes of 512×512 . This can be observed in Table 3. In the case of the smaller grids it seems to scale almost free of cost up to 128×128 . The reason for this advantage has to do with the way GPUs operate. To hide latencies properly the GPU needs grids with a lot of blocks and threads. In the small problems we only launch few blocks as the block size is 256 threads organized as 16×16 tiles. That means the 32×32 problem only gets four blocks in the naive implementation. As the size of the problem continues to increase we use all of the scheduling advantage of the GPU and execution times and problem size scale at the expected rate.

Table 3. Scaling of execution times per time step compared to the previous problem size.

Algorithm	Processor	32x32	64x64	128x128	256x256	512x512
Serial	Xeon		4.00	4.00	4.13	4.29
Naive parallel.	FX3800		1.12	1.75	2.89	3.21
Improved parallel.	FX3800		1.12	1.73	2.59	2.98
Naive parallel.	GT640		1.11	1.68	3.25	3.46
Improved parallel.	GT640		1.10	1.70	3.37	3.42

If we analyze the results only considering parallel implementation, we observed that the improved version performs slightly worse than the naive implementation for the Fermi and

Kepler architectures (Figure 9). The reason is very simple. In this algorithm the use of shared memory is limited while Kepler and Fermi include caches which in practice is the same memory used as shared. So the naive implementation is in practice using the same memory access but launching a bit less blocks and threads. Additionally the naive implementation suffers no delay from the synchronization barriers.

That is not to say the improve algorithm is worse, with a different memory access pattern (a different type of stencil) or being the problem a 3D instead of a 2D, we would see much better results. If shared memory had to hold intermediate values like in reductions algorithms we would see greater performance improvements using the shared memory

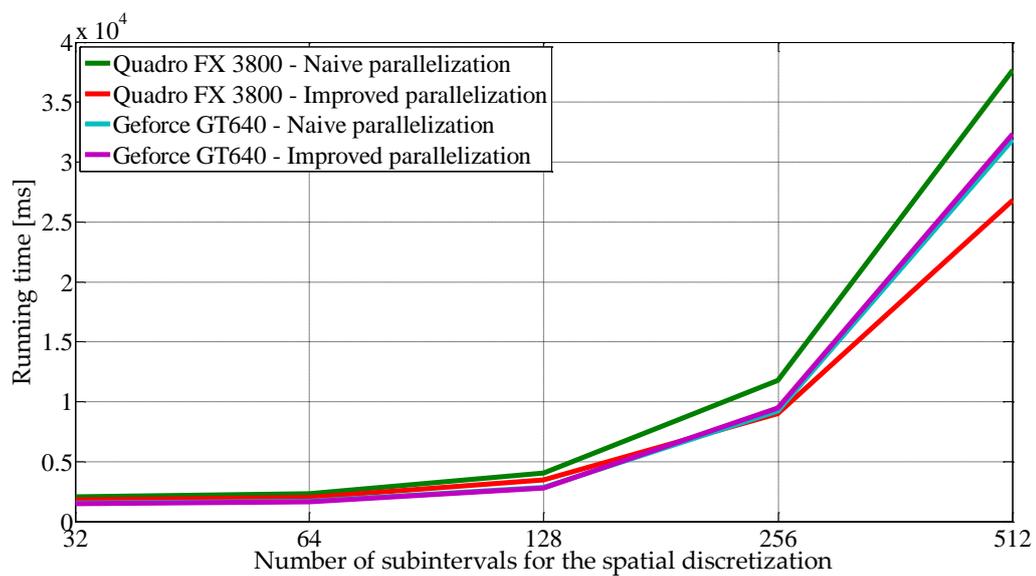


Figure 9. Running times in milliseconds for all the GPU implementations.

Another good comparison is the speedup per Streaming Multiprocessor (Table 4). The number of SMX seems to be more or less constant between architectures, with high end cards having between 13 to 15, or even twice that if they are dual cards. In this case we can clearly see that the Kepler architecture achieves more than 27x speedup per SMX over the serial version, so even if we don't account for the bandwidth improvement, which is also a big difference between low end and high end cards, we could see speedups exceeding the 380x with the high end cards of the Kepler architecture such as the Geforce Titan or the K20 cards.

Table 4. speed up per SMX against serial version

Algorithm	Processor	32x32	64x64	128x128	256x256	512x512
Naive parallel.	FX3800	0.1x	0.2x	0.5x	0.7x	0.9x
Improved parallel.	FX3800	0.1x	0.2x	0.6x	0.9x	1.3x
Naive parallel.	GT640	1.0x	3.6x	8.5x	10.8x	13.3x
Improved parallel.	GT640	1.0x	3.6x	8.5x	10.4x	13.1x

Finally if we adjust the speedup with the ratio of power draw between the CPU and the GPU we obtain a table (Table 5) that brings the attention to the energy efficiency of the new architectures of GPUs. The performance adjusted for energy consumption is simply fantastic, these cards can be the building block of low cost, low energy consumption clusters, there are already hardware solutions like the Carma and Kayla development kits that point into this direction. This is from our point of view one of the most interesting results, very good speedups with very cheap hardware at very low operation costs.

Table 5. Speedup adjusted for energy consumption.

Algorithm	Processor	32x32	64x64	128x128	256x256	512x512
Naive parallel.	FX3800	1.7	6.2	14.2	20.2	27.1
Improved parallel.	FX3800	2.0	7.2	16.6	26.4	38.0
Naive parallel.	GT640	5.1	18.5	44.0	55.9	69.3
Improved parallel.	GT640	5.2	18.9	44.4	54.3	68.3

5. Concluding remarks

A PDE model of a heat conduction problem in two dimensions has been numerically solve by the forward in time central in space (FTCS) finite difference method. Three different implementations have been developed one under serial computing and the other two under parallel procedure. The parallel implementations have been run over Quadro FX3800 and Geforce GT640 GPU architectures.

Emphasis has been devoted to GPU parallel computing with CUDA language. This combination of architecture and language is outstanding. It permits a huge amount of execution threads, compared to conventional parallel computing, while not many lines of code are required to achieve a great control of the hardware due to CUDA language.

The analysis of the results shows the importance of parallel computing when dealing with large problems that are impractical or impossible to solve them with a serial computing procedure as the execution times grow so fast.

Additionally we can see the advantages the new architectures of GPUs. On one side inclusion of caches has improved the performance of the simpler implementations. On the other side the increase of performance from one architecture to the next is remarkable, but the performance adjusted for energy consumption is even more impressive.

6. References

- [1] LOGAN JD, *Applied Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2004.
- [2] RAPPAZ M, BELLET M, DEVILLE M, *Numerical Modeling in Materials Science and Engineering*. Springer, New York, 2003.
- [3] BURDEN RL, FAIRES JD, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole-Thomson Learning, 2001.
- [4] JOHN F, *Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1982.
- [5] I. BUCK, T. FOLEY, D. HORN, J. SUGERMAN, K. FATAHALIAN, M. HOUSTON, AND P. HANRAHAN. *Brook for GPUs: Stream Computing on Graphics Hardware*, páginas específicas consultadas, Stanford University, ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH), 2004.
- [6] BRODTKORB A, DYKEN C, HAGEN T, HJELMERVIK J, STORAASLI O. *State-of-the-art in heterogeneous computing. Scientific Programming Volume 18 Issue 1, Amsterdam 2010*.
- [7] HARRIS MARK. *Finite difference Methods in CUDA C/C++*. <https://developer.nvidia.com/content/finite-difference-methods-cuda-cc-part-1>

Sobre los autores:

Nombre: Vicente Cuellar Moro

Correo Electrónico: vicente.cuellar.moro@gmail.com

Institución: M2i Group, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Miguel Martín Stickle

Correo Electrónico: miguel.martins@upm.es

Institución: M2i Group, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Manuel Pastor Pérez

Correo Electrónico: manuel.pastor@upm.es

Institución: M2i Group, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación

Estimación de sucesos raros mediante Redes Bayesianas

Rare events estimation using Bayesian Networks

Francisco Soler Flores y José Ángel Olivas Varela

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 127-136, ISSN 2174-0410
Recepción: 30 Sep'13; Aceptación: 20 Mar'14

1 de abril de 2014

Resumen

La teoría y aplicaciones de sucesos de baja probabilidad de ocurrencia o sucesos raros está en boga en los últimos años debido a su importancia práctica en muy diferentes campos, como seguros, finanzas, ingeniería o ciencias del medio ambiente. Este trabajo presenta una metodología para predecir sucesos raros basada en Redes Bayesianas que permite a su vez estudiar situaciones alternativas.

Palabras Clave: Sucesos raros, redes bayesianas, poisson, Naive-Poisson .

Abstract

Theory and applications of rare events, very important in recent years due to its practical importance in very different fields such as insurance, finance, engineering or environmental science. This paper presents a methodology for predicting rare events based on Bayesian networks that in turn allows to study alternative scenarios.

Keywords: Rare events, Bayesian networks, poisson, Naive-Poisson.

1. Introducción

El tratamiento de sucesos raros, sucesos que ocurren con una probabilidad baja, es un problema complejo y amplio cuyo tratamiento se enmarca en el ámbito de modelización de la incertidumbre, teoría de la decisión y donde el estudio del riesgo, definido en términos de teoría de decisiones como las pérdidas promedio o las pérdidas que se pronostican cuando algo malo sucede, es importante. La 'Ley de Eventos Raros', demostrada por Poisson, fundamenta matemáticamente el concepto de suceso raro. Esta ley que lleva su nombre, la ley de los sucesos raros ([1]) es también llamada por Bortkiewicz 'ley de los pequeños números' ([2]).

En las últimas décadas se han desarrollado numerosas técnicas de análisis y modelización de datos en distintas áreas de la estadística ([3],[4]) y la inteligencia artificial ([5]) que se han

aplicado al estudio de sucesos raros . La Minería de Datos (MD) ([6]) es un área moderna interdisciplinaria que engloba a aquellas técnicas que operan de forma automática (requieren de la mínima intervención humana) y, además, son eficientes para trabajar con las grandes cantidades de información disponibles en las bases de datos de numerosos problemas prácticos. Estas técnicas permiten extraer conocimiento útil (asociaciones entre variables, reglas, patrones, etc.) a partir de la información cruda almacenada, permitiendo así un mejor análisis y comprensión del problema. En algunos casos, este conocimiento puede ser también post-procesado de forma automática permitiendo obtener conclusiones, e incluso tomar decisiones de forma casi automática, en situaciones prácticas concretas (sistemas inteligentes). La aplicación práctica de estas disciplinas se extiende a numerosos ámbitos comerciales y de investigación en problemas de predicción, clasificación o diagnóstico.

Con el avance y la extensión de los modelos de inteligencia artificial, tales como las redes bayesianas, se plantea, en este trabajo, la utilización de estos últimos para estimar la probabilidad de ocurrencia de un suceso raro.

El objetivo de este trabajo es presentar una metodología que, a partir de los datos brutos de los que se dispone habitualmente a la hora de estudiar cualquier problema en el marco del análisis de datos, sistematiza el estudio de sucesos raros y es capaz de estudiar diferentes situaciones que modifican la probabilidad de ocurrencia de estos.

El trabajo se divide en tres secciones principales:

- Minería de datos y redes bayesianas: Se describen los conceptos básicos en los que se apoya la metodología.
- Metodología propuesta: Se describe en detalle el procedimiento propuesto.
- Conclusiones.

2. Minería de datos y Redes Bayesianas

Se denomina Minería de Datos ([7],[8]) al conjunto de técnicas y herramientas aplicadas al proceso no trivial de extraer y presentar conocimiento implícito, previamente desconocido, potencialmente útil y humanamente comprensible, a partir de grandes conjuntos de datos, con objeto de predecir de forma automatizada tendencias y comportamientos; y describir de forma automatizada modelos previamente desconocidos ([9]). El término Minería de Datos Inteligente ([8]) es referido específicamente a la aplicación de métodos de aprendizaje automático ([10]), para descubrir y enumerar patrones presentes en los datos, para estos, se desarrollaron un gran número de métodos de análisis de datos basados en la estadística. En la medida en que se incrementaba la cantidad de información almacenada ([11]) en bases de datos, estos métodos empezaron a utilizarse para problemas de eficiencia y escalabilidad y es entonces cuando aparece el concepto de minería de datos. Una de las diferencias entre al análisis de datos tradicional y la minería de datos es que el primero supone que las hipótesis ya están construidas y validadas contra los datos, mientras que el segundo supone que los patrones e hipótesis son automáticamente extraídos de los datos . Las tareas de la minería de datos se pueden clasificar en dos categorías: minería de datos descriptiva y minería de datos predicativa ([12]). Diferentes trabajos como [5] y [13] aplican la minería de datos al tratamiento de sucesos raros.

2.1. Redes Bayesianas

Entre las diferentes técnicas disponibles en minería de datos, las redes probabilísticas o redes bayesianas permiten modelizar de forma conjunta toda la información relevante para un

problema dado y utilizando posteriormente mecanismos de inferencia probabilística para obtener conclusiones en base a la evidencia disponible. Las redes bayesianas han sido utilizados en el contexto de la estimación de sucesos raros en algunos trabajos ([14] y [15]) sin llegar a señalar un método de estimación general.

Las redes bayesianas ([16], [17]) son una representación compacta de una distribución de probabilidad multivariante. Formalmente, una red bayesiana es un grafo dirigido acíclico donde cada nodo representa una variable aleatoria y las dependencias entre las variables quedan codificadas en la propia estructura del grafo según el criterio de d-separación ([18]). Asociada a cada nodo de la red hay una distribución de probabilidad condicionada a los padres de ese nodo, de manera que la distribución conjunta factorizada como el producto de las distribuciones condicionadas asociadas a los nodos de la red. Es decir, para una red con n variables X_1, X_2, \dots, X_n (ecuación 1).

$$\prod_{i=1}^n p(x_i | pa(x_i)) \quad (1)$$

Normalmente las redes bayesianas consideran variables discretas o nominales, por lo que si no lo son, hay que discretizarlas antes de construir el modelo. Aunque existen modelos de redes bayesianas con variables continuas, éstos están limitados a variables gaussianas y relaciones lineales. Los métodos de discretización se dividen en dos tipos principales: no supervisados y supervisados ([19]).

El concepto de causalidad ([20]) en una red bayesiana se traduce en un caso particular de estas denominado red causal ([21]). Las redes bayesianas pueden tener una interpretación causal y aunque se utilizan a menudo para representar relaciones causales, el modelo no tiene por que representarlas de esta forma, Naive-Bayes (apartado 2.2) es un ejemplo de esto, sus relaciones no son causales.

Las redes probabilísticas automatizan el proceso de modelización probabilística ([22]) utilizando la expresividad de los grafos. Los modelos resultantes combinan resultados de la teoría de grafos (para representar las relaciones de dependencia e independencia del conjunto de variables) y de la probabilidad (para cuantificar estas relaciones). Esta unión permite realizar de forma eficiente tanto el aprendizaje automático del modelo, a través del cálculo de parámetros ([23]) que para el caso de variables binarias se modela con una distribución Beta y para variables multivaluadas mediante su extensión, que es la distribución Dirichlet (tabla 1), como la inferencia a partir de la evidencia disponible. La base de conocimiento de estos sistemas es una estimación de la función de probabilidad conjunta de todas las variables del modelo, mientras que el módulo de razonamiento es donde se hace el cálculo de probabilidades condicionadas. El estudio de esta técnica proporciona una buena perspectiva global del problema del aprendizaje estadístico y la minería de datos.

Tabla 1. Estimación paramétrica

estimador	expresión
Máxima verosimilitud. Multinomial	$\theta_k^* = \frac{N_k}{N}$
Estimación bayesiana. Dirichlet	$\theta_k^* = \frac{N_k + a_k}{N + \sum_{i=1}^r a_i}$

2.2. Modelo Naive Bayes

Una de las formas más sencillas que se pueden idear al considerar la estructura de una red bayesiana con objetivos clasificatorios, es el denominado *Naive-Bayes* o *Bayes ingenuo* ([24]).

Su denominación proviene de la hipótesis ingenua sobre la que se construye, que consiste en considerar que todas las variables predictoras son condicionalmente independientes dada la variable a clasificar (figura 1)

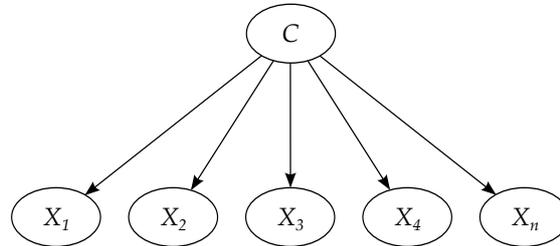


Figura 1. Naive Bayes

El modelo Naive Bayes es muy utilizado debido a que presenta, entre otras, ciertas ventajas ([6]):

- Generalmente, es sencillo de construir y de entender.
- El proceso de inducción es rápido
- Es muy robusto considerando atributos irrelevantes.
- Toma evidencia de muchos atributos para realizar la predicción final.

En el sentido de que su capacidad predictiva es competitiva con el resto de clasificadores existentes, el llamado *Naive-Bayes*, descrito, por ejemplo, por [24] y por [25] es uno de los más efectivos clasificadores. Este clasificador aprende de un conjunto de entrenamiento la probabilidad condicional de cada atributo X_i dada la clase C . La clasificación se hace entonces aplicando la regla de Bayes para calcular la probabilidad de C dadas las instancias de X_1, X_2, \dots, X_n tomando como clase predicha la de mayor probabilidad a posteriori. Estos cálculos se basan en una fuerte suposición de independencia: todos los atributos X_i son condicionalmente independientes dado el valor de la clase C .

La probabilidad de que el j -ésimo ejemplo pertenezca a la clase i -ésima de la variable C , puede aplicarse sin más que aplicar el teorema de Bayes, de la siguiente manera (ecuación 2)

$$P(C = \theta_i | X_1 = x_{1j}, \dots, X_n = x_{nj}) \propto P(C = \theta_i) \cdot P(X_1 = x_{1j}, \dots, X_n = x_{nj} | C = \theta_i) \quad (2)$$

Dado que suponemos que las variables predictoras son condicionalmente independientes dada la variable C , se obtiene que (ecuación 3)

$$P(C = \theta_i | X_1 = x_{1j}, \dots, X_n = x_{nj}) \propto P(C = \theta_i) \cdot \prod_{r=1}^n P(X_r = x_{rj} | C = \theta_i) \quad (3)$$

El modelo *Naive-Bayes* presenta un comportamiento muy dependiente del tipo de dominio ([26]). Así por ejemplo, en dominios médicos, donde el conocimiento sobre el problema es elevado y por tanto tan sólo se recoge información relativa a variables que podríamos decir que se complementan, el Naive-Bayes, proporciona resultados aceptables, mientras que en dominios poco estructurados, en los que las variables del sistema se encuentran altamente correlacionadas, el comportamiento del Naive-Bayes puede ser más pobre.

El modelo Naive-Bayes combinado con la distribución de Poisson es utilizado para la clasificación de texto en el trabajo de [27] con buenos resultados. En este trabajo se propone el añadido de la minería de datos utilizando redes bayesianas y aplicando la distribución de probabilidad

conocida para el estudio de sucesos raros. De esta forma y conocidos los valores de las variables que se utilizan como predictoras se pueden estudiar las diferentes situaciones posibles y observar cuándo es más probable la ocurrencia de un suceso raro.

3. Metodología propuesta

A continuación se detallará la metodología presentada en este trabajo. El objetivo de la misma es sistematizar el estudio de sucesos raros, proporcionar una herramienta para su estudio partiendo de los datos brutos, a priori, de cualquier problema.

Así las fases de esta metodología son las siguientes:

- Preprocesamiento de los datos
 1. Selección de variables y obtención de sus valores.
 2. Discretización de las variables
- Construcción de la red bayesiana, estructura Naive-Bayes
- Aplicación modelo Naive-Poisson

3.1. Preprocesamiento de los datos

Normalmente las redes bayesianas consideran variables discretas o nominales, por lo que si no lo son, hay que discretizarlas antes de construir el modelo. Aunque existen modelos de redes bayesianas con variables continuas, éstos están limitados a variables gaussianas y relaciones lineales. Los métodos de discretización se dividen en dos tipos principales: no supervisados y supervisados ([19]).

En este apartado de preparación de los datos, éstos son formateados de forma que las herramientas informáticas que se utilicen puedan manipularlos. A su vez, este apartado consiste también en la selección de variables y discretización de los datos en el caso de variables continuas. En este paso se identifica también la variable de la cual se quieren estimar los sucesos raros.

3.2. Construcción de la red bayesiana

A partir de la fase anterior, la construcción de la red consta de los siguientes puntos:

- Identificación de la Estructura: identificar las relaciones causales; analizar las variables en cuanto a dependencias e independencias
- Cálculo de Parámetros (probabilidades): cuantificar relaciones e interacciones

En este caso se propone un modelo concreto, el Naive-Bayes (apartado 2.2), adecuado para el proceso de clasificación y para el que la variable de la cual se quieren estimar los sucesos raros será la variable denominada padre([18]).

Se va a optar para el desarrollo de la metodología por el modelo Naive Bayes. El modelo Naive Bayes es muy utilizado debido a que presentan, entre otras, ciertas ventajas:

- Generalmente, es sencillo de construir y de entender.

- Las inducciones de son extremadamente rápidas, requiriendo sólo un paso para hacerlo.
- Es muy robusto considerando atributos irrelevantes.
- Toma evidencia de muchos atributos para realizar la predicción final.

Una vez determinada la estructura de la red se calculan las tablas de probabilidades que permiten realizar la descomposición de la distribución de probabilidad y posteriormente realizar inferencia basándose en las evidencias obtenidas y la distribución de probabilidad asociada a la red.

Esta información que nos proporciona la red construida se completa aplicando el modelo Naive-Poisson descrito a continuación (apartado 3.3).

3.3. Modelo Naive-Poisson

El modelo o procedimiento por el que, a partir de la red bayesiana construida mediante el modelo Naive-Bayes, obtenemos la distribución de probabilidad asociada que permite estimar la probabilidad de ocurrencia de un suceso raro es denominado Naive-Poisson ([28]).

El procedimiento de asignación de la distribución de probabilidad consta de los siguientes apartados:

- Suposición Poisson
- Construcción de la distribución de probabilidad

Es admitido en la comunidad científica que la distribución de la frecuencia de sucesos raros se ajusta a una distribución de Poisson ([1]). Así, se supondrá para el modelo a construir, la frecuencia de de sucesos raros sigue una distribución de Poisson. Una vez obtenidos los valores de la distribución real se ajustarán los datos por este tipo de distribución ([28],[29]). La distribución de probabilidad que proporciona la red bayesiana construida permite estimar los diferentes valores de probabilidad para cada uno de los valores de las variables que proporciona la discretización. A partir de los resultados obtenidos, la red se ajusta con una distribución de Poisson, que como es sabido viene determinada por su media (ecuación 4).

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (4)$$

Para el cálculo del parámetro que determina la distribución e Poisson, la media, tomaremos su estimador máximo verosímil que viene dado por la ecuación 5, donde x_i son los valores discretos de la accidentalidad y $p(x_i)$ los valores de probabilidad que proporciona la red construida mediante el algoritmo Naive-Bayes, siendo la variable discreta a clasificar C , la variable de la que queremos estudiar los valores que consideramos sucesos raros y el resto, las variables utilizadas para tal fin el resto de las variables.

$$\lambda = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) \quad (5)$$

Para cada uno de los valores de los estratos a_1, a_2, \dots, a_n que proporciona la discretización de la variable a estudiar los sucesos raros, se tomarán los valores reales de la frecuencia del suceso raro a estimar excepto para el a_n para el que se asigna un valor dado por la media de los valores x_i superiores al mayor estrato a_{n-1} (ecuación 6).

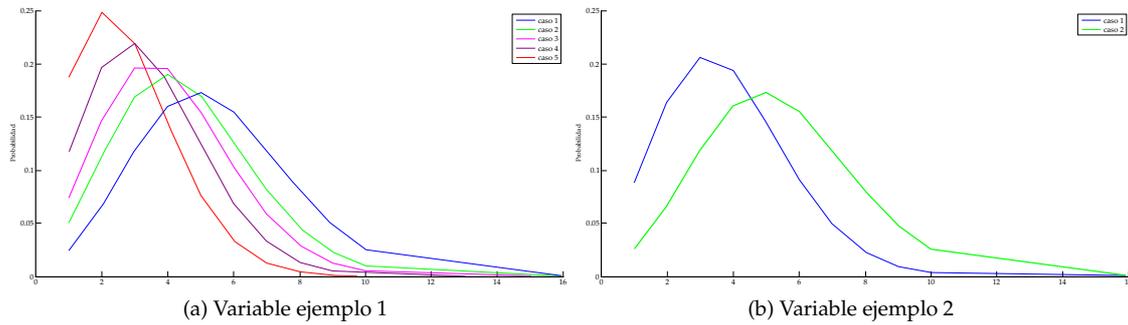


Figura 2. Ejemplos de estimación

$$a_n = \bar{x}_i \text{ con } x_i > a_{n-1} \tag{6}$$

De esta forma descrita obtenemos las distribución de poisson asociada a cualquiera de las situaciones ($j = 1 \dots, m$) que estudiemos (ecuación 7) con cualquier conjunto de valores de las diferentes variables seleccionadas (en la figura 2 se observan dos ejemplos distintos), con lo cual es posible determinar en que situación es más alta la probabilidad de ocurrencia de los sucesos de baja probabilidad una vez detectado cuales son los valores de la variable estudiada que dada su distribución son de probabilidad más baja (figura 3).

$$P_j(X = x) = e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^x}{x!} \tag{7}$$

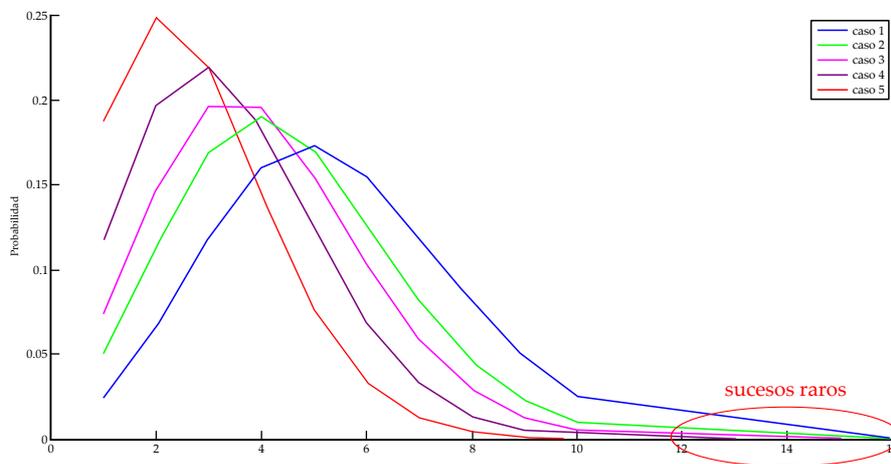


Figura 3. Sucesos raros y sus distribuciones según los valores de las variables predictoras

4. Conclusiones

En este trabajo se propone una metodología para que, de forma sencilla, a partir cualquier conjunto de datos y una vez seleccionada la variable objeto de estudio, se analicen los sucesos de baja probabilidad o sucesos raros, además de comparar diferentes situaciones para poder controlar así la probabilidad con la que se producen. La metodología presentada permite de

manera sistemática el estudio de la ocurrencia de los sucesos objeto del estudio y plantear alternativas para controlar su ocurrencia.

Las líneas que abre este trabajo son entre otras la del desarrollo de software que permita su utilización de manera intuitiva, el estudio de las medidas de bondad de ajuste que completen su aplicación y el contraste con otros modelos de inteligencia artificial.

Referencias

- [1] Simon Denis Poisson. *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*. Bachelier, 1837.
- [2] Ladislaus Bortkiewicz. *Das gesetz der kleinen zahlen (the law of small numbers)*. Leipzig, Germany: Teubner, 1898.
- [3] Micahael Tomz, Gary King, and Langche Zeng. Relogit: Rare events logistic regression. *Journal of statistical software*, 8(i02), 2003.
- [4] F. Soler-Flores, J. M. Pardillo Mayora, and R. Jurado Piña. Tratamiento de outliers en los modelos de predicción de accidentes de tráfico. *VIII CIT, 02/07/2008-04/07/2008, La Coruña, España.*, 2008.
- [5] Chris Seiffert, Taghi M. Khoshgoftaar, Jason Van Hulse, and Amri Napolitano. Mining data with rare events: a case study. In *Tools with Artificial Intelligence, 2007. ICTAI 2007. 19th IEEE International Conference on*, volume 2, pages 132–139. IEEE, 2007.
- [6] D. E. Holmes, J. Tweedale, and L. C. Jain. Data mining techniques in clustering, association and classification. *Data Mining: Foundations and Intelligent Paradigms*, pages 1–6, 2012.
- [7] D. J. Hand. Data mining: statistics and more? *The American Statistician*, 52(2):112–118, 1998.
- [8] E. Castillo, J. M. Gutiérrez, and A. S. Hadi. *Expert systems and probabilistic network models*. Springer Verlag, 1997.
- [9] J. Bromley, NA Jackson, OJ Clymer, AM Giacomello, and F. V. Jensen. The use of hugin to develop bayesian networks as an aid to integrated water resource planning. *Environmental Modelling and Software*, 20(2):231–242, 2005.
- [10] K. J. Cios, W. Pedrycz, and R. W. Swiniarski. *Data mining: A knowledge discovery approach*. Springer Verlag, 2007.
- [11] Usama Fayyad, Gregory Piatetsky-Shapiro, and Padhraic Smyth. From data mining to knowledge discovery in databases. *AI magazine*, 17(3):37, 1996.
- [12] S. Acid and L. de Campos. Approximations of causal networks by polytrees: an empirical study. *Advances in Intelligent Computing—IPMU'94*, pages 149–158, 1995. ID: 149.
- [13] Gary M. Weiss. Mining with rarity: a unifying framework. *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 6(1):7–19, 2004.
- [14] Seong-Pyo Cheon, Sungshin Kim, So-Young Lee, and Chong-Bum Lee. Bayesian networks based rare event prediction with sensor data. *Knowledge-Based Systems*, 22(5):336–343, 2009.
- [15] A. Ebrahimi and T. Daemi. Considering the rare events in construction of the bayesian network associated with power systems. In *Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS), 2010 IEEE 11th International Conference on*, pages 659–663. IEEE, 2010.
- [16] J. H. Kim and J. Pearl. A computational model for causal and diagnostic reasoning in inference systems. In *Proceedings of the 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 190–193. Citeseer, 1983.
- [17] J. Pearl. *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*. Morgan Kaufmann, 1988.
- [18] E. Castillo, J. M. Gutierrez, and A. S. Hadi. *Expert systems and probabilistic network models*. Springer Verlag, 1997.
- [19] James Dougherty, Ron Kohavi, and Mehran Sahami. Supervised and unsupervised discretization of continuous features. In *ICML*, pages 194–202, 1995.

- [20] Cristina Puente Agueda. Causality in science. *Pensamiento Matemático*, (1):12, 2011.
- [21] Judea Pearl. *Causality: models, reasoning and inference*, volume 29. Cambridge Univ Press, 2000.
- [22] Laura Uusitalo. Advantages and challenges of bayesian networks in environmental modelling. *Ecological Modelling*, 203(3):312–318, 2007.
- [23] Luis Enrique Sucar. *Redes bayesianas*.
- [24] R. O. Duda, P. E. Hart, and D. G. Stork. *Pattern classification*. 2000. NY Wiley. ID: 129.
- [25] P. Langley, W. Iba, and K. Thompson. An analysis of bayesian classifiers. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, pages 223–223. JOHN WILEY and SONS LTD, 1992.
- [26] José Antonio Gámez and José Miguel Puerta. *Sistemas expertos probabilísticos*, volume 20. Univ de Castilla La Mancha, 1998.
- [27] Sang-Bum Kim, Hee-Cheol Seo, and Hae-Chang Rim. Poisson naive bayes for text classification with feature weighting. In *Proceedings of the sixth international workshop on Information retrieval with Asian languages-Volume 11*, pages 33–40. Association for Computational Linguistics, 2003.
- [28] F. Soler-Flores. Naive-poisson, a mathematical model for road accidents frequency estimation. *Conference of Informatics and Management Sciences*, pages 384–391, 2013.
- [29] F. Soler-Flores. Expert system for road accidents frequency estimation based in naive-poisson. *Global Virtual Conference*, page 646, 2013.

Sobre el autor:

Nombre: Francisco Soler Flores

Correo electrónico: f.soler@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: José Ángel Olivas Varela

Correo electrónico: joseangel.olivas@uclm.es

Institución: Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información, Escuela Superior de Informática, Universidad de Castilla La Mancha, España.

Juegos Matemáticos

Números triangulares cuadrados (la cuadratura del triángulo)

Triangular squares (the quadrature of the triangle)

Dionisio Pérez Esteban

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 137–140, ISSN 2174-0410
Recepción: 25 Jun'13; Aceptación: 15 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

Entre los números triangulares, se encuentran camuflados algunos cuadrados. En este artículo se les desenmascara, y en el proceso nos topamos con algunos personajes interesantes: fracciones continuas, ecuación de Pell, aproximación de soluciones, etc.

Palabras Clave: Números triangulares, fracciones continuas, ecuación de Pell, polinomio de Taylor.

Abstract

Among triangular numbers, some are squares in disguise. We uncover them, and in so doing we come across some interesting people such as continuous fractions, Pell's equation and approximation of solutions.

Keywords: Triangular number, continuous fraction, Pell's equation, Taylor polynomial.

1. En el principio existía el triángulo

Un problema geométrico clásico, que trajo de cabeza a los antiguos griegos (esos “colegas de otras universidades”, como les llamó Hardy), es el de la cuadratura del círculo, que no consiste en dibujar un círculo cuadrado, sino en construir un cuadrado cuya área sea la misma que la de un círculo dado, y hacerlo usando sólo la regla y el compás. La imposibilidad de cuadrar el círculo no se logró demostrar hasta el siglo XIX, cuando se probó que el número π es trascendente.

La cuadratura del triángulo, por el contrario, es muy sencilla de realizar, y puede verse como un agradable entretenimiento. Aquí vamos a abordar un problema aritmético en lugar de uno geométrico: qué números triangulares resultan ser también números cuadrados.

Recordemos que los números triangulares son los que se obtienen sumando varios enteros consecutivos a partir de 1. La sucesión de los números triangulares comienza así:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \dots$$

El n -simo número triangular es

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Y el cuadrado estaba junto a él. Y el cuadrado era él.

Entre los números triangulares destacan algunos que tienen características peculiares. Así, reconocemos al 6 y al 28, que son números perfectos (iguales a la suma de sus divisores); de hecho, todos los números perfectos pares son triangulares. También observamos algunos cuadrados, y en ellos nos vamos a centrar: ¿Qué cuadrados aparecen entre los números triangulares? ¿cuántos son y qué posiciones ocupan?

Por mera inspección de los primeros términos de la sucesión, descubrimos dos cuadrados: el 1 y el 36, que ocupan la primera posición y la octava. Si tenemos un poco de paciencia, encontramos otro en el cuadragésimo nono lugar: 1225 es el cuadrado de 35. Más adelante está 41616, el cuadrado de 204 (en el puesto 288). ¿Hasta dónde seguirán apareciendo? ¿Hay alguna pauta? Parece que la manera ingenua de abordar el problema no nos lleva muy lejos, y tendremos que usar herramientas más agudas.

Para empezar, escribimos nuestro objetivo en forma de ecuación. Que un número triangular sea al mismo tiempo un cuadrado se puede poner como

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

donde n y m han de ser números enteros positivos (desconocidos, de momento). Avanzamos un paso observando que los dos números n y $n+1$ tienen paridades distintas y no tienen divisores comunes, de donde se deduce que el número buscado se escribirá como un producto de dos factores de una de estas dos formas: $n \cdot \frac{n+1}{2}$ o $\frac{n}{2} \cdot (n+1)$ y en ambos casos los dos factores son primos entre sí.

Esa observación es clave porque, como el producto es un cuadrado, cada factor ha de serlo (como consecuencia de que no hay divisores comunes), lo que nos permite concluir que en el primer caso habrá unos números x e y tales que n es el cuadrado de x , y $n+1$ es el doble del cuadrado de y , de donde se sigue que

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

En el segundo caso, se tiene algo parecido, con los papeles de n y $n+1$ cambiados: $n+1$ es el cuadrado de x en tanto que n es el doble del cuadrado de y (y en consecuencia

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Recogiendo los dos caso en uno solo, escribimos

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

No es difícil hallar algunas soluciones “pequeñas” de la nueva ecuación por tanteo, probando con números bajos a ver si el doble de su cuadrado se diferencia de otro cuadrado en una unidad (por exceso o por defecto). Así, encontramos las soluciones

$$x = 1, y = 1; x = 3, y = 2; x = 7, y = 5; x = 17, y = 12; \dots$$

cada una de las cuales nos facilitan un número triangular cuadrado: por ejemplo, la solución $x = 7, y = 5$ de la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

corresponde a $n = x^2 = 49$, y el correspondiente número triangular es $\frac{n(n+1)}{2} = 49 \cdot 25$, que es el cuadrado de 35; y la solución $x = 17, y = 12$ de la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

corresponde a $n = 2y^2 = 288$ y nos proporciona el número triangular (y cuadrado) $289 \cdot \frac{288}{2} = 41616$, que es el cuadrado de 204 = $17 \cdot 12$.

No es difícil caer en la cuenta de que conociendo una solución x, y de la ecuación, se obtiene otra haciendo $x' = x + 2y, y' = x + y$. Así, podemos generar una sucesión de soluciones

$$(1, 1), (3, 2), (7, 5), (17, 12), (41, 29), (99, 70), \dots$$

que a su vez nos proporciona una sucesión de números triangulares cuadrados;

$$1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, \dots$$

Ya podemos contestar una de las preguntas que nos planteábamos: ¿cuántos números triangulares hay que sean también cuadrados? La respuesta es una cantidad infinita (y además sabemos generarlos y determinar el lugar que ocupan en la lista).

3. Una dosis de irracionalidad: aparece $\sqrt{2}$. Y se acabó

La ecuación

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

que hemos resuelto “a ojo”, es una ecuación diofántica de un tipo bien estudiado, tanto que tiene nombre: se la conoce como *ecuación de Pell*, y se resuelve fácilmente mediante el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{2}$. Los convergentes de ese desarrollo proporcionan las soluciones de la ecuación. Como ese desarrollo es

$$[1; 2, 2, 2, 2, \dots]$$

los convergentes son las fracciones

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$$

que obtuvimos antes, cuando resolvimos la ecuación de modo elemental. Ahora podemos asegurar que no hay otras soluciones. La cuestión de los números triangulares cuadrados (o la cuadratura aritmética del triángulo) queda completamente resuelta.

La irracionalidad de $\sqrt{2}$ se expresa geoméricamente mediante la inconmensurabilidad del lado de un cuadrado y su diagonal; dicho de otra manera: la imposibilidad de construir un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados tengan medidas enteras, puesto que eso supondría dar soluciones enteras a la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = 0$$

Se comprende que las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

proporcionan medidas para los lados de unos triángulos isósceles que son “casi”rectángulos: así, el triángulo de lados 12, 12 y 17 es ligeramente obtusángulo, y el de lados 29, 29 y 41 es

levemente acutángulo; hace falta mucha agudeza para detectar la diferencia. Estimando el resto en la aproximación dada por el primer polinomio de Taylor, podemos concluir que la diferencia (en radianes) entre el ángulo que forman los dos "cuasi-catetos" (de longitud l) y un recto es casi exactamente igual a $\frac{1}{l^2}$, lo que supone aproximadamente 4 minutos de arco para el último triángulo (no digamos en triángulos de lados 408, 408 y 577, o 5741, 5741 y 8119). Desde el punto de vista del dibujo técnico estaríamos ante un triángulo rectángulo a todos los efectos.

Partiendo de la pregunta acerca de los números que son a la vez cuadrados y triangulares, hemos realizado una excursión que nos ha llevado desde algunos problemas clásicos de los antiguos geómetras griegos a los polinomios de Taylor, pasando por ecuaciones diofánticas y fracciones continuas, en una pálida muestra de la variedad e interconexión de la Matemática.

Sobre el autor:

Nombre: Dionisio Pérez Esteban

Correo electrónico: dionisio.perez@upm.es

Institución: ETSI de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Juegos Matemáticos

Una Sucesión Matemática Curiosa

A Curious Mathematical Sequence

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 141-148, ISSN 2174-0410

Recepción: 9 Abr'13; Aceptación: 20 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

Existe una Sucesión de números naturales, que inician en cero y va aumentando cada vez el entero correspondiente al orden del elemento de la misma, que tiene un comportamiento a primera vista curioso, mas al realizar un estudio de la misma se entiende a cabalidad este comportamiento. La sucesión genera además ciertos resultados interesantes, como el poder determinar resultados para la potencia de cualquier número entero, en función de sus elementos.

Palabras Clave: Sucesión, elemento, serie, potencia.

Abstract

There exists a sequence of natural numbers, starting at zero and increases every time the integer corresponding to the order of the same element which have curious properties that are fully understood after a study of the same . The sequence also generates some interesting identities such as one that determine the powers of any integer as a function of the elements of the sequence.

Keywords: Sequence, element, summation, power.

1. Introducción

Las sucesiones matemáticas se construyen partiendo de elementos base y generando los sucesivos con alguna regla y con operaciones básicas que generalmente responden al orden de cada elemento, por tanto siempre existirá una relación entre los elementos, más en la mayoría de estas sus elementos no presentan algún resultado que genere interés alguno.

Se ha descubierto una sucesión de números naturales, que siendo de fácil construcción, genera elementos que sí brindan resultados interesantes y que exigieron un estudio para que se

entienda la naturaleza de este hecho, a sabiendas de que la naturaleza de las matemáticas siempre brindará explicaciones lógicas y científicas a esos resultados que aparentemente surgen del azar.

Esta sucesión presenta resultados por demás interesantes, relacionando sus elementos con potencias de todos los números naturales, en este trabajo se explica esta sucesión y además la relación entre sus elementos y las potencias.

2. Presentación de la Sucesión

Esta Sucesión se define simplemente de la forma:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

que permite hacer los cálculos para obtener los elementos de la sucesión:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = a_0 + 1 = 0 + 1 = 1 \\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ a_3 = a_2 + 3 = 3 + 3 = 6 \\ a_4 = a_3 + 4 = 6 + 4 = 10 \\ a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15 \\ a_6 = a_5 + 6 = 15 + 6 = 21 \\ a_7 = a_6 + 7 = 21 + 7 = 28 \\ a_8 = a_7 + 8 = 28 + 8 = 36 \\ a_9 = a_8 + 9 = 36 + 9 = 45 \\ a_{10} = a_9 + 10 = 45 + 10 = 55 \\ \dots \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta un n de cualquier orden.

Está claro que la definición y los cálculos que sustentan esta sucesión, no guardan complejidad alguna, sin embargo, de aquí surgen dos resultados que generan curiosidad, estos son:

Resultado 1

Si se restan dos elementos consecutivos el resultado siempre es n , el subíndice.

$$\begin{cases} 1 = 1 - 0 \\ 2 = 3 - 1 \\ 3 = 6 - 3 \\ \dots \end{cases}$$

o en definitiva, despejando directamente de la sucesión:

$$n = a_n - a_{n-1}$$

Resultado 2

Surgió de observar que si se suman dos elementos consecutivos, el resultado siempre es un número cuadrado perfecto, así:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 1 = 1 = 1^2 \\ 1 + 3 = 4 = 2^2 \\ 3 + 6 = 9 = 3^2 \\ 6 + 10 = 16 = 4^2 \\ 10 + 15 = 25 = 5^2 \\ 15 + 21 = 36 = 6^2 \\ 21 + 28 = 49 = 7^2 \\ 28 + 36 = 64 = 8^2 \\ 36 + 45 = 81 = 9^2 \\ 45 + 55 = 100 = 10^2 \dots \end{array} \right.$$

Relación que permite pensar que existe la igualdad:

$$n^2 = a_n + a_{n-1}$$

por lo que proponemos el siguiente teorema:

TEOREMA: En números enteros positivos si se tiene la Sucesión ordenada definida de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n; \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

siempre se cumplirá la igualdad:

$$n^2 = a_n + a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración

Utilizaremos inducción sobre n .

- Veamos qué pasa si $n = 1$,

$$1^2 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1, \quad \text{por lo tanto cumple.}$$

- Suponemos verdad para $n = p - 1$

Supondríamos que se cumple $(p - 1)^2 = a_{p-1} + a_{p-2}$, que sería nuestra hipótesis de inducción.

Recordemos además que la definición de la Sucesión establece:

$$a_p = a_{p-1} + p, \quad \forall p \geq 1, \tag{1}$$

En consecuencia, también tendremos $a_{p-1} = a_{p-2} + p - 1$, que reemplazando en 1, se tendrá:

$$a_p = a_{p-2} + p - 1 + p = a_{p-2} + 2p - 1, \quad \forall p \geq 2$$

de donde:

$$a_{p-2} = a_p - 2p + 1$$

que, reemplazando este resultado en la hipótesis de inducción se tendrá:

$$(p-1)^2 = a_{p-1} + a_p - 2p + 1$$

que reordenando es:

$$\begin{aligned}(p-1)^2 + 2p - 1 &= a_p + a_{p-1} \\ p^2 - 2p + 1 + 2p - 1 &= a_p + a_{p-1} \\ p^2 &= a_p + a_{p-1}, \quad \text{c.q.d.}\end{aligned}$$

3. Caracterización de los Elementos

Aquí buscamos caracterizar cada uno de los elementos de la sucesión planteada, para ello recordamos las condiciones básicas de la sucesión así como un resultado obtenido.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$n^2 = a_n + a_{n-1}$$

En consecuencia partimos de que:

$$n^2 = a_n + a_{n-1} \Rightarrow n^2 = a_n + a_n - n \Rightarrow n^2 + n = 2a_n$$

que se reduce a:

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Como consecuencia lógica se tendrá que:

$$a_n = \frac{(n-1) \cdot ((n-1)+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

resultado que ya se obtuvo y que muestra la razón en la que se sustenta la curiosidad de los elementos de la sucesión.

4. Generación de Potencias

Partiendo de los hechos ya demostrados:

$$n^2 = a_n + a_{n-1} \quad \text{y} \quad n = a_n - a_{n-1}$$

podemos construir n^3 , multiplicando los dos resultados, es decir tendremos que:

$$n^3 = n^2 \cdot n = (a_n + a_{n-1}) \cdot (a_n - a_{n-1}) = a_n^2 - a_{n-1}^2$$

que se puede comprobar fácilmente, tomando un n cualquiera; tomemos $n = 9$, entonces:

$$9^3 = a_9^2 - a_8^2 = 45^2 - 36^2 = 2025 - 1296 = 729$$

que cumple a cabalidad, por lo que se puede afirmar que:

$$n^3 = a_n^2 - a_{n-1}^2$$

Para construir una relación para n^4 , deberemos simplemente anotar que:

$$n^4 = n^3 \cdot n = (a_n^2 - a_{n-1}^2) \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n - a_{n-1})^2 (a_n + a_{n-1})$$

Y se podría generalizar estos resultados, construyendo la tabla, para cualquier n , distinto de cero.

Potencia	Resultado
n^1	$a_n - a_{n-1}$
n^2	$a_n + a_{n-1}$
n^3	$a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n - a_{n-1}) \cdot (a_n + a_{n-1})$
n^4	$(a_n^2 - a_{n-1}^2) \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n - a_{n-1})^2 \cdot (a_n + a_{n-1})$
n^5	$(a_n^2 - a_{n-1}^2) \cdot (a_n + a_{n-1}) \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^2 \cdot (a_n - a_{n-1})$
n^6	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^2 = (a_n + a_{n-1})^2 \cdot (a_n - a_{n-1})^2$
n^7	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^2 \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^2 \cdot (a_n - a_{n-1})^3$
n^8	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^2 \cdot (a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^3 \cdot (a_n - a_{n-1})^2$
n^9	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^3 = (a_n + a_{n-1})^3 \cdot (a_n - a_{n-1})^3$
n^{10}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^3 \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^3 \cdot (a_n - a_{n-1})^4$
n^{11}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^3 \cdot (a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^4 \cdot (a_n - a_{n-1})^3$
n^{12}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^4 = (a_n + a_{n-1})^4 \cdot (a_n - a_{n-1})^4$
n^{13}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^4 \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^4 \cdot (a_n - a_{n-1})^5$
n^{14}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^4 \cdot (a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^5 \cdot (a_n - a_{n-1})^4$
...	...

Es decir todas las potencias se expresan en función de los factores:

$$(a_n + a_{n-1}) \quad \text{y} \quad (a_n - a_{n-1})$$

Se debe notar que los exponentes de los resultados son menores, significativamente que los de la potencia, así para expresar n^{14} , se utilizan las potencias de 5 y 4, evidenciándose que los factores del resultado son menores o iguales a la tercera parte de la potencia.

Con lo que se observa que se tiene un resultado general, para todo s , número natural:

$$\begin{cases} n^{3s} = (a_n + a_{n-1})^s \cdot (a_n - a_{n-1})^s \\ n^{3s+1} = (a_n + a_{n-1})^s \cdot (a_n - a_{n-1})^{s+1} \\ n^{3s+2} = (a_n + a_{n-1})^{s+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^s \end{cases}$$

Demostración

La demostración la realizaremos por inducción.

Veamos para $s = 0$.

$$\begin{cases} n^0 = (a_n + a_{n-1})^0 \cdot (a_n - a_{n-1})^0 = 1 \\ n^1 = (a_n + a_{n-1})^0 \cdot (a_n - a_{n-1})^1 = (a_n - a_{n-1}) = n \\ n^2 = (a_n + a_{n-1})^1 \cdot (a_n - a_{n-1})^0 = n^2 \end{cases}$$

Ahora supongamos que lo expuesto se cumple para $s = k$, por lo que tendremos las siguientes igualdades:

$$n^{3k} = (a_n + a_{n-1})^k \cdot (a_n - a_{n-1})^k \tag{2}$$

$$n^{3k+1} = (a_n + a_{n-1})^k \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1} \tag{3}$$

$$n^{3k+2} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^k \tag{4}$$

Intentaremos a continuación obtener un resultado para $s = k + 1$:

Sabemos que $n^{3(k+1)} = n^{3k+3} = n^{(3k+2)+1} = n^{(3k+2)} \cdot n$

Más de la ecuación (3) se tiene que $n^{3k+2} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^k$

Y además se tiene que:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n \\ n^{3(k+1)} &= (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^k \cdot (a_n - a_{n-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow n^{3(k+1)} &= (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1} \quad \text{c.q.d} \end{aligned} \tag{5}$$

A continuación trabajaremos con la expresión $n^{3(k+1)+1}$

A sabiendas de que $n^{3(k+1)+1} = n^{3(k+1)} \cdot n$

Recordemos el resultado ya obtenido $n^{3(k+1)} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1}$

Y el usado anteriormente $a_n - a_{n-1} = n$

Teniendo que $n^{3(k+1)+1} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})$

De donde resulta que:

$$n^{3(k+1)+1} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{(k+1)+1} \quad \text{c.q.d} \tag{6}$$

Por ultimo trabajaremos la expresión $n^{3(k+1)+2} = n^{3(k+1)} \cdot n^2$

Recordando el resultado (5) y además que $a_n + a_{n-1} = n^2$

Se tendrá que $n^{3(k+1)+2} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{(k+1)} \cdot (a_n + a_{n-1})$

Por consiguiente

$$n^{3(k+1)+2} = (a_n + a_{n-1})^{(k+1)+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{(k+1)} \quad \text{c.q.d} \tag{7}$$

Con los resultados (5), (6) y (7), podemos concluir que lo propuesto se cumple con $s = k + 1$, por lo que podemos concluir con la demostración.

5. La Sucesión, en Función de Series

La caracterización de los elementos de la Sucesión, así como una simple inspección de la misma, permite concluir que:

$$a_n = \sum_{i=0}^n i; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y como es conocido:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2};$$

entonces:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

Se deduce claramente de aquí la identidad demostrada anteriormente por otros medios:

$$a_n + a_{n-1} = n^2, \quad \text{y} \quad a_n - a_{n-1} = n$$

Y otras potencias, ya que además se tiene que:

$$\left(\sum_{i=1}^n \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(i^2 + 2i \sum_{j=1}^{i-1} j \right)$$

Utilizando la fórmula de la suma para una sucesión de números naturales consecutivos que inician en 1 se tendría que:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + 2i \cdot \frac{(i-1) \cdot i}{2} \right) = \sum_{i=1}^n \left(i^2 + i \cdot (i-1) \cdot i \right) = \sum_{i=1}^n (i^2 + i^3 - i^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i^3 \end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$a_n^2 = \sum_{i=1}^n i^3$$

Queda claro de aquí una de las identidades demostradas anteriormente:

$$n^3 = a_n^2 - a_{n-1}^2$$

Referencias

- [1] OLMAN, Bernard, y HILL, David R., *Álgebra Lineal*, México, Pearson Educación, 2006, ISBN 970-26-0696-9.
- [2] JOHNSONBAUGH, Richard., *Matemáticas Discretas*, México, Pearson Educación, 2005, ISBN 970-26-0637-3.
- [3] BRASSARD, G. y BRATLEY, P., *Fundamentos de Algoritmia*, Madrid, Prentice Hall, 1997, ISBN 84-89660-00-X.
- [4] KENNETH, H. Rosen., *Discrete mathematics and its applications*, McGraw Hill, 2003. ISBN 0-07-123374-1.
- [5] KENNETH, H. Rosen y MICHAELS, John G., *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*, CRC, 1999. ISBN 0-8493-0149-1.
- [6] VOROBIOV, N. N., *Números de Fibonacci*, Editorial Mir, Moscú, 1974, Colección Lecciones Populares de Matemáticas. Traducción al español de Carlos Vega, catedrático de Matemáticas Superiores y candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas.

Sobre el autor:

Nombre: Marco Vinicio Vásquez Bernal

Correo electrónico: marvas123@hotmail.es

Institución: Instituto Tecnológico Andrés F. Córdova, Quito, Ecuador.

Críticas

Informe sobre el libro: “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, Albert Violant

A report of the book: “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, Albert Violant

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 149–156, ISSN 2174-0410

Recepción: 21 Jun'13; Aceptación: 20 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

En este artículo se presenta un informe sobre el libro “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, perteneciente a la colección “El mundo es matemático”, de la que ya se comentó otro libro en un artículo anterior del autor.

Palabras Clave: Divulgación matemática, teoría de números, teorema de Fermat

Abstract

This paper presents a report of the book “El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática”, that belongs to the collection “El mundo es matemático”. Another book from this collection was commented by the author in a previous paper.

Keywords: Mathematic divulgation, number theory, Fermat theorem

1. Ficha técnica

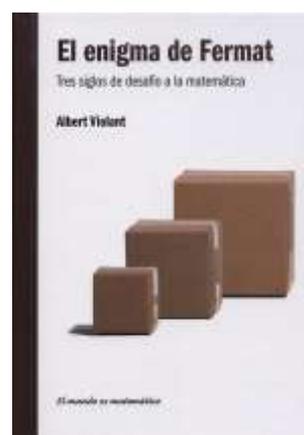
Título: El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática.

Autor: Albert Violant.

De la colección “El mundo es matemático”

Editado por: RBA

Ver [1] para una información más detallada sobre el libro.



2. Crítica

El libro del que se hace el informe pertenece a una colección de divulgación de las matemáticas de la que ya se comentó otro libro (Los números primos. Un largo camino al infinito. Ver [2]). Destaca principalmente por su esfuerzo para hacer asequibles para el público general temas de mucha dificultad matemática, sin perder el rigor necesario en un texto científico.

Es especialmente notable en el texto que nos ocupa el tratamiento que se hace de las teorías de Kummer, explicando de forma amena y brillante conceptos revolucionarios en su día como el de los números ideales ó el de los primos regulares, nada elementales y difíciles de asimilar. Se pone muy bien de manifiesto la importancia de estas teorías como avances en el intento de demostrar el teorema de Fermat.

Como aspectos mejorables, destacar el desarrollo desigual de los diferentes capítulos del libro: la introducción “prehistórica” al teorema de Fermat desarrollada en los primeros capítulos, en la que se trata el teorema de Pitágoras, es quizás algo larga, remontándose a tiempos demasiado antiguos y, aunque es de gran interés cultural, desvía la atención del tema principal del libro.

A este respecto, se puede decir que se dedican unas 128 páginas a los preliminares y sólo 15 páginas a la prueba del teorema. Por la gran dificultad de la misma, quizás el capítulo que la trata es uno de los más débiles del libro, deslizándose algún error que se comenta posteriormente en este informe.

A pesar de esto, se puede decir que es un libro altamente recomendable incluso para aquellos que no tengan noticias previas del teorema de Fermat, ni una formación matemática elevada (ver [3] y [4] como referencias de libros sobre el teorema de Fermat más avanzados).

3. Conceptos matemáticos que se definen ó a los que se alude

A lo largo del libro surgen los conceptos matemáticos que se exponen a continuación.

- Números altamente compuestos: números que tienen más divisores que cualquiera más pequeño que él.
- Sistema de numeración aditivo: forma de expresar los números en la que la posición de las cifras no influye en su valor
- Sistema de numeración posicional: forma de expresar los números en la que la posición de las cifras influye en su valor
- Ternas pitagóricas: soluciones a la ecuación diofántica $x^2 + y^2 = z^2$
- Cicloide: lugar geométrico que describe un punto de la circunferencia al girar sobre una recta
- Braquistócrona: curva que da la forma más rápida posible de ir de un punto “A” a otro “B” sometidos únicamente a la acción de la gravedad
- Números perfectos: números que son suma de sus divisores propios

- Números abundantes: la suma de sus divisores propios es mayor que el número
- Números deficientes: la suma de sus divisores propios es menor que el número
- Números de Fermat: números de la forma $2^{2^n} + 1$, con n natural
- Primos de Mersenne: primos de la forma $2^n - 1$
- Enteros gaussianos: números de la forma $x + yi$, con x, y enteros, i la unidad imaginaria
- Números ciclotómicos: combinaciones enteras de las raíces p -ésimas de la unidad
- Curvas elípticas: curvas de la forma $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathfrak{R}$
- Aritmética modular: aritmética basada en congruencias dado un determinado módulo
- Formas modulares (intuidas)
- Curva de Frey: curva elíptica de la forma $y^2 = x(x - a^p)(x - b^p)$, donde a, b son enteros positivos primos relativos tales que $a^p + b^p = c^p$ para un natural c y un primo p mayor que 2
- Números poligonales: aquellos que pueden ser representados con puntos dispuestos en forma de polígono regular, empezando por el 1

4. Conjeturas de las que se habla

En el libro se alude a los siguientes problemas abiertos en el momento de su publicación.

- Existen infinitos números perfectos
- Todos los números perfectos son pares
- No hay primos de Fermat mayores que 65537.
- Hay infinitos primos de Mersenne
- Conjetura ABC. Intuitivamente: dados enteros primos entre sí a, b, c tales que $a + b = c$, el producto de los factores primos distintos de a, b, c raramente será menor que c
- Conjetura de Taniyama-Shimura: toda curva elíptica es modular (bosquejada)

5. Resultados que se exponen

En el libro se detallan los siguientes resultados matemáticos, casi todos relacionados con la Teoría de Números (en rojo, los resultados también contenidos en el libro Los números primos)

- **Último teorema de Fermat: si n es un entero mayor que 2, no existen enteros no nulos x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$**
- Teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

- 60 es el número más pequeño que se puede expresar de 6 formas distintas como suma de 2 primos
- Si n es un entero positivo tal que sus divisores menores que \sqrt{n} son consecutivos, entonces n es primo ó el doble de un primo ó uno de los números 1, 8, 12, 24, 60.
- Los números con sólo factores primos 2, 3 ó 5 cumplen que sus inversos siempre tienen un número finito de cifras decimales en el sistema sexagesimal
- La longitud de un arco de cicloide es 8 veces el radio de la circunferencia que gira.
- Si se deja caer un objeto sobre un arco de cicloide invertida, no importa desde qué altura, siempre tarda lo mismo en llegar a la base
- Principio de Fermat: la luz sigue trayectorias de tiempo mínimo (relacionado con la ley de refracción de Snell)
- El área de un triángulo rectángulo de lados enteros no puede ser nunca un número cuadrado
- Un número par es perfecto si y sólo si es de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, con $2^n - 1$ primo (primo de Mersenne, por tanto. Demostrado por Euler)
- No hay números perfectos impares menores que 10^{300}
- Un polígono regular es construible con regla y compás si la factorización en primos de su número de lados contiene doses ó números de Fermat distintos.
- $2^{43112609} - 1$ es el mayor primo de Mersenne que se conoce (hasta el 12 de Junio de 2009)¹
- Una ecuación de primer grado con coeficientes enteros tiene soluciones enteras si y sólo si el máximo común divisor de los coeficientes divide al término independiente.
- Todo número natural se puede expresar como suma de cuatro cuadrados (demostrado por Lagrange)
- Todo número natural se puede expresar como suma de como mucho tres números triangulares (demostrado por Gauss)
- Todo número natural se puede expresar como suma de como mucho n números n -gonales (generalización de las anteriores. Demostrado por Cauchy)
- Todo número primo de la forma $4k + 1$ puede expresarse como suma de dos cuadrados (demostrado por Euler)
- Teorema fundamental de la aritmética: Todo número se descompone de manera única como producto de factores primos
- Si el producto de dos números primos entre sí es un cuadrado, cada uno de ellos es un cuadrado

¹ Actualmente el mayor número primo de Mersenne es el $2^{57885161} - 1$, descubierto el 25 de enero de 2013 por Curtis Cooper con el proyecto GIMPS -Great Internet Mersenne Prime Search - ("Gran búsqueda de números primos de Mersenne por Internet") un proyecto colaborativo de voluntarios que utilizan los programas gratuitos Prime95 y MPrime con el fin de buscar números primos de Mersenne.

- En los números ciclotómicos (combinaciones enteras de las raíces p -ésimas de la unidad) con $p = 23$ no hay factorización única
- Existen tres primos regulares menores que 100: 37, 59 y 67
- Toda curva algebraica de género mayor que 1 tiene un número finito de puntos racionales (conjeturado por Mordell, demostrado por Hastings)
- Las curvas de Frey no son modulares (conjeturado por Frey-Serre, demostrado por Ribet).
- La ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = u^4$ tiene soluciones enteras no triviales (demostrado por Elkies, refutando una conjetura de Euler)

6. Problemas del libro la aritmética de Diofanto que se tratan

El origen del teorema de Fermat está ligado a la obra aritmética de Diofanto de Alejandría, por lo que esta obra es ampliamente citada en el libro que nos ocupa. En concreto se comentan los siguientes problemas de la aritmética de Diofanto:

- Encontrar tres números de manera que el cuadrado de cualquiera de ellos añadido al siguiente nos da un cuadrado (problema 32 del libro II)
- Encontrar cuatro cuadrados cuya suma, aumentada en la suma de sus lados, sea un número dado. Dicho de otra forma, resolver en los racionales la ecuación:
 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$, para un n dado (problema 29 del libro IV)
- Dividir un número cuadrado en suma de dos cuadrados (problema 8 del libro II. Inspiró el teorema de Fermat)

7. Erratas, errores, aspectos mejorables

En esta sección se comentan algunas erratas, principalmente de redacción, que se observan en el libro y que se podrían quitar en próximas ediciones para mejorar en el aspecto formal este interesante libro.

- En la página 10, pone todos ellos se ha escrito por todos ellos se han escrito
- En la página 14, pone permanecía un secreto por permanecía en secreto
- En la página 14, pone resultado de los años 50 por conjetura de los años 50
- En la página 16 pone contemplaba por contemplaba
- En la página 22 se dice que 60 es el compuesto mayor tal que sus divisores menores que \sqrt{n} son consecutivos. Esto lo cumplen también los números de la forma $2p$, con p primo
- La definición que se da de terna pitagórica en la página 32 (números enteros que verifican el teorema de Pitágoras) no es del todo correcta, ya que el teorema habla de medidas de lados, no de números. Quizás sea más precisa la definición: números enteros que pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo

- En los ejemplos de ternas pitagóricas que se dan en la página 32: $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$, la segunda se deduce de la primera (es su doble). Sería mejor que los tres ejemplos fueran de ternas pitagóricas primitivas.

- En la fórmula de la página 34 falta un cuadrado en tga
- En la página 39 pone un proporción por una proporción
- En la página 78, en la definición de número de Fermat, pone $2^{2^n} + 1$ por $2^{2^n} + 1$
- En la página 93, pone $x_3 + +x_4$ por $x_3 + x_4$

- En la página 94, pone $x_3 + \frac{1}{2} = \frac{8}{5}$ } por $x_3 + \frac{1}{2} = \frac{12}{5}$ }
 $x_2 + \frac{1}{2} = \frac{8}{5}$ } $x_2 + \frac{1}{2} = \frac{6}{5}$ }
 $x_4 + \frac{1}{2} = \frac{8}{5}$ } $x_4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{5}$ }

- En la página 99 se dice que Fermat demostró su teorema para la mitad de los exponentes, cuando en realidad lo demostró para la cuarta parte: los múltiplos de 4

- En la página 102, pone haber encontrar la solución por haber encontrado la solución
- En la página 105, pone diciéndo por diciendo
- En la página 116, pone desarrolladas por desarrolladas
- En el dibujo de la página 118, en la primera columna, pone $b = 1$ por $b = -1$
- En la misma página pone $x^3 = 25, y^2 = 27$ por $x^3 = 27, y^2 = 25$
- En la página 119, pone las las curvas elípticas por las curvas elípticas
- En la página 123, pone desanimar hasta el más por desanimar hasta al más
- En la página 125, pone dada una una solución por dada una solución
- En el final de la misma página, pone el último teorema no tiene soluciones. Sería más correcto decir: la ecuación de Fermat no tiene soluciones no triviales
- En la página 126, pone estadounindense por estadounidense y asistido por asistido
- En la página 127, se dice que la conjetura ε conlleva una relación necesaria entre la conjetura de Taniyama-Shimura y el último teorema: si la primera era cierta, la otra no podía serlo. En realidad es: si la primera era cierta, el otro lo sería
- En la página 137, pie de foto: y el interviene por y en él interviene
- En la página 138, un documento de complejidad por un documento de la complejidad
- En la página 143, falta la interrogación en ¿quién de nosotros...?

Referencias

- [1] VIOLANT, Albert. *El enigma de Fermat. Tres siglos de desafío a la matemática*, RBA. Colección El mundo es matemático, Madrid, 2010.
- [2] GRACIÁN, Enrique. *Los números primos. Un largo camino al infinito*, RBA. Colección El mundo es matemático, Madrid, 2010.
- [3] EDWARDS, Harold M. *Fermat's last theorem*, Springer Verlag, New York, 1977.
- [4] RIBENBOIM, Paulo. *13 lectures on Fermat's last theorem*, Springer Verlag, New York, 1979.

Sobre el autor:

Nombre: Javier Rodrigo Hitos

Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es

Institución: Universidad Pontificia Comillas, Madrid, España.

Entrevista

Pablo Amster: La Música de la Matemática

Pablo Amster: The Music of Mathematics

Rosa María Herrera

Revista de Investigación



Volumen IV, Número 1, pp. 157–162, ISSN 2174-0410
Recepción: 22 Ago'13; Aceptación: 15 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

“Soy matemático. En una época era músico, o al menos eso creía. Después empecé a decir que era buen matemático entre los músicos y buen músico entre los matemáticos. Pero ahora me asumo como matemático, aunque siga haciendo algo de música. Quizás la diferencia es que ahora que no me siento músico la disfruto más”. Este es el autorretrato que arranqué a Pablo al empezar este trabajo, conociéndole un poco esto es muy escaso, pero es una herramienta válida para poner en contacto al lector y al matemático.

Palabras Clave: Matemática, Música, Literatura.

Abstract

“I’m a mathematician. Before I was a musician, or so I thought. Then, I began to say I was a good mathematician among musicians and a good musician among mathematicians. But now I assume myself as a mathematician, although I continue making some music. Perhaps the difference is that now I do not feel musician I enjoy it much more”. Here the self-portrait I have extracted from Pablo when we started this conversation; for those who know him a bit this is not much, but it is a valuable tool to introduce this mathematician to reader.

Keywords: Mathematics, Music, Literature.

1. Introducción

Pablo Amster nació en Buenos Aires, pero al hablar con él enseguida se descubre un ciudadano del mundo. Me impresionó su talento de escritor de matemática como cultura antes de que nos hiciéramos amigos. Su biografía es de una riqueza extraordinaria: matemático de primer nivel perteneciente a los círculos internacionales en el ámbito del análisis no lineal (ejerce como investigador en el CONICET y es profesor de la universidad de Buenos Aires); la música le dio el mundo, o quizá sería mejor decir que tengo la impresión de que aprendió la vida en la música a través del mundo.

Como el hilo conductor de la serie de entrevistas que la directora del grupo me propuso, me gustaría que fuese la belleza matemática, las relaciones y las estructuras. La primera pregunta que hice a nuestro matemático fue la siguiente:

- Pablo, ¿eres un músico que hace matemática o un matemático que hace música?, ¿qué Pablo es el que es más tú el músico o el matemático?

Su respuesta concisa y simpática me ha servido para escribir el resumen de apertura. Confieso que no es la primera vez que se lo oigo decir, recuerdo un noviembre en Madrid, en que hablando a un público severo, sin soporte, sin guión, sin pizarra ni otras apoyaturas, mantuvo una charla en la que con naturalidad iba intercambiando los papeles protagonistas, del matemático al músico poeta para finalizar acordándose de su guitarra, le faltaba entre los dedos.



Figura 1. Pablo Amster¹

2. Los discursos cruzados

Me complazco en las fronteras y como dice un amigo mío citando, más o menos, a cierto manchego: lo interesante de las puertas es que tienen bisagras.

- ¿Por qué escribes historias poético literarias de música y matemáticas?

La literatura es una de mis grandes pasiones. Todavía no me animo a escribir tantas “historias” y me quedo más bien en la divulgación, pero siento que ya iré encontrando el espacio para algo más. Escribo sobre matemática porque es lo mío y me gusta el desafío de la transmisión. Me interesan especialmente los cruces de discursos. Y la música surge también bastante naturalmente en lo que escribo, al menos en los últimos años, sobre la matemática tiene la ventaja de que a todo el mundo le gusta, aunque cuando uno se mete a hablar de teoría musical se ve que no son cosas muy distintas.

- Me emociona, creo que como a ti, la combinación de ideas de mundos diferentes porque sirve para construir, me gustaría saber, Pablo, ¿por qué te interesan los cruces de discursos?

Lo del “cruce” es más o menos lo que encontrás² en mis textos: discursos en apariencia disímiles que confluyen ... en mi caso, el hilo conductor es sin duda la matemática, pero me gusta hacer dialogar distintas voces, como me gusta la intertextualidad. En general pienso los escritos en varias dimensiones. Alguna vez se me ocurrió la idea de escribir como lector, lo que provocó algunos efectos interesantes: entre otros, el de un texto infinito.

¹ <http://mate.dm.uba.ar/~pamster/>

² En español argentino en el original.

Con esta respuesta lo primero que siento es deseos de leer más textos tuyos, es fácilmente comprensible para quien ha tenido la fortuna como yo de escuchar lo que dices y leer lo que escribes, aunque discrepemos en ocasiones, nos entendemos bien.

3. Hablemos de Matemáticas

Llegados a este punto creo que podemos abordar otro de los motivos que nos ha traído hasta aquí, en nuestra conversación, el mundo matemático de Pablo.



Figura 2. Portadas de los libros de divulgación escritos por Pablo Amster “La Matemática como una de las bellas artes” y “Matemática maestro”³

3.1. Matemática: Las Matemáticas

- La hermosa frase “pensar los discursos en varias dimensiones” leída sin detenerse parece un recurso poético prestado de las matemáticas y me confunde realmente, pero quizá sea una sencilla expresión del matemático interior . . . En cualquier caso me parece de una riqueza extraordinaria, y un signo del hombre actual más avanzado, ya que hemos tomado el camino de los discursos cruzados, del infinito y de las varias dimensiones, hálame un poco del análisis no lineal, de las ecuaciones diferenciales no lineales (que son las que nos interesan a los físicos) y de tu matemática.

Creo que mi actividad matemática también tiene algo del “cruce de discursos” pues siempre me gustó leer de distintos temas e intentar combinarlos. En general me siento un poco ajeno en la mayoría de los encuentros sobre “ecuaciones diferenciales”: si bien se supone que es mi área de investigación, es muy amplia y contiene algunas cosas que no me interesan mayormente. En tal sentido, mi visión choca bastante con la de mucha gente que se dedica a esto. En todo caso, mi aporte puramente matemático es más bien modesto, nunca me sentí capaz de grandes cosas. Sí creo que logro transmitir bastante bien las ideas a los estudiantes. Siempre me gustó particularmente destacar la experiencia del error; el error como instancia de aprendizaje. Me parece que convivimos demasiados años con un sistema que reprime el error, y eso termina produciendo una gran inhibición y pone límites a la creatividad.

³ <http://articulo.mercadolibre.com.ar/MLA-471166749-la-matematica-como-una-de-las-bellas-artes-pablo-amster-JM>; <http://articulo.mercadolibre.com.ar/MLA-476669568-pablo-amster-matematica-maestro-ed-siglo-xxi-JM>

3.2. Libros, matemática y otras maravillas

El lector no tiene por qué saber que esta conversación entre Pablo y yo se desarrolla entre dos continentes, varios países, viajes, cambios de horario ... y ese hecho común en nuestros días era impensable hace pocas décadas, nos contamos de este modo los pequeños y no tan pequeños avatares de nuestra vida cotidiana, así es que nuestra conversación amistosa se intercala en la entrevista. Se trata de un aspecto no menor que nos permite el mundo híbrido, el mundo combinado de la proximidad (de internet) y la lejanía. Pablo está preparando un nuevo libro dedicado a estudiantes, pero que también sirve de provecho a estudiosos no especialistas y me cuenta estas cosas desde un encuentro de matemáticos.

Pablo: [El congreso] Más allá de las charlas, me sirvió para ver a la editora y confirmar que pronto me enviarán el diseño de tapa y comenzará el proceso de edición/corrección. Es un texto claramente diferente a los otros que has leído, aunque hay algunos pasajes en los que pude deslizar algo de mi estilo. En todo caso, es un libro académico⁴, no de divulgación, aunque tiene toda la intención de ser más o menos sencillo, para que pueda ser entendido por estudiantes avanzados. Pero cuando avanza la topología, especialmente con la construcción del grado topológico, no se puede mentir demasiado.

3.3. Sobre el arte de enseñar y el arte de divulgar

- *¿No crees, Pablo, que es un poco escasa la buena divulgación y de nivel en matemática, con las honrosas excepciones que tenemos todos en mente y cuya labor es casi heroica, porque más pronto que tarde (como ocurre en la construcción del grado topológico) “no se puede mentir demasiado”?*

En realidad no es tan escasa, al menos en los últimos años ha crecido muchísimo ... pero lo del nivel es, por cierto, discutible. No todo lo que se divulga tiene la misma calidad; aun así, valoro el esfuerzo de tanta gente que empieza a encontrarle el gusto a transmitir ideas matemáticas a personas alejadas, pero que se van acercando tímidamente. Es verdad que siempre se llega a un punto en el que es difícil avanzar sin que el discurso se vuelva más complejo, pero entiendo que existe divulgación a distintos niveles. El ejemplo que mencionas, el del grado topológico, es difícil explicarlo a gente que no tiene ninguna idea de matemática (a grandes rasgos, puedo decir que se trata de una especie de conteo de la cantidad de ceros de una función... aunque en ciertos casos también es preciso decir qué significa “función” y entonces hay que ir todavía más atrás). Pero puedo introducir bastante bien (y sin mentir demasiado, como decíamos) la idea intuitiva de grado a estudiantes que apenas conocen unas pocas nociones de análisis matemático. Si además saben algo de variable compleja, entonces puedo dar una idea todavía más precisa. La parte que requiere más trabajo es la construcción rigurosa, para la que hacen falta herramientas más sofisticadas. Sea como fuere, en algún sentido la esencia de la matemática es mentir, así que por ese lado estoy tranquilo.

- *Me gusta mucho tu idea sobre la experiencia del error como instancia de aprendizaje, estoy de acuerdo contigo, el reprimir el error es una manera de limitar. Me gustaría que desarrollaras un poco más esta propuesta, ¿en qué consiste una buena transmisión de pensamiento matemático a los estudiantes?*

Hay teoremas que en la pizarra se demuestran en pocos minutos y sin embargo llevaron vidas enteras de trabajo, conjeturas, construcciones conceptuales ... y especialmente errores de esos que hacen volver todo al comienzo. Ante los alumnos trato de transmitir parte de esa experiencia que uno vive como investigador, de seguir una línea que al final se revela equivocada pero a su vez permite comprender muchas cuestiones. Pensar un problema tiene sus momentos de entusiasmo, pero también de desaliento. En general me gusta mostrar los teoremas que se trabajan en la clase desde mi punto de vista: ¿cómo haría yo para convencerme de que el

⁴ “*Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems*” Springer 2013, ya publicado en el momento de edición de esta publicación.

enunciado es cierto? Y en general lo primero que haría seguramente estaría equivocado, pero luego uno rearma las ideas y finalmente llega al resultado. Y más aun, un punto que me parece interesante y que cuesta mucho trabajo a los alumnos es el de entender cómo se llega a ciertos teoremas. En general, los estudiantes de matemática pueden entender las demostraciones pero suelen decir que nunca se les ocurriría algo así. En muchos casos hay un hilo natural de pensamiento que hace que uno llegue a ciertos resultados. Es muy lindo conjeturar enunciados aunque después resulten falsos; la idea de establecer una conjetura es que tiene que haber razones para ello.

- Por cierto, aunque para ti sea una obviedad, para los lectores que no están familiarizados con ningún desarrollo de la topología, sería factible que contaras en pocas palabras por qué es especialmente difícil "dulcificar" la construcción del grado topológico.

Algo de esto ya te contesté antes. Como te dije, me siento capaz de que estudiantes con una base mínima de análisis entiendan la idea intuitiva del grado: primero se trata de contar los ceros de una función "buena" y luego ver cómo eso puede generalizarse. La parte delicada es la construcción bien rigurosa, pero uno se puede saltar los detalles técnicos y trabajar con las propiedades del grado sin mayor cargo de conciencia ... de hecho, creo que mucha gente lo hace: emplear la teoría porque tiene múltiples aplicaciones muy poderosas, sin molestarse en entenderla del todo. No digo que esté bien pero, al fin y al cabo, es lo mismo que hacemos con montones de cosas que empleamos a diario.

- Intuyo que eres un buen profesor, porque creo que combinas el sosiego de quien piensa y escribe con el dominio escénico del músico intérprete, ¿de dónde emana ese equilibrio que parece convivir en ti con tanta naturalidad?

Respecto de mi "dominio escénico", no es más que intuición. En general trato de ponerme en el lugar del que escucha, algo parecido a lo que te dije respecto de la escritura. Creo que hay una lógica de la escena, aunque en mi caso es más bien una improvisación. Digamos que me gusta sorprenderme con lo que yo mismo digo.

4. La vida cotidiana de un matemático que gusta de la música

A nadie se le escapa el ajetreo que conlleva una vida activa en nuestros días, en la de Pablo, el continuo trasiego entre países y otros "ires y venires" no le impide realizar además tareas más personales, como el cuidado de sus pequeños hijos, la atención a la familia, el ocuparse de los amigos.

No es infrecuente que las personas bien dispuestas asuman cada vez mayores cantidades de retos...; algo me cuenta Pablo de una traducción al inglés de sus trabajos divulgativos, ¡buena noticia!, al menos para los lectores de habla inglesa ... que los hispano hablantes tienen la oportunidad al alcance de la mano con facilidad.

Tampoco quisiera dejar de señalar aquí su participación en la serie de conciertos Noches de música y ciencia que se desarrolla en la capital argentina, la "complicidad" del pianista y el científico conforma, seguro, una atmósfera de gran belleza. Sería grato que el evento estuviese disponible para otras ciudades también, y que de esta colaboración se beneficiasen sus ciudadanos. Algo habrá que pensar al respecto, lanzo el reto ...

Cabría hablar de las tesis que dirige, de las clases que imparte, de otros asuntos ineludibles menos académicos propios del quehacer universitario, y es que el lector debe tener presente que Pablo es un profesor; pero, quién sabe, si este asunto no surgió en la conversación es que no hace falta tratarlo.

Me gustaría decir que de Pablo he aprendido un poco a mirar los hechos de la matemática de otra manera. Hay quienes enseñan matemáticas, algunos otros muestran el camino para

aprender a mirarlas, con otros una se da cuenta de que la matemática casi no es lo que ella pensaba, y así...

Para finalizar este bosquejo quería agradecer a Pablo su amabilidad, no se nos escapa a ninguno la complejidad del mundo global y también del mundo individual y local, que la hacen más valiosa.

Nos hemos divertido redactando estas notas, el cambio continuo de ambientes, el intercambio de opiniones en medio de la vorágine de nuestras actividades ha sido un aliciente más, el detalle simpático y dulce. Y para cerrar volvemos a Buenos Aires y a Madrid, que es el punto de partida. Hasta pronto.

Referencias

- [1] AMSTER, P., *La matemática como una de las bellas artes*, Siglo XXI editores, Buenos Aires, 2008.
- [2] AMSTER, P., *¡Matemática maestro! Un concierto para números y orquesta*, Siglo XXI editores, Buenos Aires, 2010.
- [3] Plataforma ConCIENCIA Musical, <http://concienciamusical-plataforma.blogspot.com.es/>

Sobre la autora:

Nombre: Rosa María Herrera

Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com

Institución: APYCE.

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.





GIE
Pensament
Matemàtic



MAIC

