Revista de Investigación. Edición Digital. ISSN 2174-0410

Volumen II. Número 2. Octubre 2012

Especial
2ª Jornada Internacional
"Matemáticas Everywhere"
Castro Urdiales, 20-21 Junio, 2012

G.I.E

Pensamiento Matemático

EXPERIENCIAS DOCENTES

TRANSFORMANDO CUÁDRICAS REGLADAS

LA IMPORTANCIA DEL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO EN LA INGENIERÍA DE FIABILIDAD

EL BUEN USO DE LOS PAQUETES DE CÁLCULO SIMBÓLICO EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CÁLCULO EN INGENIERÍA

¿SE PUEDE MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CUALQUIERA DE SUS NIVELES?

ESTRATEGIAS MATEMÁTICAS EN LA ONU

INVESTIGACIÓN

LABBTEX: TOOLBOX PARA GENERACIÓN DE INFORMES EN LATEX PARA MATLAB

MATEMÁTICAS EN EL ARTE: LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO EN LAS MENINAS

ESTIMACIÓN DE MAGNITUDES

AGENTE VIRTUAL INTELIGENTE APLICADO A UN ENTORNO EDUCATIVO

ENTREVISTA A:

ADELA SALVADOR ALCAIDE. PROFESORA TITULAR DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID. UNA VIDA DEDICADA A LAS MATEMÁTICAS

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

NAZIS Y MATEMÁTICAS, CRÓNICA DE UNA BARBARIE

ECUACIONES, TEORÍAS Y CIENCIAS QUE LAS USAN

UNA VISIÓN MATEMÁTICA: MATEMÁTICAS EN IMÁGENES

MATEMÁTICAS A TRAVES DE LA PARADOJA

Y ADEMÁS:

CUENTOS MATEMÁTICOS (FERMAT), JUEGOS MATEMÁTICOS (UN POCO DE MATEMAGIA) Y CRÍTICAS (IMÁGENES MATEMÁTICAS)

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen II, Número 2, Octubre 2012

Producción / GIE Pensamiento Matemático
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

Universidad Politécnica de Madrid

Volumen II, Número 2, ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2012

Índice de Artículos

Críticas

Entrevistas

Editorial del Número 2 (Vol. II)

Equipo Editorial
Revista de Investigación

Volumen II, Número 2, pp. 001–012, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Sep'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Este número de la Revista Pensamiento Matemático está dedicado a los artículos más relevantes y que se ajustan al perfil de la revista, que fueron presentados en la segunda edición de las Jornadas Internacionales Matemáticas Everywhere.

Esta edición de las Jornadas fue realizada en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) que tiene su sede en Castro Urdiales, Cantabria (España) y que financió el encuentro.

Abstract

This issue of Mathematical Thinking Journal is dedicated to the more relevant articles adjusted with its aim, which were presented during the 2nd edition of the International Congress Mathematics Everywhere.

This edition of the Congress was celebrated in the International Center of Mathematical Meetings (CIEM) which is established in Castro Urdiales, Cantabria (Spain) and financed the meeting.

Introducción

Las Jornadas Matemáticas Everywhere son encuentros bianuales organizados por el Grupo de Investigación de la Universidad Politécnica de Madrid: "Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil" (MAIC) y el Grupo de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid: "Pensamiento Matemático". Su finalidad se centra en dar a conocer trabajos que relacionan las Matemáticas con otras áreas del conocimiento y que ponen de manifiesto la importancia de las Matemáticas en la sociedad, así como promover el intercambio de experiencias y el diálogo entre profesionales de la enseñanza.

Están orientados principalmente a profesionales de la docencia de las matemáticas, así como a alumnos de carreras técnicas, profesionales y en general, a los aficionados y estudiosos de esta ciencia.

La primera edición se celebró en la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) el 1 de octubre de 2010 y la segunda en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) en Castro Urdiales, Cantabria, durante los días 20 y 21 de junio de 2012.

Los artículos que forman parte de este número de la Revista Pensamiento Matemático han sido seleccionados de la 2ª edición de estas Jornadas cuya información puede consultarse en la página web del congreso: http://www.caminos.upm.es/matematicas/jornadas2012.

Volumen II, Número 2 - Pensamiento Matemático.

Divulgar las matemáticas, acercarlas a los estudiantes y al público en general, así como convertirlas en una asignatura interesante y atractiva, es un objetivo que prácticamente todos los profesores de esta materia se han planteado en numerosas ocasiones. De esta forma, ofertar acciones que posibiliten alcanzar estos objetivos resulta de gran utilidad. Con este propósito se propusieron las Jornadas Internacionales "Matemáticas Everywhere" en la que se pretendía ofrecer una visión de las matemáticas y unas aplicaciones de esta ciencia que permitan enfocarla y plantearla como una ciencia imprescindible e interesante a casi todos los niveles.

Los objetivos generales de los encuentros son:

- Adentrar a los asistentes en el mundo de las matemáticas y en la importancia y la utilidad de esta ciencia para el desarrollo de la mayoría de los campos tanto científicos como artísticos o de la vida cotidiana.

- Plantear diversas aplicaciones y conexiones de las matemáticas con otras áreas.

- Ayudar a los participantes a preparar la mente hacia la comprensión matemática.

- Es un curso orientado principalmente a profesionales de la docencia de las matemáticas, así como a alumnos de carreras técnicas, profesionales y en general, a los aficionados y estudiosos de esta ciencia.

Todos estos objetivos coinciden con los que la Revista Pensamiento Matemático por lo que nos ha parecido muy oportuna dedicar un número de la publicación a los trabajos presentados en esta segunda edición.

Las Jornadas

Desde el punto de vista pedagógico, consideramos que las Jornadas fueron un rotundo éxito. Al evento asistieron compañeros de Madrid, Valencia, Andalucía y País Vasco, lo que sin duda sirvió para compartir diferentes sentires y experiencias, y enriquecernos todos mutuamente.

Algunas instantáneas del evento y la ciudad de Castro Urdiales.

No podemos dejar de agradecer su colaboración al CIEM, que financió las Jornadas y prestó sus instalaciones para la celebración de las mismas. Todo ello en el incomparable marco de la ciudad de Castro Urdiales a quien damos nuestro agradecimiento a través de sus representantes en el Ayuntamiento.

Esperamos y deseamos que dicho encuentro fuera del agrado de todos los asistentes al evento, y colmara todas las expectativas. Igualmente deseamos poder continuar celebrando este, a nuestro parecer, magnífico y enriquecedor evento.

Los Cambios en la Revista

Como el lector podrá comprobar en este número, el Comité Editorial acordó abordar una serie de cambios en la misma, con el principal objetivo de aumentar la calidad editorial de esta publicación. Con el fin de alcanzar la máxima excelencia editorial posible, y cumplir así con los principales requisitos de calidad de las bases de datos en las que estamos tanto indexados (Latindex), como en otras en las que formamos parte de su catálogo (Dialnet, ICYT,...), acordamos oportuno acometer una serie de cambios en nuestra publicación que enumeramos a continuación:

1. Con el fin de presentar unos contenidos mucho más equilibrados y atractivos cuando el lector considere oportuno imprimir en papel los mismos, hemos ensanchado y alargado la plantilla. De este modo consideramos que los márgenes quedan más acordes al tamaño del papel por defecto considerado (A4).
2. Bajo el logo del Grupo de Innovación Educativa “Pensamiento Matemático” aparece nueva información sobre los contenidos de cada artículo, como son el Volumen y el Número al que pertenece dicho artículo, las páginas que ocupa dentro de dicho número (páginas iniciales y finales), ISSN, y las fechas de recepción y aceptación por parte del oportuno arbitraje de los contenidos.

3. Con el carácter internacional que la revista tiene impregnado en su propia identidad, se ha añadido un Abstract en inglés al inicio del artículo.

4. Con el fin de que el lector pueda imprimir los contenidos de los artículos en un formato de doble cara, se han diferenciado los encabezamiento y los pies de las páginas pares e impares.

5. La paginación de los artículos es correlativa frente a la que presentaban los anteriores números, la cual era independiente en cada uno de ellos, comenzando cada artículo en la página derecha de una virtual revista impresa.

6. Al igual que en anteriores números, la plantilla se ofrece perfectamente adaptada en tres de los principales sistemas de edición actuales (LaTeX, Microsoft Word -2003 y 2007-, y OpenOffice 3.0).

7. Tanto los hiperenlaces, como las referencias cruzadas de los artículos presentan ahora el mismo color que el resto de contenidos, presentando así un aspecto final mucho más homogéneo.

8. Con el fin de evitar desagradables “copia y pega” en otros medios ajenos sin la correspondiente oportuna y merecida citación del autor, los artículos van protegidos mediante contraseña. Queremos hacer hincapié en este hecho, puesto que a pesar de ser una publicación totalmente gratuita con fines pedagógicos, consideramos que es de justicia cuanto menos reconocer el trabajo y el esfuerzo realizados por parte de los autores. Por ello facilitamos en cada uno de los artículos, la información bibliográfica correspondiente en los principales sistemas de citación (BibTeX, EndNote,Reference Manager, Refworks y Bookends), para que aquellos que utilicen contenidos de esta revista realicen las pertinentes citaciones.

9. Con el propósito de llevar una numeración más “estandarizada”, a partir de este número, se indicará el Volumen, que representará el año (en números romanos), y el Número del correspondiente Volumen, que generalmente, hasta que cambiemos nuestra periocidad, será 1 o 2.

10. Además de la tradicional portada, la revista presentará los correspondientes créditos editoriales y un índice de los artículos contenidos en dicho número.

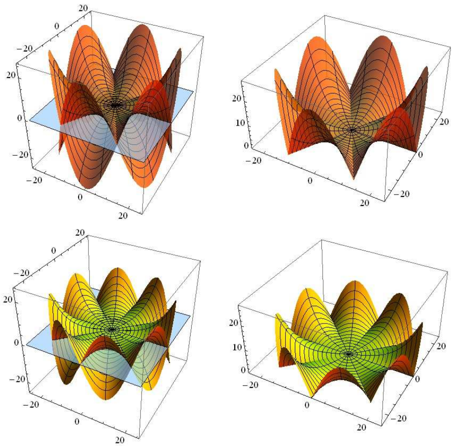
Con todos estos cambios esperamos satisfacer los requisitos de calidad que imponen las bases de datos en las que Pensamiento Matemático aparece, y del mismo modo colmar las expectativas que todos nuestros lectores, cuya cantidad aumenta con cada nuevo número, tienen depositadas en nuestra joven publicación.

Experiencias Docentes

El artículo *“Transformando Cuádricas Regladas”* trata de poner de manifiesto la íntima relación que existe entre las Matemáticas y la Arquitectura. Se pretende demostrar cómo a partir de dos cuádricas regladas clásicas como son el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico y sus secciones, se obtienen distintas figuras geométricas que se pueden utilizar como cubiertas.

Las Matemáticas no son solamente una herramienta de cálculo para poder diseñar la obra en cuestión, pretendemos destacar la importancia de éstas en el gran avance arquitectónico en cuanto a modernidad se refiere. El programa *Mathematica* resulta de gran ayuda para visualizar las propiedades y la forma de generar esas superficies.

El artículo *“La importancia del pensamiento estadístico en la Ingeniería de Fiabilidad”* pretende poner de manifiesto la creciente inquietud por el control de la calidad en el tiempo, lo que



Combinación de varias cuádricas y el L'Ocenagràfic de Félix Candela (Valencia).

ha dado lugar a la búsqueda de métodos capaces de abordar eficazmente el análisis de la fiabilidad. Los estudios de Grado y Máster de Ingeniería suelen ofrecer asignaturas tales como Estadística, Estadística Industrial, Control y Gestión de la Calidad o similares, donde se estudia la importancia de la fiabilidad y la calidad de los sistemas. En el ejercicio de sus atribuciones los ingenieros deberían desarrollar una nueva forma de pensar. El pensamiento estadístico es una manera de pensar, de comportarse, de actuar, de trabajar, de interacción con otros.

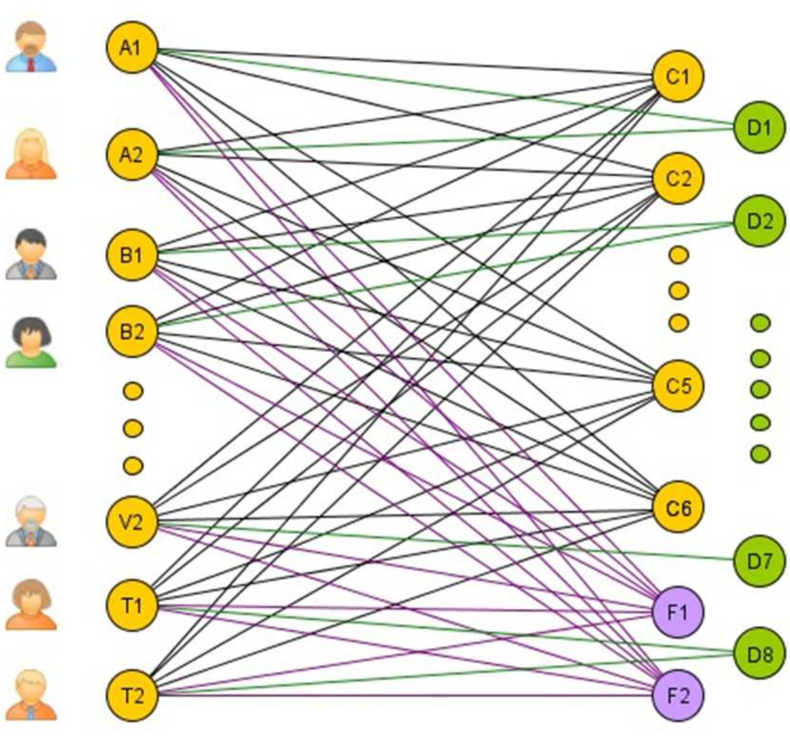
El artículo *"El buen uso de los paquetes de Cálculo Simbólico en la Enseñanza Aprendizaje del Cálculo en Ingeniería"* analiza la influencia que ejercen los paquetes de cálculo simbólico en el aprendizaje de las asignaturas de matemáticas del primer curso de Ingeniería Industrial y después de utilizar los resultados obtenidos (Castellano, Jiménez, Urosa, 2011) en la adaptación de esta disciplina a la nueva titulación de Grado del Espacio Europeo, realizamos una segunda fase donde analizamos de nuevo esta influencia así como la idoneidad de las medidas adoptadas a este respecto sobre el aprendizaje de los alumnos de Grado en el área del Cálculo Matemático.

En el artículo *"¿Se Puede Mejorar la Enseñanza de las Matemáticas en Cualquiera de sus Niveles?"*, los autores piensan que es perfectamente factible mejorar la enseñanza de las Matemáticas en cualquiera de sus niveles educativos. A tal fin, reflexionan en esta aportación sobre la situación actual y plantean algunas propuestas de mejora, que podrían contribuir a favorecer tanto la calidad de la enseñanza de esta disciplina como la mayor y más completa formación académica de los alumnos.

El artículo *"Estrategias matemáticas en la ONU"* trata la teoría de emparejamientos que proporciona los conceptos y herramientas necesarios para la resolución de problemas consistentes en establecer parejas entre elementos de dos conjuntos distintos o dentro de un mismo conjunto. Se utiliza esta teoría para ayudar al equipo asesor del embajador español, encargado de elegir los ponentes que participarán en una reunión preparatoria del examen ministerial anual del congreso económico y social de la ONU.

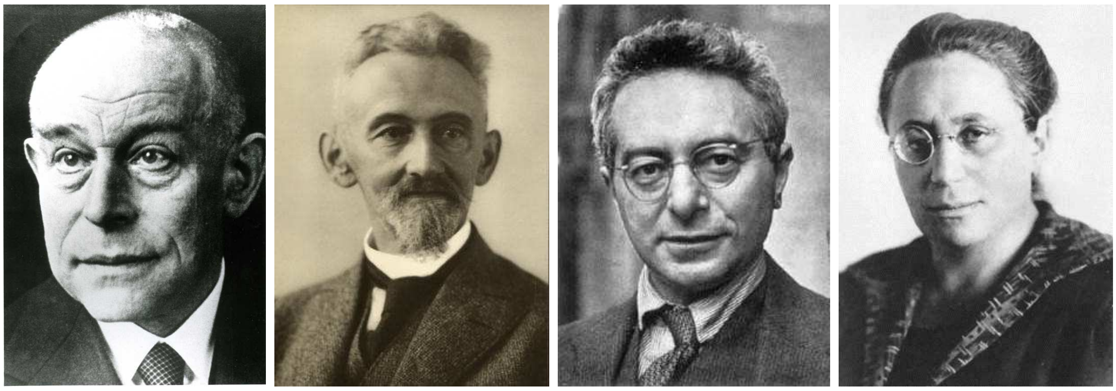
Historias de Matemáticas

En *"Nazis y Matemáticas. Crónica de una Barbarie"*, se pretende dar una visión de las matemáticas durante el periodo en el que el partido nazi gobernó en Alemania y tuvo pretensiones de gobernar casi toda Europa. Desde 1933, año en el que los nazis subieron al poder, se produjo en Alemania una huida, deportación, expulsión, ingreso masivo en campos de concentración y el asesinato o suicidio de profesores e investigadores en su mayoría de origen étnico judío que



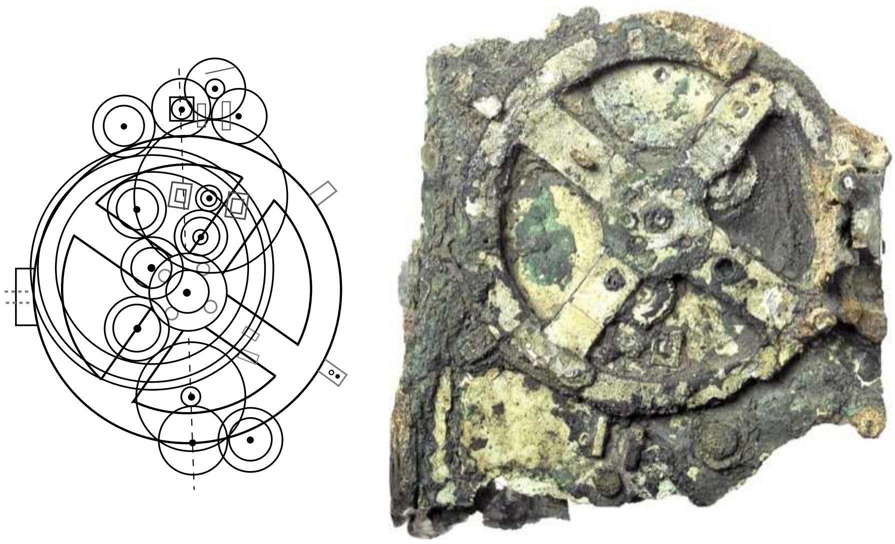
Grafo $\overline{G}_{ONU}$ donde se representan los vértices y aristas ficticias en morado y los vértices y aristas descarte en verde. Antes de formar el grafo bipartido completo el grado de los vértices descarte D_i es 2.

por supuesto no dejó a las matemáticas indiferentes. Este trabajo es el primero de una serie de artículos que relacionan las matemáticas y su contexto histórico en la 2ª Guerra Mundial.



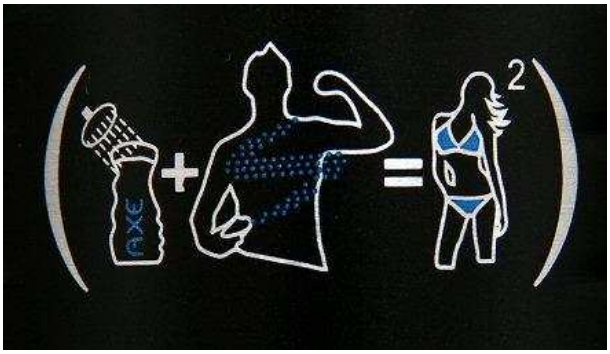
De izd. a drcha. Otto Blumenthal, Félix Hausdorff, Richard Courant y Emmy Noether, fueron algunas víctimas de la barbarie nazi.

En *"Ecuaciones, teorías y ciencias que las usan"* se expone la importancia de la utilización de algunas ecuaciones para modelizar problemas de la física alejados entre sí. Algunos modelos matemáticos suponen una abstracción subyacente en distintas teorías e incluso en diferentes ramas científicas. Algunas teorías nacen en cierto ambiente científico, pero trasladadas a otro resultan muy productivas e incluso crecen. Aquí se formulan algunos ejemplos de cada caso, se señala la estrategia de su construcción y se intenta indicar (explicar) su valor como herramienta científica.



Mecanismo de Antikythera. Primer modelo de engranajes conocido, para determinar la posición de los planetas.

"Una Visión Matemática: Matemáticas en Imágenes" tiene como objetivo que el lector sea capaz de valorar que las matemáticas no es una materia abstracta, sino que se encuentra dentro de nuestro entorno vital. Vivimos en un mundo de imágenes donde la Matemática es una ciencia desconocida por la sociedad quizás porque por lo general NO SE VE. Sin embargo las matemáticas forman parte de la cultura y se han desarrollado en paralelo al resto de los conocimientos humanos, influyendo en otras disciplinas, algunas de ellas de carácter visual. En este artículo se trata de plasmar la importancia y belleza de las matemáticas a través de imágenes utilizadas para fines muy distintos a la enseñanza de la misma.

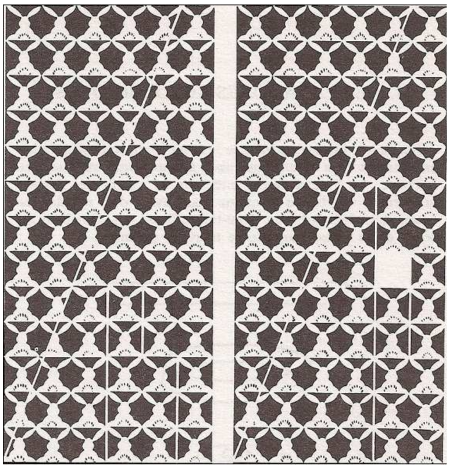


Ecuación matemática en publicidad.

El artículo *"Matemáticas a través de la paradoja"* trata sobre las paradojas y el papel fundamental que juegan en el desarrollo de la ciencia. El nacimiento de muchas ideas matemáticas se basa precisamente en la reflexión motivada por situaciones aparentemente "disparatadas". El trabajo repasa algunos ejemplos concretos de paradojas vinculadas a las matemáticas.

Cuentos Matemáticos

"Fermat" fue el primer premio del Concurso de Relatos Cortos Matemáticos organizado por el Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y el Grupo de Investigación Mate-



Paradoja del conejo (Paul Curry). ¿Dónde está el que falta?

máticas Aplicadas a la Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Madrid. El cuento narra las últimas horas de un matemático que decide suicidarse. En la oscura soledad de su despacho, el protagonista se enfrenta al último reto de su vida. El suicidio pudiera ser una solución perfecta, elegante, similar a la resolución de sus problemas favoritos. Hastiado de su vida, acaba de sufrir un desengaño amoroso que le ha llevado a cometer este acto desesperado. ¿Podrán las matemáticas ayudarle a superar esta situación?

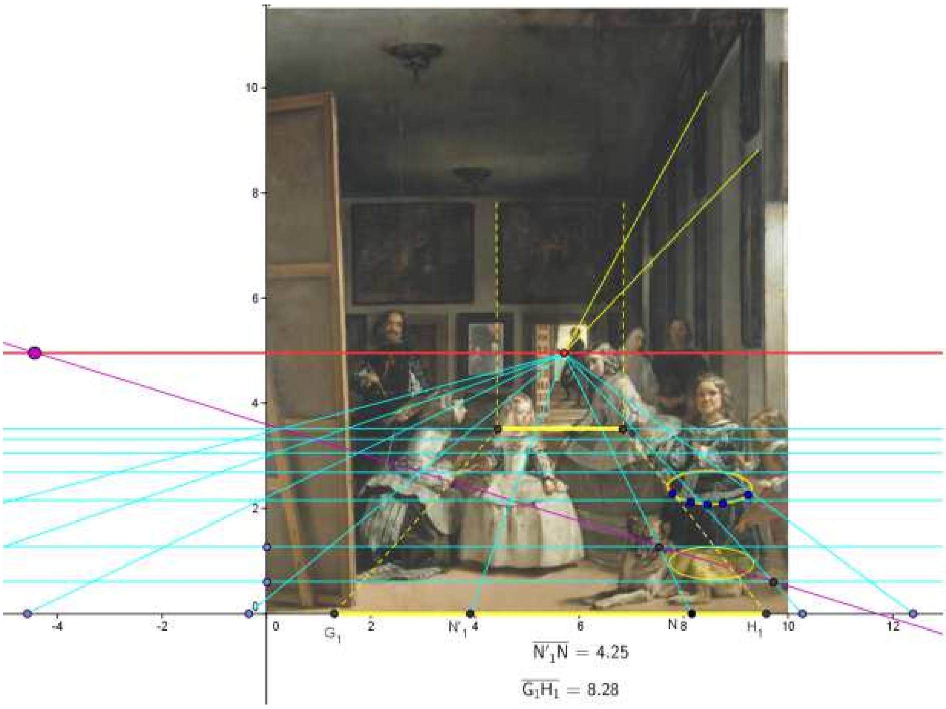
Investigación

En el artículo *"Labbtex: Toolbox para generación de informes en LATEX para Matlab®"* se presenta el software desarrollado por el Equipo H3lite dentro del Departamento de Ingeneniería Civil. Transportes de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid para la generación de informes en LATEX mediante el software Matlab® y la integración en sus rutinas, *Labbtex*.

La librería Labbtex proporciona un marco flexible para mezclar texto y código Matlab® para la generación automática de documentos. Un archivo fuente simple contiene el texto de documentación y el código Matlab, al correr la aplicación se genera un documento final LATEX que contiene el texto, gráficos y tablas indicados con el formato de un documento LATEX. El código Matlab genera un documento LATEX usando la sintaxis. Así, LATEX (para composición de texto de alta calidad) y Matlab® (para cálculo matemático) pueden usarse simultáneamente. Esto permite la generación de informes en tiempo real con un uso de recursos mínimo.

En *"Matemáticas en el Arte: La Geometría del Espacio en Las Meninas"* se lleva cabo el análisis y la reconstrucción de la perspectiva cónica, usando el DGS Geogebra, del espacio del desaparecido Alcázar de Madrid donde tiene lugar una de las escenas más célebres de la pintura española: La familia del Señor rey Phelipe Quarto más conocida como Las Meninas. El resultado es un conjunto de actividades integradas en el currículo de la geometría de la Educación Secundaria.

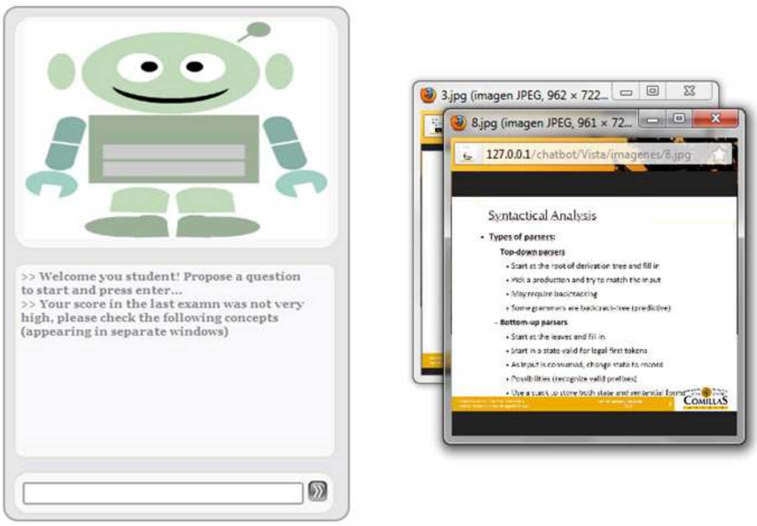
En *"Estimación de magnitudes"* se ha comprobado la capacidad de estimación de nuestros jóvenes estudiantes de ingeniería mediante la realización de una prueba o test. Tener una referencia para medidas cotidianas basadas en la experiencia personal o profesional, o en datos conocidos por estudios previos, permite aproximar soluciones a problemas complejos y facilita la previsión de los recursos necesarios. Los órdenes de magnitud parecen adecuados como referencia, pues se estudian en la educación obligatoria y dan una idea inicial válida de dichas



Reconstrucción de la perspectiva cónica frontal de las Meninas.

medidas, otorgando ciertamente una competencia básica que debe incluirse en el catálogo de las universidades.

El artículo *"Agente Virtual Inteligente Aplicado a un Entorno Educativo"* presenta el desarrollo de un agente virtual inteligente o chatbot cuyo dominio de conocimiento se corresponde con el temario de una asignatura académica, con el objetivo de lograr su interacción con el alumno y resolver sus dudas sobre la materia, suponiendo, así, un refuerzo en su proceso de aprendizaje.



Propuesta de revisión de contenidos.

Juegos Matemáticos

"Un poco de matemagia" pretende desentrañar la matemáticas que existen detrás de algunos juegos de magia. Junto a los clásicos juegos de manipulación, para los que se necesita una considerable habilidad manual, hay otra rama del ilusionismo que se basa en procedimientos más sutiles, entre los que están cogiendo auge en los últimos años los que parten de conceptos matemáticos, algunos enormemente simples, otros de cierta complejidad. Así nació lo que ha dado en llamarse *Matemagia*.

De izq. a drcha. Martin Gardner, Norman L. Gilbreath, Pedro Alegría y Fernando Blasco.

Críticas

Fruto de una de las actividades organizadas por el Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático, miembros del mismo decidieron publicar *"Imágenes Matemáticas"*.

Portada de Imágenes Matemáticas.

Este libro tiene por objetivo que el lector observe que existen matemáticas allá donde miremos, en nuestro entorno más cotidiano, camuflado en el paisaje mobiliario urbano, en la naturaleza, o en pequeños objetos o hechos anecdóticos que conviven con nosotros y que nos rodean. Desde la forma de una patata frita hasta las formas fractales de la naturaleza, las matemáticas son la ciencia que gobierna el universo. El texto trata por lo tanto de acercarnos aquellas matemáticas susceptibles de ser vistas, o descubiertas con la ayuda de una vista perspicaz.

Entrevistas

Con motivo de su próxima jubilación, la periodista Nieves Martín Díaz realizó una entrevista a nuestra querida compañera *Adela Salvador*. Adela no sólo se ha preocupado de la enseñanza de la materia en Institutos o Universidades, sino que también ha realizado importantes investigaciones en el campo de la Lógica Borrosa (entre otros) y especializado en la vida de otras Mujeres Matemáticas que la precedieron. Lleva dando clases unos 45 años, de forma ininterrumpida. Ha dirigido, coordinado o colaborado con más de 83 proyectos de investigación o de innovación educativa. Ha escrito 76 libros, 116 artículos, 94 ponencias a congresos, y ha impartido montones de cursos, seminarios, conferencias durante todos esos años.

Adela Salvador Alcaide

Quienes hemos compartido experiencias junto a ella, no podemos más que resaltar sus bondades. Adela siempre ha sido una profesional comprometida al 100 % con su trabajo, fundamentalmente porque enseñar ha sido su gran pasión. En este artículo, Adela repasa con nosotros su trayectoria personal y profesional y nos ofrece un poquito de su "yo interior".

Todos los que hacemos esta humilde publicación no queríamos cerrar este número sin agradecer su colaboración y participación a todos los asistentes a la 2ª Jornada Internacional "Matemáticas Everywhere". También queremos dar las gracias a todos vosotros lectores que hacéis posible que este proyecto continúe siendo una realidad.

El Comité Editorial

Experiencias Docentes

Transformando Cuádricas Regladas

Josefa Marín, Amparo Verdú y José Luis Almazán

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

Volumen II, Número 2, pp. 013--024, ISSN 2174-0410
Recepción: 5 Jul'12; Aceptación: 20 Jul'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Las Matemáticas y la Arquitectura están íntimamente relacionadas. Pretendemos en este trabajo demostrar cómo a partir de dos cuádricas regladas clásicas como son el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico y sus secciones, obtenemos distintas figuras geométricas que se pueden utilizar como cubiertas.

Las Matemáticas no son solamente una herramienta de cálculo para poder diseñar la obra en cuestión, pretendemos destacar la importancia de éstas en el gran avance arquitectónico en cuanto a modernidad se refiere. El programa Mathematica resulta de gran ayuda para visualizar las propiedades y la forma de generar esas superficies.

Palabras Clave: Cuádricas, Mathematica, regladas, Arquitectura.

Abstract

Mathematics and architecture are closely related. This paper tries to show how from two ruled quadrics classics such as the hyperboloid of one sheet and hyperbolic paraboloid and its sections, we get different geometric figures that can be used as covers.

Mathematics is not just a calculation tool to be able to design the work in question, we intend to emphasize their importance in the architectural breakthrough in terms of modernity is concerned. The program "Mathematica" is very helpful to display the properties and how to generate those surfaces.

Key Words: Quadric surfaces, Mathematica, regulated, Architecture.

1. Introducción

Es de sobra conocido que las cónicas y cuádricas son fundamentales para representar y modelizar secciones y superficies, ocupando un papel destacado el estudio de las superficies regladas por su utilidad a la hora de construir. El propósito de este trabajo es presentar de una manera sencilla y didáctica cómo a partir dos conocidas cuádricas regladas como son el hiperboloide de una hoja o el paraboloide hiperbólico, estudiando sus ecuaciones implícitas o paramétricas y sus secciones podemos transformarlas para definir nuevas figuras que tengan formas concretas.

2. Desde un Hiperboloide de una hoja

2.1 Definición y primera representación

Se define un hiperboloide de una hoja como una cuádrica de ecuación general reducida con eje en OY igual a $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

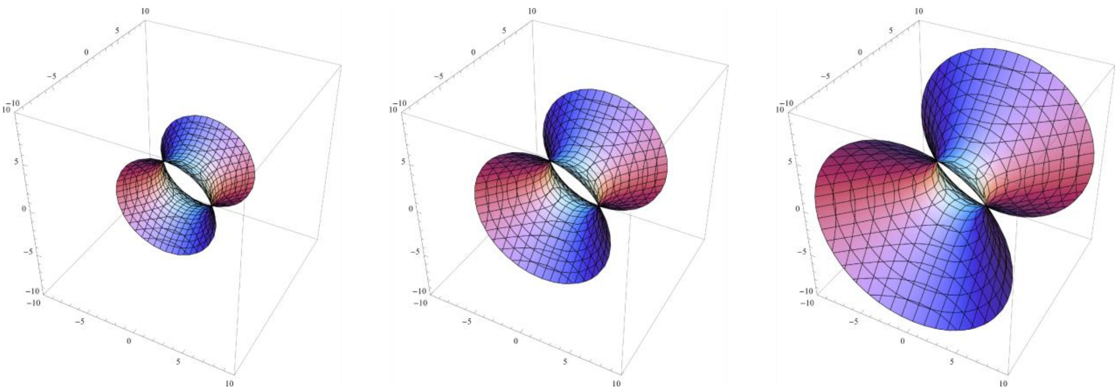


Figura 1. Hiperboloide de una hoja generado por circunferencias

Las secciones para cada plano $y=y_0$ son circunferencias de ecuación implícita $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{{y_0}^2}{b^2}$ y como podemos ver en la figura anterior.

2.2 Generación por rectas

Pero también podemos representar la superficie anterior cómo una superficie reglada, generada por una de las dos rectas generatrices que gira alrededor de una circunferencia. Para ello vemos a continuación la forma de obtener las ecuaciones de las rectas generatrices:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}\leftrightarrow\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\left(1-\frac{z}{c}\right)\left(1+\frac{z}{c}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad\frac{\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}{\left(1-\frac{z}{c}\right)}=\frac{\left(1+\frac{z}{c}\right)}{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}=\lambda,\quad\frac{\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}{\left(1+\frac{z}{c}\right)}=\frac{\left(1-\frac{z}{c}\right)}{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}=\mu$$

Primera recta generatriz: $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\lambda\left(1-\frac{z}{c}\right)$ y $\left(1+\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$

$$\text{Segunda recta generatriz: } \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1+\frac{z}{c}\right) \text{ y } \left(1-\frac{z}{c}\right)=\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

Y construimos el hiperboloide desplazando una de estas rectas por la circunferencia en el plano *y=0* de ecuación implícita $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

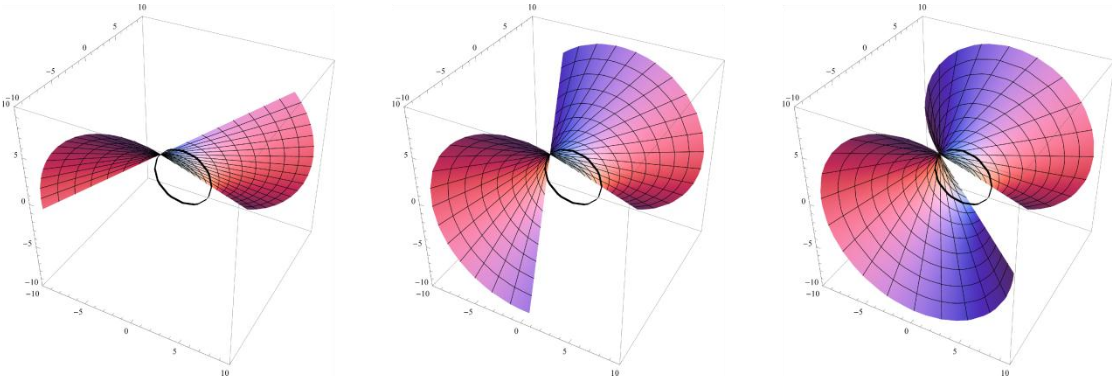


Figura 2. Hiperboloide de una hoja generado por rectas

2.3 Pivotando una recta generatriz sobre otra recta: Ysios

La sencilla representación anterior del hiperboloide nos sugiere la idea de desplazar y balancear una recta sobre otra recta generando otro tipo de superficie que se utiliza como cubiertas, por ejemplo en el diseño de la bodega Ysios. La ecuación general de una superficie de este tipo sería:

$$Sup_{h,p}(x,y):=\{x,y,h(x,y)\cdot Sen[p(y)]\}$$

Donde las funciones *h(x,y)* y *p(x)* nos indican, respectivamente, cómo subir la altura de la cubierta y cómo controlar el número de arcos. Vemos que las secciones para *x=cte* son oscilaciones armónicas, y para *y=cte*, rectas que se balancean sobre el eje *OY*.

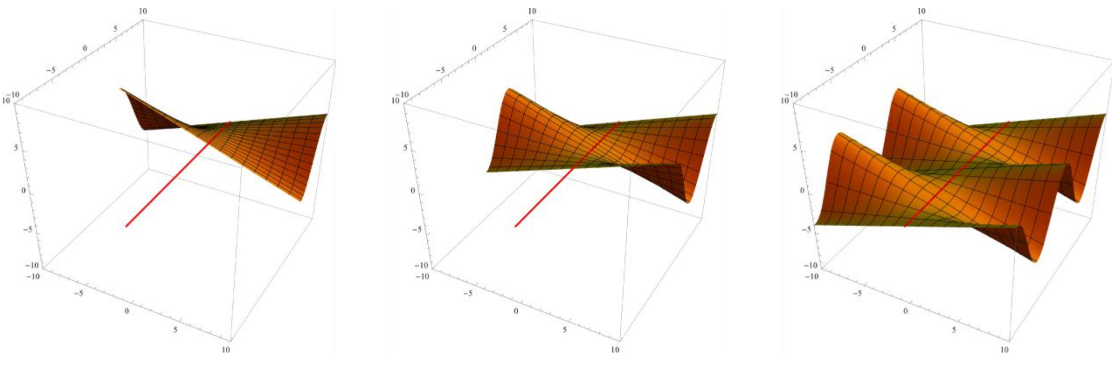


Figura 3. Cubierta reglada balanceando y desplazando una recta

Aunque también podemos obtener esta cubierta curvando adecuadamente el plano OXY:

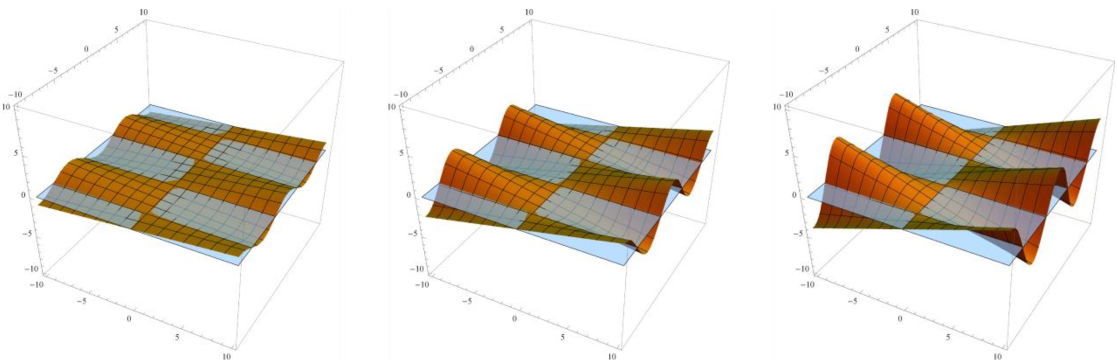


Figura 4. Cubierta reglada curvando el plano

Esta estructura es similar a la utilizada por el arquitecto Santiago Calatrava en la realización de la Bodega Ysios.

Figura 5. Fotografías de la Bodega Ysios

Nos preguntamos ahora, ¿qué clase de funciones pueden ser $h(x,y)$ y $p(y)$ para que una superficie de esta misma familia tenga una representación similar a las siguientes?

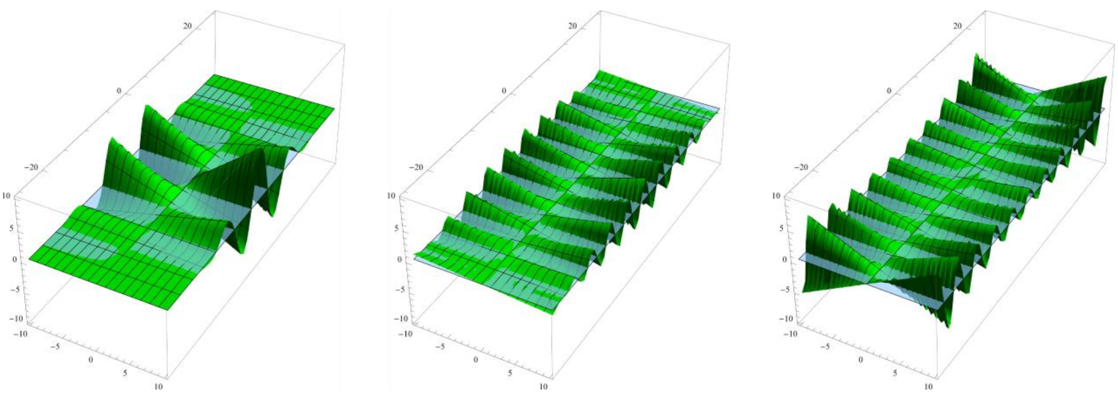


Figura 6. Altura diferente en cada arco

3. Desde un Paraboloide hiperbólico

3.1 Definición y primera representación

Pasemos a estudiar la cuádrica reglada paraboloide hiperbólico. Esta estructura ha sido utilizada brillantemente en el diseño y la elaboración de cubiertas por el arquitecto hispano-mejicano Félix Candela en obras como la planta embotelladora de Bacardi o el restaurante Los Manantiales.

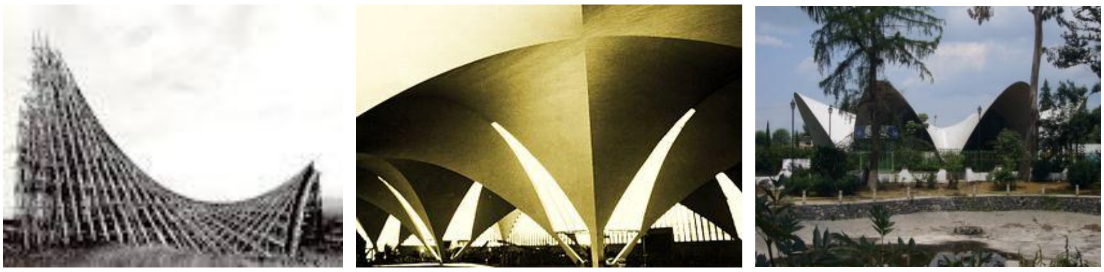


Figura 7. Estructura reglada y obras de Félix Candela

También ha realizado, junto a su discípulo, Santiago Calatrava, L'Ocenanogràfic de Valencia.

Figura 8. L'Ocenagràfic de Félix Candela y Santiago Calatrava

Veamos la base matemática de esta construcción. La ecuación general reducida de un paraboloide hiperbólico es la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z$$

En la siguiente figura podemos ver las distintas secciones del paraboloide cuando cortamos con planos paralelos a los planos coordenados. La sección en la que nos vamos a detener posteriormente es la del corte con el plano *z=0*, formada por dos rectas que nos definen los cuatro lóbulos, del paraboloide. La idea que proponemos es aumentar el número de rectas que cortan al plano *z=0* y de ese modo obtener más lóbulos.

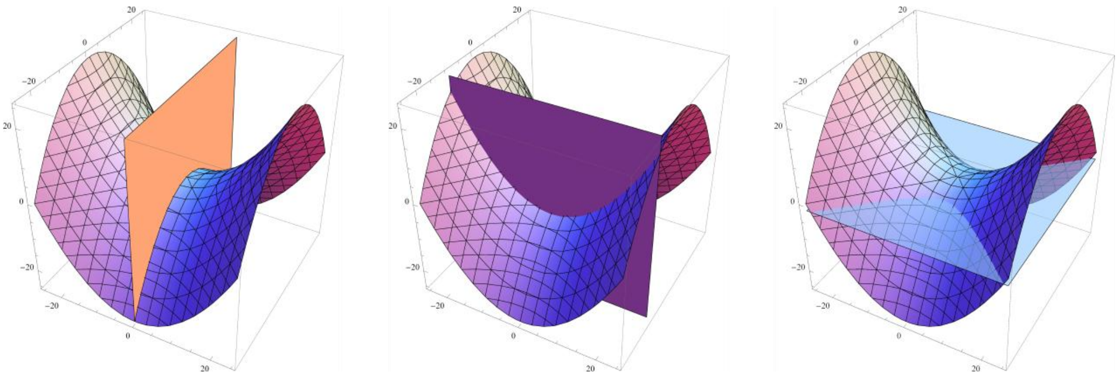


Figura 9. Secciones de un paraboloide hiperbólico

Al igual que hemos hecho antes con el hiperboloide, ahora representaremos el paraboloide hiperbólico como una superficie reglada generada por las rectas que definimos del siguiente modo:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \leftrightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z$$

Si $z=0$: Rectas $r_1:\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ y $r_2:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$

Si $z\neq 0$: Primera recta generatriz : $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\lambda z$ y $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\lambda^{-1}$

Segunda recta generatriz: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\mu z$ y $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\mu^{-1}$

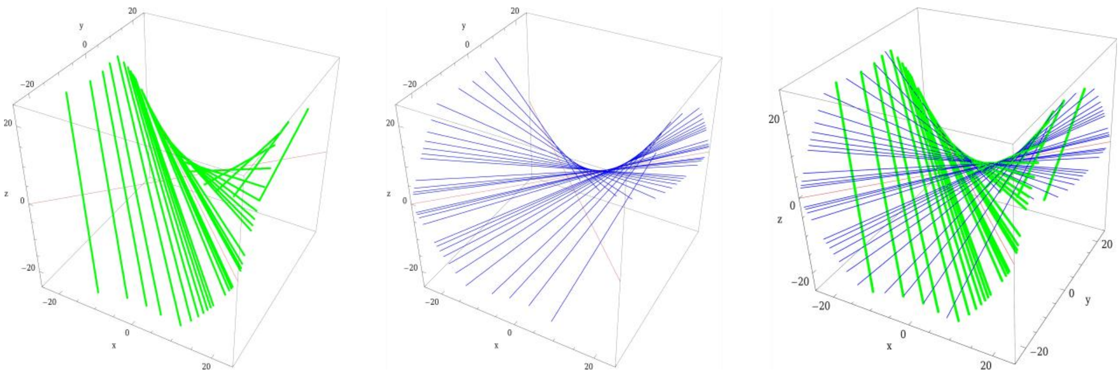


Figura 10. Paraboloide Hiperbólico como superficie reglada

Para alcanzar nuestro objetivo y visualizar de modo adecuado las trasformaciones es más útil trabajar con coordenadas polares y ver cómo podemos deformar un disco en el plano OXY para dibujar las distintas figuras.

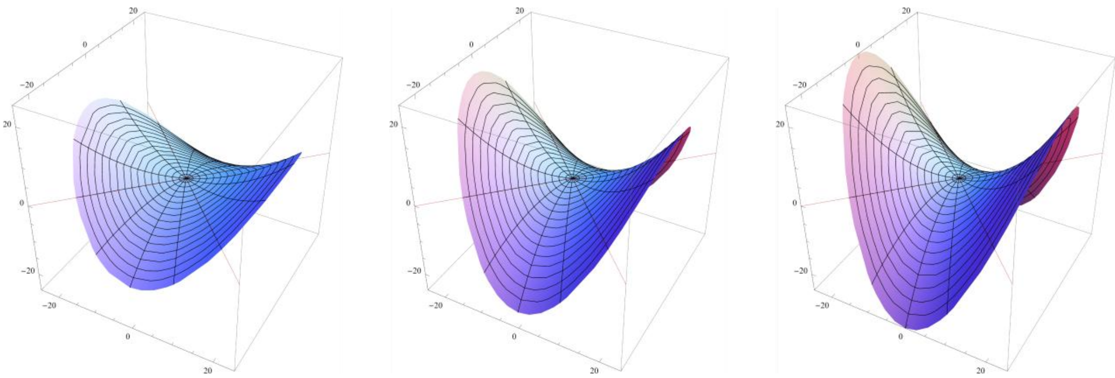


Figura 11. Del disco plano al Paraboloide Hiperbólico

La representación anterior la hemos obtenido definiendo la superficie en forma paramétrica con coordenadas polares como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} x(\rho,\theta)=\rho\cdot Cos[\theta] \\ y(\rho,\theta)=\rho\cdot Sen[\theta] \\ z(\rho,\theta)=b\cdot\rho^{2}(Cos^{2}[\theta]-Sin^{2}[\theta] \end{array}\right\} \rho>0,\quad \theta\in[0,2\pi]$$

3.2 Aumentando lóbulos en un paraboloide hiperbólico

Si el cambio de un lóbulo a otro lo marcan las rectas intersección con el plano OXY, lo que haremos será definir la coordenada z como producto de cuatro rectas y llamaremos a la nueva superficie 4-parabóloide hiperbólico. Por ejemplo, con la siguiente función en coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{l} x(\rho,\theta)=\rho\cdot Cos[\theta] \\ y(\rho,\theta)=\rho\cdot Sen[\theta] \\ z(\rho,\theta)=b\cdot\rho^{4}\cdot(Cos^{2}[\theta]-Sin^{2}[\theta])\cdot Cos[\theta]\cdot Sen[\theta] \end{array}\right\} \rho>0,\quad \theta\in[0,2\pi]$$

De ese modo tenemos una superficie con cuatro lóbulos positivos y cuatro negativos, que mediante el uso de matrices de giro representamos así:

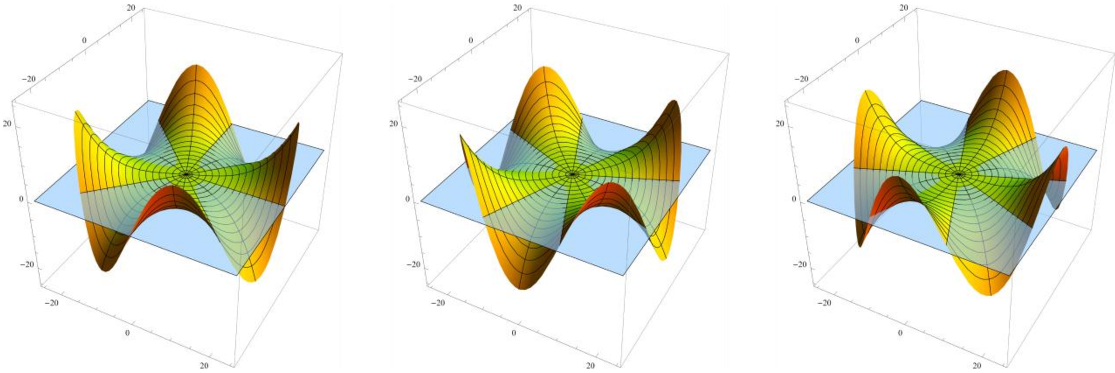


Figura 12. Nuevo 4-paraboloide hiperbólico

Nos proponemos ahora definir una nueva superficie con seis lóbulos, tres positivos y tres negativos, lo que llamaremos 3-parabóloide hiperbólico, para ello la coordenada z debe de ser el producto de 3 rectas con igual ángulo entre ellas, por lo que la ecuación en implícitas será del tipo siguiente:

$$z = d\left(3x^2 - y^2\right)y$$

y en coordenadas polares, de modo similar al anterior tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} x(\rho,\theta) = \rho \cdot Cos[\theta] \\ y(\rho,\theta) = \rho \cdot Sen[\theta] \\ z(\rho,\theta) = b \cdot \rho^3 \cdot (3 \cdot Cos^2[\theta] - Sin^2[\theta]) \cdot Sen[\theta] \end{array}\right\} \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

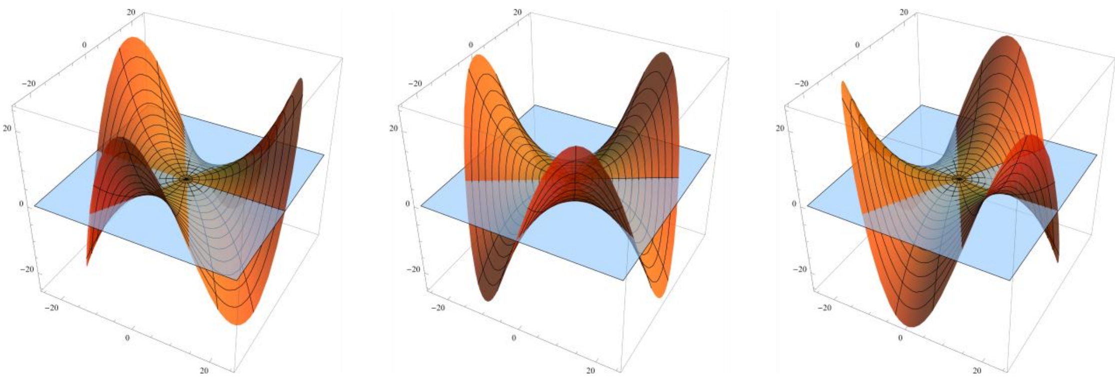


Figura 13. Nuevo 3-paraboloide hiperbólico

Ahora girando y combinando adecuadamente las superficies anteriores se pueden obtener cubiertas como las siguientes:

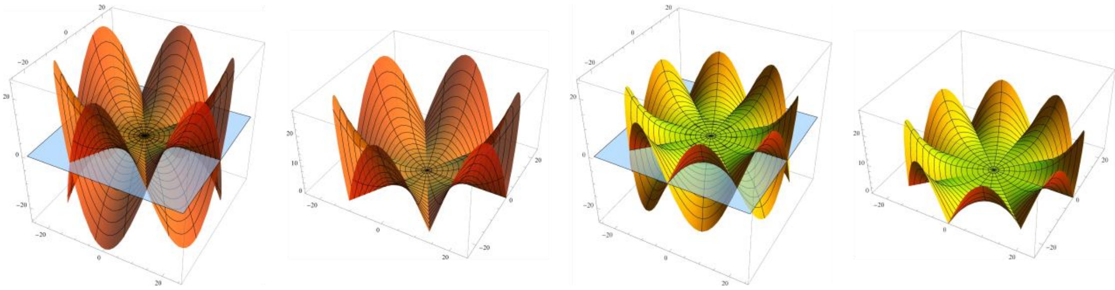


Figura 14. Combinando varias superficies

De manera natural se puede generalizar la definición anterior para obtener un n-paraboloide con n lóbulos positivos y n lóbulos negativos.

4. Modificando el radio vector

4.1 Radio vector función senoidal

Siguiendo con nuestro propósito de transformar el paraboloide hiperbólico, vamos definir la coordenada z de un n-paraboloide para que las curvas que se obtienen al cortar la figura con una radiación de planos en el eje OZ sean de tipo oscilación armónica. Un ejemplo sería el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x(\rho,\theta) = \rho \cdot Cos[\theta] \\ y(\rho,\theta) = \rho \cdot Sen[\theta] \\ z(\rho,\theta) = 3 \cdot Sin[\rho] \cdot Cos[2\theta] \cdot Sin[2\theta] \end{array}\right\} \rho > 0, \quad \theta \in [0,2\pi]$$

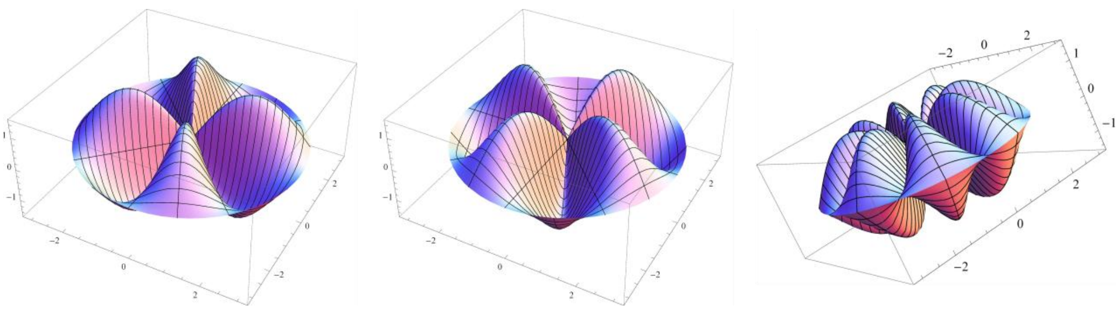


Figura 15. Dibujando y combinando con radio vector senoidal

También podemos variar el radio y observar la variación senoidal:

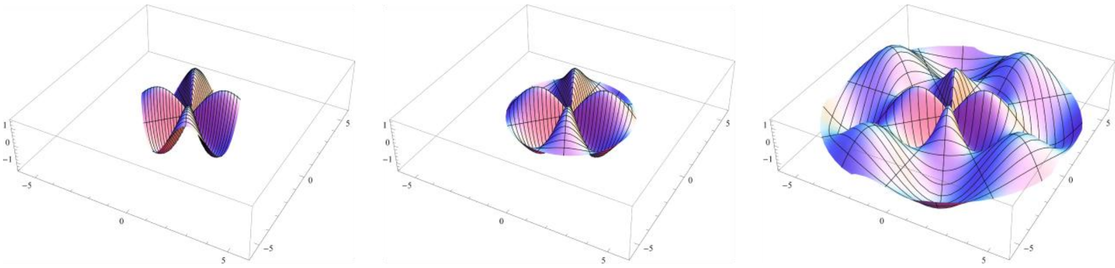


Figura 16. Ampliando el radio

O superponer varias a diferente altura:

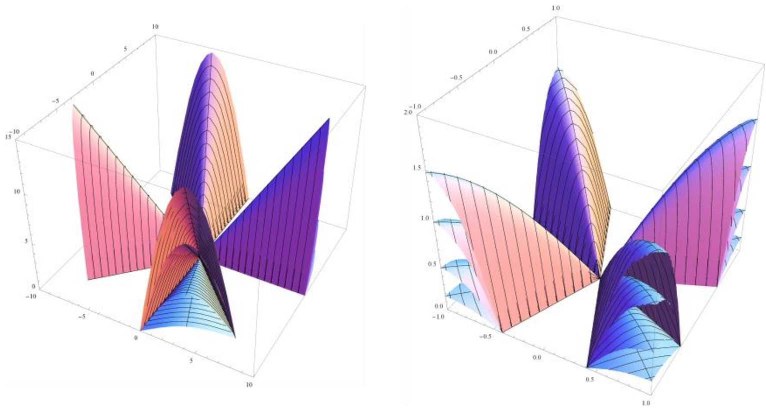


Figura 17. Superponiendo cubiertas

4.2 Diferentes radios vectores

Variando en la coordenada z el tipo de función del radio vector y combinando con el número de lóbulos, podemos generar figuras muy variadas. Mostramos aquí algunas

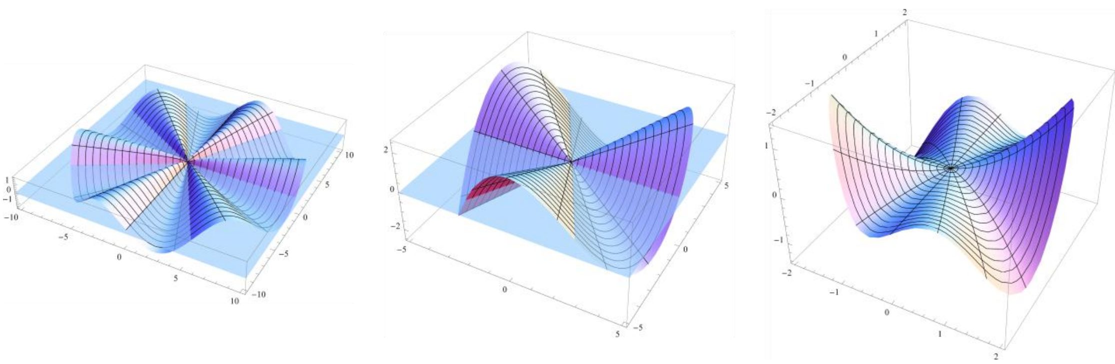


Figura 18. Nuevas combinaciones (I)

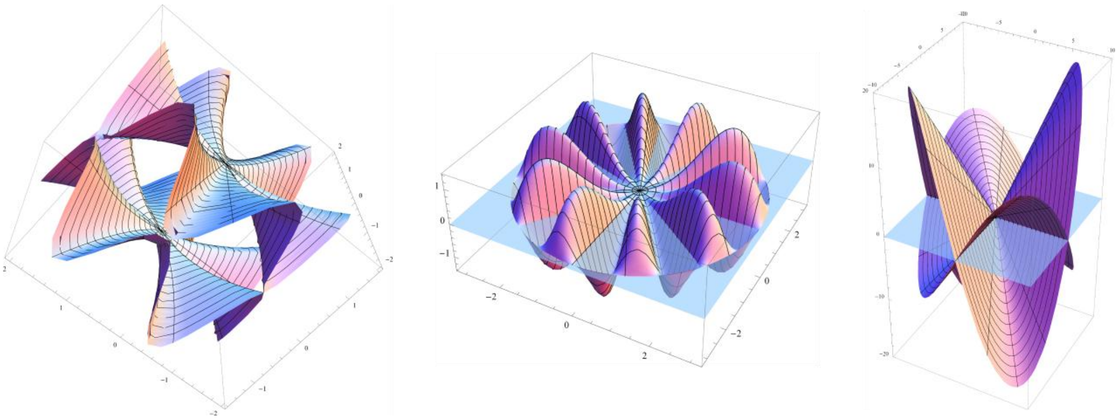


Figura 19. Nuevas combinaciones (II)

5. Mathematica y comando Manipulate

Todas las construcciones que hemos presentado adquieran una dimensión totalmente diferente cuando se definen con el programa Mathematica a través del comando Manipulate, y eligiendo los parámetros adecuados podemos dotarlas de movimiento, aplicarles giros, cambio de escala, translaciones, deformaciones, hacerles que crezcan o superponerlas. Toda una ventana de posibilidades que muestran cómo el estudio detallado de propiedades sencillas nos permiten llegar a construcciones más complejas.

Referencias

[1] BARTOLL ARNAU, Salud; BONET SOLVES, José; GÓMEZ COLLADO, M. Carmen. *Fundamentos Matemáticos en Arquitectura*, pp. 162-169, Editorial UPV, Valencia, 2009.

[2] BONET SOLVES, José; CALVO ROSELLÓ, Vicenta; PERIS MANGUILLOT, Alfredo; RODENAS ESCRIBÁ, Francisco. *Integración Múltiple y Vectorial*, pp. 161-162, Editorial UPV, Valencia, 2007.

[3] CHECA MARTÍNEZ, Emilio; FELIPE ROMÁN, M. José; GARCÍA RAFFI, Luis M.; MARÍN MOLINA, Josefa; SÁNCHEZ PÉREZ, Enrique A.; SÁNCHEZ PÉREZ, Juan V. *Álgebra, Cálculo y Mecánica para Ingenieros, Tomo II*, pp. 113-130, Editorial RAMA, Madrid, 1999.

[4] MARÍN MOLINA, Josefa; BALAGUER BESER, Ángel; ALEMANY MARTÍNEZ, Elena. Un Curso de Álgebra con Ejercicios (II), pp. 249-280, Editorial UPV, Valencia, 2006.

[5] SMITH, Cameron; BLACHMAN, Nancy. *The Mathematica Graphics Guidebook*, Addison-Wesley, 1995.

Sobre los autores:

Nombre: Josefa Marín Molina
Correo Electrónico: jomarinm@mat.upv.es
Institución: Universidad Politécnica de Valencia, España.

Nombre: Amparo Verdú Vázquez
Correo Electrónico: amparo.verdu@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: José Luis Almazán Gárate
Correo Electrónico: jalmazan@ciccp.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Experiencias Docentes

La importancia del pensamiento estadístico en la Ingeniería de Fiabilidad

Raquel Caro y Fernando García Jiménez

Revista de Investigación

Volumen II, Número 2, pp. 025–034, ISSN 2174-0410
Recepción: 5 Jul'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Existe de modo creciente una notable inquietud por el control de la calidad en el tiempo, lo que ha dado lugar a la búsqueda de métodos capaces de abordar eficazmente el análisis de la fiabilidad. Los estudios de Grado y Máster de Ingeniería suelen ofrecer asignaturas tales como Estadística, Estadística Industrial, Control y Gestión de la Calidad o similares, donde se estudia la importancia de la fiabilidad y la calidad de los sistemas. En el ejercicio de sus atribuciones los ingenieros deberían desarrollar una nueva forma de pensar. El pensamiento estadístico es una manera de pensar, de comportarse, de actuar, de trabajar, de interacción con otros.

Palabras Clave: calidad, fiabilidad, pensamiento estadístico, modelos de probabilidad, software estadístico.

Abstract

There is growing so considerable concern about the quality control at the time, which has led to the search for methods capable of addressing effectively the reliability analysis. Degree and Master of Engineering Studies usually offer courses such as Statistics, Industrial Statistics, Control and Quality Management or similar, which examines the importance of reliability and quality of the systems. Engineers should develop a new way of thinking. Statistical thinking is a way of thinking, behaving, working and interacting with others.

Keywords: quality, reliability, statistical thinking, probability distributions, statistical software.

1. Introducción

La gran complejidad de los procesos industriales y su obligado funcionamiento en continuo, implican considerables riesgos funcionales que, de no ser analizados y controlados, podrían influir considerablemente sobre la calidad de los bienes y servicios que adquirimos.

La mayor parte de los bienes y servicios se obtienen y se hacen llegar a sus destinatarios mediante unos sistemas productivos. A lo largo de su ciclo de vida cada sistema productivo, a menudo de gran dimensión tanto por el número de personas que trabajan en ellos como por el tamaño y el valor de las instalaciones y equipos que utilizan, pasa por diferentes fases hasta que se alcanza el régimen normal de funcionamiento. La última fase, llamada de operación, consiste en la construcción y puesta en marcha del sistema y es la única auténticamente productiva.

En esta fase el sistema se puede ver sometido a fallos que entorpecen o, incluso, interrumpen temporal o definitivamente su funcionamiento. Simplemente el paso del tiempo provoca en algunos bienes disminuciones evidentes de sus características, cualidades o prestaciones. Con el mantenimiento se pretende reducir la incidencia negativa de dichos fallos, ya sea disminuyendo su número o atenuando sus consecuencias[7].

Del estudio de los fallos de los productos, equipos y sistemas es de lo que trata la fiabilidad, un factor esencial en la seguridad de un producto. Se dice que un sistema o dispositivo falla cuando deja de brindarnos el servicio que debía darnos, o cuando aparecen efectos indeseables según las especificaciones de diseño con las que fue construido o instalado el bien en cuestión. El fallo del sistema tendrá unas repercusiones que dependerán: del tipo de sistema, del tipo de misión que este desempeñando y del momento en que se produzca el fallo. Es deseable, y en ocasiones imprescindible, que los sistemas sean fiables en el sentido de que el usuario pueda trabajar con ellos sin que exista un elevado riesgo de fallo. El nivel de fiabilidad, o seguridad de operación satisfactoria, dependerá de la naturaleza del objetivo del sistema [5].

El que un sistema tenga cierta fiabilidad llevará un coste y un esfuerzo asociado, por lo que la exigencia de fiabilidad para un sistema debe adecuarse a su objetivo y transcendencia.

2. Estudio de la longevidad

Cualquier sistema está constituido por una serie de dispositivos interconectados de forma tal que sean capaces de realizar unas funciones concretas. Estos bloques funcionales pueden estar constituidos por una única componente o por complejos subsistemas, dependiendo del tipo de sistema y de las interconexiones en el mismo. El estado de las componentes y la estructura del sistema determinan si un sistema está funcionando o no. En definitiva, cuantificar la fiabilidad de un sistema requiere, generalmente, considerar la estructura del sistema y la fiabilidad de sus componentes [8].

La ingeniería de fiabilidad es el estudio de la longevidad y el fallo de los equipos y sistemas. Para investigar las causas por las que los dispositivos envejecen y fallan se aplican principios científicos y matemáticos. Este tipo de investigación tiene como objetivo alcanzar una mayor comprensión de los fallos de los dispositivos para poder identificar las mejoras que pueden introducirse en los diseños de los productos para aumentar su vida o por lo menos para limitar las consecuencias adversas de los fallos.

2.1. Calidad versus Fiabilidad

La calidad de los productos y servicios se ha convertido en un factor de decisión importante en la mayoría de los negocios del mundo actual. Independientemente de si el consumidor es un individuo, una multinacional o una tienda minorista, cuando el consumidor está haciendo una decisión de compra, es posible que asigne igual importancia a la calidad que al coste y al tiempo de entrega. Por tanto, la mejora de la calidad se ha convertido en una preocupación principal para muchas empresas. El campo del control estadístico de la calidad puede definirse en un sentido amplio como aquellos métodos estadísticos y de ingeniería que se usan para medir, monitorizar, controlar y mejorar la calidad.

Se ha vuelto cada vez más evidente que elevar los niveles de calidad puede dar lugar a costes reducidos, un mayor grado de satisfacción del cliente y, por tanto, mayor confiabilidad. Esto ha dado como resultado un énfasis renovado en las técnicas estadísticas para diseñar calidad en productos y para identificar problemas de calidad en varias etapas de producción y distribución.

No es práctico inspeccionar la calidad dentro de un producto: el producto debe hacerse correctamente la primera vez. En consecuencia, el proceso de fabricación debe ser estable o repetible y tener la capacidad de operar con poca variabilidad en torno de la dimensión objetivo o nominal. El control estadístico de procesos en línea constituye una poderosa herramienta para conseguir la estabilidad de los procesos y para mejorar su capacidad mediante la reducción de la variabilidad.

Hasta el más modesto de los productos o servicios se puede ofrecer o presentar con amabilidad y cortesía, incrementando automáticamente su valor. La experiencia global del cliente influye en forma decisiva en la percepción de la calidad, por lo que una percepción de mayor calidad reduce el sentimiento de incertidumbre o de riesgo en la decisión de compra, haciendo que vender resulte más fácil.

A corto plazo, la calidad capta clientes, y a largo plazo, los conserva, generando un vínculo de fidelidad con la marca. Las firmas cuyos productos o servicios son de máxima calidad, son las que generan un alto flujo de beneficios, garantizando su prosperidad en el futuro, con el objetivo de desarrollar mejoras en la calidad de las operaciones de nuestros clientes, a fin de lograr organizaciones aún más eficientes y rentables que afiancen de forma sostenida su crecimiento.

Los criterios ISO 9000 son una serie de normas que definen los requerimientos mínimos que son aceptados internacionalmente para el desarrollo e implementación de sistemas de gestión de la calidad, que en el actual contexto de gran competitividad a escala global en la economía, han pasado a ser indicadores uniformes de las crecientes exigencias de calidad que los clientes demandan.

Esta situación presenta a los mercados con una gran conciencia sobre la calidad. Los clientes, una vez satisfechos con la competencia técnica, ahora demandan mayor confiabilidad en la calidad de los proveedores y buscan a aquellos que la aseguran.

Por otra parte, en todos los ámbitos de la ingeniería es fundamental el estudio del tiempo transcurrido hasta que se produce un fallo en un sistema. La fiabilidad se refiere a la permanencia de la Calidad de los productos o servicios a lo largo del tiempo. Decimos que un aparato o componente es fiable si desarrolla adecuadamente su labor a lo largo de su vida útil. Un aparato fiable funcionará correctamente durante su vida, mientras que otro que no lo sea dará numerosos problemas.

El estudio de la calidad, en una primera etapa, se limita a garantizar que el producto sale de fábrica en buenas condiciones. La fiabilidad intenta garantizar que el producto permanecerá en buenas condiciones durante un periodo razonable de tiempo. Los consumidores actuales exigen calidad/fiabilidad a cualquier bien duradero que adquieran. De hecho la legislación evoluciona otorgando responsabilidad a fabricantes o constructores durante determinados periodos en los que deben hacerse cargo de los fallos de los productos por defectos ocultos que pudieran aparecer tras la adquisición y uso. La competencia en los mercados es tal, que la salida de productos o servicios de baja calidad/fiabilidad es cada vez más difícil y únicamente sobreviven a largo plazo aquellas empresas con una excelente imagen de calidad y fiabilidad.

El concepto más simple de fiabilidad es aquel que comprueba que el producto cumple ciertas especificaciones, y cuando esto ocurre, es enviado al cliente. El cliente por su parte acepta que el producto pueda fallar con el tiempo, y en algunos casos el período de garantía es una forma de prever esta posibilidad a corto plazo [10]. Todo esto conduce a la necesidad de considerar un control de calidad basado en el tiempo. La fiabilidad es por tanto un aspecto de la incertidumbre en ingeniería, ya que el hecho de que un sistema funcione durante un cierto período de tiempo, sólo puede ser estudiado en términos de probabilidad. De hecho la palabra fiabilidad tiene una definición técnica precisa:

> *Fiabilidad es la probabilidad de que un dispositivo realice adecuadamente su función prevista a lo largo del tiempo, cuando opera en el entorno para el que ha sido diseñado.*

Resumiendo, podemos definir que el problema fundamental en fiabilidad es estimar la vida de un producto o sistema y la probabilidad de que se produzca un fallo en cada momento.

2.2. Nuevas funciones para los ingenieros industriales en la era del pensamiento estadístico

Una inadecuada educación estadística en los planes de estudio de escuelas de negocios e ingeniería en las instituciones de educación superior ha hecho que muchos ingenieros y economistas hayan terminado sus estudios sin entender el valor de la Estadística y sus aplicaciones [1].

Los directivos deben entender que el pensamiento estadístico no es sólo un conjunto de herramientas estadísticas, deben de empezar a considerar el pensamiento estadístico desde una perspectiva de "sistema", eso es, desarrollando específicamente sistemas que reúnan herramientas estadísticas y otras metodologías para realizar alguna actividad [9]. Ingenieros y gerentes deberían desarrollar una nueva forma de pensar [3].

2.3. Análisis de Fiabilidad de un Sistema según su Estructura

Cualquier sistema (mecánico, eléctrico, etc.) está constituido por una serie de bloques funcionales o dispositivos interconectados de forma tal que sean capaces de realizar unas funciones concretas. Estos bloques funcionales pueden estar constituidos por una única componente o por complejos subsistemas, dependiendo del tipo de sistema y de las interconexiones en el mismo. El estado de las componentes (funcionamiento, fallo, funcionamiento deficiente, etc.) y la estructura del sistema determinan si un sistema está funcionando o no. La estructura del sistema se describe por un diagrama lógico ilustrando la relación entre componentes y funcionamiento satisfactorio del sistema.

En definitiva, el cuantificar la fiabilidad de un sistema o mejorar la fiabilidad de un sistema requiere, generalmente, considerar la estructura del sistema y la fiabilidad de sus componentes. Por tanto, en el estudio de la fiabilidad de un sistema el primer paso consiste en realizar un análisis de los modos de fallo de todos los componentes del sistema y sus efectos en el mismo. Este análisis se conoce como FMEA (Failure Mode and Effects Analysis) o AMFE (Análisis de los Modos de Fallo y Efectos). Se desarrolló a mediados del siglo XX por ingenieros en armamento. El FMEA requiere un análisis cualitativo del sistema y sus componentes, y por ello debe ser conducido por los ingenieros durante la etapa de diseño del sistema.

Hay que tener especial cuidado a la hora de definir los fallos para que no sean ambiguos. éstos fallos deben estar relacionados siempre a un parámetro que se pueda medir o ligado a una clara indicación libre de interpretaciones subjetivas. A todo esto, no es inevitable que aparezcan variaciones subjetivas al validar los fallos (normalmente cuando la procedencia de los datos no está controlada).

Las especificaciones de entorno deben incluir las cargas, temperaturas, humedades, vibraciones y todos los parámetros necesarios que puedan condicionar la probabilidad de fallo del producto o sistema. éstos requisitos deben establecerse se manera que sean verificables y lógicos, y deben estar relacionados con las distribuciones correspondientes.

2.4. El Entorno en los Procesos de Fallos

Otro de los elementos importantes de la definición de fiabilidad es el entorno. La imposición de fuerzas (energía) sobre el sistema y sus componentes desde el entorno ocasionan en su mayoría los fallos del sistema debido al entorno. Estas fuerzas inducen y sostienen el progreso de varios tipos de procesos de deterioro, los cuales finalmente tienen como resultado el fallo de componentes. Existen dos tipos de modelos de procesos de degradación de componentes: los modelos de fallos mecánicos y los modelos de fallos electrónicos.

- Modelos de Fallos Mecánicos. En los mecánicos, se han desarrollado modelos de fallos desde una perspectiva mecánica o químico-eléctrica. A menudo se considera que la fiabilidad de los equipos mecánicos depende de la integridad estructural, la cual es influenciada por las cargas aplicadas y la fuerza inherente. En cuanto a la químico-eléctrica, se ha considerado usualmente como dependiente de la estabilidad material, a pesar de exposiciones a reacciones químicas hostiles como la oxidación.

- Modelos de Fallos Electrónicos. Los modelos de fiabilidad de dispositivos eléctricos y electrónicos se deben a observaciones empíricas y fueron desarrollados con posterioridad a los modelos de fiabilidad mecánicos. La mayoría de los modelos desarrollados se basan en la idea de que los procesos de degradación de los dispositivos electrónicos son esencialmente reacciones de conversión química, que tienen lugar en los materiales que integran los dispositivos.

- Otros Aspectos de los Procesos de Fallos. Aspectos como la aceleración de la edad (la manipulación del entorno de funcionamiento se puede utilizar para incrementar la tasa de envejecimiento de una muestra de dispositivos) o crecimiento de la fiabilidad (creencia de que el diseño y el desarrollo de un nuevo dispositivo, y la evolución de los métodos de fabricación del nuevo diseño, tienen como resultado una mejora en la fiabilidad de una muestra de dispositivos) son puntos a tener en cuenta a la hora de la aparición de posibles fallos en los sistemas.

3. El modelado de la duración de sistemas mediante distribuciones de probabilidad

En principio, se puede utilizar cualquier distribución de probabilidad para crear un modelo de duración de equipos o sistemas. En la práctica, las distribuciones con funciones de riesgo monótonas parecen más realistas y, dentro de esta clase, existen unas pocas que se considera que proporcionan los modelos más razonables de fiabilidad de dispositivos.

- Ley Exponencial de Fallos: Tasa de Fallos Constante. La distribución que se utiliza con más frecuencia para modelar la fiabilidad es la ley exponencial porque es sencilla de tratar algebraicamente y se considera adecuada para modelar el intervalo de vida funcional del ciclo de vida del dispositivo. De hecho, la distribución exponencial aparece cuando la tasa de fallos es constante, es decir, la probabilidad de que una unidad que está trabajando falle en el próximo instante es independiente de cuánto tiempo ha estado trabajando. Esto implica que la unidad no presenta síntomas de envejecimiento: es igualmente probable que falle en el instante siguiente cuando está nueva o cuando no lo está.

- Ley Weibull: Tasas de Fallos Crecientes y Decrecientes. Una gran mayoría de los equipos reales no tienen una tasa de fallos constante: es más probable que fallen a medida que envejecen. En este caso la tasa de fallos es creciente. Aunque también es posible encontrar equipos con tasas de fallos decrecientes. Por ello la distribución Weibull se utiliza frecuentemente en el desarrollo de modelos de fiabilidad. Tiene la ventaja de la flexibilidad a la hora de crear modelos de varios tipos de comportamiento de riesgo, y también es manejable algebraicamente. Fue propuesta por el investigador sueco Waloddi Weibull, en 1939 para estudios de fatiga de los metales. Es una distribución que representa adecuadamente el comportamiento de los metales y los sistemas o componentes frente a problemas de fatiga. Posteriormente se ha ido aplicando como distribución de vida para distintos sistemas de ingeniería. Se trata de la distribución más importante para recoger el comportamiento frente al fallo en sistemas eléctricos, mecánicos, electromecánicos y electrónicos.

- Ley Lognormal. Su función de riesgo es creciente y suele utilizarse para modelar la fiabilidad de componentes estructurales y electrónicos. Su desventaja es que es bastante difícil tratarla algebraicamente, pero su ventaja es que surge naturalmente como la convolución de distribuciones exponenciales. Por tanto, tiene un interés práctico considerable con relación a los procesos de fallos físicos. Es un modelo adecuado para representar el tiempo empleado en una reparación, ya que una proporción no muy elevada de reparaciones, pero sí significativa, conllevan un tiempo alto de reparación, aunque la mayoría se realiza dentro de un intervalo de tiempo alrededor de la moda, siendo en este caso la función de riesgo una tasa de reparaciones. La propensión a finalizar una reparación en un instante t, sabiendo que antes no se ha terminado, crece con el tiempo hasta llegar a un instante donde dicha propensión a finalizar la reparación es máxima. Pasado ese instante dicha propensión disminuye con el tiempo, lo que significa que cuanto más tiempo lleve el equipo sin haberse reparado más difícil es que se acabe su reparación. Lo que vendría a justificar el hecho constatado de que hay reparaciones que después de llevar mucho tiempo en el taller, no llegan a finalizarse.

La fiabilidad tiene una gran importancia dentro de la evaluación del rendimiento ya que a la hora de configurar un sistema informático se quiere que sea lo más potente posible en términos de rendimiento, dentro de un presupuesto limitado, y que tenga una esperanza de vida alta ya que de nada sirve un componente con un gran rendimiento si va a fallar pronto y va a ser necesario sustituirlo. Cada componente tendrá asociado una distribución probabilística que permitirá calcular su fiabilidad, prestando especial interés a las distribuciones que acabamos de presentar y ya ampliamente probadas por estos modelos.

No obstante, sería conveniente analizar las distribuciones empíricas de los datos del tiempo hasta el fallo realizando los ajustes necesarios a un determinado modelo de probabilidad, independientemente de las especificaciones que nos pueda dar el proveedor correspondiente [2] y [4].

3.1. Ajuste de distribuciones con SPSS

El entorno de trabajo del paquete estadístico SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) presenta un gran número de ventanas desde las que, por un lado, se gestiona la introducción de datos y se deciden los análisis a realizar y, por otro lado, se accede a distintos aspectos de la manipulación de los resultados generados. Todas ellas presentan sus propias barras de herramientas que pueden ser, como en casi todas las aplicaciones del entorno Windows, personalizadas a gusto del usuario.

Aunque el programa trae un gran sistema de ayuda se presuponen unos conocimientos básicos de las técnicas estadísticas empleadas que orienten en la elección de la técnica adecuada así como en la interpretación de los listados de resultados.

Una de las opciones del paquete estadístico es la posibilidad de hacer contrastes de bondad del ajuste de los datos a distribuciones de probabilidad. Es decir, contrastar si las frecuencias observadas en cada una de las clases de una variable varían de forma significativa de las frecuencias que se esperaría encontrar si la muestra hubiese sido extraída de una población con una determinada distribución de frecuencias.

4. Gestión de la Fiabilidad como Estrategia Corporativa

Un programa realmente efectivo de fiabilidad sólo puede existir en una organización donde el cumplimiento de los objetivos de fiabilidad esté reconocido como parte integrante en la estrategia corporativa. En los casos contrarios, es de los primeros en ser recortados en cuanto existen presiones de costes o plazos.

Puesto que la calidad de la producción será el determinante final de la fiabilidad, el control de la calidad es una parte integral del programa de fiabilidad. El programa de control de calidad debe estar basado en los requisitos de fiabilidad y no ir dirigido únicamente a reducir costes de producción.

El programa de control de calidad contribuirá de forma efectiva al de fiabilidad solo si los procedimientos del primero están ligados a factores que puedan influir en el Segundo. Resulta costoso llegar a objetivos elevados de fiabilidad, y más cuando el producto o sistema es complejo. Pero a todo esto, la experiencia demuestra que todos los esfuerzos de un programa de fiabilidad bien gestionados son rentables, ya que resulta menos costos descubrir y corregir deficiencias durante el diseño y desarrollo que corregir el resultado de fallos producidos durante el funcionamiento del producto o sistema. Según la naturaleza del programa estaremos ante el caso de un tipo de coste u otro.

El coste de fiabilidad incluye todos los costes imputados durante el diseño, producción, garantía, etc. y está basado en el binomio cliente-usuario, mientras que el coste de ciclo de vida está integrado por todos los costes imputados por el sistema a lo largo de su vida: desde la concepción hasta su retirada al final de su vida útil, y éste tipo de coste está basado en perspectiva del fabricante con una responsabilidad limitada durante la vida del producto. Por tanto, hay una relación entre fiabilidad de un sistema y el coste de diseño-desarrollo.

Hay que resaltar que los programas de fiabilidad están normalmente limitados por los recursos que se les puedan destinar durante las fases de diseño y desarrollo. La asignación de recursos a las actividades de un programa de fiabilidad debe estar basada en una consideración de los riesgos asociados, siendo un valor subjetivo basado en la experiencia.

5. La Estadística en los estudios de Grado en Ingeniería

La asignatura Estadística es una asignatura con un carácter eminentemente aplicado y tiene como objetivo que los alumnos de la Titulación de Grado en Ingeniería adquieran los conocimientos necesarios para aplicar técnicas estadísticas que les permita comprender y estudiar fenómenos no deterministas.

La asignatura se estudia en segundo curso y se imparte en el primer o segundo cuatrimestre, de manera simultánea con la asignatura Matemáticas II. De esta manera, los alumnos cuando cursan la asignatura Estadística ya han adquirido los conocimientos previos del cálculo en una y varias variables (contenidos de la asignatura Matemáticas I que se imparte en primer curso).

La asignatura Estadística está diseñada teniendo en cuenta el perfil profesional del Ingeniero Industrial. Como consecuencia, el objetivo de la misma es formar a los alumnos en la aplicación de técnicas estadísticas en el entorno industrial y productivo, que les ayuden en la toma de decisiones y en el control de los procesos industriales y organizacionales.

Al tratarse de una asignatura básica que utiliza bastantes conceptos matemáticos, será de gran utilidad el dominio de los contenidos de la asignatura Matemáticas I cursada en el primer curso. Así, los alumnos deben haber adquirido previamente los siguientes conocimientos mínimos para un correcto seguimiento de la asignatura: Matrices, determinantes, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, funciones de variable real, cálculo diferencial e integral en una variable, funciones de varias variables, cálculo integral en varias variables, convergencia de series y series de potencias.

A través de esta asignatura se adquieren los conocimientos básicos para afrontar con garantías otras asignaturas.

6. Conclusiones

Los equipos y sistemas que diseñamos y adquirimos para satisfacer nuestras necesidades deben dar las prestaciones que de ellos esperamos con un elevado nivel de seguridad y confianza en su correcto funcionamiento. Esto dependerá siempre tanto de la importancia que para nosotros tenga la función desempeñada por ese equipo o sistema, como de las consecuencias de los fallos que puedan presentarse. Por ello, es necesario considerar la fiabilidad como una disciplina más en el diseño de cualquier sistema, desde el análisis de la necesidad identificada hasta la retirada de servicio del sistema diseñado, y de forma integrada con el resto de disciplinas de apoyo logístico.

Así, dado que la evaluación de la fiabilidad es un tema muy relevante en las organizaciones, los estudios de grado de Ingeniería Industrial suelen ofrecer asignaturas tales como Estadística, Estadística Industrial, control y gestión de la Calidad o similares, donde se estudia la importancia de la fiabilidad y la calidad de los sistemas.

Referencias

[1] ANTONY, J., CAPON. *Teaching experimental design techniques to industrial engineers*, International Journal of Engineering Education, Vol. 14, Nº 5, pp. 335-43, 1999.

[2] CARO, R., LÓPEZ, V. y MIÑANA, G. *Análisis de Fiabilidad de dispositivos según su estructura para la herramienta software EMSI*. Actas del XXXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa SEIO, Madrid, Abril 2012.

[3] HARE, L.B. *et al*. *The role of statistical thinking in management*, IEEE Engineering Management Review, Fall, pp. 69-77, 1998.

[4] http://www.ucm.es/info/tecnomovil/

[5] http://informatica.uv.es/ rmtnez/ftf/teo/Tema01

[6] LÓPEZ, V. *Evaluación y Rendimiento de los Sistemas Informáticos*, EME-Editorial, Madrid, 2007.

[7] GUNTHER, N. J. *Analyzing Computer System Performance with Perl: PDQ*, Ed. Springer, 2005.

[8] MOLERO, X., JUIZ, C., RODEÑO, M. J. *Evaluación y modelado del Rendimiento de los Sistemas Informáticos*. Pearson Prentice-Hall, 2004.

[9] PFEIFER, C.G. *et al*. *Statistics – a road to the future: a time for change*, Chance, Vol. 1, pp. 39-42, 1998.

[10] PUIGJANER, R., SERRANO, J., RUBIO, A. *Evaluación y Explotación de Sistemas Informáticos*. Ed. Síntesis, 1995.

Sobre los autores:

Nombre: Raquel Caro Carretero
Correo electrónico: rcaro@upcomillas.es
Institución: ETS de Ingenieros del ICAI. Universidad Pontificia Comillas. Madrid, España.

Nombre: Fernando García Jiménez
Correo electrónico: ferni.garcia@gmail.com
Institución: EIES Antonio de Nebrija. Madrid, España.

Experiencias Docentes

El buen uso de los paquetes de Cálculo Simbólico en la Enseñanza Aprendizaje del Cálculo en Ingeniería

Alicia Castellano García, Ángela Jiménez Casas, Belén Urosa Sanz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 035–044, ISSN 2174-0410
Recepción: 5 Sep'12; Aceptación: 20 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Analizamos la influencia que ejercen los paquetes de cálculo simbólico en el aprendizaje de las asignaturas de matemáticas del primer curso de Ingeniería Industrial y después de utilizar los resultados obtenidos (Castellano, Jiménez, Urosa, 2011) en la adaptación de esta disciplina a la nueva titulación de Grado del Espacio Europeo, realizamos una segunda fase donde analizamos de nuevo esta influencia así como la idoneidad de las medidas adoptadas a este respecto sobre el aprendizaje de los alumnos de Grado en el área del Cálculo Matemático.

Palabras Clave: Programas de Cálculo simbólico, Matemáticas, Ingeniería.

Abstract

We analyze the influence of computer algebra packages in the learning of mathematics courses the first year of Industrial Engineering and after using the results obtained (Castellano, Jimenez, Urosa, 2011) in the adaptation of this discipline to the new degree Grade European Space, conducted a second phase where we look back this influence and the adequacy of measures taken in this regard on the learning of students in grade in the area of mathematical calculation.

Keywords: Symbolic computation programs, Mathematics, Engineering.

1. Introducción y fundamentación

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y la adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) están causando importantes cambios en los procesos de enseñanza-aprendizaje, de ahí que nos hayamos planteado analizar la influencia que ejercen los paquetes de cálculo simbólico en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en las asignaturas de matemáticas del primer curso de Ingeniería Industrial. En una primera fase analizamos esta influencia en los alumnos que cursaban dicha titulación (Castellano, Jiménez, Urosa, 2011) y a continuación tuvimos la oportunidad de utilizar los resultados obtenidos en esta primera fase en la adaptación de esta disciplina a la nueva titulación de Grado del Espacio Europeo. Este hecho nos ha permitido pasar a la segunda fase donde analizamos de nuevo esta influencia así como las medidas adoptadas a este respecto sobre el aprendizaje de los alumnos que cursan la nueva titulación de Grado. Este trabajo pretende exponer parte de los resultados obtenidos en esta segunda fase, en particular los relacionados con el aprendizaje de los alumnos en el área del Cálculo Matemático.

Existen una gran cantidad de trabajos referentes a esta línea de investigación, pero aún en nuestros días no se han llegado a conclusiones claras sobre el efecto que produce la incorporación de las TIC en la enseñanza, por lo que todavía seguimos estando próximos a la afirmación que realizaban en 1998 H. Kirkpatrick y L. Cuban (1998):

> *En los últimos 30 años los estudios sobre el uso de ordenadores en el aula han encontrado una evidencia moderada sobre el rendimiento académico de los estudiantes que los utilizan. Otras veces una efectividad mínima. Y otras ninguna.*

Analizando los estudios realizados sobre la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los procesos educativos en diferentes ramas de la enseñanza (Blok, Oostdam, Otter, y Overmaat, 2002; Duart Montoliu & Reparaz Abaitua, 2011; Jaramillo, Castañeda & Pimienta, 2009; Kulik, 1994; Parr, 2000; Reeves, 1998) podemos afirmar que la utilización de las mismas da buenos resultados en general, aunque existen pocos estudios experimentales relativos a los efectos que produce el contacto con los ordenadores sobre el aprendizaje de los alumnos, por lo que se requiere más investigación que examine los aspectos concretos de las aplicaciones específicas de la enseñanza utilizando las TIC.

La introducción de los ordenadores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se ha manifestado por el uso de diferentes tipos de programas, al principio se trataba de programas de carácter muy general, pero poco a poco con el vertiginoso avance informático surgieron los programas de cálculo algebraico que inicialmente sólo se podían aplicar sobre grandes equipos, más adelante con la implantación de los ordenadores personales surgieron los primeros sistemas de cálculo algebraico MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB, DERIVE, que más tarde se han convertido en los programas de cálculo simbólico más utilizados en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Está claro que estos programas de cálculo simbólico no proporcionan por sí solos resultados en el aprendizaje de las matemáticas si antes no hemos tenido un contacto con los conceptos matemáticos con los que vamos a trabajar. Por tanto es imprescindible una buena planificación de los diferentes cursos que utilizan soporte informático para ayudar a esclarecer los conceptos matemáticos expuestos en las clases de las asignaturas obligatorias de matemáticas.

El Dr. Monge (2005) nos dice que:

> *La introducción física de las nuevas tecnologías no genera automáticamente cambios en los procesos de funcionamiento de las organizaciones, así como tampoco genera cambios en el aprendizaje de las matemáticas cuando no hay una buena planificación docente.*

Revisando los estudios realizados sobre la incorporación de las TIC en los procesos educativos en el área de las matemáticas, donde algunos autores han analizado la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas creando su propio software como Murillo Ramón (2001), Pizarro (2009) o utilizando algún soporte informático como Acelajado (2005), Gómez García (2003), Ortega Pulido (2002), Rodríguez y Hoyos (2010), podemos afirmar de nuevo que la utilización de las mismas da buenos resultados en general, permiten al alumno trabajar de forma autónoma e independiente, concluyendo que se potencia la iniciativa personal, el alumno adquiere actitudes, intereses, valores y hábitos formativos que le facilitan los mecanismos precisos para regirse a sí mismo y para aprender a aprender; no obstante casi todos los autores sostienen que debe haber una buena planificación docente que nos sirva para mejorar la compresión de conceptos matemáticos, quedando abierto el problema de concretar qué tipos de problemas y en qué momento de la programación didáctica resulta idóneo para obtener beneficios positivos en el aprendizaje.

Para abordar este tema realizamos una investigación en varias fases, como hemos comentado brevemente al principio. En la primera fase de este estudio (Castellano, Jiménez, Urosa, 2011) trabajamos con los alumnos del primer curso de Ingeniería Industrial de la Universidad Pontificia de Comillas donde analizamos:

- En primer lugar la influencia que ejercía el programa de cálculo simbólico "Derive" en la comprensión de conceptos básicos matemáticos en la asignatura obligatoria de Cálculo del primer curso de Ingeniería Industrial.

  Para ello comparábamos la adquisición de conceptos contenidos en esta asignatura entre los alumnos del año 2007-08 que cursaron asignaturas de libre elección, "Las matemáticas desde el punto de vista experimental" (D1) y "Modelado de problemas matemáticos con Derive" (D2), que utilizaban "Derive" como paquete de cálculo simbólico y los alumnos del mismo año que no las cursaron.

  Como conclusión llegamos a que el uso de paquetes de cálculo simbólico ayuda a los alumnos a comprender mejor algunos conceptos expuestos en la asignatura de Cálculo, ya que se obtuvieron diferencias estadísticamente significativas en la adquisición de los mismos por parte de los alumnos que utilizaron soporte informático. A la vista de los resultados obtenidos, recogimos varias recomendaciones, entre las que estaban no sólo que conceptos se deberían tratar con estos paquetes sino además que metodología era la más adecuada para obtener mejoras significativas en el aprendizaje.

  Consideramos que estos programas se deberían integrar en las asignaturas de Cálculo mediante prácticas adecuadas, diseñadas a partir de problemas que tengan en cuenta los conceptos que involucran cuyo aprendizaje necesita y puede ser reforzado.

- Para saber algo más sobre el tipo idóneo de problemas que debemos proponer en las prácticas, analizamos en segundo lugar las diferentes metodologías empleadas en las dos asignaturas de libre elección que utilizaban paquetes de cálculo simbólico.

  Cabe destacar que la materia impartida en la asignatura D2 "Modelado de problemas matemáticos con Derive" consta básicamente de planteamientos y resolución de problemas relacionados con aplicaciones en la Ingeniería, mientras la asignatura D1 "Las matemáticas desde el punto de vista experimental" propone problemas integrados con los programas de las asignaturas de Cálculo y Álgebra del primer curso de Ingeniería Industrial.

  En este caso realizamos diferentes experimentos donde comparábamos la adquisición de conceptos entre los alumnos que habían cursado D1 y los que habían cursado D2 llegando a la conclusión de que la metodología seguida en la asignatura D1 favorecía más el aprendizaje de conceptos básicos de Cálculo que la asignatura D2 ya que los problemas propuestos en D1 contribuían a comprender mejor conceptos que tienen en común la propiedad de poderse visualizar mejor utilizando expresiones analíticas para las representaciones gráficas en el ordenador además de advertir una mejor preparación para asimilar en un futuro conceptos matemáticos que tienen una mayor abstracción.

Con el fin de completar el estudio llevado a cabo en la asignatura de Cálculo del primer curso de Ingeniería Industrial y sabiendo que la utilización de los programas de cálculo simbólico da buenos resultados, iniciamos una segunda fase poniendo en marcha las recomendaciones propuestas en el estudio anterior. En esta nueva fase analizaremos la adquisición de conceptos básicos en la asignatura de Cálculo por parte de los nuevos alumnos de Grado en Ingeniería Electromecánica (2010-11) que tienen integrados los programas de cálculo simbólico en dicha asignatura, para valorar y mejorar las recomendaciones propuestas.

Para ello compararemos la adquisición de conceptos básicos de Cálculo entre los alumnos del primer curso de Ingeniería Industrial del año 2007-08 que tuvieron algún contacto con los programas de cálculo simbólico cursando alguna de las asignaturas de libre elección D1 y D2 y los nuevos alumnos de Grado en Ingeniería Electromecánica del año 2010-11 que tenían integrado los programas de cálculo simbólico en dicha asignatura.

2. Métodos

2.1. Muestra

En nuestra investigación participaron los alumnos del primer curso de Ingeniería Industrial del año académico 2007-08 y los alumnos del primer curso de Grado en Ingeniería Electromecánica del año 2010-11 de la Universidad Pontificia Comillas de Madrid.

Durante el curso académico 2007-08, los alumnos de primer curso de Ingeniería Industrial tuvieron que cursar obligatoriamente la asignatura de Cálculo, además de elegir algunas de las asignaturas de libre elección que ofrecía la universidad. De estas asignaturas nos interesaban dos, que eran las asignaturas que utilizan Derive como programa de cálculo simbólico, "Las Matemáticas desde el punto de vista experimental" (D1) impartida durante el primer cuatrimestre y "Modelado de problemas matemáticos con Derive" (D2) impartida durante el segundo cuatrimestre.

Tras algunas bajas, el número de participantes en el año 2007-08 fue de 201. De ellos 54 eligieron la asignatura D1, 65 eligieron D2 y 21 alumnos eligieron las dos.

Durante el curso 2010-11 se efectuó un cambio en los planes de estudio en la Universidad Pontificia Comillas de Madrid para adaptarse al Espacio Europeo de Educación Superior por lo que aparece una nueva titulación Grado en Ingeniería Electromecánica. En esta nueva etapa los contenidos de la asignatura anual de Cálculo se fragmentan en dos, que se corresponden con las asignaturas Cálculo I (análisis matemático en una variable) impartida durante el primer cuatrimestre y Cálculo II (análisis matemático en varias variables) impartida durante el segundo cuatrimestre, desaparecían las asignaturas de libre elección y tal y como sugirieron los estudios realizados en el trabajo anterior (Castellano, Jiménez, Urosa, 2011) para obtener mejoras en el aprendizaje de dichas asignaturas se incluían los programas de cálculo simbólico en las asignaturas de matemáticas mediante unas prácticas realizadas en el taller de matemáticas. El número de alumnos que cursaron por primera vez las asignaturas de Cálculo I y Cálculo II del Grado en Ingeniería Electromecánica fue de 202.

2.2. Diseño del estudio

Como hemos dicho anteriormente, en esta nueva fase analizaremos la incorporación de las TIC, representadas por la utilización de programas de cálculo simbólico, en el diseño y puesta en marcha de las asignaturas de Cálculo de las nuevas titulaciones de Grado adaptadas al Espacio Europeo de Educación Superior.

Para ello, en este trabajo, analizamos la adquisición de conceptos básicos en la asignatura de Cálculo por parte de los nuevos alumnos de Grado en Ingeniería Electromecánica (2010-11), que tienen integrados los programas de cálculo simbólico en dicha asignatura mediante unas prácticas realizadas en el taller de matemáticas, y lo comparamos con la adquisición de esos mismos conceptos por parte de los alumnos del curso 2007-08 que tuvieron algún contacto con las asignaturas que utilizaban soporte informático D1 y D2 (CT).

El análisis de la adquisición de conceptos se lleva a cabo estudiando las respuestas a los problemas propuestos en los exámenes realizados en distintos años.

2.3. Variables e instrumentos de medida. Análisis estadístico

Como variables independientes tomamos como grupo de control a los alumnos que han realizado el primer curso de Ingeniería Industrial en el año 2007-08 y que han tenido contacto con los programas de cálculo simbólico denotados por (CT) y como grupo experimental a los alumnos que han realizado el primer curso de Grado en Ingeniería Electromecánica y que tienen integrados los programas de cálculo simbólico en las asignaturas de matemáticas y que denotaremos por (B).

Como variables dependientes tomamos los conceptos que coinciden en los problemas de los exámenes realizados durante el curso 2007-08 y 2010-11 y que los alumnos han debido ir adquiriendo a lo largo del primer curso de Ingeniería en las asignaturas obligatorias de Cálculo.

Tabla 1. Listado de conceptos para analizar

LISTADO CONCEPTOS QUE COINCIDEN EN EL PRIMER EXAMEN(Noviembre)	
BCN1	*Módulo y argumento de un número complejo*
BCN3	*Concepto de funciones elementales*
BCN5	*Interpretación del teorema de Rolle*
BCN7	*Interpretación del teorema del valor medio de Lagrange*
BCN8	*Concepto de infinitésimo*
BCN10	*Concepto de derivabilidad*
LISTADO CONCEPTOS QUE COINCIDEN EN EL SEGUNDO EXAMEN(Febrero)	
BCF1	*Concepto de continuidad en una variable*
BCF3	*Interpretación del teorema de Rolle*
BCF4	*Concepto de infinitésimo*
BCF6	*Aplicaciones de la derivada*
BCF7	*Concepto de función par*
BCF9	*Concepto de integral impropia*
BCF10	*Cálculo de límites de sucesiones*
LISTADO CONCEPTOS QUE COINCIDEN EN EL TERCER EXAMEN(Abril)	
BCA1	*Concepto de continuidad en varias variables*
BCA2	*Concepto de diferenciabilidad*
BCA4	*Teorema de diferenciabilidad*
BCA6	*Concepto de derivación de una función compuesta*
BCA7	*Concepto de derivada direccional máxima*
LISTADO CONCEPTOS QUE COINCIDEN EN EL CUARTO EXAMEN(Junio)	
BCJ1	*Concepto de continuidad en varias variables*
BCJ2	*Concepto de derivadas parciales*
BCJ3	*Concepto de diferenciabilidad*
BCJ6	*Concepto de derivación de una función compuesta*
BCJ9	*Interpretación del teorema de Green*

En este estudio han podido influir otras variables extrañas como los distintos profesores en una misma asignatura, los diferentes niveles de aprendizaje de los alumnos, el horario en cada una de las clases, el ambiente en cada una de ellas, etc. No obstante, se ha intentado controlar el efecto de las mismas tomando medidas entre las que cabe destacar, una perfecta coordinación entre los distintos grupos y profesores. Esta coordinación está basada en una programación exhaustiva, un material y metodología comunes que culmina en que los exámenes involucrados en este estudio sean comunes a todos los grupos, se realicen a la misma hora y la corrección de los mismos se lleve a cabo de forma conjunta por el equipo de profesores.

El tratamiento de datos se ha realizado utilizando el programa de análisis estadístico SPSS versión 15.0., por medio del cual calculamos medias de los grupos de control (MCT), y de los grupos experimentales (MB), desviaciones típicas (DCT y DB), la t de Student (t), la probabilidad asociada al estadístico (p) y el tamaño del efecto utilizando la fórmula de Cohen (COHEN), donde estudiamos si hay diferencias estadísticamente significativas en la adquisición de conceptos entre los alumnos del año 2007-08 que tuvieron contacto con las asignaturas que utilizan soporte informático y los alumnos del año 2010-11 que tienen incluidos estos programas en las asignaturas de Cálculo.

3. Resultados y conclusiones

Analizaremos los resultados de esta investigación atendiendo a las respuestas de los alumnos en cada uno de los cuatro exámenes considerados.

Primer examen (Noviembre)

En la siguiente tabla se recogen los resultados más relevantes de este experimento, y que se refieren a 6 conceptos que aparecen involucrados a la vez en los problemas propuestos de este primer examen del año 2010-11 y en los primeros exámenes realizados durante el año 2007-08.

Tabla 2. Diferencias de medias en los Conceptos que coinciden en el primer examen

CONCEPTOS	B	CT	MB	MCT	DB	DCT	t	p	COHEN
BCN1-CN6	98	98	0,63	0,3	0,485	0,459	4,995	0	0,71
BCN3-CN9	98	98	0,49	0,22	0,502	0,419	4,013	0	0,57
BCN5-CF1	98	98	0,27	0,85	0,444	0,362	-10,055	0	-1,44
BCN7-CN10	98	98	0,29	0,22	0,454	0,419	0,981	0,328	0,14
BCN8-CN1	98	98	0,31	0,59	0,463	0,494	-4,176	0	-0,6
BCN10-CN2	98	98	0,06	0,44	0,241	0,499	-6,747	0	-0,96

Existen diferencias estadísticamente significativas en casi todos los conceptos analizados aunque estas diferencias como podemos observar a veces favorecen al grupo de control y a veces al experimental.

Para interpretar correctamente los resultados obtenidos en el análisis correspondiente al primer examen debemos tener en cuenta que desde el comienzo del curso del año 2010-11 hasta el primer examen, no se realizó ninguna práctica en el taller de matemáticas; sin embargo estos alumnos obtienen diferencias estadísticamente significativas a su favor en el conocimiento de las funciones elementales (CN9) y en el trabajo con números complejos (CN6). Este resultado, nos aporta información importante para nuestra investigación en el siguiente sentido: los alumnos del grupo de control a pesar de haber realizado una práctica dedicada exclusivamente al trabajo con los números complejos, no ofrecieron como resultado del estudio de la primera fase ninguna diferencia estadísticamente significativa en la adquisición de este concepto, lo que nos llevó a sospechar y con este resultado confirmar que no influyo para nada en el aprendizaje y por tanto no se incluyó en las prácticas realizadas en el taller. En relación con las funciones elementales tampoco teníamos diferencias significativas a pesar de haber sido trabajas con lo paquetes de cálculo simbólico (polinomios, exponenciales..) este motivo junto con el hecho de ser algo más conocido por los alumnos se decidió no incluirlo en el taller.

Sin embargo, hay diferencias estadísticamente significativas a favor de los alumnos del curso 2007-08 en los conceptos de interpretación del teorema de Rolle, concepto de infinitésimo y concepto de derivabilidad lo que en una primera lectura nos llevaría a pensar que hemos errado al eliminarlos del taller. De hecho, en la elección del taller se incluyeron dos prácticas una de ellas dedicada a la resolución aproximada de ecuaciones y la otra dedicada al cálculo de polinomios de interpolación que involucran a todos estos conceptos para intentar subsanarlo; y como veremos en los resultados del siguiente examen que exponemos a continuación podemos afirmar que se consigue salvo la interpretación del Teorema de Rolle. Este hecho se recogerá posteriormente en el apartado de las recomendaciones de mejora.

Segundo examen (Febrero)

En la siguiente tabla se recogen los resultados más relevantes de este experimento, y que se refieren a 7 conceptos que aparecen involucrados a la vez en los problemas propuestos de este segundo examen del año 2010-11 y del segundo examen realizado durante el año 2007-08.

Tabla 3. Diferencias de medias en los Conceptos que coinciden en el segundo examen

CONCEPTOS	B	CT	MB	MCT	DB	DCT	t	p	COHEN
BCF1-CN4	98	98	0,81	0,59	0,397	0,494	3,346	0,001	0,49
BCF3-CF1	98	98	0,32	0,85	0,467	0,362	-8,886	0	-1,27
BCF4-CN1	98	98	0,76	0,59	0,432	0,494	2,462	0,015	0,37
BCF6-CN2	98	98	0,59	0,44	0,494	0,499	2,158	0,032	0,3
BCF7-CN7	98	98	0,78	0,32	0,419	0,467	7,238	0	1,04
BCF9-CF4	98	98	0,65	0,57	0,478	0,497	1,171	0,243	0,16
BCF10-CF7	98	98	0,24	0,37	0,478	0,485	-1,867	0,063	-0,27

De estos conceptos hay 4 de ellos, concepto de continuidad en una variable, concepto de infinitésimo, aplicaciones de la derivada y concepto de función par, que tienen diferencias estadísticamente significativas a favor de los alumnos del año 2010-11 frente a 1 concepto interpretación del teorema de Rolle que tiene diferencia estadísticamente significativa a favor de los alumnos del año 2007-08.

Como hemos comentado durante el periodo correspondiente entre el primer y segundo examen del curso 2010-11 se realizaron dos prácticas en el taller de matemáticas, la primera dedicada a la resolución aproximada de ecuaciones y la segunda dedicada al cálculo de polinomios de interpolación. No son temas que aparezcan específicamente, de forma explícita, en el temario de la asignatura de Cálculo I, pero si implícitamente ya que involucran conceptos básicos de dicha asignatura. Además constituyen temas de gran interés para un futuro ingeniero, ya que por una parte ofrecen el conocimiento de las diversas técnicas que utiliza el Cálculo Numérico, junto con el manejo del ordenador, para modelar y resolver casos reales; y por otra parte consiguen que el alumno esté capacitado para transferir el conocimiento de la matemática a otras áreas y con ello favorecer las competencias profesionales y laborales. Por esta razón fue seleccionada para formar parte del taller de matemáticas.

Por tanto concluimos en la buena elección y diseño de las estas prácticas realizadas en el taller con la excepción, al igual que en los resultados del primer examen, de la interpretación del Teorema de Rolle lo que nos reafirma de nuevo en la necesidad de incluir en el taller una práctica más específica sobre la interpretación del Teorema de Rolle en la línea de la llevada a cabo en el año anterior por el grupo de control en D1.

Tercer examen (Abril) y cuarto examen (Junio)

Es importante, tener en cuenta que durante el segundo cuatrimestre (desde el segundo examen al cuarto examen) se imparten los contenidos correspondientes al cálculo en varias variables, materia que no se ha tratado explícitamente en las asignaturas que utilizan soporte informático (D1 y D2) del año anterior.

Durante este periodo realizaron dos prácticas en el taller de matemáticas, la primera dedicada al cálculo diferencial en varias variables y la segunda dedicada al cálculo integral. En esta ocasión los temas de las prácticas estaban relacionados de forma explícita con los contenidos de la asignatura de Cálculo, (siguiendo la metodología seguida en D1 del año anterior), y teniendo en cuenta que no se habían tratado explícitamente en el grupo de control, pensábamos que al realizar dichas prácticas, visualizando así los conceptos expuestos en las clases de cálculo, apreciaríamos una mejoría en la adquisición de los mismos. Para nuestra sorpresa, sólo aparecen diferencias estadísticamente significativas en la adquisición de los conceptos referentes a la diferenciabilidad, uno de ellos en el tercer examen como se puede ver en la Tabla 4 y dos en el cuarto examen como se puede observar en la Tabla 5.

Creemos que esto puede ser debido o bien a un diseño no del todo acertado de las prácticas, o a no haber fomentado una participación más activa del alumno, que le ayude a afianzar la comprensión de dichos conceptos.

En la siguiente tabla se recogen los resultados de este experimento referidos a 5 conceptos que aparecen involucrados a la vez en los problemas propuestos de este tercer examen del año 2010-11 y del tercer examen realizado durante el año 2007-08.

Tabla 4. Diferencias de medias en los Conceptos que coinciden en el tercer examen

CONCEPTOS	B	CT	MB	MCT	DB	DCT	t	p	COHEN
BCA1-CA2	98	98	0,39	0,53	0,49	0,502	-1,943	0,053	-0,2
BCA2-CA5	98	98	0,14	0,27	0,352	0,444	-2,141	0,034	-0,21
BCA4-CA5	98	98	0,71	0,27	0,454	0,444	7	0	0,66
BCA6-CA9	98	98	0,57	0,44	0,497	0,499	1,864	0,064	0,18
BCA7-CA8	98	98	0,43	0,48	0,497	0,502	-0,715	0,476	-0,07

De estos conceptos hay uno de ellos, teoremas de diferenciabilidad, que tiene diferencias estadísticamente significativas a favor de los alumnos del año 2010-11 y otro, interpretación de la diferenciabilidad, que tiene diferencia estadísticamente significativa a favor de los alumnos del año 2007-08.

En la siguiente tabla se recogen los resultados de este experimento referidos a 5 conceptos que aparecen involucrados a la vez en los problemas propuestos de este cuarto examen del año 2010-11 y del cuarto examen realizado durante el año 2007-08.

Tabla 5. Diferencias de medias en los Conceptos que coinciden en el cuarto examen

CONCEPTOS	B	CT	MB	MCT	DB	DCT	t	p	COHEN
BCJ1-CA2	98	98	0,64	0,52	0,482	0,502	1,742	0,083	0,17
BCJ2-CA4	98	98	0,58	0,58	0,496	0,496	0	1	0
BCJ3-CA5	98	98	0,41	0,27	0,494	0,444	2,13	0,034	0,2
BCJ6-CA9	98	98	0,58	0,44	0,496	0,499	2,011	0,046	0,2
BCJ9-CJ2	98	98	0,39	0,69	0,49	0,463	-4,495	0	-0,43

De estos conceptos hay 2 de ellos, concepto de derivación de una función compuesta y concepto de diferenciabilidad, que tiene diferencias estadísticamente significativas a favor de los alumnos del año 2010-11 y un concepto, interpretación del teorema de Green, que tiene diferencia estadísticamente significativa a favor de los alumnos del año 2007-08.

El hecho de que aparezcan ventajas a favor del grupo de control en dos de los conceptos de estos dos exámenes a pesar de no haberse trabajado en las asignaturas que utilizaban soporte informático creemos que se debe a que estos dos conceptos (interpretación de la diferenciabilidad y del teorema de Green) están basados a su vez en conceptos del cálculo en una variable que si se han trabajado con más intensidad en el grupo de control con D1 y D2.

4. Recomendaciones

Como consecuencia de los resultados obtenidos en este estudio creemos que sería aconsejable:

1. Añadir una práctica de la interpretación del Teorema de Rolle (tal y como se hizo en el año anterior por el grupo de control en la asignatura D1), junto con las prácticas realizadas en el taller y mencionadas en el estudio, a saber: resolución aproximada de ecuaciones, cálculo de polinomios de interpolación, cálculo diferencial en varias variables y cálculo integral.

2. Realizar prácticas que contengan problemas que se tengan que resolver con los programas de cálculo simbólico, que involucren varios conceptos a la vez de dichas asignaturas, con un enunciado más cercano al mundo real y a su ámbito profesional(siguiendo la metodología de D2), especialmente para reforzar los conceptos tratados en el cálculo en varias variables . De esta forma a la vez que se motiva al alumno se le ayuda a adquirir las competencias que debe alcanzar un ingeniero.

3. Revisar la metodología seguida en las prácticas para fomentar la participación activa del alumno, incluyendo una prueba individual sobre las mismas, especialmente en el cálculo de varias variables.

Referencias

[1] ACELAJADO, M. J. *Use of graphing calculators in college algebra: Cognitive and non-cognitive gains of mathematics students*. Recuperado de http://www.math.ecnu.edu.cn/earcome3, 2003.

[2] AREA, M. *Tecnología de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las lineas de investigación*. Relieve. Revista electrónica de investigación y evaluación educativa, 11 (1), 3-25, 2005.

[3] BLOK, H., OOSTDAM, R., OTTER, M. y OVERMAAT, M. *Computer-assisted instruction in support of beginning reading instruction: A review*. Review of Educational Research, 72(1), 101-130, 2002.

[4] CABERO, J. y DUARTE, A. *Educación de medios y materiales de enseñanza en soporte multimedia*. Revista de medios y Educación (13), 23-45, 1999.

[5] CASTELLANO, A., JIMÉNEZ, A., y UROSA,B. *Errores conceptuales en el aprendizaje de las matemáticas con o sin derive*. Revista de medios y educación, pixelbit, preprint, 2011.

[6] DUART MONTOLIU, J. y REPARAZ ABAITUA, C. *Las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) y los nuevos contextos de aprendizaje*. Estudios sobre educación (20), 2011.

[7] EDUCATIVA, C. N. *de la Task Foce Logiciels Educatifs et Multimedia*. 1996

[8] GÓMEZ GARCÍA, M. *Estudio teórico, desarrollo, implementación y evolución de un entorno de enseñanza colaborativa con soporte informático (CSCL) para matemáticas*. (Tesis doctoral). Recuperada de http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t26874.pdf, 2003

[9] JARAMILLO, P., CASTAÑEDA, P. y PIMIENTA, M. *Qué hacer con la tecnología en el aula: inventario de usos de las TIC para aprender y enseñar*. Educación y Educadores, 12(2), 159-179, 2009.

[10] KIRKPATRICK, H. y CUBAN, L. *Computers Make Kids Smarter—Right?*. Technos Quarterly Vol. 7 No. 2. Consultado el 18 de septiembre de 2009 en http://www.technos.net/tq_07/2cuban.htm, 1998.

[11] KULIK, J. *Meta-analytic studies of findings on computer-based instruction*. In Baker, E. L. and O'Neil, H. F. Jr. (Eds.), Technology assessment in education and training. (pp. 9-33) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1994.

[12] MONGE, S. *La escuela vasca ante el cambio tecnológico. Tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza.*(Tesis doctoral). Recuperada de http://www.sergiomonge.com/doc/tesos-doctoral-sergio-monge.pdf, 2005.

[13] MURILLO RAMÓN, J. *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO*. (Tesis doctoral). Recuperada de http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0710101-030847/jmr, 2001.

[14] ORTEGA PULIDO, P. *Una estrategia didáctica para la enseñanza del Álgebra Lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico derive*. Complutense de Educación , 13 (2), 645-678, 2002.

[15] PARR, J. *A review of the literature on computer-assisted learning, particularly integrated learning systems, and outcomes with respect to literacy and numeracy*. Wellington, New Zealand: Ministry of Education. Recuperado de www.minedu.govt.nz/web/document/document_page.cfm?id=5499, 2000.

[16] PIZARRO, R. A. *Las Tics en la enseñanza de las matemáticas. Aplicación al caso de Métodos numéricos*. (Tesis doctoral). Recuperada de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/4152/Documento_completo.pdf?sequence=1, 2009.

[17] PÓLYA, G. *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press, 1945.

[18] REEVES, T.C. *The impact of media and technology in schools: A research report prepared for The Bertelsmann Foundation*. Recuperado de http://www.athensacademy.org/instruct/media_tech/reeves0.html, 1998.

[19] RODRÍGUEZ, G. y HOYOS, V. *Funcionalidad de juegos de estrategia virtuales y del software Cabri-Géomètre II en el aprendizaje de la simetría en secundaria*. PNA, 4(4), 161-172, 2010.

[20] UNESCO. *Informe mundial sobre educación: los docentes y la enseñanza en un mundo en mutación*. Santillana. Madrid, 1998.

Sobre las autoras:

Nombre: Alicia Castellano García
Correo electrónico: acastellano@upcomillas.es
Institución: Universidad Pontificia Comillas de Madrid, España.

Nombre: Ángela Jiménez Casas
Correo electrónico: ajimenez@upcomillas.es
Institución: Universidad Pontificia Comillas de Madrid, España.

Nombre: Belén Urosa Sanz
Correo electrónico: burosa@chs.upcomillas.es
Institución: Universidad Pontificia Comillas de Madrid, España.

Experiencias Docentes

¿Se Puede Mejorar la Enseñanza de las Matemáticas en Cualquiera de sus Niveles?

Manuel Ceballos, Juan Núñez y María Luisa Rodríguez

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 045–054, ISSN 2174-0410
Recepción: 6 Jun'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Los autores piensan que es perfectamente factible mejorar la enseñanza de las Matemáticas en cualquiera de sus niveles educativos. A tal fin, reflexionan en esta aportación sobre la situación actual y plantean algunas propuestas de mejora, que podrían contribuir a favorecer tanto la calidad de la enseñanza de esta disciplina como la mayor y más completa formación académica de los alumnos.

Palabras Clave: Enseñanza de las Matemáticas, Propuestas de mejora, Niveles educativos.

Abstract

Improving Mathematics Teaching at any educational level is doable, according to the authors of the current text. Because of that, they approach on the current situation and they show several proposals in order to improve the quality of Mathematics Teaching as well as the whole academic profile of the students.

Keywords: Mathematics Teaching, proposals on improving, educational levels.

1. Introducción

Como ya es perfectamente conocido por los docentes de cualquier nivel educativo en nuestro país, en el Sistema Educativo Español actual (véase (web5)) la Educación Primaria va dirigida a los alumnos de entre 6 y 12 años. La siguiente etapa es la de Educación Secundaria Obligatoria, que llega hasta los 16 años. Después de esta etapa (aunque ya están previstos algunos cambios que entrarán en funcionamiento en el curso académico 2012-13), el alumno puede elegir entre una Formación Profesional o bien un Bachillerato, ambos con una duración de dos años, concluyendo así sus estudios previos a la Universidad a los 18 años.

El objetivo principal de esta comunicación, para cuya elaboración nos han movido varias razones que a continuación se indicarán, es el de mostrar una serie de reflexiones personales de los autores sobre la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles educativos, deducidas a partir de la propia experiencia de dos de ellos como docentes y de las investigaciones realizadas al respecto por todos ellos.

Uno de ellos es ya lo que se puede llamar "un veterano" de la enseñanza, a raíz de sus más de tres décadas y media de dedicación a la docencia en prácticamente todos los niveles educativos, pues ha sido profesor de Instituto desde mediados de los setenta hasta casi finales de los ochenta del pasado siglo, tiempo en el que ingresó en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. En esta última, además de impartir asignaturas propias de la licenciatura de 3º y 5º cursos como profesor del Departamento de Geometría y Topología, viene impartiendo y coordinando desde hace ya muchos años una asignatura (de Libre Configuración) denominada "Metodología del álgebra y la Geometría en la Enseñanza Secundaria" y asimismo es también docente en la asignatura "Aprendizaje y Enseñanza de las materias de Matemáticas (bloque I)" del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad de Sevilla desde el curso 2009-10, por lo que este autor continúa muy involucrado en el tema de la enseñanza de las Matemáticas en niveles universitario y previos.

Como contrapartida, otro de los autores de esta comunicación es joven, reciente Doctor en Matemáticas, precisamente bajo la dirección del primero de los autores antes citado. Su condición de becario del departamento universitario le ha permitido ya dar clases en dos Universidades diferentes, Pablo de Olavide y Sevilla, a nivel lógicamente universitario.

Finalmente, la autora de esta comunicación está finalizando sus estudios de la licenciatura de Matemáticas y carece por el momento de experiencia docente, salvo las ya consabidas clases particulares habituales. No obstante, su preocupación por la docencia la ha llevado a dedicarse especialmente a la lectura de abundante literatura referida a estas cuestiones, así como también a colaborar junto al primer autor citado en la redacción de numerosos trabajos divulgativos relacionados con la didáctica y la educación en la Enseñanza Secundaria (véase (Núñez y Rodríguez, 2012), por ejemplo).

Otra de las razones que nos han movido a escribir esta comunicación se explica por ser el primero de los autores del que se habla Vocal de la Junta Directiva de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (S.A.E.M.) Thales, desde hace ya más de veinticinco años de los treinta y uno de existencia de la misma. Ello le ha permitido no solo no alejarse demasiado de las vicisitudes, intentos de mejora o problemas surgidos en los niveles de Secundaria y Bachillerato en los últimos tiempos, con los que ha estado permanentemente en contacto, sino además implicarse grandemente en todas las actividades organizadas por esta Sociedad destinadas a los alumnos de esos niveles. En (web6) puede verse una referencia a los fines de esta sociedad y otra a la conmemoración de sus 25 años en (Núñez, 2010).

Pasamos entonces a comentar nuestras reflexiones sobre la enseñanza actual en los distintos niveles educativos, haciendo especial hincapié en aquellos aspectos que son susceptibles de mejora, indicando posteriormente en otra sección las propuestas que estimamos convenientes para solucionarlos.

2. Nuestras reflexiones

A continuación, procedemos a comentar estas reflexiones a las que anteriormente nos hemos referido. Nos gustaría hablar, en primer lugar, de un problema del que parece ser pocas personas son conscientes y que, sin embargo, a nuestro entender es preocupante: ¿por qué los alumnos suelen sacar, por regla general, muy buenas notas en la Educación Primaria y sin embargo, estas calificaciones se rebajan muy considerablemente en la Enseñanza Secundaria y en posteriores? ¿Significa esto que lo que se enseña en Primaria (recuérdese que en esta comunicación nos estamos centrando única y exclusivamente en la disciplina de Matemáticas) es de una dificultad mucho menor que lo que se enseña en Secundaria? Nosotros no lo creemos así. Es cierto que en Matemáticas en los primeros años de Primaria, el maestro se contenta con que los alumnos conozcan los números, sepan escribirlos bien y realicen sus primeras operaciones, pero esto que puede parecer tan básico, no lo es si consideramos la fase tan temprana en la que se encuentra el desarrollo mental de los alumnos.

Por otra parte, el hecho de ejercitar el cálculo mental parece ser que se ha desterrado de los estudios de Primaria, sobre todo en sus últimos cursos. Treinta años atrás, realizar simples operaciones matemáticas "de cabeza" era cotidiano en esas clases, así como la prácticas diarias de algunos algoritmos (en aquel tiempo, evidentemente, no se utilizaba este vocablo) simples, como la conocida (¿seguro, por las nuevas generaciones?) "prueba del nueve", tanto para la multiplicación como para la división, el de la extracción de la raíz cuadrada de un número, el de la raíz cúbica (bastante menos conocido que el anterior), las estimaciones y aproximaciones, etc.

Algunos pueden pensar que con el uso de una calculadora la práctica de estos algoritmos han dejado de tener sentido. Nosotros no opinamos así. Es cierto que la utilización de todo tipo de recursos no es solo conveniente, sino incluso necesaria, diríamos nosotros, en la mayor parte de los actos de la vida diaria del ciudadano actual, pero ello no implica, a nuestro entender, que este uso sea incompatible con el hecho de aprender y saber manejar lo más posible los algoritmos antes citados, dado que, aparte la razón fundamental de que contribuyen a desarrollar más rápidamente la memoria y la inteligencia del individuo, desarrollan también en él la capacidad de ser autosuficiente para las operaciones menores y no depender de lo que, quiérase o no, no se trata más que de una herramienta, por muy sofisticada que ésta sea.

Y no nos vale, al menos a nosotros, el que se diga que para qué va a necesitar el alumno del cálculo mental, por ejemplo, si la calculadora lo hace de forma mucho más rápida y desde luego segura (por cierto, esto último siempre que ésta se sepa utilizar correctamente, lo cual no siempre sucede, como los profesores están tan acostumbrados a constatar). Por esa misma razón, podríamos preguntarnos para qué necesita saber una persona quién fue el autor de "El Quijote", pongamos por caso, si ya dispone de enciclopedias que se lo facilitan. Extrapolando este razonamiento al máximo, el ciudadano no necesitaría adquirir ningún tipo de conocimiento, puesto que éste ya lo puede extraer de los libros cuando lo necesite.

Esta reflexión puede extrapolarse también al paso de los alumnos de Secundaria a Bachillerato y al de los alumnos de éste al nivel universitario. Sería deseable una mejor (en muchos casos, ésta es incluso inexistente) coordinación entre las exigencias de cumplimiento de objetivos y de competencias que se les pide a los alumnos del nivel inferior con las que van a exigirse en el superior, dado que en la mayoría de los casos no existe, a nuestro entender, una adecuada correspondencia entre ambos tipos de requisitos desde el punto de vista legislativo.

Otra reflexión que nos gustaría hacer es el "abuso" a nuestro entender del ordenador en las clases de estas primeras etapas de la niñez. Puede decirse sin temor a equivocarse que los alumnos de los últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria son unos verdaderos expertos en el manejo de estos aparatos, pero esto, que es una ventaja, indudablemente, se contrarresta en muchos casos no sólo con el uso indebido del mismo, como por ejemplo visitas a páginas webs no deseadas (aspecto que no vamos a tratar en esta comunicación, pero de especial gravedad por lo que supone en la formación de los alumnos), sino con las costumbres no adecuadas que la práctica diaria del ordenador implica con el objeto de ganarle tiempo al tiempo, como pueden ser la forma de redactar cada vez más incorrecta que se observa en los alumnos de estos niveles, el total desconocimiento de la Gramática, errores ortográficos y vocabulario inapropiado, como incorrecciones más significativas. A modo de ejemplo, el mensaje recibido por uno de los autores de una de sus alumnas universitarias, en el que puede notarse que ésta "economía de letras" la lleva a escribir con numerosos errores gramaticales:

> *"Hola! Perdone, pero creo q esta equivocado,. yo no tenia el viernes, yo tube el miercoles pasado de tarde, este miercoles tambien de tarde y el viernes este día 2 mañana y tarde, asi que revisen bien quien a faltado o donde a estado el fallo, pero que yo supiera no teniá, de haberlo sabido hubiese ido."*

Nosotros pensamos de que el problema de redactar de esta forma, que se hace a lo mejor sin darle la mayor importancia o incluso sin pensarlo, es que se va implantando cada vez más en la persona, de manera que luego es muy difícil liberarse de ella a la hora de tener que redactar un escrito más serio, como puede ser una solicitud de empleo o la redacción de C.V., con los trágicos resultados para el interesado que esto último suele producir. El hecho de que con las nuevas tecnologías los alumnos de Primaria y Secundaria se están acostumbrando a escribir cada vez más de esta forma, y a esos niveles de la enseñanza aún se tienen muchas faltas de ortografía, por lo que si se acostumbran a escribir mal es más difícil que después, en el futuro, lo hagan correctamente.

En cuanto a las etapas de Secundaria y Bachillerato, creemos que la enseñanza de las Matemáticas atraviesa un período de crisis, ya que la mayoría de los estudiantes de estos niveles terminan con muy escasos conocimientos y lo que es peor, convencidos de que las Matemáticas están desligadas de la realidad. Es muy común que estos estudiantes duden sobre la utilidad o aplicabilidad de los conceptos que aprenden durante esta etapa de la enseñanza. De ahí las preguntas "¿para qué sirven las Matemáticas?" o similares. Por cierto que esta crisis tiene repercusiones trascendentales posteriores en la enseñanza de la ciencia y en el desarrollo del país, aunque esto no sea motivo ahora de nuestro tratamiento.

Otro aspecto grave que detectamos en ambos niveles, si bien bastante más acusado en el de Secundaria, es la poca atención que se le dedica en el currículo a la Geometría. Debido a la casi total ausencia de conocimientos específicos de esta materia en los textos, los alumnos salen de estos niveles con un casi total desconocimiento de esta parte tan importante de las Matemáticas. Como anécdotas que reflejan este hecho, comentar que en la asignatura de libre configuración anteriormente comentada y con ocasión de estar enseñándoles a los alumnos (universitarios y la mayoría a punto de terminar su licenciatura, no se olvide) a usar programas de Geometría Dinámica, como Cabrì o Geogebra entre otros, éstos desconocían casi en su totalidad los conceptos de *"circuncentro, ortocentro, baricentro e incentro"* de un triángulo, por no hablar del de *"ángulo inscrito en una circunferencia"* y su valor o el de la *recta de Euler de un triángulo*, y no porque no los recordaran sino porque ni siquiera les habían sido explicados, siendo éstos unos conceptos tan elementales que no hace mucho sí se enseñaban en Bachillerato, tal como hacía uno de los autores de esta comunicación utilizando para ello la original regla nemotécnica: *Cir-Or-Bar-In–Met-Al-Me-Bis* (por cierto, cantada) que relaciona estos puntos notables del triángulo con los cuatro tipos de rectas también notables del mismo en los que éstas se cortan.

Otros conceptos geométricos que los alumnos de la anteriormente citada asignatura de Libre Configuración desconocían, por iguales razones que antes, por no haberlas dado en Secundaria y Bachillerato, son las *"cónicas"*. Los alumnos de esos niveles desconocen el concepto de lugar geométrico y por ello no son capaces de definir estas figuras geométricas como tales, si bien en algunos textos sí es cierto que pueden encontrarse, aunque en la mayoría de los casos, este tema no se imparte por "falta de tiempo".

Y lo mismo ocurre, desgraciadamente con otro tipo de conceptos matemáticos que los profesores universitarios entienden que los alumnos dominan cuando llegan a sus clases y no tardan en darse cuenta de que en realidad los ignoran. ¿Cuántas veces se han quejado los profesores universitarios de que a sus colegas de Secundaria y Bachillerato no le haya dado tiempo de enseñar Combinatoria o Estadística, por poner dos ejemplos de aquellas partes de las Matemáticas que en esos niveles se quedan muchísimas veces en el limbo, por la ya manida (y posiblemente cierta) falta de tiempo?

Por todo ello, no es descabellado afirmar que a nivel universitario, los estudiantes llegan en general con un nivel muy bajo de Matemáticas, no solo en el propio grado de Matemáticas, sino en cualquier otro de tipo científico-técnico, lo cual no permite avanzar lo suficiente. Sería interesante que estos alumnos llegaran con una buena base en Matemáticas, ya que ello permitiría el poder dedicarle más tiempo a analizar las aplicaciones de las Matemáticas en la disciplina que esté matriculado el alumno.

Finalmente, hay otro asunto directamente relacionado con el tema que nos ocupa, como es el de la utilización en mayor o menor grado de las nuevas tecnologías en cualquier nivel de Enseñanza, tanto previa como universitaria. Por razones de extensión de esta comunicación nos ha parecido oportuno a los autores no tratarlo en la misma, si bien la opinión de algunos de ellos puede verse en (Núñez, 2008 y Falcón et al., 2008).

3. Propuestas de mejora

En esta sección vamos a enumerar algunas propuestas de mejora de la enseñanza de las Matemáticas en los distintos niveles educativos. No deben entenderse éstas como la panacea para el arreglo de todos los problemas anteriormente mencionados, pero sí para ir poco a poco avanzando en su resolución. Por otra parte, no deben entenderse tampoco como exclusivas de los niveles concretos en los que se citan, sino que deben entenderse como un proceso continuo, que el alumno debe ir conociendo y practicando a lo largo de toda su vida de estudiante e incluso, por qué no, una vez también finalizada ésta. No obstante, y para tratar de ser lo más concretos posible, pasaremos a mostrarlas diferenciadas en los niveles en los que primero creemos que deben implantarse.

Así, con referencia a la Educación Primaria, las mejoras que proponemos para la enseñanza de nuestra disciplina de las Matemáticas son las siguientes:

1. Enseñar adecuadamente el sistema de numeración y las operaciones elementales trabajando el cálculo básico y a posteriori hacer uso de las calculadoras y nuevas tecnologías para aplicar lo ya aprendido. El dominio del cálculo mental juega aquí un papel muy importante y prioritario. En primer lugar, el alumno debe ser capaz de realizar operaciones "de cabeza" y luego, ya después, podrá afianzar estas técnicas operativas con el uso adecuado de calculadoras y/o programas de ordenador. Esta propuesta está íntimamente ligada, como no podía ser de otra forma, a tratar también de potenciar la memoria de los alumnos, cualidad que en la etapa educativa actual poco menos que se considera "tabú", sin entender que la buena comprensión de los conceptos y un adecuado raciocinio no pueden ser adecuadamente alcanzados si se les priva a éstos de un buen uso del arte de memorizar.

2. Proporcionar a los alumnos herramientas y materiales que les motiven a aprender desarrollando una Matemática recreativa. El conocimiento por parte del alumno de estos niveles de juegos, tretas y artificios matemáticos es un elemento motivador de suma importancia para su buen desarrollo matemático, así como para despertar en ellos tanto su imaginación como la curiosidad por las Matemáticas.

3. Realizar tareas en grupos atendiendo a la diversidad y necesidades individuales. En esta fase de la educación se necesita potenciar no solo las habilidades individuales de los alumnos sino también su predisposición al trabajo con los demás, así como aprender a desempeñar diferentes roles en el seno de un equipo de trabajo, que será con casi toda seguridad lo que tendrán que ejercitar posteriormente la mayoría de estos alumnos cuando desarrollen posteriormente su profesión.

Las mejoras que proponemos a nivel de Secundaria y Bachillerato son:

1. Como primer punto y primordial, planificar adecuadamente las asignaturas por parte del profesorado a fin de dar todos los temas del currículo con la suficiente extensión y claridad, no dejando ninguno de ellos para el final. La elaboración de buenas Unidades Didácticas de esas asignaturas por parte del profesorado o del Departamento de Matemáticas del Centro podría ser un medio adecuado para conseguir este fin.

2. Mostrar la aplicabilidad de las Matemáticas a otras disciplinas, lo cual supondría darle al alumno una mayor motivación con respecto a sus futuros estudios universitarios. Este tema, tan relacionado con la interdisciplinaridad que tanto se busca actualmente en los Institutos, va calando cada vez más en el Profesorado de Secundaria y Bachillerato a la hora de impartir su docencia en las clases. Es por tanto ya muy frecuente que, en particular, los Profesores de Matemáticas de estos dos niveles hablen a sus alumnos sobre la importancia y las aplicaciones que los temas matemáticos que les enseñan tienen en otras asignaturas de su currículo, fundamentalmente científicas, como pueden ser la Biología, la Física o la Química.

3. Utilizar la Historia de las Matemáticas. A este respecto puede verse la aportación (Núñez y Rodríguez, 2012) de los propios autores, en los que éstos, en un intento por llevar adelante esta propuesta de mejora, proponen a los profesores de Matemáticas, principalmente de 5º y 6º de Primaria y 1º de Secundaria, la posibilidad de usar esta Historia de las Matemáticas como recurso metodológico en sus clases, aunque siempre entendida ésta no como una simple enumeración de datos deslavazados e independientes unos de otros, sino considerados como un núcleo central de la asignatura, a utilizar continuamente en los distintos capítulos de la misma. En esa aportación y como ejemplo, los autores muestran lo que podría seguirse en alguno de estos cursos aprovechando la historia de Pitágoras y el funcionamiento de la Escuela Pitagórica en general.

4. Programar actividades tipo gymkhanas, olimpiadas y concursos relacionados con tareas de la vida real para mostrar las aplicaciones y utilidades de las Matemáticas y despertar también de esa forma la motivación y el interés de los alumnos por las mismas. Por ejemplo, los concursos de Fotografía Matemática que ya se llevan a efecto en muchos centros hacen que los alumnos se esfuercen por descubrir la Matemática que nos rodea y que se interesen un poco más, si cabe, por ella. Y por descontado, otro tipo de concursos: Matemáticas y cocina, Matemáticas y poesía, etc., siempre son especialmente bienvenidos por los alumnos y afortunadamente, cada vez están teniendo más cabida en las semanas o eventos culturales de los centros de enseñanza.

5. Realizar una visita concertada en grupo, acompañados lógicamente por el profesorado, a facultades de disciplinas científico-técnicas, como Física, Ingenierías, Arquitectura y por descontado Matemáticas, para que profesores de las mismas les muestren a los alumnos tanto sus instalaciones como los estudios que en ellas se realizan, a fin de conocer siquiera por un día el ambiente universitario y las posibilidades que estos centros pueden ofrecer a los alumnos que en el futuro ingresen en ellos.

6. Disponer de grupos más reducidos en las aulas para poder atender a la diversidad y conseguir un adecuado avance individual de los alumnos en esta etapa.

Finalmente, también nos gustaría proponer las siguientes mejoras a nivel universitario:

1. Dado que las Matemáticas constituyen la base y fundamento de la totalidad de disciplinas científico-técnicas, sería deseable que los alumnos de nuevo ingreso en estos centros realizasen, nada más llegar a los mismos, un curso de iniciación a las Matemáticas universitarias, en el que se les recordasen los principales conceptos matemáticos que luego van a usar en sus futuras asignaturas, así como se paliasen también, en la medida de lo posible, las deficiencias a nivel de temario no impartido que éstos pudiesen haber sufrido en sus estudios de Bachillerato.

2. Diseñar algunas asignaturas del currículo con un contenido esencialmente práctico, en las que los alumnos puedan aprender unas Matemáticas acordes a la especialidad en la que estén matriculados. Estas asignaturas deberán tener un fuerte componente informático.

3. Fomentar la realización de prácticas en empresas para acercar al alumno a la vida laboral y mostrarle en vivo las características del mundo de la empresa, tan diferentes a lo que se le puede enseñar en el aula.

4. Incluir en la medida de lo posible asignaturas de Didáctica y Pedagogía en el currículo de cualquier carrera científico-técnica y realizar prácticas de docencia para la formación de futuros profesores en centros de Secundaria, Colegios y Universidades.

5. Diseñar nuevos cursos de máster para la especialización de los licenciados que deseen continuar formándose.

4. Algunas experiencias particulares

Deseamos comentar a continuación algunos ejemplos de experiencias que se realizan desde hace ya algún tiempo en nuestro ámbito de trabajo, es decir, a nivel local, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, que están poniendo en práctica estas propuestas educativas. En cualquier caso, estas iniciativas, algunas de ellas no solo realizadas en nuestra comunidad autónoma sino a nivel regional o incluso nacional, son fruto de la colaboración conjunta entre diferentes entidades y tienden a favorecer la consecución de todas o algunas de las propuestas de mejora anteriormente comentadas.

La primera de ellas es el Proyecto ESTALMAT (estimulación del talento matemático) para estudiantes de 12 y 13 años.

En Andalucía, el Proyecto ESTALMAT está patrocinado y organizado conjuntamente por la S.A.E.M. Thales y la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, contando con dos Sedes: la Occidental, con centro en Sevilla, que acoge a los alumnos de esa capital y a los de Cádiz, Córdoba y Huelva, y la Oriental, con centro en Granada, que acoge a los alumnos de Almería, Granada, Jaén y Málaga.

En su sede occidental, a la que los autores pertenecen, esta actividad cuenta con la colaboración y el apoyo de distintas entidades e instituciones, como la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, la Universidad Internacional de Andalucía, las Universidades andaluzas de Córdoba, Cádiz, Huelva, Sevilla y Pablo de Olavide (Sevilla), la Real Academia Sevillana de Ciencias y la Consejería de Cultura de la Junta de Andalucía.

El programa, destinado a la detección y el desarrollo del talento matemático precoz, pretende ayudar a los alumnos en el quehacer matemático, estimulando y orientando su sentido e intuición matemáticos e introduciéndolos en formalismos adecuados a sus edades. Al mismo tiempo, se procurará dar una visión humanista de las Matemáticas mediante charlas y lecturas de tipo histórico-cultural en las que, por supuesto, tendrán cabida, como complemento, lecturas y anécdotas de las llamadas Matemáticas Recreativas. La utilización de las nuevas tecnologías como fuente de información, actualización e incluso como medio de aprendizaje también será puesta en juego (para mayor información sobre el programa puede consultarse (web7).

La segunda es la actividad denominada QUIFIBIOMAT, realizada conjuntamente por las facultades de Química, Física, Biología y Matemáticas de la Universidad de Sevilla todos los años, durante la segunda y tercera semana del mes de noviembre. Durante ese tiempo, se programan visitas de cuarenta Institutos y Colegios de Secundaria y Bachillerato de Sevilla, capital y provincia (cuatro por día durante diez días, de lunes a viernes, por las mañanas), en las que se realiza un recorrido guiado por las mismas, en el que se le muestran a los alumnos (una media de 30 por Instituto) las instalaciones, bibliotecas, aulas de informática, salas de estudio de cada facultad, etc., así como los aspectos teórico-prácticos de las asignaturas que en cada una de las cuatro facultades se estudian. Esta actividad tiene generalmente muy buena acogida por los alumnos de último curso de Secundaria y Bachillerato ya que es en dichas etapas cuando éstos deben tomar la decisión de qué carrera estudiar (para mayor información sobre esta actividad puede consultarse (web8)).

Como tercera actividad, aunque en este caso deberíamos hablar más concretamente de conjunto de actividades, decir que la S.A.E.M. Thales organiza anualmente gymkhanas matemáticas, olimpiadas, concursos de fotografías, etc. Estas actividades recogen dos niveles: Primaria y Secundaria. Cada vez son más los centros que participan en estas actividades e incluso las utilizan como modelo para organizar sus propias actividades internas. S.A.E.M. Thales también organiza Jornadas, Congresos y Encuentros de Educación y Didáctica de las Matemáticas anualmente, dirigidos no solo a sus asociados sino a cualquier profesional de la enseñanza en cualquier nivel educativo.

Finalmente, comentar la plataforma DIVULGAMAT (centro virtual de divulgación matemática), patrocinada por la Real Sociedad Matemática Española (R.S.M.E.), que tiene por objetivo promover la divulgación matemática para acercar esta disciplina cada vez más a la sociedad actual y mostrar que las Matemáticas están presentes en todos los ámbitos de la vida real. Esta iniciativa se inició en 2004, alcanzando un gran auge desde entonces, cobrando un nuevo impulso en 2011 al celebrarse el centenario de dicha sociedad. El núcleo de esta actividad comprende varias secciones: retos matemáticos, Historia de las Matemáticas, exposiciones virtuales, Cultura y Matemáticas, concursos, recursos, etc. Para mayor información puede consultarse (web10).

5. Conclusiones

No deseamos terminar este artículo sin volver a explicitar, de una forma muy resumida, pero concreta, la opinión que nos merece a los autores el estado actual de la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo. Al respecto, deseamos manifestar que, en nuestra opinión:

1. Creemos que la enseñanza actual de las Matemáticas en todos los niveles educativos presenta serias deficiencias.
2. Creemos, no obstante, que es posible subsanar estas deficiencias, o al menos ir paliándolas, con las propuestas de mejora que se han indicado en esta aportación o con otras que también pueden encontrarse en la literatura (véase por ejemplo (web9)).
3. En nuestra opinión, si queremos pensar seriamente en el futuro de la ciencia, deberemos resolver los problemas actuales en la enseñanza de las Matemáticas para conseguir estudiantes más cualificados y, por tanto, mejor preparados para el mundo laboral.
4. Asimismo, todas las medidas que se tomen deberían ser también adoptadas en las otras disciplinas científicas.

Referencias

[1] FALCÓN, Óscar J., FALCÓN, Raúl M., NÚÑEZ, Juan y TENORIO, Ángel F. *El papel de las Webquest en las NTIC*. Congreso Internacional Virtual de Educación (2008). Actas en C.D. con ISBN 978-84-936132-4-2.

[2] NÚÑEZ, Juan. *Mi no muy brillante experiencia como profesor de E-Learning*. 2008. Rescatado de http://cimanet.uoc.edu/mel

[3] NÚÑEZ, Juan. *La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES Medalla de Andalucía*, La Gaceta de la RSME 13: 2 (2010), 221-228.

[4] NÚÑEZ, Juan y RODRÍGUEZ, María Luisa. *Una propuesta para utilizar la Historia de las Matemáticas en las clases de Primaria y Secundaria*. Epsilon 80 (2012). En imprenta.

[5] [web5] http://www.educacion.gob.es/educacion/sistema-educativo.html (Sistema Educativo Español).

[6] [web6] www.thales.cica.es (Página de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES").

[7] [web7] www.estalmat.org (Sobre ESTALMAT).

[8] [web8] http://www.matematicas.us.es (Página web de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla).

[9] [web9] http://www.monografias.com/trabajos30/estrategias-matematica/estrategias-matematica.shtml (Sobre propuestas de mejora de la enseñanza).

[10] [web10] http://www.divulgamat.net/ Plataforma de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española.

Sobre los autores:

Nombre: Manuel Ceballos González
Correo electrónico: mceballos@us.es
Institución: Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Nombre: Juan Núñez Valdés
Correo electrónico: jnvaldes@us.es
Institución: Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Nombre: María Luisa Rodríguez Arévalo
Correo electrónico: ml.rodriguezarevalo@gmail.com
Institución: Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Estrategias matemáticas en la ONU

Cristina Jordán Lluch

Esther Sanabria Codesal

María José Pérez Peñalver

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 055--066, ISSN 2174-0410

Recepción: 13 Sep'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

La teoría de emparejamientos proporciona los conceptos y herramientas necesarios para la resolución de problemas consistentes en establecer parejas entre elementos de dos conjuntos distintos o dentro de un mismo conjunto. Utilizamos esta teoría para ayudar al equipo asesor del embajador español, encargado de elegir los ponentes que participarán en una reunión preparatoria del examen ministerial anual del congreso económico y social de la ONU.

Palabras Clave: Modelización, Teoría de grafos, Emparejamientos

Abstract

The matching theory provides concepts and tools necessary to resolve problems consisting of establishing couples formed by elements of two different sets or belonging to the same set. We use this theory to help the advisory team of the Spanish Ambassador, which elects the speakers who will participate in a preparatory meeting for the annual ministerial review of social and economic conference of the UN.

Keywords: Modelling, Graph Theory, Matching

1. Introducción

Es una opinión muy extendida socialmente que las matemáticas son ajenas a lo cotidiano, como mucho se acepta su utilidad como herramienta "para hacer cuentas", por ejemplo en nuestras compras, para verificar descuentos y en general al organizar nuestros recibos habituales. Sin embargo, las siguientes situaciones nos resultan familiares:

- Nuestra asociación vecinal, cada mes de diciembre recoge juguetes entre los vecinos para regalar a los niños más desfavorecidos del barrio. Para satisfacer en lo posible a éstos, la presidenta pide a los padres que le indiquen las preferencias de sus hijos.

¿Podrá hacer la distribución de manera que todos queden contentos?

- Los profesores del colegio público de nuestro barrio han organizado un viaje de fin de curso y quieren distribuir a los niños para que compartan habitaciones dobles. El tutor de cada clase nos informa de las peculiaridades y relaciones entre los niños de su grupo. ¿Será posible distribuirlos de manera que se respeten sus afinidades?
- La universidad acaba de firmar un convenio en el que nuestro instituto de investigación desarrolla un proyecto cuyas tareas es necesario asignar a los técnicos de laboratorio disponibles. Conociendo las habilidades y competencias por las que cada uno de ellos destaca, ¿cómo distribuiremos el trabajo de forma que el resultado final del proyecto sea óptimo?

¿Cuál es el denominador común de estas preguntas? El objetivo que nos planteamos en todas ellas es establecer parejas a partir de una relación dada, bien sea entre elementos de un mismo conjunto o entre dos conjuntos distintos. La búsqueda de una solución para estos problemas nos conduce a estudiar, dentro de la teoría de grafos, el concepto de emparejamiento, sus propiedades y resultados (matching theory en los textos en inglés, [1]).

Recalcamos que el primer paso para la resolución de este tipo de problemas es transformarlos en uno de grafos, es decir, en modelizarlos matemáticamente. La modelización en general, y en particular para la teoría de grafos, constituye una herramienta muy interesante en sí misma, que juega un papel destacado en el aprendizaje matemático de nuestros alumnos ya que permite mostrar aplicaciones matemáticas directas en entornos que les son familiares. Esto despierta su interés y les motiva en el estudio, allanando así el camino para un avance más profundo en las asignaturas de matemáticas que, por desgracia, gran parte del alumnado ve como un escollo en sus estudios en lugar de como una herramienta útil para su vida.

En este trabajo presentamos un ejemplo cuya solución no se obtiene por aplicación directa de un algoritmo conocido. Este tipo de actividad es útil para mostrar a los alumnos, tanto de primeros cursos como superiores, que mediante herramientas sencillas, combinadas de forma adecuada, es factible resolver un problema no trivial.

Una vez modelizado el problema y clasificado como problema de emparejamientos, aplicaremos la teoría matemática adaptándola si fuera necesario. Algoritmos conocidos de la teoría de grafos nos permitirán obtener una solución al problema que habrá que reinterpretar en el contexto original. Otros trabajos donde se abordan problemas similares utilizando la teoría de grafos son [4], [5] y [6].

Para facilitar la comprensión, dedicamos la segunda sección al repaso de la teoría básica y la tercera a presentar el problema y obtener su solución.

2. Conceptos básicos de emparejamientos

Se llama grafo no dirigido, $G=(V, E)$, a toda estructura formada por un conjunto de puntos no vacío V, llamados vértices o nodos, y un conjunto E de pares no ordenados de puntos de V, llamados aristas (ver [2] y [3]). Las aristas se representan por $\{v_i, v_j\}$, utilizando los vértices v_i, v_j que la definen y que llamaremos extremos de la arista.

Se suele representar un grafo no dirigido mediante un diagrama de puntos y líneas en el que los primeros representan a los vértices y una línea entre los puntos v_i y v_j representa la arista $\{v_i, v_j\}$. Los vértices que definen cada arista se llaman extremos de la arista. En el caso de que los vértices coincidan, es decir v_i=v_j, la arista $\{v_i, v_j\}$ es un bucle. Dos aristas se dicen adyacentes si tienen un extremo en común.

Una forma habitual de representar un grafo es utilizando su matriz de adyacencia, es decir, una matriz n x n, A=(a_{ij}), donde n denota el número de vértices de G, con valores a_{ij} =1 si $\{v_i, v_j\}$ es una arista de G y a_{ij} =0 si no lo es.

Un grafo no dirigido G=(V, E) se dice que es bipartido si existe una bipartición (X, Y) del conjunto de vértices V, tal que cada una de las aristas tiene un extremo en X y el otro en Y. Un grafo bipartido se dice que es bipartido completo si su conjunto de aristas es el máximo posible.

En el caso de que cada arista tenga un valor asociado, al que llamamos peso de la arista, decimos que se trata de un grafo ponderado. Si sustituimos en la matriz de adyacencia cada valor a_{ij} =1 por el peso de la arista $\{v_i, v_j\}$ obtendremos la matriz de pesos.

Se llama emparejamiento del grafo no dirigido G a todo subconjunto de aristas M en el que no existen bucles y no hay dos aristas que sean adyacentes. Un emparejamiento en G se dice que es máximo si no existe ningún otro emparejamiento con mayor número de aristas.

Dado que la dificultad para obtener emparejamientos depende mucho de las características del grafo, el estudio de éstos se realiza estudiando por separado grafos bipartidos ponderados o no ponderados y el caso general. A continuación enumeramos los algoritmos más conocidos que obtienen emparejamientos máximos, según su tipo, atendiendo a los grupos anteriormente mencionados:

- No ponderado bipartido: Algoritmo húngaro
- No ponderado: Algoritmo de Edmonds (I)
- Ponderado bipartido: Algoritmo de Kuhn-Munkres
- Ponderado: Algoritmo de Edmonds (II)

Aunque evidentemente los algoritmos para el caso general son útiles para los grafos bipartidos, es preferible aplicar los específicos en cada caso. Lo mismo se puede decir al respecto de los grafos ponderados o no ponderados, puesto que un grafo no ponderado puede ser siempre considerado un caso particular del ponderado en el que las aristas tienen peso 1.

En el ejemplo que proponemos en este trabajo, el problema se modeliza como un grafo bipartido ponderado, en el que la resolución se obtiene aplicando el algoritmo de Kuhn-Munkres implementado en el programa Mathematica. Este algoritmo proporciona un emparejamiento máximo de máximo peso, en el caso de que G=((X,Y), E), con (X, Y) una bipartición de V, sea un grafo bipartido completo ponderado, donde cardinal(X) = cardinal(Y).

3. Ponentes para una reunión de la ONU

3.1 Planteamiento del problema

El Consejo Económico y Social de la ONU le ha encargado a su vicepresidente español que organice una reunión preparatoria del examen ministerial anual que se celebra en el Palais des Nations en Ginebra (http://www.un.org/es).

Este año los discursos se centran en la educación. Ocho países (Alemania, Bangladesh, Malawi, Pakistán, Qatar, Venezuela, Senegal y Turquía) se han ofrecido voluntarios para realizar exposiciones orales sobre el tema en la reunión preparatoria.

Las exposiciones se centrarán en los progresos realizados en el ámbito de la educación en cada país y están previstas 6 conferencias para la reunión. El embajador solicita a cada país dos posibles candidatos para impartirlas.

Atendiendo a la disponibilidad de los candidatos propuestos y a la implicación y compromiso que, en opinión del equipo asesor del embajador, los países han demostrado en la mejora de la educación, se asigna a cada candidato una puntuación a fin de elegir a los mejores ponentes y conseguir que la reunión sea un éxito.

En la siguiente tabla se reflejan estos datos. La letra C indica conferencia, el resto se corresponden con las iniciales de los diferentes países y los subíndices diferencian a los dos candidatos propuestos por cada país al embajador.

Tabla 1. Puntuación de los candidatos

	A_1	A_2	B_1	B_2	M_1	M_2	P_1	P_2	Q_1	Q_2	V_1	V_2	S_1	S_2	T_1	T_2
C	8	4	6	8	4	7	3	6	9	7	9	6	2	5	5	5

Atendiendo a estos criterios, ¿cuáles serán los ponentes elegidos para realizar las 6 conferencias?

3.2 Resolución del problema

El primer paso para obtener la solución al problema será modelizarlo en el ámbito de la teoría de grafos. Dado que queremos escoger seis candidatos para que impartan sendas conferencias a lo largo de la reunión, es decir, encontrar parejas formadas por el representante de un país y la exposición de los progresos alcanzados en educación en éste, parece que lo adecuado es utilizar la teoría de emparejamientos (matching theory) en el caso particular de grafos bipartidos ponderados.

Para modelizar el problema como un grafo consideraremos 22 vértices de los que 16 representarán a los distintos candidatos (denotamos este subconjunto como P), los seis restantes representan las sesiones dedicadas a conferencias (subconjunto que denotamos como C). Las aristas estarán definidas entre P y C, es decir, uno de sus extremos es un vértice de P y el otro uno de C. Así, la arista (P_i, C_j) significará que el candidato P_i puede impartir su conferencia en la sesión C_j. Por tanto, el grafo G que vamos a definir es un grafo bipartido donde (P, C) constituye una bipartición del conjunto V de vértices.

Por otra parte, asociamos a cada arista (P_i, C_j) la puntuación asignada por el equipo asesor del embajador al candidato i para impartir su conferencia en la sesión j. Observamos que, como no hemos hecho distinción entre las diferentes sesiones, el grafo es bipartido completo y todas las aristas (P_i, C_j), j=1, 2,…, 6, tienen asociado el mismo peso, dichos pesos vienen reflejados en la Tabla 1.

Nuestro objetivo es asignar cada ponente a una y sólo una de las 6 sesiones, es decir, encontrar un emparejamiento máximo. Como además queremos garantizar el éxito de la reunión, buscamos que la distribución "sesión-ponente" sea lo más adecuada posible, lo que se corresponde con que elijamos de entre todos los emparejamientos máximos uno de máximo peso.

Concretando tenemos el grafo G_{ONU}=(V, E), donde V=(P, C), denotando P={A_1, A_2, B_1, B_2, M_1, M_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2, V_1, V_2, S_1, S_2, T_1, T_2}, C={ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 } y E el conjunto de aristas. Podemos ver su representación en la Figura 1. La matriz de pesos asociada viene dada por A:

$$A = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&8&8&8&8&8\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&4&4&4&4&4\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&6&6\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&4&4&4&4&4\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&7&7&7&7&7\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&3&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&6&6\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&9&9&9&9&9\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&7&7&7&7&7&7\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&9&9&9&9&9\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&6&6&6&6&6&6\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&2&2&2&2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&5&5&5&5&5\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0\\
8&4&6&5&4&7&3&6&9&7&9&6&2&5&5&5&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Es conocido que en un grafo bipartido completo G=((X,Y), E), ponderado, donde cardinal(X) = cardinal(Y), la aplicación del algoritmo de Kuhn-Munkres proporciona un emparejamiento máximo de máximo peso en G (ver [2]).

El grafo G_{ONU} que modeliza nuestro problema es bipartido completo, pero el cardinal(P) ≠ cardinal(C), por lo que necesitamos un grafo auxiliar $\hat{G}_{ONU} = ((\hat{P}, \hat{C}), \hat{E})$ que contenga a G_{ONU} como subgrafo, cumpla las condiciones anteriores y tal que podamos obtener un emparejamiento máximo de máximo peso de G_{ONU} a partir del obtenido para $\hat{G}_{ONU}$.

En la Figura 2 podemos observar una representación del grafo $\hat{G}_{ONU}$ que definimos a continuación.

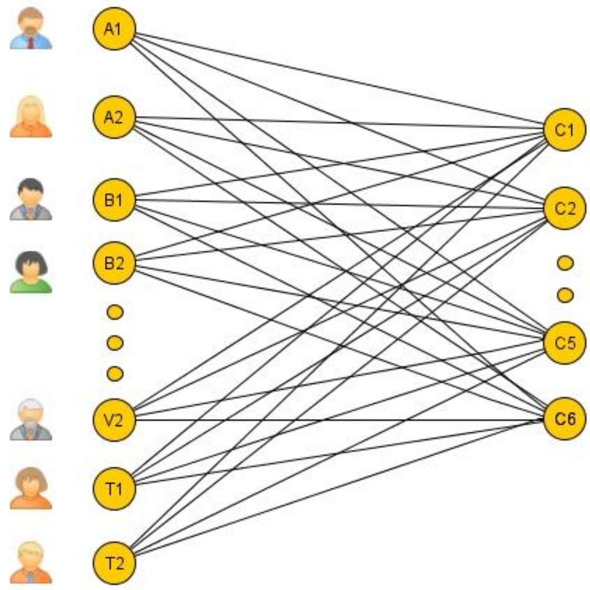


Figura 1. Grafo G_{ONU} que representa el problema inicial.

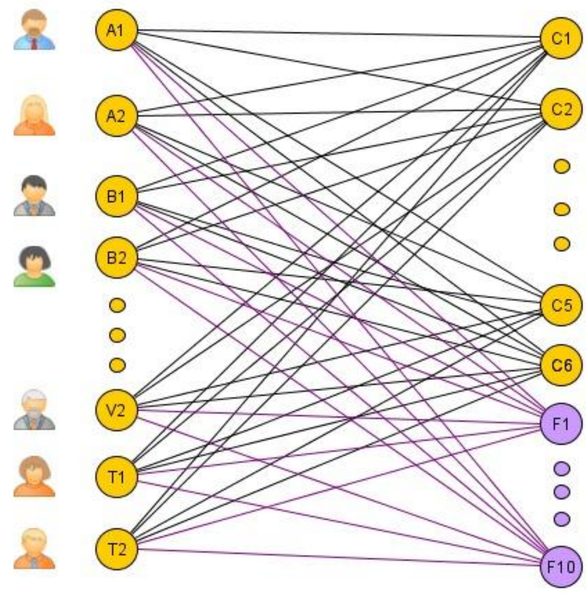


Figura 2. Grafo $\hat{G}_{ONU}$ donde se representan los vértices y aristas ficticios en morado.

En el nuevo grafo $\hat{G}_{ONU} = ((\hat{P}, \hat{C}), \hat{E})$, $\hat{P} = P$ y $\hat{C}$ es el conjunto resultante de añadir a C diez vértices ficticios F_i, i=1,…,10, es decir, $\hat{C} = C \cup \{F_1, \ldots, F_{10}\}$. El conjunto de aristas $\hat{E}$ se obtiene añadiendo a E el mínimo número de aristas necesarias para que el nuevo grafo sea bipartido completo. Ponderamos todas ellas con el mismo valor para que no influyan en la elección del emparejamiento buscado en el problema original. La matriz de pesos en este caso viene dada por la matriz B siguiente:

$$B = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
8 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 6 & 2 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 6 & 2 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 6 & 2 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 6 & 2 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 6 & 2 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 6 & 2 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Puesto que el grafo $\hat{G}_{ONU}$ cumplen todas las hipótesis necesarias, ejecutando el algoritmo de Khun-Munkres, implementado en el programa Mathematica, obtenemos un emparejamiento máximo de máximo peso en $\hat{G}_{ONU}$ que denotamos por M_1:

M_1 = {{1,17}, {2,24}, {3,19}, {4,26}, {5,25}, {6,22}, {7,23}, {8,27}, {9,21}, {10,20}, {11,18}, {12,28}, {13,29}, {14,30}, {15,31}, {16,32}}, donde los vértices del 1 al 16 se corresponden con los dieciséis ponentes, del 17 al 22 con las seis conferencias y los restantes con los vértices ficticios añadidos al generar el grafo $\hat{G}_{ONU}$. De entre todas las aristas del emparejamiento M_1, sólo seis pertenecen al grafo original G_{ONU}, que son:

$$\{\{1,17\}, \{3,19\}, \{6,22\}, \{9,21\}, \{10,20\}, \{11,18\}\},$$

y constituyen el emparejamiento buscado. En términos del problema planteado esto significa que en la reunión expondrán: Alemania, Bangladesh, Malawi, Qatar y Venezuela, habiendo asignado conferencia a los dos representantes de Qatar.

Consideramos que sería conveniente que cada país realizase una única exposición. Debemos, por tanto, replantearnos la modelización realizada a fin de obtener una solución que contemple esta restricción.

Para ello, retomamos el problema original, modelizado por el grafo G_{ONU}. Introducimos nuevos vértices descarte D_i, i=1, …,8, y dos aristas que enlacen cada uno de ellos con los dos representantes de cada país, es decir, D_1 estaría enlazado con A_1 y A_2, D_2 enlazado con B_1 y B_2 y así sucesivamente. De esta manera, al calcular el emparejamiento, uno de los dos representantes de cada país será descartado al estar asociado con el correspondiente vértice descarte. En este momento, nuestro nuevo grafo auxiliar tendrá 30 vértices, donde 16 de ellos representan a los ponentes y los 14 restantes corresponden a las conferencias y a los vértices descarte. Para calcular el emparejamiento máximo de máximo peso tendremos que aplicar de nuevo el algoritmo de Khun-Munkres, cuyas condiciones de aplicación exigen que:

- ambos conjuntos de la bipartición de los vértices tengan el mismo número de elementos
- el grafo sea bipartido completo

Por ello, consideraremos un nuevo grafo auxiliar $\overline{G}_{ONU} = ((\overline{P}, \overline{C}), \overline{E})$ que contiene a G_{ONU} como subgrafo, donde $\overline{P} = P$ y $\overline{C}$ es el conjunto resultante de añadir a C ocho vértices descarte D_i, i=1,…,8 y dos ficticios F_i, i=1, 2, es decir, $\overline{C} = C \cup \{D_1, \ldots, D_8\} \cup \{F_1, F_2\}$. El conjunto de aristas $\overline{E}$ se obtiene añadiendo a E los siguientes enlaces:

- aristas que unen los representantes de cada país con su vértice descarte D_i correspondiente, ponderadas todas ellas con el mismo valor para que no influyan en el resultado obtenido
- aristas necesarias para que el nuevo grafo sea bipartido completo. Estas son de dos tipos:
    - las que enlazan los vértices ficticios F_i con todos los posibles ponentes, ponderadas con el mismo valor
    - las que enlazan los vértices descarte con el resto de conferenciantes a los que no están asociadas previamente, ponderadas con un valor muy pequeño para que aplicando el algoritmo no sean escogidas como resultado del emparejamiento

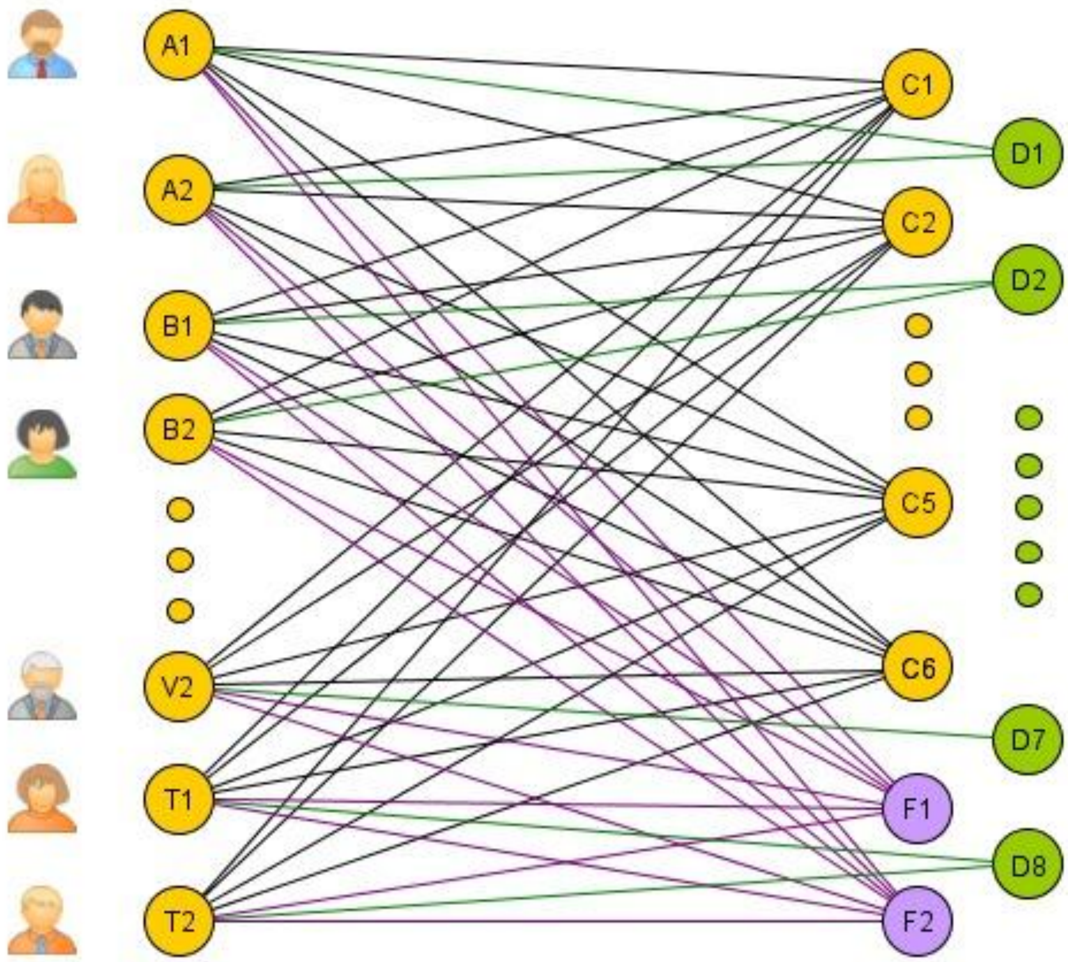


Figura 3. Grafo $\overline{G}_{ONU}$ donde se representan los vértices y aristas ficticias en morado y los vértices y aristas descarte en verde. Antes de formar el grafo bipartido completo el grado de los vértices descarte Di es 2

La matriz de pesos asociada al grafo $\overline{G}_{ONU}$ viene dada por:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & D \\ DT & 0 \end{pmatrix}$$

donde DT es la matriz transpuesta de la matriz D, dada por:

$$D=\begin{pmatrix}
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1\\
9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & 1 & 1\\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & -10 & 1 & 1\\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & 1 & 1\\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & -10 & 1 & 1\\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 & 1\\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Aplicando el algoritmo de Khun-Munkres al grafo $\overline{G}_{ONU}$, obtenemos un nuevo emparejamiento M_2, dado por:

M_2 = {{1,17}, {2,23}, {3,19}, {4,24}, {5,25}, {6,22}, {7,26}, {8,20}, {9,21}, {10,27}, {11,18}, {12,28}, {13,29}, {14,32}, {15,30}, {16,31}},

donde los vértices del 1 al 16 se corresponden con los dieciséis ponentes, del 17 al 22 con las seis conferencias, del 23 al 30 los vértices descarte D_i y los dos restantes con los vértices ficticios. De entre todas las aristas del emparejamiento M_2, sólo seis pertenecen al grafo original G_{ONU}:

{{1,17}, {3,19}, {6,22}, {8,20}, {9,21}, {11,18}}

y constituyen el emparejamiento buscado. En términos de la organización de la reunión preparatoria esto significa que expondrán: Alemania, Bangladesh, Malawi, Pakistán, Qatar y Venezuela, lo que se ajusta a escoger un conferenciante de cada país.

4. Conclusiones

En la sección anterior mostramos la pauta para dar respuesta a las situaciones planteadas en la introducción, de forma que acercamos las matemáticas a nuestra vida cotidiana.

En el caso presentado hemos impuesto que cada país impartiera una sola conferencia en la reunión. Se podrían añadir otras restricciones, como por ejemplo problemas de agenda de los ponentes a la hora de impartir la conferencia en determinadas sesiones, etc.

Desde el punto de vista docente, consideramos que es conveniente abordar el tema de emparejamientos planteando un problema como el anterior en el caso más simple. Según el nivel del curso podemos mostrar como resolver el problema cuando existen restricciones de algún tipo. El paso siguiente será la incorporación al problema de otras nuevas, que pueden ser sugeridas por alumnos, y su posterior resolución.

Estas metodologías nos permiten abordar de forma más comprensible, didáctica y profunda, conceptos complicados de la teoría de grafos, como los emparejamientos, al utilizar la modelización de problemas realistas que interesen al alumnado.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo financiero de la ETSInf de la Universitat Politècnica de València. El tercer autor cuenta con el soporte financiero de la Unión Europea y de la Universitat Politècnica de València mediante los proyectos: 518132-LLP-1-FI-ERASMUS-FEXI *IN-CODE-Innovation Competencias Development* y el proyecto PYME A13/11 2912 *Desarrollo de rúbricas y situaciones de evaluación para competencias transversales relacionadas con la innovación.*

Referencias

[1] CHARTRAND, Gary; OELLERMAN, Ortrud R. *Applied and algorithmic graph theory*, pp. 161-178, McGraw Hill, 1993.

[2] JORDÁN LLUCH, Cristina. *Materiales docentes de la asignatura Estructuras Matemáticas para la Informática II*, http://www.upv.es/ocwasi/2010/6024 (Clicar en Información>Materiales docentes)

[3] JORDÁN LLUCH, Cristina; TORREGROSA SÁNCHEZ, Juan Ramón. *Introducción a la teoría de grafos y sus algoritmos*, pp. 157-211, Editorial Reverté, SPUPV- 96.865, Valencia (España), 1996.

[4] JORDÁN LLUCH, Cristina; TORREGROSA SÁNCHEZ, Juan Ramón. *Herramientas de la teoría de grafos para la modelización*, pp. 275-287, Modelling in Science Education and Learning, 2011.

[5] JORDÁN LLUCH, Cristina; BURRIEL, Jordi; HERRAIZ, Raquel. *Un problema a resolver con los algoritmos de caminos más cortos,* pp. 263-273, Modelling in Science Education and Learning, 2011.

[6] JORDÁN LLUCH, Cristina; SANABRIA CODESAL, Esther. *La Asignatura OCW Estructuras Matemáticas para la Informática II y los créditos ECTS,* pp. 178-190, Actas del congreso XIX Congreso Universitario de Innovación Educativa en Enseñanzas Técnicas XIX CUIEET, Barcelona, 2011.

Sobre las autoras:

Nombre: Cristina Jordán Lluch
Correo Electrónico: cjordan@mat.upv.es
Institución: Universitat Politècnica de València, España.

Nombre: Esther Sanabria Codesal
Correo Electrónico: esanabri@mat.upv.es
Institución: Universitat Politècnica de València, España.

Nombre: María José Pérez Peñalver
Correo Electrónico: mjperez@mat.upv.es
Institución: Universitat Politècnica de València, España.

Historias de Matemáticas

Nazis y Matemáticas. Crónica de una Barbarie

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 067–104, ISSN 2174-0410
Recepción: 28 Abr'12; Aceptación: 6 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

En este artículo se pretende dar una visión de las matemáticas durante el periodo en el que el partido nazi gobernó en Alemania y tuvo pretensiones de gobernar casi toda Europa. Desde 1933, año en el que los nazis subieron al poder, se produjo en Alemania una huida, deportación, expulsión, ingreso masivo en campos de concentración y el asesinato o suicidio de profesores e investigadores en su mayoría de origen étnico judío que por supuesto no dejó a las matemáticas indiferentes.

Palabras Clave: Nazis, Matemáticas, deportación, campos de concentración, judíos, Segunda Guerra Mundial.

Abstract

This article aims to provide a description of mathematics during the period when the nazi party ruled Germany and aimed to rule the whole of Europe. From 1933, when the nazis came to power, lot of people were forced to flee, were deported or sent abroad, transported in massive numbers to concentration camps, and there were murders or suicides of teachers and researchers of jewish origin in their vast majority, events that had a profound effect on mathematics.

Keywords: Nazis, Mathematics, deportation, concentration camps, jews, World War Two.

1. Marco Histórico.

1.1. Origen y llegada al poder de los Nazis.

Al finalizar la Primera Guerra Mundial, una humillada Alemania tras la firma del armisticio y las condiciones que el Tratado de Versalles la obligaban a cumplir, se encontraba al borde de la ruina financiera. La desesperación social y la posterior recesión cambiarían el curso de la historia para siempre. En este oscuro panorama nació el *NSDAP*, siglas en alemán del Partido Nacionalsocialista Alemán de los Trabajadores, denominado comúnmente Partido Nazi, que poco a poco iría ganando adeptos en la Alemania de postguerra.

[1] http://www.reformation.org/kaiser-frederick3.html

El hombre encargado de protagonizar uno de los capítulos más trascendentales de la historia de la Europa de entre guerras fue Adolf Hitler, un simple soldado del ejército bávaro durante la Primera Guerra Mundial, nacido en Austria en 1889. La derrota alemana fue difícilmente digerida por éste al igual que por una gran parte de los antiguos ciudadanos del Imperio, que no tuvieron más remedio que aceptar las condiciones del armisticio impuestas por el Tratado de Versalles, por el cual Alemania perdía multitud de sus territorios claves de sus antiguas colonias, como las provincias de Alsacia y Lorena al oeste en favor de Francia, los Sudetes checos al sur o la franja del puerto de Danzig con el fin de darle salida al mar a la recientemente soberana República de Polonia, además de firmar una desmilitarización total de la zona al Oeste del Rhineland, y un desarme prácticamente total. El ejército alemán fue reducido a 100.000 hombres, sin tanques ni aviones ni armamento militar pesado. La armada naval fue reducida a seis barcos obsoletos de un máximo de 10.000 toneladas, en definitiva sólo lo necesario para defenderse, cuyo objetivo era impedir que Alemania pudiera ocasionar nuevamente conflictos bélicos en el futuro, obligándola de este modo al cumpliendo de los compromisos de paz adquiridos en Versalles.

Figura 1. Adolf Hitler junto a camaradas en la 1ª Guerra Mundial (enero de 1918).[1]

A su regreso de la guerra en 1918, Adolf Hitler encontró un clima de crispación en su ciudad adoptiva Múnich. En la mayoría de los casos, este clima era ocasionado por grupos revolucionarios formados por antiguos soldados, cuyo objetivo era ganar las calles a base de intimidación y violencia callejera. Este fenómeno fue un hecho común en toda Alemania. Como oficial de propaganda del ejército de la República de Weimar, en 1919 Hitler recibió órdenes de sus superiores para espiar a algunos de estos grupos revolucionarios como el Partido Obrero Alemán entre cuyas consignas estaban devolver al pueblo todo aquello que había perdido. Paradójicamente lejos de informar en su contra, Hitler decidió afiliarse a éste, decisión que argumentaría más tarde como la más importante en toda su vida. A partir de ahí Hitler ascendió rápidamente en el *NSDAP* llegando a alcanzar su liderazgo en 1921.

Figura 2. Adolf Hitler tras alcanzar el liderazgo del NSDAP (1921).[2]

Una vez Hitler aglutinó el poder absoluto del partido como presidente del mismo, fundamentalmente gracias al apoyo de diversas organizaciones patronales y antiguos oficiales desencantados con el rumbo de las políticas llevadas a cabo por el gobierno tras la firma del armisticio, los nazis comenzaron a convertirse en una organización paramilitar que actuaba sin control por las calles de Alemania. Conocidos como *camisas pardas*, irrumpían en mítines y utilizaban la violencia contra partidos de izquierdas y judíos, amparados, protegidos y animados por un líder que consideraba la *cultura de la furia* como un medio eficaz para la resolución de conflictos.

El 8 de septiembre de 1923, Hitler intentó sin éxito llevar a cabo un golpe de estado tomando al asalto el distrito de Putsch en Baviera con el fin de declarar un estado rebelde a la República de Weimar. Este conato fue repelido por el ejército alemán, y a consecuencia de los enfrentamientos acaecidos en dicha revuelta, el propio Hitler resultó herido y fue arrestado y encarcelado bajo pena de 5 años de los que sólo cumplió 9 meses. Durante el tiempo en el

[2] http://www.telegraph.co.uk/history/world-war-two/6082639/World-War-2-Hitlers-grim-six-year-record-in-technique-of-perfidy.html

que permaneció encarcelado, escribiría *Mein Kampf*[3], *Mi Lucha*, que publicó más tarde en 1926, resultando un éxito de ventas que se convertiría posteriormente en la "biblia" nazi.

Figura 3. Adolf Hitler durante el juicio por el Golpe en Putsch junto al resto de imputados.[4]

En el momento de la liberación de Hitler de la prisión de Landsberg, la República alemana de Weimar estaba presidida por el antiguo general y héroe de la Primera Guerra Mundial, Paul von Hindenburg. El país comenzaba a dejar entrever cierta recuperación económica. Los años siguientes el Partido Nazi fue ganando poco a poco en adeptos, mostrando si cabía un aspecto mucho más militarizado. A pesar de ello los nazis sólo consiguieron 12 escaños de los 491 del *Reichstag*, o parlamento alemán, en las elecciones de 1928. Pero la oportunidad de los nazis llegó de la mano del crack de 1929 en la bolsa de Wall Street, que sumió a la economía mundial en una profunda crisis, y empobreció en gran medida la economía alemana poniendo de manifiesto los graves problemas financieros. En medio de un estado de auténtica desesperación, los nazis comenzaron a realizar promesas de trabajo y mayor estabilidad social.

Cuando comenzó la crisis económica mundial de 1929, Alemania dejó de recibir el flujo de capital extranjero, disminuyó el volumen del comercio exterior del país, el ritmo de crecimiento de su industria se ralentizó, aumentó enormemente el desempleo y bajaron los precios de los productos agrícolas. A medida que se agravaba la depresión, la situación se mostraba cada vez más propicia para una rebelión. En 1931 el Partido Nazi fue capaz de aglutinar una masa de más de 100.000 miembros uniformados, muchos más de los que las autoridades políticas hubieran podido llegar a imaginar, y en 1932 sumaban más de 400.000 miembros uniformados, hecho éste que ocasionó cierta incomodidad al actual gobierno. En ese momento había más de seis millones de desempleados en el país. Fritz Thyssen, presidente de un grupo empresarial del sector de la industria pesada del acero, y otros capitalistas como Gustav Krupp entregaron grandes cantidades de dinero al *NSDAP*. En medio de este panorama, el Canciller Heinrich Brüning probó a emplear las mismas medidas que se habían implantado en otros países: aumentar los impuestos, reducir los salarios y crear una Comisión de Precios que se encargara de evitar la inflación descontrolada. En la primavera de 1932 había estado a punto de conseguirlo, pero poco después iba a ser destituido, en parte debido a que los políticos influyentes consideraban que había llegado el momento de llegar a un acuerdo con los nazis.

Cuando Brüning abandonó el cargo de canciller, su puesto lo ocupó von Papen (un hombre del *Zentrum* o *Partido de Centro Católico*) que carecía del deseo de Brüning de salvar la demo-

[3] En realidad Hitler dictó *Mein Kampf* a su secretario personal Rudolf Hess, recluido también junto a él tras el incidente de Putsch.

[4] http://es.wikipedia.org/wiki/Putsch_de_Múnich

cracia parlamentaria, y que lamentablemente llevó a cabo gran cantidad de concesiones con el objetivo de pactar con los nazis. La primera concesión que von Papen hizo a los nazis fue disolver el *Reichstag* el 4 de junio de 1932, antes de que se hubiera reunido con ellos siquiera. Esto suponía una nueva elección y un cierto estado de incertidumbre en la nación. Disuelto el *Reichstag*, Alemania tuvo unas elecciones en julio de 1932 en la que los Nazis pasaron de los 800.000 votos de 1928, a los más de seis millones de votos, lo que se traducía en 107 escaños, pasando a ser la segunda formación más votada en el parlamento superada únicamente por los socialdemócratas. Quince días después von Papen abolió la prohibición que establecía que las *SA* (las *Secciones de Asalto*) no se les permitía llevar uniforme, prohibición que se había dictado hacía muy poco tiempo. Su tercer paso consistió en tratar de hacerse con el control de Prusia, el estado mayor de Alemania, dominado por los socialistas, en donde las *SA* habían estado prohibidas desde 1930. Este intento lo llevó a cabo el 20 de julio, y obtuvo un éxito sorprendente. Envió allí a un teniente y diez hombres para arrebatar el poder a los socialdemócratas, y los prusianos se limitaron a aceptar.

Todas los esfuerzos y esperanzas de von Papen por controlar a los nazis fueron absolutamente en vano. Al levantar la prohibición a las *SA* lo único que consiguió fue aumentar la violencia, provocando con ello muchas muertes. En las elecciones al *Reichstag*, que se convocaron para el 31 de julio, el partido de Hitler consiguió casi 14 millones de votos (que aún no era la mayoría absoluta), convirtiéndose así en el partido más fuerte, con 230 escaños. El presidente Hindenburg no estaba aún dispuesto a aceptar a Hitler (un antiguo cabo) como canciller, y así mismo Hitler no estaba dispuesto a aceptar cualquier cargo inferior. Von Papen convocó unas nuevas elecciones en noviembre, en las que por primera vez los nazis perdieron votos. No obstante, para entonces von Papen había perdido la confianza de su propio partido, y el 2 de diciembre, von Schleicher ocupó el puesto de canciller. Tampoco él tuvo éxito. Tras varios meses de negociaciones, los nazis llegarían al gobierno mediante una coalición con los conservadores pues no habían conseguido la mayoría absoluta. De este modo el 30 de enero de 1933 Hitler se convertía en Canciller del Reich, bajo la presidencia de Hindenburg. Parecía que sólo así los conservadores mantendrían a raya a los nazis a través de la concesión realizada a Hitler, pero nada más lejos de la realidad.

Figura 4. Adolf Hitler y Paul von Hindenburg durante la proclamación de su cancillería en la Iglesia de Postdam.[5]

Los meses siguientes al nombramiento de Hitler como canciller, se caracterizaron por ser un periodo revolucionario que los nazis denominaron *revolución sin sangre* o *legal*, puesto que a

[5] Deutches Bundesarchive (Archivo Federal Alemán). http://www.bild.bundesarchiv.de/

diferencia de las revoluciones francesa o rusa, no se habían producido ejecuciones, aunque el terrorismo se ocupó en gran medida de que éstas no fueran necesarias. En este periodo Hitler consideró tres medidas "legales". El 1 de febrero de 1933, obtuvo el consentimiento del presidente Hindenburg para disolver el *Reichstag* una vez más. Durante las siete semanas siguientes gobernó por medio de decretos de emergencia (gracias a un artículo de la Constitución que le permitía hacerlo). Restringió la libertad de prensa y opinión; hizo volver al redil a la socialdemócrata Prusia; suspendió los derechos civiles básicos del individuo, garantizados por la Constitución de Weimar, y obligó a todos los demás estados de Alemania (Länder) a aceptar a los oficiales nazis.

En medio de este desconcertante clima, el 27 de febrero, un incendio al parecer orquestado por los propios nazis, destruyó el edificio del *Reichstag*, y Hitler y los nazis utilizaron esta maniobra para culpar a sus más directos enemigos, los comunistas. Entonces tras haber sembrado el miedo entre la población, convocó unas nuevas elecciones generales el 5 de marzo. Sin embargo, y ante la sorpresa de muchos, a pesar de todos los preparativos, los nazis sólo obtuvieron el 43 % de los votos, mientras que los partidos socialistas de izquierdas obtuvieron el 30 % de los mismos, a pesar de que muchos de sus candidatos hubieran sido perseguidos y encarcelados o recluidos en campos de trabajo.

Figura 5. El Reichstag durante su incendio.[6]

Como segunda medida, el 23 de marzo de 1933, Hitler aprobó la "Ley de Capacitaciones". Con dicha ley fulminaba definitivamente el poder del Reich, y se disponía a liquidar lo poco que aún quedaba del maltrecho estado democrático. Empezó por "limpiar" de funcionarios "no deseados" los servicios civiles y judiciales; después unió todos los sindicatos en uno sólo, el *Frente del Trabajo Alemán* de carácter ultranacionalista, y el 4 de julio disolvió todos los partidos nazis. Su tercera medida fue establecer una alianza entre el partido y el ejército, y poner a la policía bajo el mando de los *Sutzstafchfeln* (*SS*), o escuadrones de seguridad, de uniforme negro, como su guardia personal. Para cuando terminó 1933, Hitler había reemplazado las elecciones por plebiscitos en los cuales lo único que se podía decidir era "Sí" o "No" al nuevo régimen. En noviembre de ese mismo año, un 87,7 % votó "Sí", y aunque en algunos barrios de Berlín el porcentaje fue menor a dos tercios, de cara al exterior parecía que toda la nación estaba unida detrás de un líder. A la muerte de Hindenburg, en 1934, desaparecería cualquier atisbo que quedara de democracia, y Hitler adquiría ambos cargos (cancillería y presidencia) aunque no se nombró presidente, se autoproclamó jefe del nuevo estado alemán con el título de *Führer* (jefe o

[6] http://www.ushmm.org/wlc/en/media_ph.php?ModuleId=10007657&MediaId=6825

líder).

1.2. El Tercer Reich o Estado del "Terror".

Tras la autoproclamación de Adolf Hitler como *Führer*, el estado alemán se convirtió en un estado totalitario, de forma que todas las estructuras democráticas dieron paso a un estado completamente centralizado en torno a la figura de su líder y máximo representante. Tal y como argumentaba el mismo Hitler *"Ahora el Partido es el Estado y el Estado es el Partido"*. El *Reichstag* desempeñaba un papel meramente formal una vez que todos los gobiernos regionales quedaron transformados en instrumentos de la administración central. A través de un proceso de coordinación (*Gleichschaltung*), todas las organizaciones empresariales, sindicales y agrícolas, así como la educación y la cultura, quedaron supeditadas a la dirección del partido. Las doctrinas nacionalsocialistas se infiltraron incluso en la Iglesia protestante. Se promulgó una legislación especial por la cual los judíos y otras etnias "no deseadas" quedaron excluidos de la protección de la ley.

En los años siguientes, el estado alemán se caracterizó por sembrar el terror entre aquellos considerados como etnias "inferiores", lo que se tradujo en una pérdida de todos los derechos civiles de estas minorías. En septiembre de 1935 se promulgaron las Leyes de Núremberg que se habían redactado entre unos cuantos menús de una cervecería tan sólo unas horas antes de ser aprobadas. En ellas se declaraba que aquellos individuos de sangre no alemana no tenían ningún derecho civil. Se prohibía el matrimonio entre alemanes y judíos, y las relaciones sexuales entre alemanes y judíos, que se castigaban primero con trabajos forzados y, desde 1939, con la muerte. Cualquiera que tuviera un abuelo judío era considerado judío. Este hostigamiento que empezaba ahora contra millones de ciudadanos era el primer paso hacia la política de exterminio que vendría a continuación. Durante este periodo se produjo una persecución sistemática de las minorías étnicas, junto con homosexuales y personas físicas o mentalmente discapacitadas.

Figura 6. Adolf Hitler recientemente proclamado Führer.[7]

Un claro ejemplo del clima al que tuvieron que enfrentarse algunas de estas minorías, en este caso la judía, es *La Noche de los Cristales Rotos* (*Kristallnacht*). El objetivo inicial que se proponía el régimen nazi era la expulsión del territorio alemán de los judíos. En noviembre de 1938, después de que un joven judío asesinara a un diplomático alemán en París, los nazis tomaron este hecho como pretexto para que el 17 de noviembre todas las sinagogas de Alemania fueran incendiadas, se destrozaran los escaparates de los comercios judíos y se arrestara injustificadamente a miles de ellos. Este suceso, fue la señal para que la población judía de Alemania y Austria abandonara estos países con la mayor rapidez posible. Varios cientos de miles de judíos encontraron refugio en otras naciones, otros muchos, con menos posibilidades económicas, no tuvieron más remedio que permanecer allí para hacer frente a un futuro incierto.

Figura 7. Establecimiento judío saqueado durante la Kristallnacht.[8]

[7] http://www.britannica.com/EBchecked/topic/221518/Fuhrer
[8] http://www.jewishvirtuallibrary.org/jsource/Holocaust/kristallnacht.html

Este periodo también sirvió para que Alemania incumpliera sistemáticamente todos los acuerdos firmados en Versalles. Estos incumplimientos ya habían comenzado con el rearme de manera secreta en la década de los años 20, fundamentalmente en la zona desmilitarizada del Rhineland, y posteriormente le seguirían la anexión por parte de Alemania de territorios bajo su punto de vista "propios", considerándose con el derecho absoluto de aquellos territorios que a su juicio les habían sido arrebatados de forma injusta, como los Sudetes checos, la unión a un estado soberano como Austria, o finalmente la invasión de Polonia. Todo ello desembocó inevitablemente, tras haber agotado todas las vías diplomáticas posibles para frenar el afán expansionista nazi, en el estallido de la 2ª Guerra Mundial el 1 de septiembre de 1939, que duraría seis largos e interminables años hasta 1945.

2. Antedecentes de la Matemática Alemana

2.1. La Tradición Matemática Alemana

En el siglo XIX, junto con Francia, Alemania lideraba el desarrollo de la ciencia matemática. En el siglo XVIII habían aparecido los que posteriormente se convertirían en los principales centros del saber matemático, como Königsberg en la Prusia Oriental (denominada actualmente Kaliningrado, en Rusia), Viena, Berlín o Gotinga entre otros.

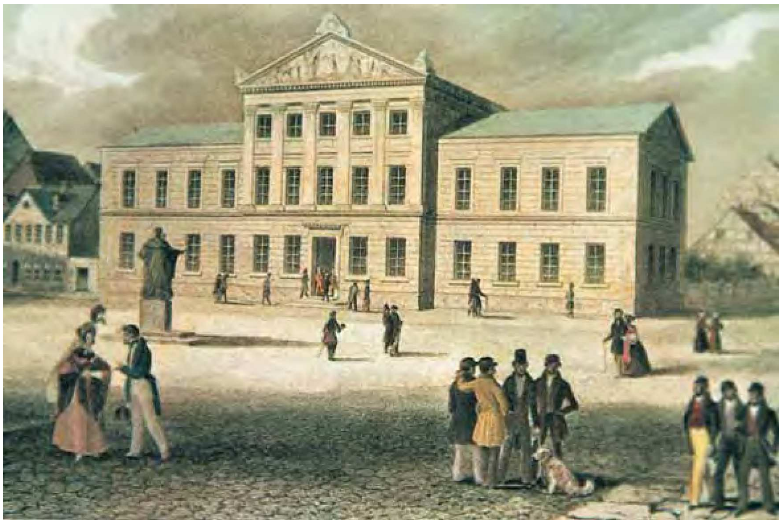


Figura 8. Universidad de Gotinga entre 1835 y 1837.[9]

De la mano del suizo Leonhard Euler (1707-1783), Berlín o Königsberg adquirieron un prestigio y reputación sobresaliente, que pusieron a sus Universidades en la cima de la comunidad matemática. Sin embargo, fue la Universidad Georg-August de Gotinga, fundada en 1737, el centro en el que sin duda la matemática adquirió una nueva dimensión. Carl Friedrich Gauss (1777-1885) fue el encargado de pavimentar el camino que debieran seguir Johann Dirichlet (1805-1895), Bernhard Riemann (1826-1866), Félix Klein (1849-1925), o finalmente David Hilbert (1862-1943) que a su vez sirvieron de reclamo para atraer las mentes más distinguidas y destacadas de la matemática germana. Todo ello dio pie al nacimiento de un profundo sentimiento de concepción de la "matemática alemana" que llegaría a su punto culminante con el intento por parte de Hilbert de su formalización y axiomatización.

[9] Grabado sobre lienzo de acero. OBERDIEK, A., *Göttinger Universitäts-Bauten. Die Baugeschichte der Georg-August-Univeristät*, Verlag Göttinger Tageblatt GMBH & CO. KG, p. 46, 1989.
http://www.gt-extra.de/ebook/pdf/unibauten_gt_buch.pdf

2.2. Constructivismo, Intuicionismo y Formalismo

El principal motor de la corriente formalista se fundamentó esencialmente debido a los deseos por axiomatizar de manera general la ciencia matemática. Este intento tomó forma a través del denominado *Programa de Hilbert* en 1920, de manera que se pretendía demostrar que todas las matemáticas podían ser reducidas a un conjunto de reglas o axiomas que demostraran fehacientemente que dicho sistema estaba libre de cualquier contradicción. Hubo muchos a los cuales esta idea les cautivó, pretendiendo creer ciegamente en ella, sin embargo la aparición en 1930 del *Teorema de incompletitud* del lógico austriaco Kurt Gödel echaría por tierra toda esperanza de conseguir esta meta. Gödel demostró la imposibilidad de probar la no-contradicción de la matemática clásica formalizada, utilizando los métodos "finitistas" (aquellos donde los conceptos utilizados pueden ser verificados mediante un número finito de pasos) de la teoría de la demostración.

Figura 9. David Hilbert.[10]

En oposición a la idea de Hilbert, se situaba el *constructivismo*, en particular el *intuicionismo*[12], representado fundamentalmente por su fundador, el matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) que entraba en confrontación directa no sólo con la corriente representada por Hilbert, sino incluso contra el *logicismo* de Russel y Whitehead, que constituían por aquel entonces las tres corrientes fundamentales de la filosofía matemática. El *intuicionismo* afirma que un objeto matemático existe si se puede enunciar la ley que permite su construcción. Sus nociones básicas son los conceptos de construcción, de prueba constructiva y de serie de libre elección.

Figura 10. L. E. J. Brouwer.[11]

Esta diferenciación de corrientes es importante a tener en cuenta, ya que supuso una confrontación directa entre un grupo representado por Hilbert, Landau o Noether y aquellos que apoyaron las ideas de Brouwer, como Bieberbach, Schmidt o von Mises. Esto dio pie también a la aparición del movimiento *Deutsche Mathematik*, cuyo máximo exponente fue Bieberbach, que se caracterizaba por tener en cuenta que las matemáticas no debían ser consideradas únicamente desde un punto intuitivo, sino también visual.

3. Formalismo vs. Intuicionismo

A principios de la década de 1930 existía por lo tanto una dicotomía bien diferenciada entre las dos corrientes. Por un lado el *formalismo* representado por Hilbert, con Gotinga como el centro neurálgico de operaciones, caracterizado por su liberalismo e internacionalidad, esto es apertura al resto del mundo, en el que las matemáticas abstractas cobran un papel fundamental, y por otro el *intuicionismo*, abanderado por Brouwer y Bieberbach, con Berlín como centro de

[10] http://es.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

[11] Sello holandés, en conmemoración a L. E. J. Brouwer y el centenario de la revolución de sus trabajos en topología y fundamentos de las matemáticas. En el sello se simboliza la falibilidad del *Principio de exclusión del término medio* por el que en su forma original, se refería también a una estructura de la realidad y consistía en la afirmación de que no hay término medio entre el "ser" y el "no-ser". http://www.postzegelblog.nl/2007/09/page/2/

[12] Se confunde a menudo el *constructivismo* con el *intuicionismo* cuando en realidad el último es únicamente un tipo de constructivismo. El *constructivismo* requiere para la demostración de la existencia de un objeto matemático, que él mismo pueda ser encontrado o "construido". El *intuicionismo* considera que las bases fundamentales de las matemáticas se encuentran en la denominada *intuición matemática*, haciendo por lo tanto de ella una actividad intrínsecamente subjetiva. El *constructivismo* por el contrario no tiene porqué adoptar dicha postura y es completamente compatible con la concepción objetiva de las matemáticas.

operaciones, caracterizado por su hermetismo nacionalista, en el que las matemáticas aplicadas cobran un papel predominante.

Además de Bieberbach que abanderó el liderazgo de las matemáticas germanas durante la época nazi, hubo otros matemáticos que se unieron incluso al NSDAP, o partido nazi, como Theodor Vahlen (1869-1945), Oswald Teichmüller (1913-1943), o Gustav Doetsch (1892-1977). Haciendo una retrospectiva a sus actos podemos entender en cierto modo como la tradición matemática alemana fue engullida por el mecanismo nazi, que hizo de ésta una utilización totalmente partidista para beneficio de su clase dirigente.

3.1. Ludwig Bieberbach

Con la subida al poder del partido Nazi, Ludwig Bieberbach (1886-1982) tomó un papel eminente dentro de la comunidad matemática. Sin embargo su reputación ya se había consolidado varios años antes de este hecho. En 1915, con tan sólo 23 años, Georg Frobenius ya le había definido como una de las mentes más privilegiadas de la nueva generación de matemáticos que estaba por venir.

Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach nació el 4 de diciembre de 1886 en Goddelau, una pequeña ciudad cercana a Frankfurt. Ya en secundaria, se interesó en gran medida por las matemáticas, interés que no abandonaría a lo largo de toda su vida. Atraído por la reputación matemática de Gotinga, comenzó a estudiar y comprender la Teoría de Invariantes de Hermann Minkowsky, y quedó fascinado por la atrayente personalidad de Félix Klein, de quien recibió clases sobre funciones elípticas. La razón por la que Bieberbach se había decidido por Gotinga había sido fundamentalmente por su interés en álgebra y los logros de Minkowski, aunque fue precisamente la influencia que Klein le causó, la que redireccionó sus intereses hacia el análisis. Otra de sus grandes influencias cuando era estudiante fue la del recién "habilitado" en 1907 Paul Koebe, quien llegó a tener una especial relevancia por sus estudios en Teoría de funciones complejas.

Figura 11. Ludwig Bieberbach.[13]

En 1900, Hilbert había enunciado en su famosa Conferencia de París los 23 problemas más relevantes del momento. El problema 18 se enunciaba en tres apartados independientes, todos ellos relacionados directamente con problemas sobre geometría. La primera parte tenía un carácter eminentemente algebraico, y trataba sobre la generalización en dimensión n del problema demostrado previamente por Arthur Schoenflies en 2 y tres dimensiones. En 1910, con Ernst Zermelo como director de su tesis, Biebarbach anunció la solución a este problema, que publicaría en dos partes entre 1910 y 1912. Este resultado causó asombro y admiración dentro de la comunidad matemática y le hizo granjearse una reputación dentro de la misma.

Arthur Schoenflies sería precisamente quien, siendo *"Ordinarius"* en Königsberg, consiguió una plaza de docente para Bierbarbach, que abandonaría tres años más tarde para convertirse en *"Ordinarius"* en Basel, en la que sólo permanecería dos años.

Tras la muerte de Georg Frobenius en 1917, la Universidad de Berlín llevó a cabo varios intentos para reemplazar esta pérdida, siendo algunos de los candidatos el griego Constantin Carathéodory, el holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer, o los alemanes Issai Schur, Hermann Weyl y Gustav Herglotz entre otros. Finalmente la facultad centró su atención en la contratación de un geómetra. La primera opción barajada fue la del austro-húngaro Wilhelm Johann Eugen Blaschke y la segunda el propio Ludwig Bieberbach, el que a la postre, con 34 años, se convertiría en *"Ordinarius"* de uno de los principales centros del conocimiento matemático junto a Gotinga.

[13] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Bieberbach.html

En 1920 fue nombrado Secretario de la Sociedad Matemática Alemana y publicó su artículo *"Nuevas Investigaciones sobre Funciones de Variable Compleja"* en la Enciclopedia Alemana de las Ciencias Matemáticas, que actualizaba los estudios llevados a cabo años antes. Finalmente, se estableció definitivamente en la Universidad de Berlín en 1921, donde permaneció hasta el final de la guerra.

3.2. Matemáticas Nacionalistas y Racistas

"La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°" es una propiedad universal del espacio euclídeo, y no tiene absolutamente nada que ver con las naciones. Sin embargo, Bieberbach pretendió promover una visión subjetiva de las matemáticas relacionadas a toda costa con el fuerte nacionalismo embebido en la sociedad alemana de principios de los años 1930, y asumió la difícil tarea de la alineación de los hechos abstractos matemáticos con la cultura alemana del momento. Al principio, Bieberbach fue simplemente un nacionalista alemán, llegando incluso a colaborar con judíos como Richard von Mises. Sin embargo sus convicciones fueron radicalizándose paulatinamente, y finalmente desarrolló una visión antisemita hacia todo su entorno, incluidas las matemáticas.

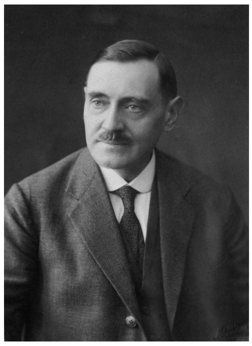


Figura 12. Erich Rudolf Jaensch.[14]

En 1934, Bieberbach utilizó las ideas que años antes el psicólogo y comprometido nazi Erich Rudolf Jaensch publicó en su *" Grundlugen der menschlichen Erkenntnis " ("Fundamentos del Conocimiento Humano")*, para describir desde un punto de vista psicológico, dos "tipologías" de personas (y particularmente de matemáticos) que en cierto modo radicalizaba la dicotomía existente entre *formalismo* e *intuicionismo*. Por un lado estaban los *"Tipo-S"* o *"Strahltypus"*, que no distinguían entre relaciones o asociaciones simbólicas y reales. Los *formalistas*, con su axiomatizada y abstracta estructura de la realidad pertenecían a este tipo. Por otro lado estaban los *"Tipo-I"* o *"Integrationstypus"* , a los que pertenecían los *intuicionistas*, que preferían una visión más geométricamente visual y real de las matemáticas. En realidad describe a los de *"Tipo-I"*, como los auténticos *arios*. Todos los juicios negativos eran vertidos sobre los *"Tipo-S"*. Vahlen, de hecho, intentó justificar la dicotomía establecida por Bieberbach describiendo a los *"Tipo-I"* como *"el espejo de la raza"*. En la complicada teoría de Jaensch había otros tipos que eran una mezcla de varios, por ejemplo los judíos a menudo eran descritos como "orientales".

El alumno de Jaensch, Fritz Althoff describió por su parte su particular clasificación tipológica de matemáticos. Por un lado dentro de los *"Tipo-I"*, definió las subclases I_1, I_2 e I_3, y por el otro dentro de los *"Tipo-S"*, las subclases D y L. Althoff describía:

> *"El Tipo-I_1 busca concebir el infinito en lo finito, el Tipo-I_2, por otro lado, lleva lo finito a una relación con el infinito que siente dentro de él mismo, sin tener una clara representación de él [infinito]. Es 'el que camina entre ambos mundos' [...] Más aún, la principal distinción [entre el Tipo-I_2 y] del Tipo-S es la presencia [en el Tipo-I_2] de un eterno mundo de valores [...] Estos hombres [Tipo-I_2] hacen matemáticas no únicamente por el interés de la especulación lógica pura; por el contrario, para ellos significa comprender los sucesos de la naturaleza para penetrar en los secretos del cosmos y por consiguiente ayudarles a clarificar su completo entendimiento [...] Los matemáticos [...] que pertenecen al Tipo-I_3 los caracterizamos en este trabajo [...] como el tipo del pensador deseoso. El Tipo-I_3 es el tipo de la 'eterna línea fija'. [...] con el Tipo-I_3 uno encuentra de forma más o menos exclusiva un sentimiento de deseo con el cual se acerca a la solución de los problemas y tareas."*

[14] http://www.bildindex.de/obj20550985.html

Jaensch y Althoff describen la anterior tipología clasificando por ejemplo a Félix Klein, Hermann von Helmhotz y James Clerk Maxwell como matemáticos de *Tipo-*I_1, a Schwarz, Gauss, Kepler y Planck como *Tipo-*I_2 y Hilbert, Dedekind y Weierstrass como *Tipo-*I_3. En contraste a estos, consideraban a Descartes, Laplace, Cauchy, Cantor, Poincaré y Landau como *Tipo-S*. Parece en cierto modo paradójico que matemáticos formalistas como Hilbert, Dedekind o Weierstrass no estén dentro de los *Tipo-S*, sin embargo éstos últimos eran considerados como "verdaderos alemanes", distinguiéndolos de los "tramposos axiomáticos de definiciones". Por ejemplo, mientras Bieberbach admite que la Teoría de Dedekind era atractiva a los *Tipo-S*, argumenta que esto no implica ningún tipo de crítica hacia Dedekind que se trataba sin lugar a dudas de un "verdadero alemán", ya que en contraste con sus seguidores dentro del *Tipo-S*, no construía "castillos en el aire". En contraposición con Dedekind, el ario, consideraba a Hurwitz, un judío, argumentando que Dedekind tenía cuidado de preservar el carácter unitario de su teoría, una unidad que Hurwitz destruía sustituyendo su propio deseo de un entendimiento conceptual eterno. La diferencia radica en que el *Tipo-*I_3 integra el orden natural a través del entendimiento interno dondequiera que el *Tipo-S* proyecta su propio orden mental predeterminado del mundo. En resumen los *Tipo-I* son conceptuales, mientras que los *Tipo-S* son computacionales. La palabra que describe a los *Tipo-I* es *anschaulich*, indicando el entendimiento intuitivo de los verdaderamente germánicos.

El propio Bieberbach escribía en su obra *Stilarten mathematischen Schaffens*, p. 357:

> *"... la imaginación espacial es una característica de las razas germánicas, mientras que el razonamiento lógico puro es ricamente desarrollado por las razas románicas y hebreas. En el ámbito intelectual... la raza se muestra en la forma de crear, la evaluación de los resultados, y considero que también en el punto de vista de las cuestiones de los fundamentos [matemáticos]... El formalismo quiere construir un reino de verdades matemáticas que es independiente del hombre, mientras que el intuicionismo se basa en la idea de que el pensamiento matemático es un esfuerzo humano y esto no puede ser separado del hombre."*

3.3. El *Deutsche Mathematik*

Debemos hacer notar que primero apareció la publicación que más tarde daría pie a toda una corriente nacionalista de pensar y sentir. Fundada en 1936 por Bieberbach y Vahlen, *Deutsche Mathematik* (en adelante DM), nació con la intención de eliminar de las matemáticas alemanas cualquier atisbo de "influencia judía". En sus contenidos fundacionales aparecían a menudo artículos controvertidos relacionando la raza y las matemáticas[15]. El primer volumen de la revista, formada por seis números, vio la luz en abril de 1936. Entre sus artículos más "incendiarios" se encuentran uno de Fritz Kubach, el líder nacional de los estudiantes de matemáticas. El artículo de Kubach era una llamada subversiva a los estudiantes con el fin de alinearse a la idea de unas matemáticas alemanas "verdaderas", en concordancia con los argumentos defendidos por Bieberbach. En este artículo, Kubach proponía un programa de investigación para los estudiantes fundamentado en tres grandes puntos. Uno era "un tratamiento de las cuestiones más generales y fundamentales concernientes a las matemáticas y el mundo, conectada desde el punto de vista racial con la creatividad matemática, y temas similares". De manera más particular, el "desarrollo histórico de cada uno de los institutos matemáticos" debía ser investigado, especialmente "la influencia de los Judíos en las matemáticas".

Varias comunicaciones de grupos estudiantiles se produjeron tras la publicación de este primer volumen en respuesta a las proclamas de Kubach. Por ejemplo, un grupo de estudiantes de Heidelberg contrastaron los estudios efectuados por Kepler y Newton (al estilo de los "investigadores germanos") con los estudios llevados a cabo por Einstein, al que consideraban el máximo exponente del desarrollo científico "judío". Otro grupo estudiantil de Königsberg con-

[15] Parece ser que este hecho dejó de repetirse sistemáticamente tras los dos primeros volúmenes fundacionales.

trastaban los estudios de Leibniz con los de Descartes. Descartes era "condenado" como un materialista, en contraste con la visión más enérgica y vital de la realidad de Leibniz. El intento de disociar todo lo germano o ario de lo judío se deja entrever en un estudio realizado por un grupo de estudiantes de Heidelberg:

> *"Especialmente importante, aunque también especialmente difícil fue la determinación de manera objetiva de la ascendencia judía o aria de cada uno de los miembros de la facultad. Para la mayoría de facultades, la clarificación de la ascendencia racial se realizó de forma exitosa...El material conseguido hasta ahora no es suficiente sin embargo para una completamente clara comparación de la creatividad germana y judía."*

Bieberbach vio en DM una oportunidad de aprovechar la publicación como un vehículo pedagógico para establecer entre la juventud nacionalsocialista una nueva forma de entender la realidad matemática al mismo tiempo que se ganaba la camaradería de un sector de profesores, especialmente matemáticos, y de estudiantes, afines al movimiento nazi. En cierto modo utilizó DM para inculcar una conciencia nacionalista entre los estudiantes y utilizarlos para despertar el sentimiento más conservador de sus colegas y conseguir de ellos una participación más políticamente activa. DM fue considerada una publicación oficial de la organización estudiantil germana; de este modo, todas las organizaciones locales de estudiantes debían recibir al menos una copia. En cierto modo, DM se convirtió en el "escaparate" de muchos grupos estudiantiles que veían como sus trabajos eran publicados. Fritz Kubach en particular vio DM como el centro de "una nueva comunidad de matemáticos germanos".

Además de Kuback y Bieberbach, el conjunto editorial del volumen 1 estaba formado, entre otros, por Alfred Klose, Heinrich Scholz, Wilhelm Süss, Erhard Tornier, Egon Ullrich, Werner Weber, y Ernst August Weiss. Aunque Bieberbach era el editor jefe, su nombre no aparecía en la portada de la revista; en su lugar lo hacía el nombre de Theodor Vahlen, quien para entonces gozaba de una privilegiada posición política. Sin duda este hecho significó un astuto movimiento político por parte de Bieberbach con el fin de alcanzar cierta relevancia. Originalmente la revista tenía el subtítulo de *Una revista mensual para la Protección de los Intereses de los Matemáticos Germanos*, aunque finalmente éste fue retirado.

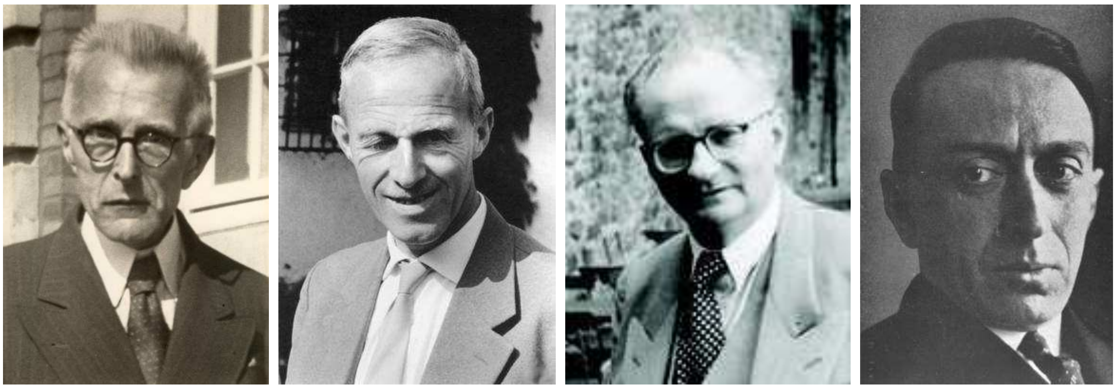


Figura 13. Heinrich Scholz, Wilhelm Süss, Egon Ullrich y Ernst August Weiss.[16]

El volumen 1, contenía además otros artículos, muchos de ellos con cierto contenido matemático relevante, como los de Paul Koebe, Gerhard Kowalewski y Hellmuth Kneser. Algunos artículos provienen de jóvenes estudiantes al inicio de su carrera, como el de Georg Aumann de Múnich, o Willi Rinow y Günther Schulz de Berlín, quienes a la postre se convertirían en matemáticos profesionales, aunque esta participación en DM no afectaría a sus carreras futuras.

[16]http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=1198, http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=9046, http://praymont.blogspot.com.es/2010_06_01_archive.html

También aparecieron cuatro artículos de investigación del joven matemático y declarado nazi Oswald Teichmüller, quien desaparecería en el frente ruso en 1943, cuando tan sólo tenía 30 años.

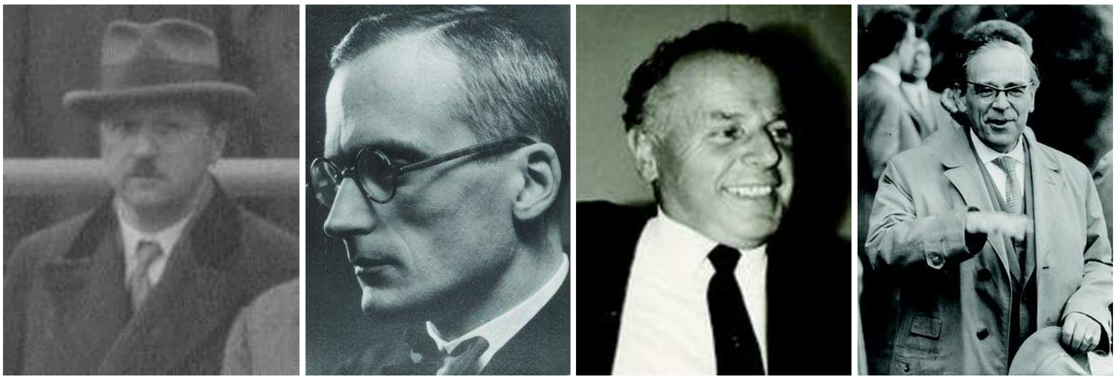


Figura 14. De izq. a drcha. Paul Koebe, Hellmuth Kneser, Georg Aumann y Willi Rinow.[17]

Además de los artículos de investigación, cabe destacar otros de carácter más pedagógico, como un estudio histórico de Ernst August Weiss que fue dividido en cinco partes. Sin embargo, hubo un artículo, a todas luces totalmente incendiario y tendencioso, firmado por Friedrich Drenckhahn de Rostock con el título *"La Ley para la Protección de la Sangre Alemana y el Honor Alemán del 15 de Septiembre de 1935 a la luz de las Estadísticas Poblacionales"*. Desde el principio, el artículo pone de manifiesto la "infiltración" de sangre extranjera entre el pueblo alemán. La ley a la que hace referencia es la "Ley de Núremberg", en la que se prohibían las relaciones sexuales entre judíos y no-judíos.

El proyecto de Bieberbach tuvo un aparente éxito inicialmente. Desde su fundación, la revista comenzó a publicarse siendo subvencionada por la DFG[18], de este modo pudo ser vendida por debajo de su coste, con la intención de captar el máximo número de suscriptores, cuyo número llegó a alcanzar la cantidad de 500. En ese momento la Sociedad Matemática Alemana contaba con 1100 miembros, cuya publicación tenía un mayor número de suscriptores (en torno a 725), pero se debe poner de manifiesto que el principal público al que estaba orientado DM era tanto el entorno estudiantil como aquellos que estaban de alguna manera relacionados con las matemáticas fuera de la comunidad universitaria. Todas los Centros de Secundaria recibieron una copia gratuita del primer número del volumen 1, con la intención de que sus profesores de matemáticas se suscribieran (especialmente dado su bajo precio). El volumen 1 se había estimado contendría entre 576 y 640 páginas, aunque finalmente su contenido ocupó 898 páginas. El coste total para la DFG alcanzó la suma de 25000 marcos, de los cuales, 4000 marcos estaban destinados a Bieberbach y Vahlen en concepto de honorarios editoriales, hecho insólito ya que ninguna otra publicación subvencionada por la DFG mantenía tales honorarios, y 3000 marcos estaban destinados a honorarios de los autores, práctica no compartida por el resto de publicaciones matemáticas. DM resultó ser una publicación muy costosa, ya que se cuidaba la presentación de la revista hasta el punto de presentar gráficos a todo color.

Luchas políticas internas en el DFG provocaron la sustitución de su máximo responsable. Un nazi idealista Johannes Stark fue reemplazado por un nazi pragmático y oportunista Rudolf Mentzel. Como medida más inmediata tras alcanzar la presidencia de la DFG, Mentzel escribió a Bieberbach y Vahlen el 28 de enero de 1937 sugiriendo que la revista debía sufrir serios recortes, proponiendo su participación sobre cómo debían proceder. En su opinión el número de páginas

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Koebe,Paul_1930_Jena.jpg, http://en.wikipedia.org/wiki/Hellmuth_Kneser, http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=141, http://de.wikipedia.org/wiki/Willi_Rinow

[18] "Deutsche Forschungs-Gemeinschaft" ("Fundación para la Investigación Alemana") denominada así a partir de 1937, hasta ese momento se la conocía como " Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft" ("Asociación de Emergencia de la Ciencia Alemana").

debía ser recortado y la calidad de los gráficos debía reducirse. En respuesta Bieberbach contestó estar completamente de acuerdo con estas sugerencias, y así el volumen 2 se estimó debía contener 640 páginas. De manera adicional, Bieberbach enfatizó en su respuesta el carácter propio de su revista frente a otras publicaciones. Sin duda que sin ser tan explícito, Bieberbach se refería a la naturaleza nacionalista que se impregnaba en el contenido de la revista. En contraposición a DM, el *Mathematische Annalen* tenía a un editor judío (Otto Blumenthal), el *Mathematische Zeitschrift* contenía artículos dedicados a judíos comunistas (Emmy Noether), el *Crelle* contenía trabajos de exiliados políticos, y el *Diario Alemán de Historia de las Matemáticas (Fuentes y Estudios en la Historia de las Matemáticas)* estaba dirigido por un judío (Otto Toeplitz) y un mestizo exiliado (Otto Neugebauer). Bieberbach puso de manifiesto que su publicación no era únicamente una colección de artículos, sino que su función educativa iba mucho más allá. Insistió en continuar otorgando honorarios a los autores en contraposición al resto de publicaciones. La idea de que tanto él como Vahlen recibieran honorarios, fue propuesta a petición del anterior presidente Stark, e implícitamente reconocida por las autoridades. Además, puso de manifiesto que ahora que Vahlen estaba retirado, tenía incluso mayor razón para trabajar recibiendo una recompensa económica, dada la energía y la importante reputación que éste poseía. Sin embargo Mentzel estaba dispuesto a realizar un drástico recorte. Otorgó a la publicación una contribución de 12000 marcos, la mitad del coste del primer volumen. El 2 de marzo de 1937, Bieberbach se entrevistó con Mentzel y discutieron sobre cómo realizar estos recortes. Como primera medida, Bieberbach y Vahlen debían renunciar a sus honorarios, al igual que los autores. De forma adicional, los estudios sobre lógica (llevados a cabo por Scholz) continuarían siendo publicados, aunque su extensión debía ser drásticamente reducida a 40 páginas. De manera adicional, los costes de publicitación de la revista debían ser eliminados, y los estudiantes deberían ayudar en la distribución de la revista, presumiblemente de manera altruista.

Figura 15. Rudolf Mentzel.[19]

Bieberbach realizó un último intento por aumentar el tamaño de los contenidos del volumen 2, sobre todo después de que los dos primeros números hubieran ocupado 376 páginas. Sin lugar a dudas a ese ritmo de publicación los seis números sobrepasarían las 640 páginas establecidas como tope máximo. Mentzel, sin embargo se mostró firme en su posición, dado que los fondos del DFG no permitían una mayor subvención. De esta manera Bieberbach no tuvo más remedio que ceder. Los números 4 y 5 de 1937, sólo contenían 81 páginas, y el número 6 no apareció hasta enero de 1937 con una extensión únicamente de 74 páginas. Esta tónica se repitió durante los años sucesivos hasta 1943.

No todos los matemáticos nacionalistas o "afines" al régimen nazi contribuyeron en la publicación de contenidos en la revista. Por ejemplo, Hasse (ultraconservador y nacionalista) nunca publicó en DM, de hecho el propio Biebarbach raramente publicaba, aunque sí que realizaba numerosas revisiones y críticas.

No puede afirmarse que DM, la revista o el movimiento, tuvieran efecto significativo alguno sobre el desarrollo de las matemáticas. En el caso de la primera, muchas bibliotecas de universidades foráneas se negaron a suscribirse debido a algunos de sus controvertidos artículos. Desde el punto de vista de la cantidad de contenidos publicados, entre 1936 y 1938, el DM publicó 2360 páginas, sin duda a la altura o superando sensiblemente a las prestigiosas *Mathematische Annalen* y *Mathematische Zeitschrift* que publicaron 2335 y 2358 páginas respectivamente. Respecto al número de suscriptores o el número de copias, DM partía claramente en gran desventaja a otras publicaciones ya asentadas. Cabe decir por ejemplo que el primer número del volumen 3 (1938), vendió únicamente 533 números. DM contaba con unos 500 suscriptores frente al resto de publicaciones que superaban la cifra de 700. Ciertamente DM nunca consiguió alcanzar una

[19] http://en.wikipedia.org/wiki/Rudolf_Mentzel

posición privilegiada dentro de la comunidad matemática, a pesar de ser éste el principal objetivo de sus fundadores. Aunque sus comienzos pueden considerarse en cierto modo exitosos, sin duda sus ventas no superaron una cifra muy significativa a pesar del bajo precio con el que la publicación inició su andadura.

3.4. La política matemática nazi y Vahlen

Bieberbach consideró oportuno justificar la relevancia política de las matemáticas en el Tercer Reich. Asoció las matemáticas formalistas al viejo Reich, y a una visión de la ciencia pasada de moda. Llegó a tener un poder bastante significativo dentro de la comunidad educativa hasta el punto de que en cierta ocasión manifestó *"Encuentro sorprendente que los Judíos sean aún miembros de las comisiones académicas"*, e inmediatamente su colega matemático Issai Schur tuvo que abandonar (bajo presiones) la Academia Prusiana.

Figura 16. Theodor Vahlen.[20]

Karl Theodor Vahlen (1969-1945) se involucró en mayor medida que Bieberbach en la política, además de otros movimientos como la *Deutsche Physik*. Sustituyó a Richad von Mises en la Universidad de Berlín en 1933 debido a la aplicación de la "Ley para la Restitución del Servicio Civil Profesional" (de la que hablaremos más adelante). Tras su afiliación a las SA en 1933, y las SS en 1936, adquirió varios cargos como la vicepresidencia de la Sociedad del Kaiser Wilhelm que ostentó de 1933 a 1937. Desde mayo de 1934, ocupó el cargo de secretario asistente y jefe de la Oficina de Ciencia en el Ministerio de Educación del Reich. En realidad, la Oficina de Ciencia se dividía en dos componentes, WI, una continuación del departamento prusiano, y WII, la oficina del ejército para la investigación. Vahlen era el jefe del WI. Desde esta posición, en 1936, comenzó a publicar en la revista Deutsche Mathematik, de la cual Bieberbach era el editor. El 1 de enero de 1937 fue relevado de sus funciones en el Ministerio de Educación del Reich, en favor del físico Johannes Stark. Se convirtió en el presidente de la Academia Prusiana de Ciencias en 1938, al parecer mediante un proceso electivo manipulado por Vahlen y sus seguidores.

A pesar de los importantes cargos desempeñados por Vahlen, no existen demasiados casos de matemáticos que ascendieran en la cadena de poder durante la era nazi. Esto muestra la dificultad que suponía promover una materia tan abstracta como las matemáticas. De hecho, en ocasiones los matemáticos consideraban llevar a cabo acciones que demostraran su lealtad al régimen con el fin de promocionar, como cuando en 1934 Bieberbach intentó alcanzar el liderazgo de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*.

3.5. El destino final de Bieberbach

Con la finalización de la guerra y la derrota nazi, Bieberbach perdió todos sus cargos y fue despedido de su puesto docente. Sin embargo fue readmitido en la Universidad de Basel en 1949 invitado por Alexander Ostrowski, hecho que provocó grandes críticas. Sin embargo, a pesar de las presiones, Ostrowski dejó de lado el pasado que Bieberbach arrastraba, y en su lugar valoró los importantes resultados obtenidos a lo largo de su carrera. En 1951, Biberbach compitió con Wilhelm Levi por el vicerectorado de Berlín. Ambos matemáticos eran ya veteranos (pasaban sus 60 años). Levi era judío, motivo por el cual había sido expulsado de la Universidad de Leipzig en 1935 y finalmente obtuvo dicha plaza en detrimento de Bieberbach.

Bieberbach continuó escribiendo algunos libros de bastante buena calidad como *Theorie der geometrischen Konstruktionen (Teoría de las Construcciones Geométricas)* (1952), *Theorie der gewöhn-*

[20] http://www.audiovis.nac.gov.pl/obraz/48960/

lichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt (Teoría de Ecuaciones Diferenciales y Fundamentos de la Teoría de Funciones) (1953), *Analytische Fortsetzung (Continuación Analítica)* (1955) y *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet (Introducción a la Teoría de Ecuaciones Diferenciales en el Dominio Real)* (1956).

De manera eventual, continuó sus investigaciones matemáticas, pero su pasado afín a los nazis siempre lo acompañó hasta su muerte en 1982, a la edad de 95 años. Hay muchos autores que consideran que la radical perspectiva que Bieberbach tuvo de las matemáticas se debe principalmente a que fue víctima de su propia ambición. Dicha ambición le llevó a querer alcanzar a toda costa el liderazgo absoluto dentro de las matemáticas alemanas, independientemente de los medios que tuviera que utilizar para ello, lo que le llevó a convertirse en un mero instrumento de manipulación de la comunidad matemática en manos del aparato nazi.

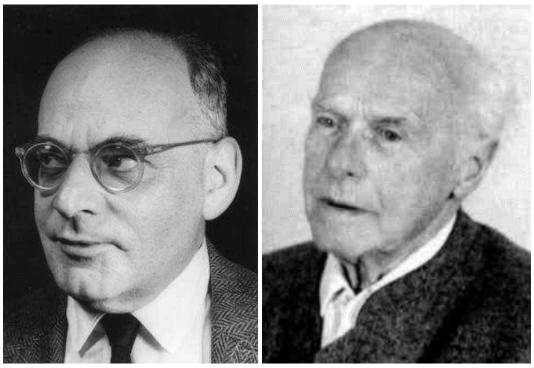


Figura 17. Alexander Ostrowski y L. Bieberbach al final de sus días.[21]

4. El cambio científico en la era nazi

Desde la llegada al poder de Adolf Hitler y el partido Nazi, es evidente que se llevó a cabo un "arrinconamiento" de las minorías étnicas, restringiendo en gran medida sus derechos elementales. Este hecho, por supuesto, afectó profundamente a la ciencia del momento, influenciada en gran parte por toda una comunidad científica y pedagógica que contaba con multitud de miembros de origen judío o eslavo, o con relación directa con estas etnias. Pero en el caso de la ciencia, esta presión a la que hacíamos anteriormente referencia se produjo de un modo más sutil.

Una vez que llegó al poder, Adolf Hitler llevó a cabo una serie de reformas con el fin de manejar y controlar todos los estamentos ejecutivos, legislativos, y jurídicos del estado. De este modo aprobó la llamada "Ley para la Restitución del Servicio Civil Profesional" (en alemán "Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums", en adelante LRSCP) el 7 de abril de 1933, las "Leyes raciales de Núremberg" el 15 de septiembre de 1935, y la anexión de Austria en marzo de 1938. Todo este caldo de cultivo condujo a una serie de migraciones masivas de izquierdistas, personas de ascendencia étnicas minoritarias de todos los ámbitos, y por supuesto científicos y académicos a los que esta persecución no les resultó para nada ajena.

A principios de los años 1930, el programa científico y las universidades alemanas adolecían de un problema de "superpoblación" docente y por lo tanto de desempleo académico, consideración ésta que los nazis aprovecharon para activar su dispositivo de propaganda y discurso demagogo con el fin de controlar a la comunidad científica, y hacer uso de ella en su propio beneficio. La expulsión de personal funcionariado del estado de las universidades se llevó a cabo con la característica utilización de métodos pseudoterroristas y caóticos nazis, creando una atmósfera de denuncias y acusaciones gratuitas y boicots estudiantiles, y la utilización de los judíos y extranjeros como chivos expiatorios, considerados los causantes de todos los males de la comunidad docente.

El principal instrumento pseudolegal utilizado para la expulsión de docentes fue la infame LRSCP y su ampliación del 11 de abril del mismo año, que de forma arbitraria se encargó de establecer el concepto de *descendencia no-aria* como el principal motivo para apartar y expulsar

[21] http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=9254

de todos los estamentos de la vida pública y social a todos aquellos que cumplieran con este requisito. La ley establecía en sus puntos más importantes:

> *3. (1) Los funcionarios que no posean descendencia aria serán retirados...(2) Nº.1 no se aplicará a oficiales que hayan estado en el servicio desde el 1 de agosto de 1914, o que hayan luchado en el frente para el Reich Alemán o sus aliados durante la Guerra Mundial, o cuyos padres o hijos hayan fallecido en la Guerra Mundial...*
>
> *4. Aquellos funcionarios que, basándose en sus anteriores actividades políticas, no garanticen que apoyarán siempre al estado nacional sin reservas, podrán ser despedidos del servicio. Su salario previo será mantenido durante los tres meses posteriores a su despido. Desde ese momento en adelante recibirán tres cuartas partes de la pensión...*
>
> *6. Con el fin de simplificar la administración, los funcionarios podrán ser retirados, incluso cuando aún estén capacitados para el servicio. Si los funcionarios son retirados por esta razón, sus vacantes no serán reemplazadas.*

En la primera ampliación de esta ley el 11 de abril de 1933, pone aún más de manifiesto el profundo y declarado antisemitismo nazi:

> *3. (1) Cualquiera que no tenga descendencia aria de padres o abuelos, en especial los judíos, serán considerados no-arios. Será suficiente que uno de los padres o abuelos sea no-ario. Se asumirá este hecho especialmente cuando uno de los padres o abuelos hayan practicado la fe judía...*

El 6 de mayo de 1933, la aplicación de dicha ley se extendió al personal *privatdozenten*[22]. El uso y abuso indiscriminado de esta ley supuso un punto de inflexión en el desarrollo científico de la nación, produciéndose un deterioro continuo y constante del mismo.

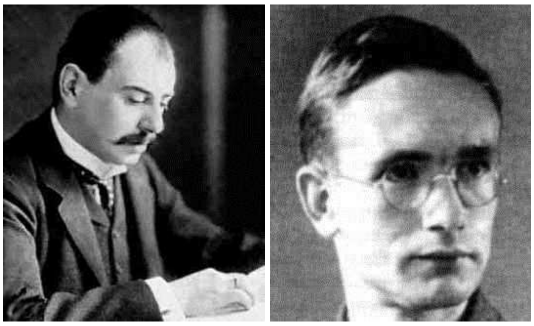


Figura 18. Edmund Landau y Oswald Teichmüller.[23]

Esta situación de crispación en las universidades alemanas, se vio acrecentada si cabe por los continuos boicots estudiantiles a las clases de docentes considerados "no-afines" al régimen, en la mayoría motivados por razones racistas o de resentimiento político, frecuentemente contra docentes considerados "demasiado exigentes", pero intocables de acuerdo a las recientemente aprobadas leyes nazis. Dichos boicots se produjeron al total amparo de las autoridades nazis. Son conocidos los casos particulares sufridos por matemáticos como Otto Blumenthal, H. Grötzsch, Edmund Landau, H. Liebmann, Wilhelm Pragaer, Hans Reichenbach, Kurt Reidemeister, Arthur Rosenthal, y F. Willers. Uno de estos hechos más conocidos fue protagonizado por Oswald Teichmüller, un brillante estudiante de matemáticas de Gotinga, quien animado por los juicios vertidos por Bieberbach entre otros, organizó un boicot multitudinariamente secundado en contra del matemático Edmund Landau, quien pese a todo, continuó practicando la fe judía, ya que en virtud del servicio prestado como funcionario antes de la 1ª Guerra Mundial, no le pudo ser aplicada la ley y por lo tanto no pudo ser despedido. El 3 de noviembre de 1933, Teichmüller escribía a Landau explicando el razonamiento de los hechos acontecidos en su contra, y el porqué del boicot:

[22] Podríamos traducirlo como equivalente al actual personal interino, es decir aquel que no poseía aún plaza fija en la plantilla docente de las universidades y por lo tanto no eran reconocidos como personal funcionariado. Tampoco recibían salario alguno, aunque sí las cuotas estudiantiles.

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Landau, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Teichmuller.html

"Usted defendió ayer la opinión de que se había tratado de una demostración antisemita. Yo defendí y continuo defendiendo que se debería dirigir una acción particular antisemita contra cualquiera además de usted. No se trata de hacerle su vida más complicada por ser judío, sino únicamente prevenir a los estudiantes alemanes del segundo semestre de recibir precisamente lecciones de Cálculo Diferencial e Integral por un profesor totalmente extranjero desde el punto racial. No me atrevería a cuestionar su capacidad para enseñar matemáticas internacionales a estudiantes capaces de descendencia arbitraria... Sin embargo, la posibilidad de que usted sea capaz de comunicar la esencia de las matemáticas a sus oyentes sin su propia herencia nacional parece aparentemente improbable del mismo modo que un esqueleto no podría caminar sin los correspondientes músculos, sino más bien se desploma y se marchita."

El propio Bieberbach escribía en abril de 1934 sobre este hecho:

"Hace unos meses diferencias con el organismo estudiantil de Gotinga pusieron fin a las actividades docentes del Señor Landau... Esto debería considerarse como el primer ejemplo del hecho de que alumnos y profesores de razas diferentes no se deben mezclar... El instinto de los estudiantes de Gotinga consideraba que Landau era un persona que veía las cosas de un modo no-alemán."

Figura 19. Un grupo de Nazis se cogen de las manos en la escalinata de la Universidad de Viena con el fin de impedir la entrada de Judíos (profesores y alumnos) al edificio. Esta acción desembocó en una revuelta estudiantil que tuvo que ser sofocada por la policía.[24]

Tras la aprobación de la LRSCP en abril de 1933, la persecución antisemita continuó en los años siguientes, hecho que únicamente algunos pocos científicos llegaron a vislumbrar al principio. Los estudiantes no-arios, se vieron expuestos a unas condiciones mucho más restrictivas para su admisión en las universidades además de que aquellos que ya estaban dentro tuvieron que sufrir una evaluación en exámenes menos ecuánime que la de sus compañeros arios.

La aprobación de las "Leyes de Núremberg" el 15 de septiembre de 1935, significó la cancelación de cláusulas de exención establecidas por la LRSCP. Esto significaba que los funcionarios de preguerra y aquellos participantes en la misma ya no serían protegidos contra el despido. De acuerdo a las Leyes de Núremberg, la definición más restrictiva si cabe de "no-ario", se tradujo en la supresión de todo tipo de ayudas a aquellos docentes despedidos en 1933. Desde 1937 en adelante, los pocos estudiantes judíos de nacionalidad germana vieron cómo perdían todos

[24] Archivo Nacional Estadounidense. Cortesía del *United States Holocaust Memorial Museum*. http://www.gregfelton.com/media/2007_08_09.htm

sus derechos para obtener el título de doctorado. Desde el punto de vista de las matemáticas, todas estas leyes influyeron negativamente sobre ella en gran medida. Un gran número de matemáticos fueron expulsados de organizaciones no gubernamentales o semigubernamentales e instituciones como la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* y la *Preussische Akademie der Wissenchaften*, y la anexión de Austria en 1938 o Checoslovaquia en 1938-39 provocaron nuevas oleadas de persecuciones a matemáticos de habla germana.

La Tabla 1 muestra el número de emigraciones y persecuciones que se produjeron durante el régimen nazi en diferentes centros educativos. Parece evidente que no puede ser una casualidad que 90 de los 145 emigrantes, y 130 de los 234 perseguidos (incluidos no emigrantes y asesinados) provinieran de Berlín, Gotinga, Praga y Viena, donde el número de docentes de origen judío era bastante considerable (sobre todo en Gotinga), mientras que otros centros prácticamente no se vieron afectados por este hecho.

Tabla 1. Número de expulsiones/persecuciones

Aachen	1/2	Gotinga	24/28	Múnich	4/5
(Amsterdam)	0/1	Graz	0/1	Münster	1/1
Berlín	41/62	Greifswald	0/1	Praga	5/13
Bonn	1/3	Halle	1/2	Rostock	0/1
Brunswick	1/1	Hamburgo	4/4	Saarbrücken	0/1
Breslau	8/11	Heidelberg	4/5	Scheweidnitz	0/1
Colonia	1/2	Karlsruhe	2/4	(Estocolmo)	0/1
Dresden	0/1	Kassel	0/2	(Trieste)	1/1
Elsterwerda	0/1	Kiel	2/4	Tübingen	0/1
Essen	0/1	Königsberg	7/8	Vacha	0/1
Frankfurt	9/14	Landsberg	0/1	Viena	20/27
Freiberg	0/1	Leipzig	2/2	(Varsovia)	0/1
Freiburgo	4/6	Mansfeld	0/1	Würzbur	0/2
Giessen	0/2	Marburgo	1/4	(Zurich)	0/1

Tabla 2. Lista de matemáticos germano-hablantes que emigraron durante el Periodo Nazi (Primera Generación), Lugar de Expulsión, 1er destino tras su expulsión y destino final hasta 1945.

Nº	Apellidos, Nombre	Fechas	Lugar de Exp.	1er dest. tras exp.	Dest.fin. hasta 1945
1	Alt, Franz	1910-	Viena	1938 EE.UU	1938 EE.UU
2	Artin, Emil	1898-1962	Hamburgo	1937 EE.UU	1937 EE.UU
3	Artzy, Rafael	1912-2006	Königsberg	1933 Palestina	1933 Palestina
4	Baer, Reinhold	1902-1979	Halle	1933 GB	1935 EE.UU
5	Baerwald, Hans G.	1904-1987	Berlín	1933 GB	1939 EE.UU
6	Basch, Alfred	1882-1958	Viena	1939 EE.UU	1939 EE.UU
7	Behrend, Félix A.	1911-1962	Berlín	1934 GB	1940 Australia
8	Bergmann, Gustav	1906-1987	Viena	1938 EE.UU	1938 EE.UU
9	Bergmann, Stefan	1895-1977	Berlín	1934 SU	1939 EE.UU
10	Bernays, Paul	1888-1977	Gotinga	1934 Suiza	1934 Suiza
11	Bernstein, Félix	1878-1956	Gotinga	1933 EE.UU	1933 EE.UU
12	Bers, Lipman	1914-1993	Praga	1940 EE.UU	1940 EE.UU
13	Bochner, Salomon	1899-1982	Múnich	1933 GB/EE.UU	1933 EE.UU

Tabla 2. Lista de matemáticos germano-hablantes que emigraron durante el Periodo Nazi (Primera Generación), Lugar de Expulsión, 1er destino tras su expulsión y destino final hasta 1945. (cont.)

Nº	Apellidos, Nombre	Fechas	Lugar de Exp.	1er dest. tras exp.	Dest. fin. hasta 1945
14	Boll, Ludwig	1911-1985	Frankfurt	1934 Holanda	1934 Holanda
15	Brauer, Alfred	1894-1985	Berlín	1939 EE.UU	1939 EE.UU
16	Brauer, Richard	1901-1977	Königsberg	1933 EE.UU	1935 Canadá
17	Breuer, Samson	1891-1974	Karlsruhe	1933 Palestina	1933 Palestina
18	Breusch, Robert	1907-1995	Freiburgo	1936 Chile	1939 EE.UU
19	Busemann, Herbert	1905-1994	Gotinga	1935 Dinamarca	1936 EE.UU
20	Caemmerer, Hanna von	1914-1971	Berlín / Gotinga	1938 GB	1938 GB
21	Carnap, Rudolf	1891-1970	Praga	1935 EE.UU	1935 EE.UU
22	Cohn, Arthur	1894-1940	Berlín	1940 Palestina	1940 Palestina
23	Cohn-Vossen, Stefan	1902-1936	Colonia	1935 SU	1935 SU
24	Courant, Richard	1888-1972	Gotinga	1933 GB	1934 EE.UU
25	Dehn, Max	1878-1952	Frankfurt	1938 Noruega	1941 EE.UU
26	Dubislav, Walter	1895-1937	Berlín	1936 Chequia	1936 Chequia
27	Fanta, Ernst	1878-1939	Viena	1939 Brasil	1939 Brasil
28	Fanta, Werner	1905-?	Viena	1939 Brasil	1939 Brasil
29	Feller, Willy	1906-1970	Kiel	1933 Dinamarca	1939 EE.UU
30	Fenchel, Werner	1905-1988	Gotinga	1933 Dinamarca	1942 Suecia
31	Fraenkel, Adolf A.	1891-1965	Kiel	1933 Palestina	1933 Palestina
32	Freudenberg, Karl	1892-1966	Berlín	1939 Holanda	1939 Holanda
33	Freudenthal, Kurt (Fulton)	1910-1995	Múnich	1938 Colombia	1938 Colombia
34	Fried, Hans	1893-1945	Viena	1940 EE.UU	1940 EE.UU
35	Friedrichs, Kurt	1901-1982	Brunswick	1937 EE.UU	1937 EE.UU
36	Froehlich, Cecilia	1900-1992	Berlín	1937 Bélgica	1941 EE.UU
37	Frucht, Robert	1906-1997	Berlín / Trieste	1930 Italia	1939 Chile
38	Geiringer, Hilda	1893-1973	Berlín	1934 Bélgica	1939 EE.UU
39	Gödel, Kurt	1906-1978	Viena	1940 EE.UU	1940 EE.UU
40	Golomb, Michael	1909-2008	Berlín	1933 Yugoslavia	1939 EE.UU
41	Gumbel, Emil Julius	1891-1966	Heidelberg	1932 Francia	1940 EE.UU
42	Hamburger, Hans	1889-1956	Colonia	1939 GB	1939 GB
43	Hartley, Herman	1912-1980	Berlín	1934 GB	1934 GB
44	Hauser, Wilhelm	1883-1983	Freiburgo	1938 Francia	1939 GB
45	Heilbronn, Hans	1908-1975	Gotinga	1933 GB	1933 GB
46	Heller, Isidor	1906-?	Viena	?	1943 Suiza
47	Hellinger, Ernst	1883-1950	Frankfurt	1939 EE.UU	1939 EE.UU
48	Helly, Eduard	1884-1943	Viena	1938 EE.UU	1938 EE.UU
49	Helly, Elisabeth	1892-1992	Viena	1938 EE.UU	1938 EE.UU
50	Helmer-Hirschberg, Olaf	1910-?	Berlín	1934 GB	1937 EE.UU
51	Hempel, Carl G.	1905-1997	Berlín	1934 Bélgica	1937 EE.UU
52	Hermann, Grete	1901-1984	Gotinga	1934 Dinamarca	1938 GB
53	Hertz, Paul	1881-1940	Gotinga	1934 Suiza	1938 EE.UU
54	Herzberger, Max	1899-1982	Jena	1934 Holanda	1935 EE.UU
55	Herzog, Fritz	1902-2001	Berlín	1933 EE.UU	1933 EE.UU
56	Hirsch, Kurt	1906-1986	Berlín	1934 GB	1934 GB
57	Hopf, Ludwig	1884-1939	Aachen	1939 Irlanda	1939 Irlanda
58	Ille, Hildegard	1899-1942	Breslau	1937 GB	1938 EE.UU

Tabla 2. Lista de matemáticos germano-hablantes que emigraron durante el Periodo Nazi (Primera Generación), Lugar de Expulsión, 1^er^ destino tras su expulsión y destino final hasta 1945. (cont.)

Nº	Apellidos, Nombre	Fechas	Lugar de Exp.	1er dest. tras exp.	Dest. fin. hasta 1945
59	Jacobsthal, Ernst	1882-1965	Berlín	1939 Noruega	1943 Suecia
60	Jacobsthal, Walther	1876-?	Berlín	?	1939 EE.UU
61	Jacoby, Walter	1905-1968	Berlín	? tras 1938	1939 EE.UU
62	John, Fritz	1910-1994	Gotinga	1934 GB	1935 EE.UU
63	Karger, Ilse	1901-1980	Königsberg	1933 EE.UU	1935 Canadá
64	Kaufmann, Boris	1904-?	Heidelberg	1933 GB	1933 GB
65	Kober, Hermann	1888-1973	Breslau	1939 GB	1939 GB
66	Kober (Silberberg), Käte	1908-?	Breslau	1939 GB	1939 GB
67	Korn, Arthur	1870-1945	Berlín	1939 EE.UU	1939 EE.UU
68	Kürti, Gustav	1903-1978	Viena	1938 GB	1939 EE.UU
69	Kuhn, Paul	1901-?	Praga	1939 Noruega	1943 Suecia
70	Lasker, Emanuel	1868-1941	Berlín	1935-? SU	1937 EE.UU
71	Ledermann, Walter	1911-	Berlín	1934 GB	1934 GB
72	Leibowitz (Winter), Grete	1907-?	Heidelberg	1934 Palestina	1934 Palestina
73	Levi, Friedrich	1888-1966	Leipzig	1936 India	1936 India
74	Levin, Victor	1909-1986	Berlín	1933 GB	1938 SU
75	Lewy, Hans	1904-1988	Gotinga	1933 EE.UU	1933 EE.UU
76	Lichtenstein, Leon	1878-1933	Leipzig	1933 Polonia	1933 Polonia
77	Löwner, Karl	1893-1968	Praga	1939 EE.UU	1939 EE.UU
78	Lotkin, Michael	1911-?	Berlín	1937 EE.UU	1937 EE.UU
79	Lüneburg, Rudolf	1903-1949	Gotinga	1934 Holanda	1935 EE.UU
80	Lukacs, Eugen	1906-1987	Viena	1939 EE.UU	1939 EE.UU
81	Mahler, Kurt	1903-1988	Gotinga	1933 GB	1937 GB
82	Mann, Heinrich	1905-2000	Viena	1938 EE.UU	1938 EE.UU
83	Marx, Arnold	1905-?	Königsberg	1934 Suráfrica	1934 Suráfrica
84	Mayer, Anton	1903-1942	Viena	1938 GB	1938 GB
85	Mayer, Walther	1887-1948	Viena / Berlín	1933 EE.UU	1933 EE.UU
86	Menger, Karl	1902-1985	Viena	1937 EE.UU	1937 EE.UU
87	Mises, Richard von	1883-1953	Berlín	1933 Turquía	1939 EE.UU
88	Nemenyi, Paul	1895-1952	Berlín	1934 Dinamarca	1938 EE.UU
89	Neugebauer, Otto	1899-1990	Gotinga	1934 Dinamarca	1939 EE.UU
90	Neuhaus, Albert	1914-?	Hamburgo	1937 EE.UU	1937 EE.UU
91	Neumann, Bernhard	1909-2002	Berlín	1933 GB	1933 GB
92	Neumann, Johann von	1903-1957	Berlín	1933 EE.UU	1933 EE.UU
93	Noether, Emmy	1882-1935	Gotinga	1933 EE.UU	1933 EE.UU
94	Noether, Fritz	1884-1941	Breslau	1934 SU	1934 SU
95	Oppenheimer, Friedrich	1904-?	Frankfurt	1933 ??	1933 ??
96	Ornstein, Wilhelm	1905-?	Berlín	1933 Polonia	1943 Egipto/EE.UU
97	Peltesohn, Rose	1913-1998	Berlín	1938 Palestina	1938 Palestina
98	Pollaczek, Félix	1892-1981	Berlín	1933 Austria	1939 Francia
99	Pólya, Georg(e)	1887-1985	Zurich	1940 EE.UU	1940 EE.UU
100	Praga, Adolf	1906-2004	Frankfurt	1933 GB	1933 GB
101	Pragaer, Wilhelm	1903-1980	Gotinga/Karlsruhe	1934 Turquía	1941 EE.UU
102	Pringsheim, Alfred	1850-1941	Múnich	1939 Suiza	1939 Suiza
103	Rademacher, Hans	1892-1969	Breslau	1934 EE.UU	1934 EE.UU

Tabla 2. Lista de matemáticos germano-hablantes que emigraron durante el Periodo Nazi (Primera Generación), Lugar de Expulsión, 1er destino tras su expulsión y destino final hasta 1945. (cont.)

Nº	Apellidos, Nombre	Fechas	Lugar de Exp.	1er dest. tras exp.	Dest. fin. hasta 1945
104	Rado, Richard	1906-1989	Berlín	1933 GB	1933 GB
105	Reichenbach, Hans	1891-1953	Berlín	1933 Turquía	1938 EE.UU
106	Reissner, Eric(h)	1913-1996	Berlín	1936 EE.UU	1936 EE.UU
107	Reissner, Hans	1874-1967	Berlín	1938 EE.UU	1938 EE.UU
108	Reschovsky, Helene	1907-1994	Viena	1938 EE.UU	1938 EE.UU
109	Riess, Anita	?	Hamburgo?	1939 EE.UU?	1939 EE.UU?
110	Rogosinski, Werner	1894-1964	Königsberg	1937 GB	1937 GB
111	Romberg, Werner	1909-2003	Múnich	1933 SU	1938 Noruega
112	Rosenthal, Artur	1887-1959	Heidelberg	1939 Holanda	1940 EE.UU
113	Rothberger, Fritz	1902-2000	Viena	1937 Polonia	1940 Canadá
114	Rothe, Erich (Eric)	1895-1988	Breslau	1937 GB	1938 EE.UU
115	Sadowsky, Michael	1902-1967	Berlín	1934 Bélgica	1938 EE.UU
116	Samelson, Hans	1916-2005	Breslau	1936 Suiza	1941 EE.UU
117	Scherk, Peter	1910-1985	Gotinga	1936 Chequia	1943 Canadá
118	Schiffer, Max	1911-1997	Berlín	1933 Palestina	1933 Palestina
119	Schilling, Otto	1911-1973	Marburgo	1934 GB	1935 EE.UU
120	Schur, Issai	1875-1941	Berlín	1939 Palestina	1939 Palestina
121	Schwerdtfeger, Hans	1902-1990	Gotinga/Bonn	1936 Chequia	1939 Australia
122	Seckel, Alfred	?	Freiburgo?	1939 EE.UU	1939 EE.UU
123	Siegel, Carl Ludwig	1896-1981	Frankfurt/Gotinga	1940 EE.UU	1940 EE.UU
124	Simon, Heinz	?	Frankfurt	1940 EE.UU	1940 EE.UU
125	Sperling, Käte	1905-1983	Berlín	1933 Dinamarca	1942 Suecia
126	Steinhaus, Heinz	1908-?	Gotinga	1933 EE.UU	1933 EE.UU
127	Sternberg, Wolfgang	1887-1953	Breslau	1935 Palestina	1939 EE.UU
128	Szász, Otto	1884-1952	Frankfurt	1934 EE.UU	1934 EE.UU
129	Szegö, Gabor (Gabriel)	1895-1985	Königsberg	1934 EE.UU	1934 EE.UU
130	Tamari, Dov	1911-2006	Frankfurt	1933 Palestina	1933 Palestina
131	Taussky, Olga	1906-1995	Gotinga/Viena	1934 EE.UU	1937 GB
132	Theilheimer, Feodor	1909-2000	Berlín	1937 EE.UU	1937 EE.UU
133	Thullen, Peter	1907-1996	Münster / Roma	1934 Italia	1935 Ecuador
134	Tintner, Gerhard	1907-1983	Viena	1936 EE.UU	1936 EE.UU
135	Toeplitz, Otto	1881-1940	Bonn	1939 Palestina	1939 Palestina
136	Vajda, Stefan	1901-1995	Viena	1939 GB	1939 GB
137	Wald, Abraham	1902-1950	Viena	1938 EE.UU	1938 EE.UU
138	Warschawski, Stefan	1904-1989	Gotinga	1933 Holanda	1934 EE.UU
139	Wasow, Wolfgang	1909-1993	Gotinga	1933 Francia	1939 EE.UU
140	Weinberg, Josef	1909-1943	Freiburgo	1936 Bélgica	1936 Bélgica
141	Weinstein, Alexander	1897-1979	Breslau	1933 Francia	1941 Canadá
142	Weyl, Hermann	1885-1955	Gotinga	1933 EE.UU	1933 EE.UU
143	Winternitz, Artur	1893-1961	Praga	1939 GB	1939 GB
144	Zatzkis, Henry	1915-ant. 2007	Heidelberg	1939 GB	1940 EE.UU
145	Zorn, Max	1906-1993	Hamburgo	1933 EE.UU	1933 EE.UU

Tabla 3. Lista de matemáticos germano-hablantes que fueron asesinados o forzados al suicidio.

Nº	Apellidos, Nombre	Fechas	Localización en 1933/38/39	Causa de su muerte
1	Berwald, Ludwig	1883-1942	1939 Praga	Asesinado
2	Blumenthal, Otto	1876-1944	1933 Aachen	Asesinado
3	Eckhart, Ludwig	1890-1938	1938 Viena	Suicidio
4	Epstein, Paul	1871-1939	1933 Frankfurt	Suicidio
5	Frölich, Walter	1902-1942	1939 Praga	Asesinado
6	Grelling, Kurt	1886-1942	1933 Berlín	Asesinado
7	Haenzel, Gerhard	1898-1944	1933 Karlsruhe	Forzado al suicidio
8	Hartogs, Fritz	1874-1943	1933 Múnich	Suicidio
9	Hausdorff, Félix	1868-1942	1933 Bonn	Suicidio
10	Hurwitz, Charlotte	1889-?	1933 Berlín	Asesinado
11	Kahn, Margarete	1880–1942	1933 Berlín	Asesinado
12	Lonnerstädter, Paul	1900–?	1933 Wurzburgo ??	Asesinado
13	Neumann, Nelly	1886–1942	1933 Essen	Asesinado
14	Pick, Georg	1859–1942	1939 Praga	Asesinado
15	Remak, Robert	1888–1942	1933 Berlín	Asesinado
16	Schlick, Moritz	1882–1936	1933 Viena	Asesinado
17	Strassmann, Reinhold	1893–1944	1933 Berlín	Asesinado
18	Tauber, Alfred	1866–1942	1938 Viena	Asesinado

5. El contexto educativo nazi

En medio de una atmósfera desconcertante en la universidad, con continuos altercados que sobresaltaban a menudo la armonía educativa, el periodo desde que Hitler se hizo con el poder absoluto hasta el estallido de la 2ª Guerra Mundial se caracterizó por el uso partidista de la información y la manipulación ideológica de las grandes masas que sirvieron de propaganda nazi y que por supuesto no dejaron indiferente a ningún estamento u organización social.

La propaganda nazi afectó también en gran medida al sistema educativo. Para los nazis era fundamental educar, incluso "moldear" a los jóvenes bajo el adoctrinamiento nacionalsocialista, para lo que utilizaron infinidad de vías imaginables. Al frente de esta manipulación se colocó la figura del Ministro de Propaganda Nazi, Joseph Goebbles, un personaje carente de ningún tipo de escrúpulo a la hora de manejar y manipular la información y los medios a su antojo para cumplir con los objetivos nacionalsocialistas. Se llevó a cabo una persecución de todo aquello que tuviera relación con los judíos, como por ejemplo la quema de miles de libros que desaparecieron de las bibliotecas alemanas el 10 de mayo de 1933. Se calcula que sólo en Berlín, los nazis quemaron esa noche 20.000 publicaciones de filósofos, científicos, poetas, escritores. Sus nombres pasaron a integrar las "listas negras". La quema de libros fue un acto simbólico y propagandístico, que Goebbels alabó como *"un día en que Alemania había comenzado a limpiarse interna y externamente"*.

De la mano de Goebbels, los medios de comunicación se alinearon con las pretensiones de la cúpula nazi, que consideraba a los jóvenes como un objetivo fácilmente accesible y manipulable a la imagen y semejanza de su adoctrinamiento. Los jóvenes debían ser considerados como los principales valedores del Reich futuro. Para ello diseñaron toda una estrategia formativa social, cultural, e incluso ideológica en los valores nacionalsocialistas, otorgando el protagonismo a la *Juventud Hitleriana*. En esta asociación, los jóvenes eran educados en los ideales nazis, donde

[25] http://www.ushmm.org/wlc/en/media_ph.php?ModuleId=10005852&MediaId=8194

Figura 20. Quema de libros en la Opernplatz de Berlín (10 de mayo de 1933).[25]

se ensalzaba la figura de Hitler como el líder omnipresente. Adicionalmente se celebraban los *Sommerkampfspiele* ("Campamentos de Juego de Verano"), donde el deporte animaba el espíritu competitivo en los jóvenes con el fin de reforzar su tenacidad y determinación. La educación de los futuros ciudadanos de la Alemania Nacionalsocialista se fundamentaba en la enseñanza de la concepción socio-económica nacionalsocialista y en el ejercicio corporal. Su entrenamiento físico incluía largas marchas por el campo y el desempeño activo de multitud de disciplinas deportivas. Desde el punto de vista pedagógico y educativo, los nazis hicieron uso de las diferentes materias lectivas con fines políticos, educando a los niños en la consideración del *Führer* como el líder supremo al que había que seguir incondicionalmente.

Figura 21. Carteles propagandísticos de la Juventud Hitleriana (1940), en los que puede leerse "La Juventud sirve al Líder", o "Los oficiales del mañana".[26]

Al igual que el resto de las materias pedagógicas, también las matemáticas sirvieron para "aleccionar" a los jóvenes en los valores nacionalsocialistas, cuyo objetivo pretendía poner de manifiesto su utilidad desde el punto de vista práctico. Los niños de primaria se topaban con la resolución de problemas en los que se pretendía sembrar el odio racial, y la animadversión de

[26] Deutches Historisches Museum (Museo Alemán de Historia). http://www.dhm.de

aquellos a los que los nazis consideraban parásitos de su sociedad, cargando en contra fundamentalmente de las minorías étnicas y los discapacitados. En 1936 los nazis distribuyeron una guía denominada *Matemáticas en el Servicio de Educación Nacional y Política*, en el que se instaba a los profesores de matemáticas en particular, y al resto de público en general, a seguir una serie de directrices pedagógicas con ejemplos ilustrativos que iban desde los más inocentes a los más tendenciosos. Por ejemplo, en esta guía podían encontrarse los siguientes problemas:

> *"Un loco cuesta cada día 4 marcos, un inválido* $5{,}5$ *marcos, un criminal* $3{,}5$ *marcos. En muchos casos, un funcionario no cobra más que 4 marcos, un empleado* $3{,}6$ *marcos, un aprendiz 2 marcos. Calculad cuánto cuestan anualmente los 300.000 locos y epilépticos de Alemania.*
>
> *¿Cuánto se ahorraría el estado si estos individuos fueran eliminados? ¿Cuántos préstamos de 1000 marcos podríamos conceder a matrimonios si pudiéramos economizar ese dinero?"*

o este otro, en el que se intenta mostrar a los jóvenes la importancia de "deshacerse" de todo aquel que supusiera una carga carente de utilidad para el estado, comenzando ya a fraguarse el concepto de lo que años después se acuñaría como la *Solución Final*:

> *"Para la edificación de un manicomio se necesitan 6 millones de marcos ¿Cuántas casas residenciales, a 1.500 marcos cada una, se hubieran podido construir en lugar del manicomio?"*

o este último en el que se intenta poner de manifiesto el peligro que corría la supremacía de la "raza aria" debido al crecimiento demográfico de otras razas consideradas inferiores por los nazis:

> *"Entre los tres grupos raciales más importantes de Europa, se detectó el siguiente crecimiento de la población entre 1900 y 1930:*
>
> - *Población teutónica: De 124 millones a 149 millones.*
> - *Población latina: De 103 millones a 121 millones.*
> - *Población eslava: De 166 millones a 226 millones.*
>
> *Asumiendo un nivel de crecimiento constante, calcula el crecimiento de estos tres grupos en un período de diez años. ¿Cuál será el porcentaje de población de los tres grupos en el año 1960 si esta tendencia continúa?. ¿Qué riesgos para la población alemana puedes percibir si no ocurre un cambio en esta tendencia?"*

Los nazis consideraban su supremacía racial hasta tal punto que defendían su legitimidad a imponerse frente a otras etnias y apropiarse de sus territorios. Los judíos eran considerados como el enemigo absoluto de Alemania, y principales causantes de su decadencia; pero el odio racial no sólo se focalizaba en éstos, por el contrario se hacía generalizado para cualquier tipo de raza, como los eslavos o los gitanos. Para ello era fundamental inculcar en los jóvenes estos conceptos. De hecho, Hitler escribió en *Mein Kampf*:

> *"La culminación de toda labor educacional del Estado racista consistirá en infiltrar instintiva y racionalmente en los corazones y los cerebros de la juventud que le está confiada, la noción y el sentimiento de raza. Ningún adolescente, sea varón o mujer, deberá dejar la escuela antes de hallarse plenamente convencido de lo que significa la puridad de la sangre y su necesidad."*

Resulta paradójico que unas ciencias tan objetivas y alejadas de cualquier tipo de manipulación ideológica como las matemáticas, pudieran ser utilizadas por los nazis de una manera tan cruel y partidista, pero así fue.

6. El destino final

6.1. Gotinga

En contraste con el crecimiento del movimiento *Deutsche Mathematik* en Berlín, el declive de la matemática alemana puede ser descrito en términos de la disolución de la matemática de Gotinga tras el ascenso al poder de Hitler en 1933. Ninguno del resto de centros alemanes, como las universidades de Heidelberg, Berlín, Frankfurt, Freiburg, Viena y Königsberg, sufrieron en tan alto grado las repercusiones que conllevaron la aprobación de la LRSCP. No es de extrañar que en 1933, durante el transcurso de un banquete, el ministro nazi de educación Bernhard Rust se dirigiera a Hilbert preguntándole: *"¿cómo están las matemáticas en Gotinga ahora que se han liberado de los judíos?"*, a lo que Hilbert, que había sido muy crítico con el nazismo, respondió: *"¿Matemáticas en Gotinga? Ya no hay nada de eso allí"*.

Hilbert, que se había retirado con honores en 1930, continuó en Gotinga hasta su muerte en 1943 y sufrió al observar como la institución a la que tanto amor profesó fue prácticamente desmantelada, viendo como el número de estudiantes de matemáticas y física se reducía prácticamente en un 90 % desde 1932 a 1937. De los cinco profesores que enseñaban matemáticas en Gotinga tras la instauración de la LRSCP, tres de ellos (Edmund Landau, Richard Courant y Félix Bernstein) eran judíos. Un cuarto, Hermann Weyl (que había sucedido a Hilbert), tenía esposa judía. Únicamente Gustav Herglotz tenía un estatus "racialmente no comprometido". En primera instancia, ni Landau, ni Courant, sufrieron la aplicación de dicha ley en virtud de los servicios que habían prestado tras su participación durante la 1ª Guerra Mundial. Este hecho sirvió de mecha para encender las protestas de los partidarios de las proclamas nazis, quienes habían obtenido en Gotinga el doble de votos que su media obtenidos en el resto de Alemania. Además los nazis tenían un vasta representación en el Congreso Estudiantil de la Universidad desde 1926. El 26 de Abril el periódico de la ciudad, el *Göttinger Tageblatt*, que tenía cierta afinidad hacia el NSDAP, publicó un artículo en el que se anunciaba la expulsión de seis profesores de la universidad, a los que sorprendentemente no se les había notificado este anuncio.

Notables matemáticos como Emmy Noether, Hermann Weyl o Richard Courant, fueron de los primeros que perdieron su trabajo y emigraron rápidamente a los EE.UU. Otros como Helmut Hasse intentaron continuar con su actividad docente en Gotinga. Entre Abril y Noviembre de 1933, el ambiente de la facultad de matemáticas de Gotinga se hizo cada vez más insoportable. Los judíos no fueron los únicos que sufrieron una restricción cada vez mayor de todos sus derechos, sino que cualquiera que tuviera cualquier tipo de afinidad ideológica "izquierdista" fue puesto bajo sospecha. Incluso 18 miembros de la facultad fueron despedidos del Instituto de Matemáticas de Gotinga. Estos hechos significaron el comienzo del fin en Gotinga.

Paradójicamente, tras la guerra, Gotinga fue la primera en recuperar la actividad docente, readmitiendo a algunos de los matemáticos más notables que habían sido expulsados previamente.

6.2. Emigración y ayudas

Una gran cantidad de matemáticos se vieron obligados a emigrar, fundamentalmente a Gran Bretaña y a los EE.UU, aunque algunos lo hicieron a destinos más comprometidos como Rusia o Palestina. La mayoría de ellos tuvo que hacerlo en 1933, debido a la aprobación de la LRSPC, aunque otros como Kurt Gödel esperaron incluso hasta 1939, o Carl Ludwig Siegel en 1940.

G. H. Hardy consiguió colocar a 18 matemáticos en Cambridge. Existieron fundaciones como la *American Rockefeller* que consiguieron reunir fondos con el fin de ayudar a 300 docentes, incluida una docena de matemáticos como Courant, Siegel, y Noether, para que pudieran emigrar a los EE.UU. Sin embargo en los EE.UU, el recibimiento no fue todo lo bueno que muchos de los emigrantes hubieran deseado. En aquellos años, unos EE.UU en recesión se recuperaban lentamente de la profunda depresión de 1929, con unas altas cifras de desempleo del cual sus matemáticos no eran ajenos. En vista de la ayuda suministrada a los emigrantes germanos, muchos de estos matemáticos americanos consideraron que estaban perdiendo parte de lo que juzgaban suyo, lo cual se tradujo en cierto antisemitismo hacia dichos emigrantes.

Muchos matemáticos, judíos o no, encontraron un lugar en los EE.UU en universidades como Princeton, en New Jersey. Tras la guerra, Princeton se convirtió en el principal centro de las matemáticas americanas durante la segunda mitad del siglo XX, hecho este al que colaboraron en gran medida todos los emigrantes alemanes que mantuvieron en cierto modo el espíritu creativo e intelectual de los primeros matemáticos de la *tradición matemática alemana* del siglo XIX.

6.3. Algunos casos representativos

6.3.1. Otto Blumenthal (1876-1944)

Junto al muniqués Emil Julius Gumbel (1891-1966) en Heidelberg, Ludwig Otto Blumenthal, el primer doctorando de Hilbert, fue una de las primeras víctimas de la intervención nazi en las universidades alemanas debido a la aplicación de la LRSCP. Poco después de que los nazis tomaran el poder, la Asociación de Estudiantes de la Universidad de Aachen denunció su supuesto comunismo en una carta fechada el 18 de marzo de 1933. Bernhard Rust, Ministro de Ciencia, Cultura y Educación, que a la postre era uno de los que firmaban dicha carta, suspendió del servicio al físico Hermann Starke y al propio Blumenthal el 22 de septiembre de 1933, debido a que aunque sus padres y él mismo se habían convertido del judaísmo a la fe protestante en 1895, e incluso se había mostrado como un miembro bastante activo de la comunidad protestante en la ciudad de Aachen durante muchos años, las leyes nazis no contemplaban la conversión de fe como un hecho excluyente.

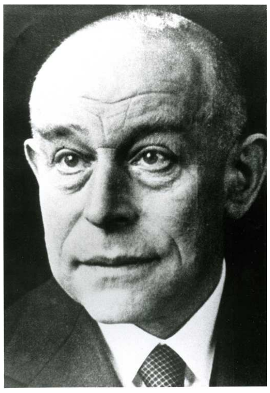


Figura 22. Ludwig Otto Blumenthal.[27]

Las leyes establecían que Blumenthal tenía que especificar información sobre sus orígenes raciales, por lo que éste afirmó que sus padres y abuelos habían sido miembros de la congregación judía de Frankfurt. En 1935, se le prohibió ejercer toda actividad en Alemania. En 1938, se vio forzado a abandonar el comité editorial de la revista *Mathematische Annalen* de la que David Hilbert era el editor jefe. Aunque él y su mujer se las arreglaron para que sus dos hijos pudieran encontrar refugio en Reino Unido, ellos permanecieron en Aachen hasta marzo de 1939, cuando Blumenthal aceptó una oferta de David Van Dantzig para enseñar en el Instituto Tecnológico de Delft. El matrimonio emigró a Holanda, sin embargo su suerte se volvería contraria nuevamente ya que los alemanes ocuparon este territorio. Junto a su mujer fueron arrestados y deportados, recibiendo en su destino un trato humillante. Parece ser que muchos de sus amigos intentaron esconderle, sin embargo Blumenthal se negó a ello porque "no quería poner en peligro a amigos". Su mujer Mali murió en el campo de Westerbork, y el propio Blumenthal, que había enfermado de neumonía, disentería y tuberculosis, falleció a la edad de 68 años el 13 de noviembre de 1944 en el gueto de Theresienstadt, en Bohemia, hoy la República Checa.

Blumenthal debe ser considerado fundamentalmente un analista. Trabajó en teoría de función compleja, polinomios ortogonales (Teorema de Blumenthal-Nevai), Formas Modulares de Hilbert-Blumenthal, o aplicaciones matemáticas y físicas del Teorema de descomposición fundamental de Helmholtz, que dependían en gran medida de la aplicabilidad del clásico Teorema

[27] http://www.math.rwth-aachen.de/ Blumenthal/Vortrag/folie_15.html

de descomposición de Stokes-Helmholtz.

6.3.2. Félix Hausdorff (1868-1842)

Figura 23. Félix Hausdorff.[28]

La historia de Hausdorff es una de las más tristes de la familia de ilustres matemáticos. Desde el punto de vista personal, debido a su origen judío, siempre tuvo que enfrentarse a un antisemitismo que continuamente le había dado problemas. Sufrió el bloqueo promocional en el ejército, y fue víctima de continuas amenazas que impidieron su promoción en la Universidad de Leipzig. En cierta ocasión, un joven profesor, cuyo nombramiento había defendido Hausdorff en 1926, se hizo abiertamente anti-semita en 1933, repudiando cualquier contacto anterior con judíos y negándose a colaborar con el resto de los profesores en aquellos seminarios dirigidos o impartidos por matemáticos de origen judío. En abril de 1933 el gobierno nazi aprobó la LRSCP, pero la Universidad de Bonn intercedió en defensa de Hausdorff para evitar su expulsión. Sin embargo pese a todos los esfuerzos, fue finalmente obligado a abandonar su cargo y jubilarse. Desde ese preciso instante, sufrió continuamente una auténtica persecución. En 1941 él y su familia fueron obligados a ceder gran parte de sus posesiones, incluida parte de su casa a nuevos inquilinos, quedando los Hausdorff relegados a una impropia infravivienda en la primera planta y el sótano.

En noviembre de 1938, 20.000 judíos fueron arrestados y se produjeron abusos y destrozos en cientos de hogares, tiendas y sinagogas judías, hecho que sumió a Hausdorff en una profunda depresión. Su mujer Charlotte y la hermana de ésta, Edith, trataron de levantar su ánimo pero los acontecimientos lejos de mejorar iban a peor. Él continuo trabajando en sus matemáticas, aunque en lugar de publicar sus escritos, los guardaba para sí mismo.

A mitad de enero de 1942, él y su familia recibieron una trágica comunicación, con la orden de presentarse en el campo de internamiento judío situado en un antiguo monasterio, a lo cual le seguiría con total seguridad una deportación a un campo de concentración. En su última carta en la que dejaba instrucciones sobre sus pocas propiedades escribía a su amigo y abogado de la familia Hans Wollstein:

> *"Estimado amigo Wollstein,*
>
> *Cuando reciba estas lineas, los tres habremos resuelto el problema de otra forma - de la forma de la que nos ha intentado disuadir continuamente. [...] Lo que se ha hecho en contra de los judíos en los últimos meses despierta ansiedad, con fundamento, de que no nos dejarán seguir viviendo en una situación soportable. Diga a los Philippson lo que crea oportuno, además de darles las gracias por su amistad (la cual, sin embargo, sobretodo usted merece). También dé a Herr Mayer nuestras gracias de todo corazón por todo lo que ha hecho por nosotros y, si hubiera sido necesario, todo lo que habría hecho. Nos hemos maravillado sinceramente con sus triunfos de organización, y, si no tuviéramos esta ansiedad, nos hubiéramos puesto en sus manos con mucho gusto, lo cual, en efecto, hubiera traído una sensación relativa de seguridad - desgraciadamente sólo relativa. Con nuestro testamento fechado el 10 de octubre de 1941, hemos considerado nuestro heredero a nuestro yerno, el doctor Arthur König, con residencia en Reichardstieg 14, Jena. [...]*
>
> *Perdónenos si le causamos problemas mas allá de la muerte; estoy convencido de que usted hará lo que pueda (y que quizá no sea mucho). ¡Perdone también nuestra deserción! Le deseamos a usted y a todos nuestros amigos mejores tiempos.*
>
> *Sinceramente, Félix Hausdorff."*

[28] http://131.220.77.52/Junior-HTP

Hausdorff, su esposa y su cuñada se suicidaban el 26 de enero de 1942, con una sobredosis de barbitúricos.

Hausdorff debe ser considerado como uno de los fundadores de la topología moderna. Comenzó sus investigaciones en campos como la geometría no euclídea, números complejos y probabilidad. Se interesó en gran medida por el trabajo de Georg Cantor sobre teoría de conjuntos, y por el de David Hilbert que por aquel entonces estudiaba la aplicabilidad de la teoría de conjuntos en geometría. A buen seguro estos trabajos sirvieron de profunda inspiración para sus investigaciones.

En 1910, aceptó un puesto de profesor asociado en la Universidad de Bonn, sin embargo se trasladó a Greifswald en 1913 en cuya Universidad consiguió un puesto de profesor titular. Al año siguiente publicó su gran obra *Grundzüge der Mengenlehre* (Fundamentos de la Teoría de Conjuntos), considerado como uno de los pilares fundamentales de la topología moderna. En palabras de Carl B. Boyer, *"La Topología emerge en el siglo veinte como una materia que unifica casi toda la matemática, de modo análogo a como la filosofía trata de coordinar todos los conocimientos."*

En 1919, generalizó el concepto de dimensión, con el fin de incluir la posibilidad de definir objetos con dimensión fraccionaria, tan importantes en campos de la matemática moderna como la geometría fractal.

En 1921, regresó a la Universidad de Bonn, donde permaneció como profesor hasta su jubilación forzada en 1935.

6.3.3. Otros protagonistas

Figura 24. De izq. a drcha. Richard Courant, Emmy Noether, Hermann Weyl y Richard von Mises.

Richard Courant (1888-1972) alumno de David Hilbert y Félix Klein, se convirtió en la figura sobresaliente de las florecientes matemáticas de Gotinga en los años 20. Emigró a los EE.UU y creó una escuela de graduación de matemáticas en la Universidad de Nueva York, el cual llegó a convertirse en un centro para el desarrollo de las matemáticas aplicadas durante la guerra y más tarde en una institución pionera para la incorporación de técnicas computacionales en las matemáticas.

Emmy Noether (1882-1935) fue sin lugar a dudas la matemática más influyente del siglo XX, aportando contribuciones fundamentales en el campo del álgebra. Fue, junto a Hermann Weyl, fundadora de la Fundación para la Ayuda de Matemáticos Alemanes. Emigró a los EE.UU y logró emplearse en Princeton, donde impartió charlas y seminarios sobre álgebra geométrica que influyó en los trabajos del italoruso Óscar Zariski.

Hermann Weyl (1855-1955) estudiante de Hilbert y matemático universal, investigó sobre Grupos de Lie, Superficies Riemannianas, y Física Matemática. Tras la aplicación de la LRSCP, tuvo que abandonar Gotinga en 1933. Tuvo que emigrar a EE.UU por miedo a que se tomaran acciones contra su mujer (que era judía) e hijos. Pudo encontrar una plaza docente en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y llegó a ser uno de los emigrantes más influyentes, ayudando a otros con la ayuda de Oswald Veblen, H. Shapley (Harvard), y otros americanos, para minimizar los problemas de adaptación de los refugiados.

Richard von Mises (1883-1953) fue un matemático que trabajó en multitud de campos como la estocástica o la mecánica. Tras su expulsión de Berlín, emigró en primera instancia a Turquía donde enseñó matemáticas. Finalmente emigró a EE.UU en 1939, donde se convirtió en profesor de la Universidad de Harvard en 1945.

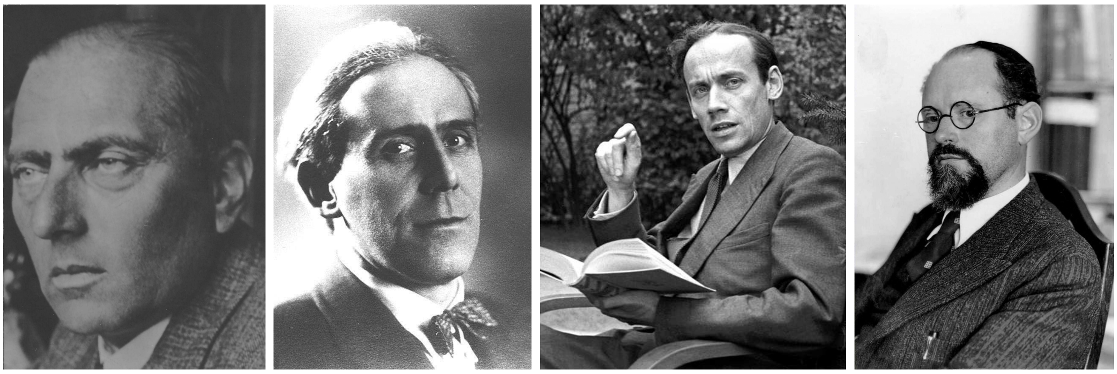


Figura 25. De izq. a drcha. Otto Toeplitz, Emil Julius Gumbel, Emil Artin y Adolf Fraenkel.

Otto Toeplitz (1881-1940) fue profesor de matemáticas en varias universidades de Alemania. En 1913 logró una plaza de docente interino en Kiel, donde promocionó en 1920 y entró a formar parte de la plantilla docente de la universidad de manera definitiva. En 1928 aceptó una oferta para convertirse en Decano de la Universidad de Bonn. Debido a su origen judío, Toeplitz tuvo que abandonar su primero su docencia en Bonn en 1933 y después su decanato en 1935, aunque orgulloso de su origen permaneció en Alemania hasta 1939, ayudando y colaborando con gran pasión y devoción a varias organizaciones judías relacionadas con la enseñanza. Trabajó fundamentalmente en Álgebra Lineal y Análisis Funcional y se interesó en gran medida por la historia de las matemáticas, llegando a escribir varias obras sobre este tema, de los que cabe destacar *El Disfrute de las Matemáticas*, en colaboración de Hans Rademacher.

Emil Julius Gumbel (1891-1966) fue profesor de Estadística en la Universidad de Heidelberg. De profundas convicciones políticas, siempre se manifestó radicalmente en contra de los nazis, sobre todo tras el impune asesinato de un íntimo amigo a manos de los *Camisas Pardas*. Profundamente afectado por este hecho decidió investigar en mayor profundidad crimenes similares, publicando *Cuatro años de asesinatos políticos* en 1922 y *Causas del Asesinato Político* en 1928. Fue una de las primeras víctimas en sufrir la presión nazi hacia todo aquello que se interpusiera en su camino. Forzado a abandonar su posición en 1932, tuvo que emigrar a Francia, donde impartió docencia en París y Lyon, y de allí a los EE.UU en 1940, donde impartió clases en la Universidad de Columbia y el École Libre Des Hautes Études en Nueva York hasta su muerte en 1966.

Emil Artin (1898-1962) fue uno de los doctorandos más notables de Richard Courant y David Hilbert. A principios de los años 20 trabajó en estrecha colaboración junto a Emmy Noether y Helmut Hasse en Gotinga. En 1922 Courant le consiguió una plaza en la Universidad de Kiel, y el siguiente octubre la Universidad de Hamburgo le ofreció una plaza similar, donde finalmente completaría su habilitación, alcanzando el 24 de julio la categoría de *privatdozen*. Austríaco de nacimiento, en 1925 solicitó la ciudadanía alemana, y en ese mismo año se convirtió en profesor asociado y más tarde el 15 de octubre de 1926, profesor titular. Aunque en 1933 le ambiente en Hamburgo no resultaba tan precario, comenzaba a notarse la aplicación de la LRSCP, que en 1935 acabó por "purgar" de judíos y disidentes el departamento de matemáticas. A pesar de su difícil situación personal (su mujer Natascha era medio judía), nunca escondió su abierta repulsa al régimen nazi. A pesar de algunos intentos de intermediación de algunos compañeros de Artin como Blaschke y Hasse, profundamente nacionalistas, con el fin de que Artin no se viera comprometido a pesar del status de su esposa, todos los esfuerzos resultaron en vano y el 15 de julio de 1937 fue anticipadamente retirado del servicio. A pesar de todo este aparente desastre, Artin salió bien parado, ya que el 8 de febrero de 1937 recibió la contestación de una solicitud hecha meses antes para solicitar una excedencia para aceptar una plaza que le ofrecieron en Stanford. Sin embargo, para julio de ese mismo año, momento en el que Artin estaba oficialmente retirado, la vacante en Stanford había sido ocupada, y aunque Richard Courant (por entonces en Nueva York) y Solomon Lefschetz (en Princeton) intentaron acomodarlo, finalmente encontró una plaza en la Universidad de Notre Dame en South Bend, Indiana, EE.UU. Finalmente regresaría nuevamente para establecer definitivamente su residencia en Hamburgo en 1958. Artin fue uno de los principales algebristas del siglo XX. Trabajó en teoría algebraica de números, contribuyendo en gran medida a la teoría de campos y en una nueva construcción de funciones *L*, además de teorías de anillos, grupos y campos. Se dice que el desarrollo del álgebra abstracta de van der Waerden se vió influenciado en gran medida por las ideas de Artin, además por supuesto de las de Emmy Noether, madre de esta rama.

Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891-1965) empezó sus estudios universitarios en la Universidad de Múnich, su propia ciudad, y después continuó en las universidades de Marburg, Berlín y Breslau. Aceptó en 1916 un cargo en la Universidad de Marburg como docente no asalariado, o *privatdocent*, y más tarde, en 1922, promocionó a profesor asociado. En 1928 recibió una oferta de profesor titular en la Universidad de Kiel. Aceptó pero un año después tomó una excedencia para ir como profesor visitante a la Universidad Hebrea de Jerusalén, donde trabajó dos años. A su regreso a Alemania, Fraenkel continuó su trabajo en Kiel. Tras alcanzar Hitler la Cancillería, Fraenkel temeroso de su familia decidió que era el momento de emigrar, marchando primero a Ámsterdam en la vecina Holanda. Fraenkel y su familia estuvieron solamente dos meses en Ámsterdam, vigilando de cerca la situación de Alemania. Convencidos de que no había una posibilidad de vuelta atrás bajo el régimen nazi, Fraenkel escribió una carta de dimisión a la Universidad de Kiel en Abril de 1933 y se dirigió a Jerusalén para ejercer docencia en la Universidad Hebrea. Fraenkel trabajó fundamentalmente en Teoría de Conjuntos y Lógica Moderna.

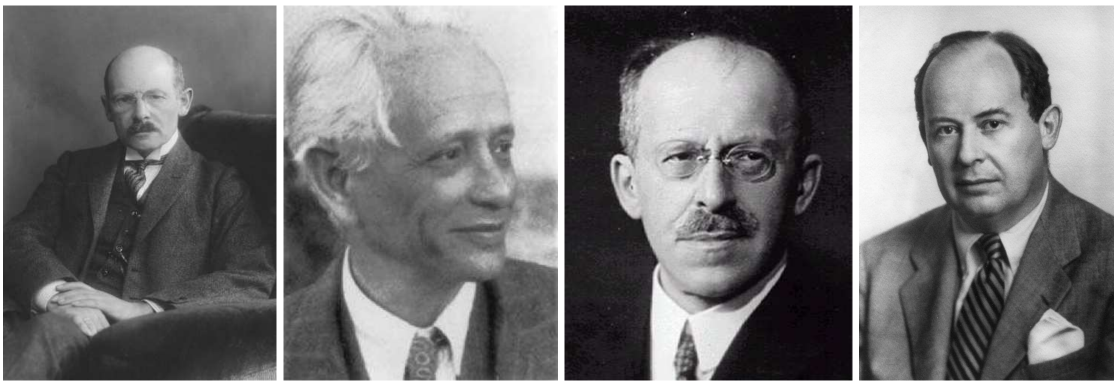


Figura 26. De izq. a drcha. Félix Bersntein, Max Dehn, Issai Schur y John von Neumann.

Félix Bernstein (1878-1956) centró sus trabajos de investigación en Teoría de Conjuntos de Cantor. Dirigió el Instituto de Matemáticas Estadística de Gotinga en los años 20. Gracias a la aplicación de la LRSCP, fue forzado a abandonar su posición y tuvo que emigrar a los EE.UU. Desgraciadamente nunca fue capaz de encontrar una posición docente adecuada por lo que al final de su vida tuvo graves problemas financieros para sobrevivir.

Max Dehn (1878-1952) fue el cofundador de la moderna topología, y ocupó su trabajo de investigación en cuestiones filosóficas e históricas de matemáticas. Tras su expulsión de Frankfurt, encontró una posición muy secundaria en el Colegio Black Mountain en Carolina del Norte. Tras la guerra la autoridades de Frankfurt lamentaron la oportunidad de devolver a Dehn una readmisión digna.

Issai Schur (1875-1941) fue alumno de Georg Frobenius, centrando su trabajo de investigación fundamentalmente en Teoría de Representación de Grupos, que cobraba vital importancia en mecánica cuántica. Históricamente, la escuela de Berlín en torno a Schur permaneció en cierto modo en un segundo plano frente a la escuela de álgebra abstracta de Emmy Noether en Gotinga. Schur no pudo emigrar a los EE.UU al inicio del régimen nazi y se vio obligado a dimitir de la Academia Prusiana en 1938. Finalmente tuvo que emigrar a Palestina en 1939 para poder salvar su vida, y murió en Tel Aviv en la más absoluta pobreza.

John von Neumann (1903-1957) abandonó su docencia en la Universidad de Berlín en 1933. Matemático universal, emigró a EE.UU, y consiguió establecerse en Princeton, donde ya había impartido clases durante los semestres de invierno. Tras esto se convirtió en uno de los matemáticos americanos más influyentes, llegando a ser miembro de la Comisión de la Energía Atómica de los EE.UU.

Figura 27. De izq. a drcha. Otto Neugebauer, Carl Ludwig Siegel, Hans Freudenthal y Kurt Reidemeister.

Otto Neugebauer (1899-1990), matemático e historiador de Gotinga, alcanzó su máximo esplendor profesional cuando descifró las Tablas Cuneiformes Babilónicas. Abandonó Alemania en 1933 debido a razones políticas. Trasladó la publicación del Diario *Zentralblatt del Mathematik* a Copenhague y más tarde (en 1940) fundó el *Mathematical Reviews* en los EE.UU.

Carl Ludwig Siegel (1896-1981) trabajó en campos tan dispares como teoría de números y mecánica celeste. Fue uno de los pocos afortunados que logró emigrar "voluntariamente", en el sentido que nunca fue racialmente o políticamente perseguido. Emigró a los EE.UU, pero tras la guerra mantuvo su contacto con su tierra natal, regresando varias veces a Alemania.

Hans Freudenthal (1905-1990) centró sus investigaciones en topología. Tuvo que emigrar desde Berlín en 1930 y ayudó a muchos otros matemáticos emigrantes holandeses tras la ocupación nazi en 1933.

Kurt Reidemeister (1893-1971) fue un matemático multidisciplinar que dedicó sus investigaciones a campos como los fundamentos de la geometría, topología y teoría de números. Fue obligado a abandonar Königsberg y trasladarse a Marburg debido a motivos disciplinares, aunque en el fondo existían razones políticas tras los conflictos debido a su confrontación con estudiantes nacionalsocialistas.

Los deseos expansionistas de Hitler no dejaron indiferentes a Austria. El Círculo de Viena, fundado entre otros por Moritz Schlick en 1922, fue una corriente de pensamiento formada fun-

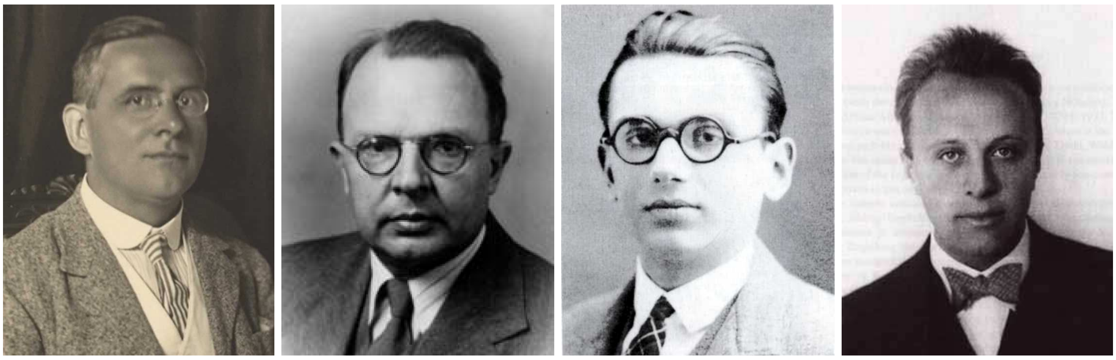


Figura 28. De izq. a drcha. Moritz Schlick, Rudolf Carnap, Kurt Gödel y Karl Menger (todos miembros del Círculo de Viena).

damentalmente por matemáticos, filósofos y científicos en general, cuyos miembros abogaron por la defensa de la concepción científica del mundo, el método inductivo, la unificación del lenguaje de la ciencia y la refutación de la metafísica. El ascenso del nazismo, fruto de la presión política y social a la que las "ordas" nazis sometieron a los estamentos austriacos, acabó por forzar la disolución de esta prometedora organización.

Moritz Schlick (1882-1936) fue profesor de Filosofía de las ciencias Inductivas en la Universidad de Viena desde 1922. Fundó el Círculo de Viena (denominado inicialmente *Ernst March*) con el fin de llevar a cabo reuniones periódicas para discutir sobre ciencia y filosofía. Tras el ascenso del nazismo que clamaba por una anexión de Austria como una provincia del Reich, al contrario que muchos miembros del Círculo de Viena, Schlick decidió permanecer trabajando con consternación en Viena, a pesar de manifestar de una forma crítica su rechazo y repulsa a las últimas revueltas y situaciones de crispación provocadas por los nazis. El 22 de junio de 1936, un ex alumno de Schlick, Johann Nelböck, disparó en su pecho en las escaleras de la universidad cuando éste se disponía a asistir a sus clases como todos los días. Fruto de las heridas sufridas, Schlick moría poco después, sin embargo paradójicamente, a pesar del juicio y sentencia de Nëlbock, este hecho acabó por convertirse en una causa célebre del sentimiento antisemita que se estaba fraguando en Viena (poco importó que los orígenes de Schlick no fueran judíos). Poco después Nëlbock sería liberado bajo palabra y se convertiría en miembro importante del partido nazi austriaco tras la anexión de Austria (Anschluss).

Rudolf Carnap (1891-1970) dedicó sus investigaciones doctorales a la teoría axiomática del espacio y del tiempo en la Universidad de Jena con el nombre de *"Der Raum"* (1922). En 1923, Hans Reichenbach presentó a Carnap a Moritz Schlick, que quedó profundamente impresionado. En 1926, Schlick le ofreció un puesto en su departamento, uniéndose así al Círculo de Viena. Carnap se caracterizó por tener unas fuertes convicciones socialistas y pacifistas, lo que unido a su confrontación crítica con el Tercer Reich, provocó que tuviera que emigrar a los EE.UU en 1935, consiguiendo la nacionalidad en 1941. Desde 1936 hasta 1952 Carnap fue profesor de filosofía en la Universidad de Chicago, donde escribió sobre semántica, lógica modal, y sobre los fundamentos filosóficos de probabilidad e inducción. De manera anecdótica, decir que Carnap fue autodidacta del esperanto cuando sólo tenía catorce años, y siempre sintió simpatía hacia este idioma. Más tarde acudió al Congreso Universal de Esperanto en 1908 y 1922, y empleaba el idioma mientras viajaba.

Kurt Gödel (1906-1978) es un ejemplo de la rapidez con la que los cambios sociales se produjeron en una Europa que sufrió dos guerras en un breve periodo de 20 años. Gödel que hablaba muy poco el checo se convirtió automáticamente en checoslovaco a la edad de 12 años tras la caída del Imperio austrohúngaro al final de la 1ª Guerra Mundial. Decidió convertirse en ciudadano austriaco a la edad de 23 años. Cuando la Alemania nazi anexionó Austria, Gödel se convirtió automáticamente en ciudadano alemán a la edad de 32 años. Después de la Segunda

Guerra Mundial, a la edad de 42 años, se convirtió en ciudadano estadounidense. En 1931 Gödel publicó sus célebres teoremas de la incompletud, donde demostró que para todo sistema axiomático computable sea consistente no puede ser completo, es decir la consistencia de los axiomas no puede demostrarse al interior del sistema. Tras varias visitas a EE.UU, y después del Anschluss en 1938, Alemania abolió el título de *Privatdozent*, de modo que Gödel tuvo que concursar a un cargo diferente en el nuevo orden. Sin embargo, sus vínculos anteriores con miembros judíos del Círculo de Viena, especialmente con Hans Hahn que había sido su director de tesis, pesaban en su contra. Su situación se precipitó cuando se le encontró apto para el servicio militar, quedando en riesgo de ser llamado a las filas del ejército alemán, razón por la cual emigró hacia los EE.UU para asumir un cargo docente en el Instituto de Estudios Avanzados (IEA) de Princeton. En 1946 Gödel se convirtió en un miembro permanente del IEA. Alrededor de este período dejó de publicar, aunque continuo trabajando. Se convirtió plenamente en profesor del Instituto en 1955 y en profesor emérito en 1976.

Karl Menger (1902-1985) fue doctorando del matemático judío Hans Hahn en la Universidad de Viena en 1924. En 1925, el intuicionista L.E.J. Brouwer le ofreció una plaza como docente en la Universidad de Amsterdam. A finales de 1926, Menger regresó a Viena donde aceptó una cátedra y entró a formar parte del Círculo de Viena a principios de 1927. De forma paralela, Menger formó parte del Coloquio Matemático de Viena junto con otros miembros consolidados del Círculo de Viena, y otros como Franz Alt o Alfred Tarski, cuyos trabajos eran editados y publicados en *Erfebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*. Entre 1930 y 1931, asistió como docente visitante en la Universidad de Harvard y el Instituto Rice en Houston, Texas, estableciendo contactos enriquecedores con otros matemáticos como George David Birkhoff, Alfred Whitehead o Norbert Wiener. En 1936, tras asistir al Congreso Matemático de Oslo donde fue elegido vicepresidente del mismo, Menger denunció la insoportable situación que estaban soportando multitud de colegas en Austria, sin duda profundamente sensibilizado debido al asesinato de su compañero y amigo Moritz Schilick que se había producido tan sólo hacía tres semanas. En 1937 decidió emigrar a los EE.UU, aceptando una plaza en la Universidad de Notre Dame en Indiana. Tras la guerra, ninguna autoridad de la Universidad de Viena se postuló para su regreso. Su contribución matemática más famosa es su llamada "esponja de Menger", una versión tridimensional de la "alfombra de Sierpinski", relacionado íntimamente con el "conjunto de Cantor" y los fractales. Junto a Arthur Cayley, es considerado como uno de los padres de la geometría de la distancia. Trabajó en el desarrollo de la teoría de la utilidad de la economía (demostrando la paradoja de San Petesburgo) y contribuyó al desarrollo de la teoría de juegos junto a Oskar Morgenstern.

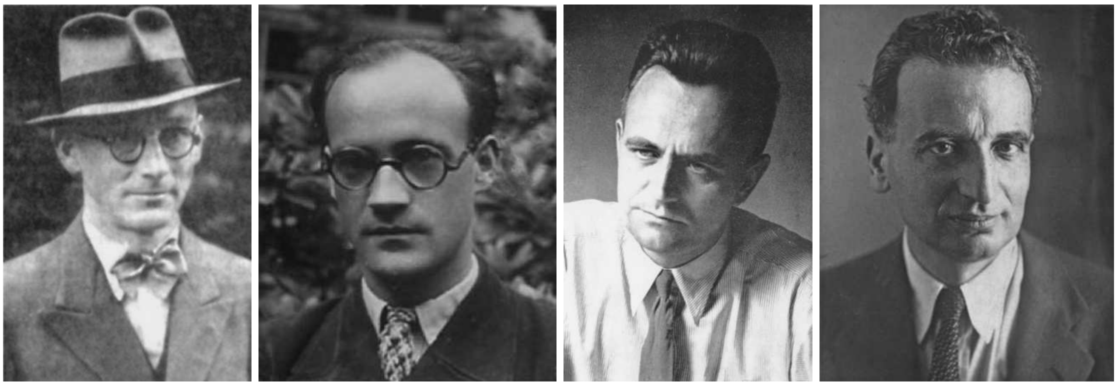


Figura 29. De izq. a drcha. Wilhelm Hausser, Peter Thullen, Rudolf Lüneburg y Theodor von Kármán.

Wilhelm Hausser (1883-1983) fue alumno de Max Noether. Profesor de matemáticas en Freiburgo con firmes convicciones pacifistas, fue despedido por razones políticas (era marxista) y racistas (era judío). Con ayuda de la Socidad Religiosa de los Amigos, fue capaz de alcanzar una plaza docente en Newcastle en 1939. Tras su exilio y al finalizar la guerra, fue uno de los primeros emigrantes en retornar a Alemania. Muy posiblemente debido a la militancia comunista de su hijo Harald, fue junto a Ludwig Boll, uno de los dos únicos matemáticos que regresaron a la República Democrática Alemana (Alemania del Este), donde enseñó hasta la edad de 74 años.

Peter Thullen (1907-1996) no regresó a Alemania tras un año de estudios en Italia en 1934 debido a su profundo desacuerdo con el régimen nazi (no necesariamente por una “simpatía” izquierdista) a pesar de que le fue ofrecido un trabajo. Perteneció al Movimiento de la Juventud Católica Alemana, y a pesar de que no era judío, no consideró emigrar a Austria (antes de su anexión). Emigró finalmente a Ecuador en 1935 a pesar de no haber obtenido aún su habilitación, por lo que no recibió oferta de ninguna plaza docente universitaria a su regreso en 1952, aunque sí las recibiría de la Universidad de Friburgo en Suiza en 1967, donde permaneció hasta 1977. Dedicó sus investigaciones a teoría de funciones.

Rudolf Lüneburg (1903-1949) fue ayudante de Courant. Fue despedido en 1933 debido a razones políticas. Conflictos políticos le impidieron encontrar una posición académica adecuada por lo que tuvo que elegir centrar su talento en el mundo de la industria. Dedicó sus primeras investigaciones en topología y al final trabajó en los fundamentos matemáticos de la óptica.

Theodor von Kármán (1881-1963) tuvo que emigrar en 1929 desde Aix-la-Chapelle (Aachen) hasta el Instituto Tecnológico de California. Sus investigaciones se centraron en aerodinámica, convirtiéndose en el principal protagonista del desarrollo de la ingeniería matemática y el entrenamiento de ingenieros de la aviación en los EE.UU.

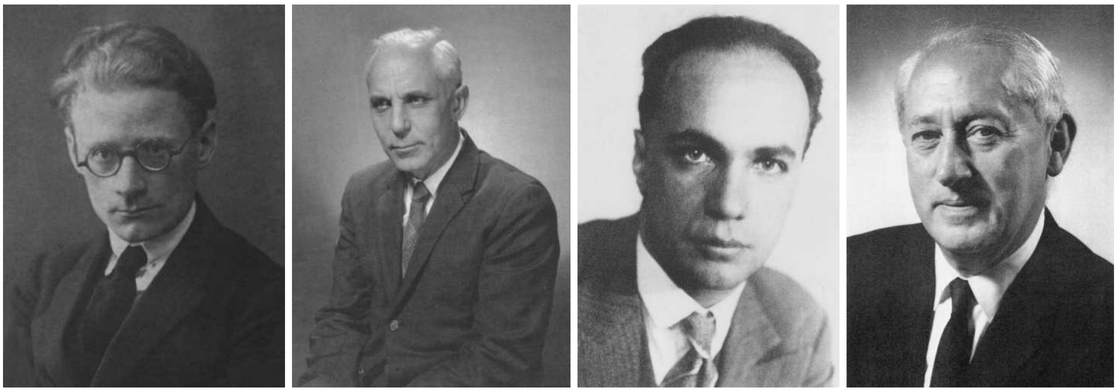


Figura 30. De izq. a drcha. Hans Rademacher, Franz Alt, Richard Brauer y Karl Löwner.

Hans Rademacher (1892-1966) fue uno de los pocos profesores alemanes que se caracterizó por tener una visión política de izquierdas antes de 1933. Con la subida de los nazis al poder fue despedido y tuvo que emigrar a los EE.UU. Impartió clases en la Universidad de Pennsylvania hasta el momento de su jubilación.

Franz Alt (1919-2011) fue alumno de topología y geometría de Karl Menger. Tuvo que abandonar Viena unos meses después de producirse la anexión de Austria por parte de los nazis (Anschluss) en 1938. Emigró a los EE.UU donde trabajó en econometría y computación.

Richard Brauer (1901-1977) fue expulsado de Königsberg. Siendo alumno de Issai Schur en Berlín, dedicó su investigación a trabajar en teoría de álgebras y grupos. A pesar de que tuvo un contrato firmado con la editorial berlinense Springer para publicar un libro sobre álgebra, éste no llegó a materializarse debido la discriminación de autores judíos. Tras varios años sin actividad docente en Toronto, en 1952 aceptó una oferta para ser profesor en la Universidad de Harvard.

Karl Löwner (1983-1968) fue expulsado de Praga en 1939, tras haber denunciado las condiciones de presión a la que sus colegas alemanes estaban siendo sometidos. Dedicó sus investigaciones a teoría de funciones y tras la guerra llegó a ser profesor de la Universidad de Stanford en California.

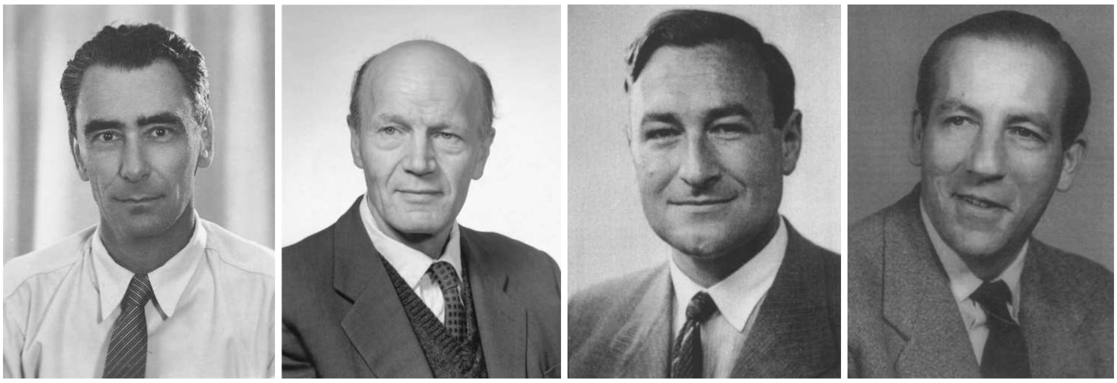


Figura 31. De izq. a drcha. Rafael Artzy, Werner Romberg, Herbert Busemann y Félix Adalbert Behrend.

Rafael Artzy (1912-2006) participó activamente en el movimiento zionista con anterioridad a 1933. No pudo finalizar su tesis con Kurt Reidemeister en Königsberg debido al cese de este en 1933. Geómetra, emigró a Palestina, y residió temporalmente en EE.UU, y finalmente estableció su residencia en Haifa (Israel).

Werner Romberg (1909-2003) escribió en 1933 una disertación sobre física junto a Arnold Sommerfeld en Múnich. Tuvo que exiliarse a la antigua Unión Soviética en 1934 debido a sus ideologías políticas izquierdistas. Tuvo que salir de la URSS en 1937 y emigrar a Noruega en 1938, donde se adquirió cierta reputación debido a sus métodos en análisis numérico, regresando a Uppsala (Suecia) en 1944.

Herbert Busemann (1905-1994) tuvo que abandonar Gotinga en 1933 debido a razones "políticas". En comparación con otros emigrantes, si experiencia en el exilio fue relativamente "acomodada". Vivió un conflicto político junto a Rudolf Lüneberg. A partir de 1947 trabajó en Los Ángeles, donde publicó importantes artículos sobre fundamentos de la geometría.

Félix Adalbert Behrend (1911–1962) fue un multidisciplinar matemático de Berlín. Tuvo que emigrar desde Praga a Gran Bretaña y finalmente fue deportado a Australia.

Referencias

[1] Ash, M. G., *Forced migration and scientific change in the Nazi era*, Emigration of Mathematicians and Transmission of Mathematics: Historical Lessons and Consequences of the Third Reich, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Nº 51, 2011.

[2] Butzer, P., Volkmann, L., *Otto Blumenthal (1876-1944) in retrospect*, Journal of Approximation Theory, Nº 138, pp. 1–36, november 2005.

[3] Garron, L., *National Socialism and the Death of German Mathematics*, Stanford-in-Berlin Program course "Science, Medicine, and Technology in Nazi Germany", december 2010.

[4] MacLane, S., *Mathematics at Göttingen under the Nazis*, Notices of AMS, Vol. 42, Nº 10, october 1995.

[5] Oberdiek, A., *Göttinger Universitäts-Bauten. Die Baugeschichte der Georg-August-Univeristät*, Verlag Göttinger Tageblatt GMBH & CO. KG, p. 46, 1989.

[6] Remmert, V. R., *Mathematical Publishing in the Third Reich: Springer-Verlag and the Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, The Mathematical Intelligencer, Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] SÁNCHEZ MUÑOZ, J. M., *Nazis y Matemáticas*, Actas de la 2ª Jornada Internacional "Matemáticas Everywhere", ISBN: 978-84-7493-462-5, pp. 19–65, Castro Urdiales, 20-21 junio, 2012.

[8] SEGAL, S. L., *Mathematicians under Nazis*, Princeton University Press, 2003.

[9] ——, *Mathematics and German Politics: The National Socialist Experience*, Historia Mathematica, Nº 13, pp. 118–135, 1986.

[10] SIEGMUND-SCHULTZE, R., *Mathematicians fleeing from Nazi Germany. Individual Fates and Global Impact*, Princeton University Press, 2009.

[11] ——, *Emigration of mathematicians and of mathematics: facts and open questions*, Emigration of Mathematicians and Transmission of Mathematics: Historical Lessons and Consequences of the Third Reich, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Nº 51, 2011.

[12] SMITH, D., SIMMONS, C., *The Effect of the Nazi Regime on the World of Mathematics and Individual Mathematicians*, University of Central Oklahoma, 2010.

[13] TOBIES, R., *Expelled female mathematicians in exile: working conditions, and the impact on pure and applied mathematics*, Emigration of Mathematicians and Transmission of Mathematics: Historical Lessons and Consequences of the Third Reich, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Nº 51, 2011.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático", Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas

Ecuaciones, teorías y ciencias que las usan

Rosa María Herrera

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

Volumen II, Número 2, pp. 105–114, ISSN 2174-0410
Recepción: 6 Jun'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Algunas ecuaciones resultan buenos modelos en problemas de la física alejados entre sí. Algunos modelos matemáticos suponen una abstracción subyacente en distintas teorías e incluso en diferentes ramas científicas. Algunas teorías nacen en cierto ambiente científico, pero trasladadas a otro resultan muy productivas e incluso crecen. Aquí se formulan algunos ejemplos de cada caso, se señala la estrategia de su construcción y se intenta indicar (explicar) su valor como herramienta científica.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales, Mecánica, Física de altas energías, Ecología.

Abstract

Some equations are good models in physical problems far from each other. Some mathematical models assume an abstraction underlying different theories and even in different scientific branches. Some theories are born in a scientific environment. But whether they are moved into another, they become very productive, and even growing. Some examples of each case are here formulate, the strategy of they construction are also indicated. Also I shall try here to sketch its value as scientific tool.

Keywords: Differential Equations, Mechanics, High-Energy Physics, Ecology.

1. Mathematics Everywhere

En la convicción de que la belleza está muy extendida, la matemática y el arte no son invitados desconocidos, la poesía, la música, la arquitectura... la astronomía y las otras ciencias que satisfacen nuestra curiosidad sobre el mundo. No es extraño que se encuentren elementos coincidentes en diferentes desarrollos científicos, sino por el contrario es un hecho conocido y constatado.

La combinación de ideas de campos diferentes, la evolución conceptual que conduce de unas ramas a otras y así se construyen los avances científicos. En estas notas se reseñan con propósito de resumen muy breve algunos ejemplos que una vez más significan la mirada matemática del mundo.

1.1. Overview

- Una posible *novedad iniciática* que aquí se presenta está en la idea de que la construcción de mecanismos que imitaban los movimientos que se observaban en el cielo precedieron al intento de matematización (geometrización) del mismo. Y que fue el alto grado de precisión que requería la mecanización correcta el que dio posiblemente origen al uso de la geometría como método indirecto de medición, que como método casi siempre directo se había probado de gran utilidad en la Tierra.

Seguramente el reto inicial de reproducir los ciclos asociados a los cambios observados tendría un carácter algo lúdico, el uso de medidas, ángulos, proporciones para poder trabajar a escala, no creo que fuera considerado de inicio, sino más bien que surgió de modo casi natural como una necesidad, para predecir cosechas, preparar viajes en las mejores condiciones y otras actividades similares que cada vez requerían más alta especialización y precisión.

La matematización del cielo resultó de una utilidad extrema para la elaboración posterior de teorías dinámicas.

- Una *segunda plausible novedad* que incumbe también, aunque de un modo a veces implícito, a la omnipresencia de la matemática en el desarrollo del conocimiento físico del mundo es la consideración de que ciertas teorías físicas firmemente consolidadas (lo cual suele significar sustentadas en un corpus matemático potente) actúan como modelo "metafórico", como fuente de ideas útiles para afrontar problemas físicos de otros contextos (situaciones o sistemas físicos diferentes). Esto además sirve para comprobar que la abstracción última subyacente en muchas disciplinas bastante ajenas entre sí es ciertamente similar, aunque en muchos casos hay que afinar y ajustar la nomenclatura.

Esto, en mi opinión, se da en dos aspectos distintos y complementarios: en la investigación científica y en la enseñanza de la ciencia.

Aquí se presenta un ejemplo, pero hay algunos más.

El resto del artículo se articula en dos partes, una de contextualización y otra en la que señalan algunos ejemplos matemáticos completos de usos de abstracciones similares en diferentes ambientes.

I PARTE

2. La Mecánica Celeste, ciencia "modelo" y modélica

La consideración del Universo como mecanismo y en general la mecanización del cosmos representan quizá la primera manifestación de la mecanización general del conocimiento del mundo físico. A este hecho contribuyó la potente herramienta matemática que se desarrolló muy pronto y casi en paralelo y que fue perfectamente imbricada en el mecanicismo.

La geometría creció primero y dio paso después, sin retirarse, al análisis, y esta unión condujo a la casi perfecta mecánica racional. Salvo que los objetos de la mecánica racional no siempre "viven" en el mundo físico, son de una belleza extraordinaria y proporcionan mucha información e intuiciones valiosas...

2.1. Los primeros pasos en la mecanización-matematización del cosmos

La visión del cielo como un instrumento o como una herramienta era no tanto una elección como una necesidad en la Antigüedad, como se ha señalado previamente, nuestros ancestros necesitaban guiarse y la observación del cielo era la mejor ayuda, también para saber cuándo y cómo cultivar las cosechas y mejorarlas, para orientarse en los desplazamientos largos, para navegar, para predecir y para observar los *ciclos* de la naturaleza y hacer calendarios. El construir instrumentos a semejanza de lo que se veía en lo alto, era una manera de hacer asequible lo lejano, de imitar para aprender y entender, de hacer posiblemente más asequible y manejable lo que se veía.

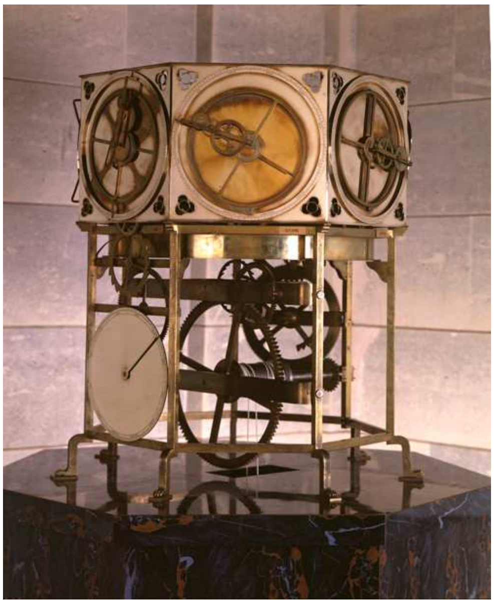


Figura 1. Astrarium de Giovanni Dondi, esta reconstrucción se debe a A. Segonds, E. Poulle y J.P. Verdet se encuentra en el Observatorio de París (es un modelo que funciona)

Figura 2. Mecanismo de Antikythera. Primer modelo de engranajes conocido, para determinar la posición de los planetas (la imagen es de Wikipedia).[3]

Así pues la matematización de la mirada del cielo surgió como una necesidad constructiva de los mecanismos que pretendían, al menos parcialmente, imitar a la gran maquinaria que es el cielo. Después el conocimiento se fue depurando se hizo más abstracto, es decir, más general, y entonces aparecieron los triángulos, los ángulos, las mediciones, la geometría. La matemática fue sirviendo poco a poco para "recrear el cielo" para hacerlo nuestro ambiente natural.

2.2. El siglo XVII y siguientes

Tras la ardua polémica proveniente de tiempos griegos entre el geocentrismo personificado en Ptolomeo y el heliocentrismo que finalmente quedaría asociado a la figura de Copérnico, a pesar de no ser el único ni muchos menos el primero, pero en cuya obra [2] quedaría para la posteridad la recopilación y los conocimientos del cosmos según la mirada heliocéntrica.

Los trabajos geo-heliocéntricos del astrónomo danés Tycho Brahe fueron una puerta que hacía falta abrir y por ella entró Kepler, uno de los pioneros relevantes de la Mecánica Celeste, tras él y muy de cerca Newton y luego los demás. Así:

i) Los problemas del movimiento de los objetos del Sistema Solar quedan dibujados por la tres leyes del movimiento de Kepler y la ley de Gravitación Universal de Newton.

ii) El esquema conceptual matemático de la Mecánica Celeste fue mejorado por Laplace, y la Mecánica Racional de Lagrange y Hamilton.

iii) Un "pequeño" salto hasta Poincaré a finales y principios del siglo XX [12] reavivaron el problema que ha servido de motivo de trabajos matemáticos y físicos, principalmente, durante la pasada centuria y los comienzos de la presente.

2.3. Ecuaciones diferenciales en Mecánica Celeste

i) Los problemas que se proponen en la dinámica del Sistema Solar se expresan matemáticamente como ecuaciones diferenciales del movimiento, muchos de los cuales planteados en términos analíticos son irresolubles (salvo casos particulares), sin embargo han encontrado acomodo en otros ambientes, como la topología, que se ha revelado muy útil para tratarlos que fueron iniciados Poincaré, pero arranca de más atrás de algunas ideas que el matemático francés pudo sacar de sus lecturas de Riemann y otros matemáticos.

ii) Las teorías sobre la estabilidad dinámica del Sistema Solar, teoremas KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) resultaron de una gran utilidad en la Física de Altas Energías, como la construcción del LHC, que a su vez refinó la teoría y le devolvió las mejoras a la Mecánica Celeste que supo usar.

iii) La computación es un pilar más joven del método científico, proporciona una forma de refuerzo a la modelización, al cálculo y al control y se convierte así en una herramienta potente imprescindible en la investigación del siglo XX, que sustenta la modelización y la contrastación de las teorías con las realidad y que a su vez supone una herramienta de control.

II PARTE

3. Ecuaciones periódicas en contextos físicos distintos

En esta segunda parte se sustantivan a modo de esbozo y muy esquemáticamente algunos de los ejemplos mostrados en la primera parte.

Las ecuaciones periódicas aparecen al forzar un sistema o una ecuación autónoma de segundo orden como la siguiente, que está dada en el plano,

$$u'' + g(u, u') = 0 \tag{1}$$

pero que se puede ampliar a dimensiones superiores.

Por ejemplo: Ecuación general del oscilador armónico: $u'' + cu' + au = f(t)$ donde $c > 0$ con fricción, $c = 0$ sin fricción, $a > 0$, $f(t)$ fuerza periódica, periodo $T > 0$. Obsérvese que la fuerza periódica es conocida.

Volvemos a la ecuación autónoma (1), si se introduce una fuerza periódica conocida, como en el ejemplo que hemos señalado del oscilador armónico, convirtiéndola en

$$u'' + g(u, u') = f(t) \tag{2}$$

se sabe que se corresponde con la descripción de dos situaciones físicas diferentes, una mecánica y otra procedente de la electrónica.

En el caso mecánico, surge al estudiar el movimiento de una partícula, $u(t)$ representa la posición y $f(t)$ la fuerza externa.

En un circuito eléctrico $u(t)$ es la corriente eléctrica y la primitiva de $f(t)$ es la fuerza electromotriz.

4. Ejemplos análogos no lineales

En este apartado se esbozan problemas similares, pero en el caso no lineal, así se muestra un problema de la Mecánica Celeste, otro procedente de la electrónica y un tercero de la ingeniería.

4.1. Movimiento de partículas

En Mecánica Celeste la ecuación del péndulo forzado resulta un modelo muy bueno para describir el movimiento de una partícula según un círculo que obedece la ley de gravitación universal y está sometida al momento de una fuerza.

$$x'' + cx' + a \operatorname{sen} x = f(t)$$

Un caso particular muy interesante se encuentra estudiando el problema de Sitnikov de los tres cuerpos. Este se corresponde con un problema de dimensión superior [6], tres de estas dimensiones corresponden a la posición y otras tres a la velocidad en un plano invariante.

4.2. El oscilador de Van der Pol

La ecuación de Van der Pol forzada con amortiguamiento no lineal:

$$V'' - c(1 - V^2)V' + aV = f(t)$$

Esta ecuación modela un circuito con un elemento resistivo no lineal y con retroalimentación positiva. El parámetro de amortiguamiento es $c > 0$. La variable dinámica es V (diferencia de potencial del circuito).

El ingeniero Van der Pol con la información que obtenía proveniente de esta ecuación construyó en 1920 los primeros receptores de radio. La estabilidad del circuito estudiada desde el punto de vista de los sistemas dinámicos permite analizar la posible existencia de ciclos límite.

4.3. La ecuación del puente colgante

La cuestión de las oscilaciones verticales de un puente en suspensión también se puede considerar un problema que tiene solución en un plano invariante (tal como ocurre en el problema de Sitnikov). Los ingenieros escriben estas oscilaciones verticales mediante la familia de ecuaciones de Lazer y MacKenna.

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(t,x), \qquad x \in [0,L]$$

Con las condiciones de contorno

$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \;\; u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,L) = 0$$

El eje vertical se orienta hacia abajo, por tanto, para $u > 0$ está por debajo de la horizontal ($u = 0$), $f(t,x)$ en realidad tiene dos componentes, una asociada al peso del puente y otra a factores externos; por ejemplo, el aire y otros.

Los ejemplos enunciados en el apartado anterior se encuadran en un marco de las ciencias "duras", en esta sección cambiamos un poco de paisaje.

Una manera de "elaborar" sistemas periódicos es un camino geométrico de argumento (o ambiente) ecológico. La idea procede del matemático italiano Vito Volterra también trabajada por Alfred J. Lotka. El procedimiento es relativamente sencillo si se está familiarizado con la operativa.

Se elige un sistema autónomo en el plano, de tal manera que sea dependiente de ciertos parámetros $\alpha, \beta, \ldots$ es posible convertir este sistema en periódico haciendo que los parámetros tengan dependencia periódica:

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \ldots$$

Si se tiene alguna noción de Ecología, se sabe que en algunas poblaciones se observan efectos estacionales en la proliferación de individuos (tomando periodos de un año), así se puede considerar que la población fluctúa de manera aproximadamente periódica. El sistema de L-V se puede escribir

$$u' = u(\alpha(t) - \beta(t)u - \gamma(t)v), \quad v' = v(\delta(t) \pm e(t)u - \zeta(t)v)$$

$\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ son periódicas de periodo T; β, γ, e, ζ son no negativos; u es la presa, se escribe el doble signo $\pm$ para distinguir los casos de la presa y el depredador...

4.4. La conexión matemática: de la Mecánica a la Ecología

El estudio de la estabilidad dinámica de las órbitas descritas en la Mecánica Celeste, permite en el siglo XX desarrollar la teoría KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser).

Los teoremas KAM se utilizan para la construcción de los circuitos del LHC (Large Electron Collider) por donde han de circular las partículas subátomicas de alta energía que se hacen colisionar para estudiar la constitución de la materia (asunto que ya se ha indicado en párrafos previos por su importancia).

La Ecología se ocupa de las interacciones entre organismos vivientes. Estas relaciones son cruciales para diseñar las leyes que rigen la dinámica de las poblaciones (digamos, en el espacio y el tiempo). Vito Volterra y Umberto Dancona estudiaron el mecanismo subyacente. Véase por ejemplo [5]

> *"A mayor complejidad trófica más estable es el sistema que lo sostiene".*

Se trata de una formulación que no produce mucho entusiasmo si se piensa exclusivamente desde el punto de vista de la estabilidad matemática; sin embargo, al mismo tiempo es muy utilizada, el concepto más escabroso desde esta perspectiva es el de la estabilidad matemática.

Preguntas para una discusión *ad hoc*

¿Tiene el mismo sentido la estabilidad de la solución de una ecuación periódica de un sistema mecánico que en un sistema complejo tipo biológico?

Puesto que parece que tiene alguna validez aplicar una "correspondencia" entre el concepto mecánico-matemático y el ecológico, cabe preguntarse: ¿qué tipo de inconvenientes puede presentar una mecanización de este tipo en el estudio de las poblaciones y de su comportamiento?, ¿qué restricciones conlleva?

4.5. Familias de ecuaciones periódicas para afrontar otros problemas de las ciencias

Existen otros problemas que se pueden tratar con sistemas de ecuaciones periódicas y obtener resultados muy satisfactorios. Entregarse, de inicio, al estudio de los mapas de Poincaré es una manera conveniente, pero se puede ampliar y sistematizar enormemente el campo de las ecuaciones periódicas.

Las ecuaciones diferenciales también se están aplicando a comportamientos sociales y conductas humanas en distintas situaciones, aunque el resultado es muy desigual, en los sistemas complejos los modelos no pasan de ser bocetos o caricaturas, que presentan un interés más didáctico que científico, pero no es desdeñable.

Colofón para enamorados

El amor se escribe en caracteres matemáticos. El modelo de Strogatz [13]. En un brevísimo artículo, Strogatz inició una etapa en el estudio de los sistemas dinámicos aplicados al estudio de las relaciones interpersonales, un ambiente más bien controvertido desde el punto de vista matemático. El modelo propuesto es de una gran sencillez y posteriores trabajos lo han mejorado considerablemente, aunque sigue siendo un boceto lleno de carencias y, por tanto, imperfecto; sin embargo, cabe suponerlo como una manera divertida de introducirse y empezar a aprender a modelizar mediante ecuaciones diferenciales.

$dr/dt = -aj$, $dj/dt = br$,

where

$r(t)$ = Romeo's love / hate for Juliet at time t

$j(t)$ = *Juliet*'s love / hate for Romeo at time t

Positive values of r, j signify love, negative values signify hate. The parameters a, b are positive, to be consistent with the story

Figura 3. Fragmento artículo seminal de Strogatz.[13]

Comentarios finales (provisionales)

Los problemas de la Mecánica están en sintonía matemática con los problemas de *competencia* en la dinámica de poblaciones; en estos modelos la manera de encontrar la estabilidad dinámica se conoce y se trabaja.

En ambos campos la estabilidad matemática se manifiesta como equilibrio[1] de los sistemas. Para buscar el origen de esta coincidencia o al menos cierta similitud habría que buscar la abstracción común subyacente, piénsese en la ciencia física.

Según Poincaré, los 5 o 6 principios sobre los que se construye la Física (segunda ley de Newton, ley de acción y reacción, principio de conservación de la energía, principio de Carnot, principio de relatividad) todos de carácter físico y claramente competitivo, además está "principio de mínima acción" cuyo entidad es más difícil de adjudicar a un ambiente concreto, pues pertenece a varios ámbitos. Cabría decir que a primera vista su naturaleza es tan matemática como metafísico su origen y sus manifestaciones pertenecen al mundo físico. Tal es su riqueza.

Las líneas generales aquí presentadas son familiares a quienes trabajan en estos campos, puesto que se vienen desarrollando en decenios anteriores, pero se sigue trabajando en ello y se están produciendo pequeños avances constantemente.

Por ejemplo, algunos especialistas en algunas ramas biológicas ponen a nuestra disposición información que puede resultar un reto en sentido matemático, y que nos hacen pensar en otras posibles perspectivas sobre las cuales empezamos a trabajar, e ignoro qué nuevo enfoque puedan proporcionar sobre el mundo físico, es para mí un problema abierto que se halla en estado larvario en mi cerebro, veremos, qué caminos (o no) pueden encontrarse, y en caso de su inexistencia o inviabilidad, las razones y quién sabe nuevas vías insospechadas.

Referencias

[1] BASDEVANT, Jean-Louis. *Le principe de moindre action et les principies variationnels en physique*, pp. 10-15, Vuibert, París, 2010.

[2] COPÉRNICO, Nicolás. *Sobre las revoluciones (de los orbes celestes)*, Tecnos, Madrid, 2009.

[3] FREETH, Tony, and al., *Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera mechanism*, "Nature", 444 pp. 587-591.

[4] FEYNMAN, Richard. *The Character of Physical Law*, Cambridge EUA, 1965, 2006.

[5] GATTO, Marino. *Matematica ed Ecologia: un'interazione feconda*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Sez. A, pp. 515-540 La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, V-A, 2002.

[1] Al menos en alguno de los sentidos físicos de la expresión.

[6] HERRERA, Rosa M. *Metaphors, Solar Systems and Scientific Research*, CELMEC, Viterbo (Italy, 2009), & some improvements 14th CLMPS Nancy (France, 2011).

[7] HOLTON, Gerald. *Introduction to Concepts and Theories in Physical Science* (2º ed) Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachussets, ed. español, Ed. Reverté, 1988.

[8] LEMONS, Don S. *"Perfect Form (variational principles, methods, and Applications in Elementary Physics)"*. pp. 17-25 Princeton Univ. Press,1997.

[9] MARTIN-ROBINE, Florence. *Histoire du principe de moindre action. Trois siécles de principes variationnels de Fermat à Feynman*, Vuibert, París 2009.

[10] MARTÍNEZ ARIAS, Alfonso. *Encounters at a boundary: a (very) brief history of the interactions between Physics and Biology*.

[11] MOSER, Jürgen, K: *Is the Solar System Stable?* In The Mathematical Intelligencer pp. 65-71, 1978.

[12] POINCARÉ, Henri. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthiers-Villars et fils, 1899.

[13] STROGRATZ, Steven H. *Love affairs and differential equations*, Mathematics Magazine, 1988.

Sobre la autora:
Nombre: Rosa María Herrera
Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com
Institución: APYCE.

Historias de Matemáticas

Una Visión Matemática: Matemáticas en Imágenes

Sagrario Lantarón

Mariló López

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp.115--126, ISSN 2174-0410
Recepción: 19 Jul'12; Aceptación: 23 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Vivimos en un mundo de imágenes donde la Matemática es una ciencia desconocida por la sociedad quizás porque por lo general NO SE VE. Sin embargo las matemáticas forman parte de la cultura y se han desarrollado en paralelo al resto de los conocimientos humanos, influyendo en otras disciplinas, algunas de ellas de carácter visual. En este artículo se trata de plasmar la importancia y belleza de las matemáticas a través de imágenes utilizadas para fines muy distintos a la enseñanza de la misma.

Palabras Clave: Imágenes matemáticas, Fotografía matemática, Matemáticas en el arte, Matemáticas en la publicidad.

Abstract

We live in a world of images where Mathematics is a science unknown by the society probably because in general IT IS UNSEEN. Nevertheless Mathematics forms a part of the culture and has developed parallel to the rest of the human knowledge, influencing other disciplines, some of them of visual nature. In this article it is a question of forming the importance and beauty of Mathematics through images used with purposes very different to the teaching of it.

Keywords: Mathematical images, mathematical photography, Mathematics in Art, Mathematics in advertising.

1. Introducción

La matemática es una ciencia desconocida por la sociedad en general lo que implica su rechazo generalizado. Desde siempre, se ha considerado a las matemáticas como la asignatura más complicada, la menos seguida por el alumnado y la que lleva consigo un mayor índice de fracaso escolar. Este concepto está presente en nuestra sociedad considerándolo como algo cierto y asumido por la población.

Sin embargo, las matemáticas se encuentran en cualquier aspecto de nuestra vida cotidiana teniendo un papel fundamental en los avances tecnológicos de la época actual (computadores, Internet, telefonía móvil, tecnología digital,…) Pese a que es bien conocida la importancia de las matemáticas, esta ciencia sigue siendo rechazada por gran parte de las personas. Quizás sea porque los conceptos que se manejan se consideran abstractos, poco útiles o alejados de la sociedad. Una forma de cambiar este proceso podría ser demostrar mediante conceptos sencillos cómo esta ciencia nos rodea.

En el mundo actual es la imagen lo que impacta, sobretodo en el caso de los jóvenes acostumbrados a un mundo virtual. La frase "una imagen vale más que mil palabras" nos transmite una idea que debe tenerse en cuenta. De esta forma, una manera de hacer familiar y atractiva las matemáticas puede ser hacerlas visuales, es decir, utilizar la imagen como herramienta de transmisión de sus conceptos.

En estas líneas se procurará mostrar cómo la matemática está presente en múltiples aspectos de la vida cotidiana y empieza a ser VISIBLE para los ciudadanos. Sirva este trabajo como ejemplo y demostración de lo sencillo que es encontrar matemáticas a nuestro alrededor y de cómo pueden "verse" y utilizarse en imágenes para transmitir mensajes. Para ello quizás únicamente se precise UNA MIRADA MATEMÁTICA.

Se hablará de imágenes matemáticas:

- En la publicidad.
- Como esencia de manifestaciones artísticas.
- En la fotografía.

2. Imágenes matemáticas en la publicidad

Poco a poco los conceptos matemáticos van entrando en nuestras vidas, tal es así que la publicidad, elemento cuya finalidad es llegar al mayor número posible de personas, empieza a hacer uso de ella en no pocos aspectos.

Veamos algunos ejemplos:

En este cartel (figura 1) se hace uso de la propiedad asociativa de la suma.

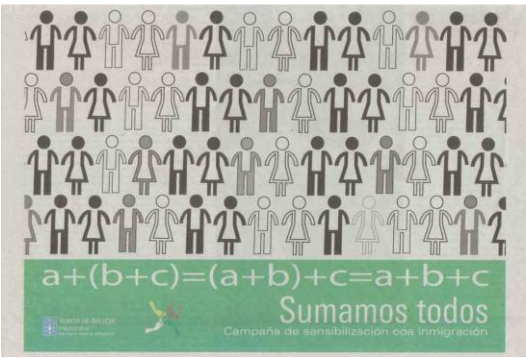


Figura 1. Propiedad asociativa de la suma

Este otro (figura 2), no muy acertado por cierto, establece una "curiosa" ecuación matemática. No despreciar el matiz del elevado al cuadrado.

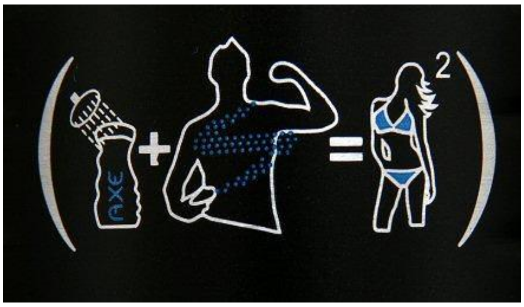


Figura 2. Ecuación matemática

Siempre se asocian las matemáticas, en particular el cálculo aritmético, con la idea de mentes rápidas, despiertas. Para ejercitar la mente parece bueno dedicarse a estos menesteres (figura 3).

Figura 3. Cálculo aritmético

El 18 de agosto de 2008, Rafael Nadal alcanza el número uno en la clasificación mundial de tenistas de la A.T.P. El canal televisivo Canal+ quiso enfatizar la dificultad de lo logrado por Nadal. Y si de transmitir dificultad se trata, ¿qué hay más expresivo que los cálculos matemáticos? Así que nos preparó un larguísimo desarrollo que termina en el número 1... Destacar que no fueron del todo rigurosos, algo bastante común cuando se hace uso de la matemática en ciertos entornos como la publicidad, el cine,…

El profesor Manuel Simón Montesa (I.E.S. Benlliure. Valencia) analizó los tres últimos miembros de esta cadena de igualdades y en ellos encontró dos "gazapos" que señala a la derecha del anuncio (figura 4)

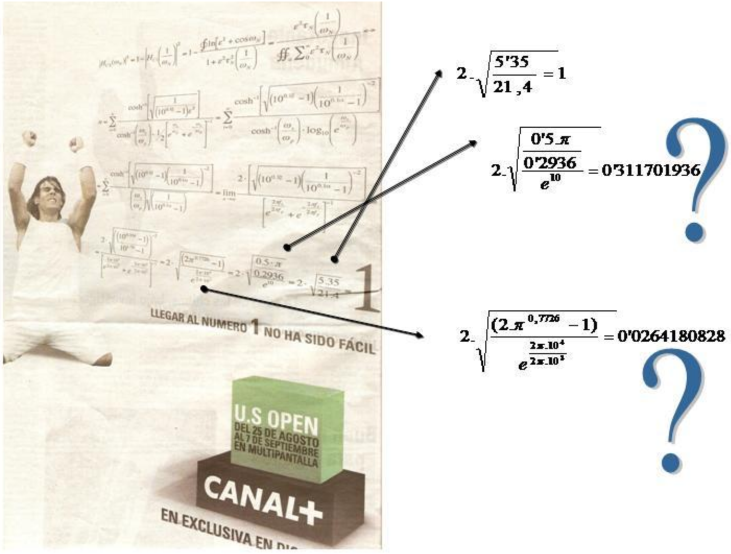


Figura 4. Cálculos matemáticos

Siguiendo con la idea de dificultad, nada como una pizarra repleta de símbolos matemáticos para transmitir el concepto de complejidad y esfuerzo (figura 5):

Figura 5. Símbolos matemáticos

Por último, un guiño a Escher y sus figuras imposibles en este otro anuncio de chocolates (figura 6):

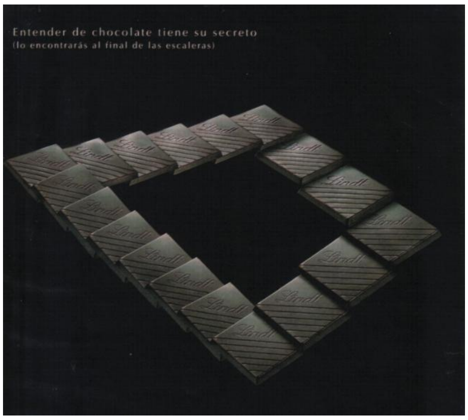


Figura 6. Figuras imposibles. Un guiño a Escher

Podemos encontrar numerosos ejemplos como éstos donde, sin darnos cuenta, se está haciendo uso, por un lado de una cultura matemática que entienden es alcanzada por un amplio número de personas de nuestra sociedad actual y, por otro, de la opinión generalizada de la sociedad sobre esta ciencia.

3. Imágenes matemáticas como esencia de manifestaciones artísticas

Las aplicaciones de las matemáticas en todas las ramas del arte son tan numerosas que sería imposible concentrarlas en un solo texto. En estas líneas se presentarán algunos ejemplos donde la matemática se utiliza como base estética de las obras.

3.1 La Acuarela de Jonathan Hare

En este apartado se ha optado por mostrar una obra, que quizás no sea muy conocida por el público general, y en la que se hace uso de resultados o conceptos matemáticos que representan la verdadera esencia de la obra. Es decir, se trata de una manifestación artística sustentada en una idea o resultado matemático.

La Espiral de Teodoro, relacionada con el geómetra Teodoro de Cirense, pese a que no se han podido encontrar pruebas que permitan asegurar su autoría, se construye de la siguiente forma (figura 7):

- Se dibuja un triángulo rectángulo isósceles T1, de forma que las longitudes de sus catetos sean iguales a la unidad. Por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa h1 mide $\sqrt{2}$.
- Se construye un nuevo triángulo rectángulo T2 de catetos de longitud 1 y $\sqrt{2}$. Por el mismo teorema, la hipotenusa de este nuevo triángulo mide $\sqrt{3}$.
- Se construye un nuevo triángulo rectángulo T3 de catetos de longitud 1 y $\sqrt{3}$. Por el mismo teorema, la hipotenusa de este nuevo triángulo mide $\sqrt{4}$.

- Se sigue el proceso de forma que en el paso enésimo se debería contar con un triángulo rectángulo Tn cuyos catetos medirían 1 y $\sqrt{n}$ y la hipotenusa $\sqrt{n+1}$.

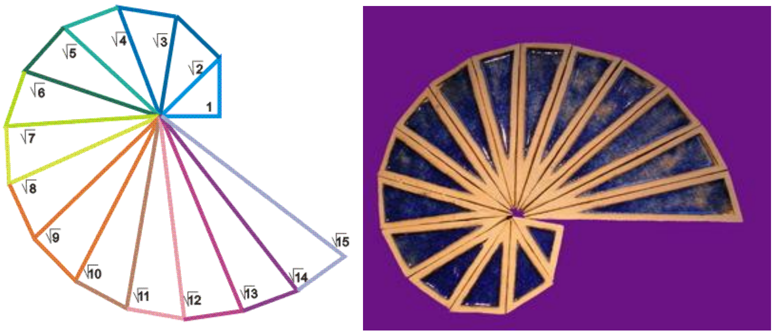


Figura 7.Espiral de Teodoro

Un ejemplo de la aplicación de la Espiral de Teodoro en el arte es la acuarela de Jonathan Hare (figura 8):

Figura 8. Acuarela de Jonathan Hare

Al observar esta pintura, son muchas las sugerencias y alusiones con sentido matemático que podemos encontrar. Por un lado están las esferas en cada triángulo, que van aumentando hasta llegar a la decena. Por otro lado está el cuadradito, que se suele utilizar en matemáticas para indicar que un ángulo es recto. La pintura hace una alusión clara al Teorema de Pitágoras y realiza una recreación sugerente de una manera de generar segmentos cuyas longitudes sean las raíces cuadradas de los sucesivos números naturales.

Con esta obra se visualizan algunos números que trajeron de cabeza a los pitagóricos, los números irracionales.

La esfera situada en el cateto del primer triángulo, sugiere que la medida de los catetos es 1, con lo que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$. De ahí en adelante, los sucesivos triángulos tienen el cateto menor de medida 1 y las hipotenusas van tomando el valor de la raíz cuadrada del número de esferas que van apareciendo en ellos. Al llegar a diez la esfera cambia de aspecto para indicar la decena.

En esta obra, el autor aprovecha propiedades matemáticas de una manera bellísima y explicativa.

3.2 Simplemente por estética

En esta segunda subsección se han seleccionado algunas obras que utilizan las matemáticas simplemente para crear belleza o manifestaciones artísticas:

a) Tobia Rava es un artista italiano licenciado en Semiología del Arte y ha sido alumno del conocido Humberto Eco. Posee una producción artística reconocida y expuesta por casi todo el mundo. En su obra, TODO ES NÚMERO, los paisajes, los objetos, los bosques, los rostros, el agua,…, todo está creado con números. A continuación podemos ver algunas de sus obras. Con ellas se puede alcanzar una idea más cercana y bella de los números (figuras 9, 10 y 11).

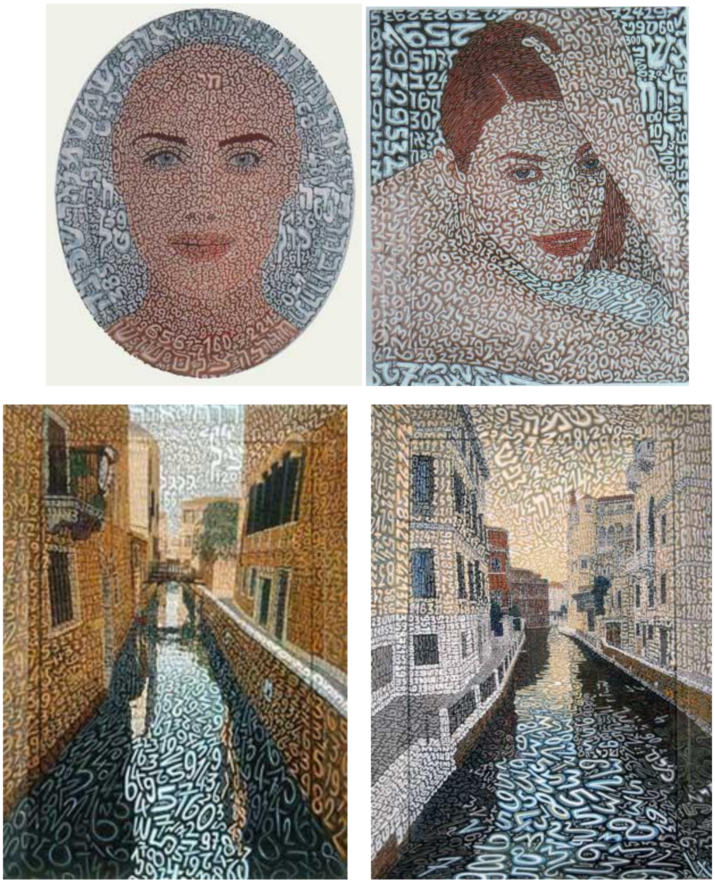


Figura 9. Pinturas de Tobia Rava

Figura 10. Pinturas de Tobia Rava

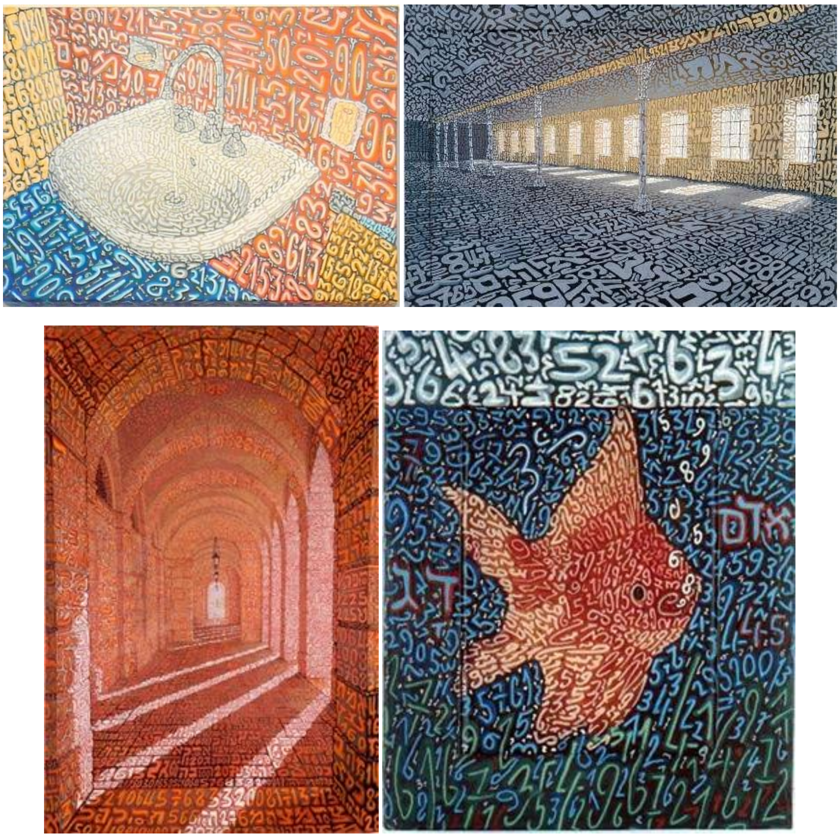


Figura 11. Pinturas de Tobia Rava

b) Otro ejemplo, en este enfoque de utilización de los números con la finalidad de crear belleza, es el de los "Números Imposibles". En esta línea, Vicente Meavilla es un experto, entre su obra publicada cabe destacar "Figuras imposibles. Geometría para Heterodoxos", libro en el que se enseñan algunos de los secretos de la geometría de las figuras imposibles.

En general, las figuras imposibles son aquellas que no existen en el espacio tridimensional ordinario pero pueden ser representadas en un papel. Los números se prestan a este tipo de representaciones. Veamos algunos dibujos del autor mencionado (figura 12):

Figura 12. Obras de Vicente Meavilla.

4. Imágenes matemáticas en la fotografía

Si existe una manifestación artística ligada a la imagen, ésa es la fotografía. Permite plasmar los elementos que nos rodean tal como existen realmente, pudiendo utilizar la imagen que capta la lente como recurso para mostrar información relacionada con diferentes disciplinas, entre ellas la matemática. Mediante esta técnica, por tanto, se podrán identificar, con un lenguaje eficaz, ciertos conceptos matemáticos interesantes.

En esta sección se distinguen dos tipos de fotografía matemática: la creada mediante la captación de imágenes que han sido dispuestas de forma artificial para buscar un efecto concreto y la creada fotografiando aspectos naturales que nos encontramos a nuestro alrededor, sin ninguna variación sobre ellos. Ambas técnicas quieren ser un instrumento para que veamos las matemáticas como algo cercano, que está a nuestro alcance, a nuestro alrededor, entre nosotros.

4.1 Fotografía que invita a la reflexión

Desde hace tiempo la fotografía está cada vez más ligada a un desarrollo no sólo estético sino intelectual y de investigación. Podemos hablar así de una *Fotografía Inteligente*. Una representación de esta fotografía que intenta ir más allá de la simple muestra de una imagen es la realizada por Chema Madoz (Madrid, 1958).

Desde hace tiempo Chema Madoz con su trabajo, abre espacios insospechados, forma imágenes que llevan a reflexiones sin límites. A través de sus fotografías se puede comprender lo extraño de los atributos en las formas y los ciclos que se repiten y producen en la naturaleza.

Durante su trayectoria ha ido creando una gran colección de guiños y espacios que hacen pensar al observador. No todo es lo que parece y Chema Madoz se encarga de ponerlo en evidencia. En sus obras, invita constantemente al espectador a cuestionar la función original de los objetos. Incita también a replantear la naturaleza de los mismos, juega con la escala del objeto. A veces distorsiona las leyes de la gravedad o aquellas que definen los cuerpos sólidos. Ocultos entre lo cotidiano surgen nuevos mundos y dimensiones. Busca el absurdo, la paradoja, el humor...

En sus fotografías muestra objetos de una singular simetría o hace que el observador se fije en sencillos desplazamientos, en puntos de vista que modifican lo real. (figuras 13 y 14)

Figura 13. Fotografías de Chema Madoz

Figura 14. Fotografías de Chema Madoz

4.2 Fotografía que muestra la realidad que nos rodea

Algunos de los grandes autores de la Fotografía Matemática han basado sus ideas y trabajos en autores como Chema, así lo reconoce la pionera en este tipo de fotografía Pilar Moreno.

Pilar es profesora de física y gran amante de las matemáticas y lleva muchos años acercando a sus alumnos a las matemáticas a través de la fotografía. Busca la geometría que hay a nuestro alrededor. Afirma que la geometría está en todos los sitios y lo que hace la cámara es aislarla. Utiliza la fotografía como herramienta para seducir la mirada de la gente, consiguiendo llamar su atención hacia conceptos matemáticos. Dice que cuando ves y les enseñas a los estudiantes que la sucesión de Fibonacci está en los girasoles o en las piñas se quedan impresionados y se dan cuenta de que las matemáticas están por todas partes. Si cortas una manzana, el pentágono que aparece es el pentágono áureo. En las flores hay cientos de ejemplos similares y, si lo tienes cogido con la cámara, los chicos lo ven.

Son totalmente recomendables los libros publicados por esta autora. (figura 15)

Figura 15. Portadas de libros de Pilar Moreno

Siguiendo en esta línea y teniendo como objetivo principal el acercamiento de las matemáticas a los estudiantes, el Grupo de Innovación Educativa (GIE) "Pensamiento Matemático" de la U.P.M., que desarrolla su trabajo en temas de innovación educativa y didáctica y divulgación de la matemática, convocó su Primer Concurso de Fotografía celebrado en la Universidad Politécnica de Madrid, curso 2007-2008. Este concurso, dirigido a estudiantes universitarios y pre-universitarios, pretendía hacer que los estudiantes pusieran un filtro matemático a sus ojos para que buscaran en su entorno matemáticas y así descubrieran la presencia de esta ciencia a su alrededor.

Se presentaron un total de 45 fotografías, cada una de ellas con un título representativo de la matemática mostrada. Estas imágenes son la base de la exposición "Fotografía Matemática" que se ha sido expuesta en centros educativos y congresos relacionados con la materia.. Destacar que cada fotografía va acompañada de un cartel explicativo, realizado por los miembros del GIE que analiza de manera sencilla la matemática presente en la imagen. Esta característica hace que la exposición tenga gran valor divulgativo, y sea además de gran utilidad docente. La exposición ha tratado de combinar la belleza de las imágenes con conceptos matemáticos que van apareciendo de forma natural a través de la propia fotografía y del texto que las acompaña. Consideramos especialmente valioso el hecho de que las imágenes hayan sido captadas por estudiantes y no por profesionales, lo que pone de manifiesto cómo ven la matemática nuestros alumnos.

El objetivo principal del GIE "Pensamiento Matemático" con esta exposición es captar la atención del público e intentar que se interese por lo que está viendo y por la matemática presente.

5. Conclusiones

Este trabajo ha querido poner de manifiesto cómo, a través de las imágenes, pueden mandarse muchos mensajes y éstos a su vez, pueden ser más ricos si se usa el gran abanico de posibilidades que aporta el conocimiento matemático. Han sido muchos y cada vez son más, los que están haciendo uso de esta ciencia para trasmitir ideas y contenidos por medio de imágenes, lo cual conlleva la creencia de que cada vez más la sociedad está abierta al *conocimiento matemático*.

Como conclusión, unas citas que reflejan a la perfección la idea de que las matemáticas son bellas, nos rodean, son visuales y palpables y debemos tener la mente abierta a una visión matemática:

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

Bertrand Russell

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de modelos. Si sus modelos son más duraderos que los de estos últimos, es debido a que están hechos de ideas. Los modelos del matemático, como los del pintor o los del poeta deben ser hermosos. La belleza es la primera prueba; no hay lugar permanente en el mundo para unas matemáticas feas.

G.H.Hardy

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.

Nikolay Lobachevsky

Referencias

[1] ANSINA, Claudi. *Vitaminas Matemáticas*, Ariel, España, 2008.

[2] GUTIÉRREZ, Eva; GUTIÉRREZ, Marta; QUEIRUGA, Miguel Angel. *Una mirada diferente*, Editorial Q, 2008.

[3] MADOZ, Chema. *Chema Madoz, objetos 1990-1999,* Museo Nacional Reina Sofía, MDRID, 2001.

[4] MEAVILLA, Vicente. *Las matemáticas del arte*, Almuzara, España, 2007.

[5] MORENO, Pilar. *Anda con ojo*, Faktoria K de libros, España, 2006.

[6] MORENO, Pilar. *Ritmos*. *Matemáticas e Imágenes*, Nivola, España, 2002.

[7] SOLANDO, José María. *Las Matemáticas en los anuncios*, Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78:33-46, 2011

[8] VLAD, Alexeev. *Imposible, world: Vicente Meavilla*.

http://im-possible.info./english/art/vicente/index.html

Sobre las autoras:

Nombre: Sagrario Lantarón Sánchez
Correo Electrónico: sagrario.lantaron@upm.es
Institución: Departamento de Matemática e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Mariló López González
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Departamento de Matemática e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas

Matemáticas a través de la paradoja

Marta Macho Stadler

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. xxx-yyy, ISSN 2174-0410
Recepción: 6 Ago'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Las paradojas juegan un papel decisivo en el desarrollo de la ciencia. El nacimiento de muchas ideas matemáticas se basa precisamente en la reflexión motivada por situaciones aparentemente "disparatadas". En este artículo repasamos algunos ejemplos concretos de paradojas vinculadas a las matemáticas.

Palabras Clave: paradoja, desapariciones geométricas, anamorfosis, anamorfosis oblicua, anamorfosis por estiramiento, anamorfosis cilíndrica, anamorfosis cónica, paradojas lógicas, paradojas del infinito, paradojas de la vaguedad, paradojas de la predicción, paradojas de la confirmación, paradojas topológicas.

Abstract

Paradoxes play an essential role in the development of science. Many mathematical ideas are based on the reflection motivated by situations seemingly "crazy". In this article we review some specific examples of paradoxes related to mathematics.

Keywords: paradox, geometric vanishes, anamorphosis, oblique anamorphosis, stretching anamorphosis, cylindrical anamorphosis, conical anamorphosis, logic paradoxes, paradoxes of the infinite, vagueness paradoxes, prediction paradoxes, confirmation paradoxes, topological paradoxes.

"Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las ciencias, de las matemáticas y de la lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva. Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas." Anatol Rapoport

1. Paradojas de la geometría: magia e ilusión

1.1 Desapariciones geométricas

Las –aparentes– pérdidas –o ganancias– de superficie ofrecen un ejemplo de desaparición geométrica.

El primer rectángulo de la Figura 1 tiene un área de 64 unidades cuadradas (8 por 8). Si se recorta siguiendo las líneas marcadas y se cambian las piezas de lugar, se obtiene un cuadrado de área 65 unidades cuadradas (5 por 13). ¡Esto es imposible! Si no hemos añadido ninguna pieza...

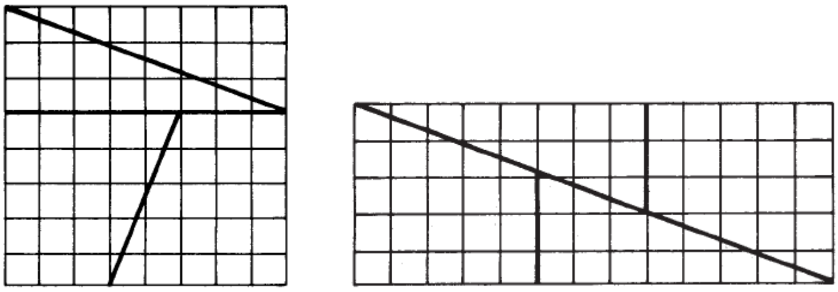


Figura 1. ¿64 = 65?

La aparente ganancia de superficie se debe al reajuste de los trozos. De hecho, en el rectángulo (ver Figura 2), existe un pequeño paralelogramo, casi imperceptible, de área una unidad cuadrada.

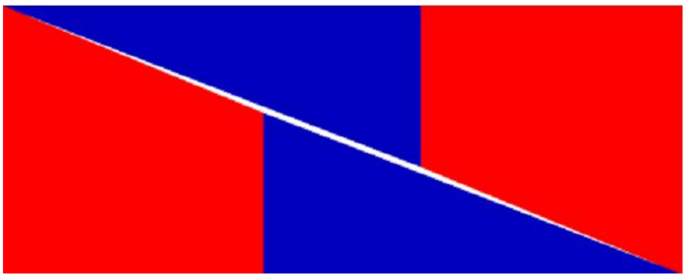


Figura 2.

Esto se apreciaría si la figura fuese más grande y estuviese construida con sumo cuidado –observar que los trazos que definen las líneas de corte son lo suficientemente gruesos como para esconder estas imperfecciones–.

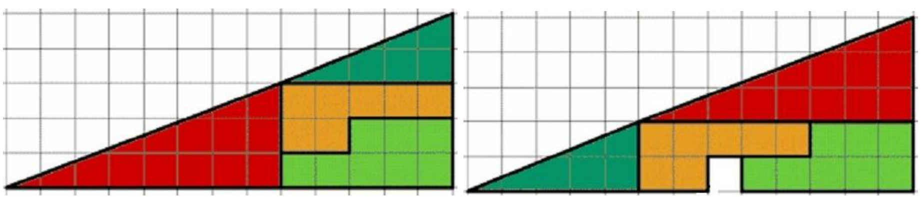


Figura 3.

Otro ejemplo viene dado por esta *paradoja de Hooper*: tenemos un triángulo, cuyas piezas recortamos y recolocamos como muestra la Figura 3. ¿De dónde ha salido ese agujero? ¿Por qué hemos perdido superficie?

En realidad, no ha habido tal pérdida: el borde negro –y suficientemente grueso– oculta el hecho de que los dos triángulos no son semejantes y que, de hecho, primera figura no era un triángulo...

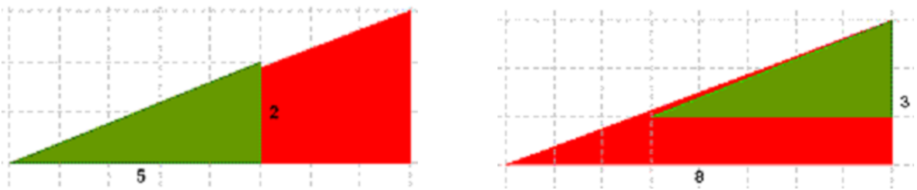


Figura 4.

¿Conoces la paradoja del conejo desapareciendo? Tenemos 78 conejos –planos– encerrados cada uno de ellos en su correspondiente caseta, como se muestra en la Figura 5. Pero, si cortamos siguiendo las líneas blancas y recomponemos hasta formar la segunda figura, observamos que un conejo ha desaparecido. ¿Dónde se ha quedado? La respuesta tiene mucho que ver con la de la anterior paradoja.

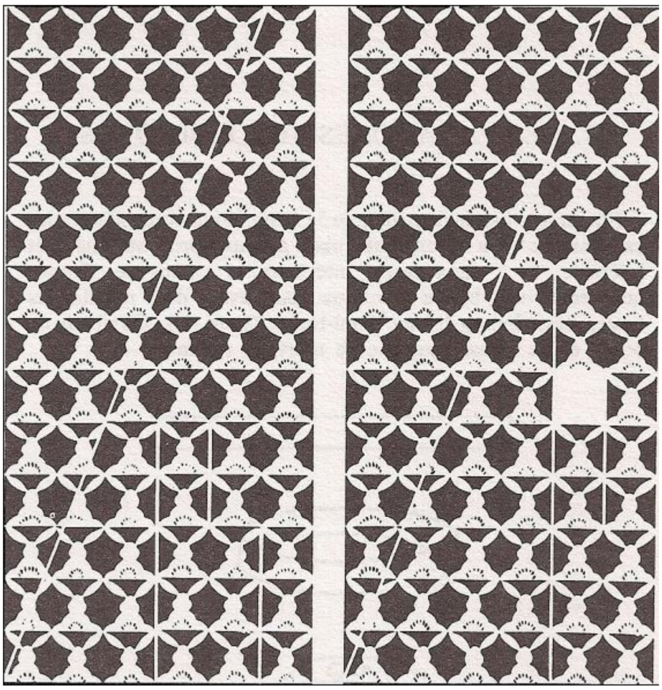


Figura 5. La paradoja del conejo de Paul Curry. Fotografía tomada de [2]

El puzzle *Abandone la Tierra* aparece en el libro [3] Sam Loyd. Se trata de un rompecabezas formado por dos trozos, como muestra la figura 6. Cuando se clava el círculo de la izquierda sobre el de la derecha –por su centro, con ayuda de una chincheta, por ejemplo, para poder girar la pieza– se observa a unos guerreros en actitud de lucha.

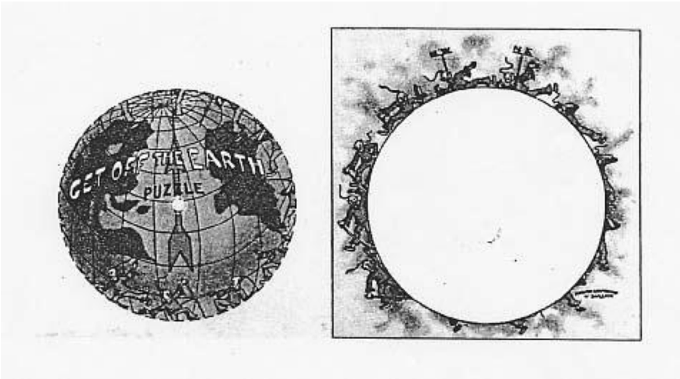


Figura 6. Abandone la Tierra

Al hacer girar el círculo interior dejando que la flecha apunte al norte, contamos 13 guerreros. Pero si la flecha apunta al noroeste, tan solo quedan 12... ¿dónde ha quedado el guerrero que falta?

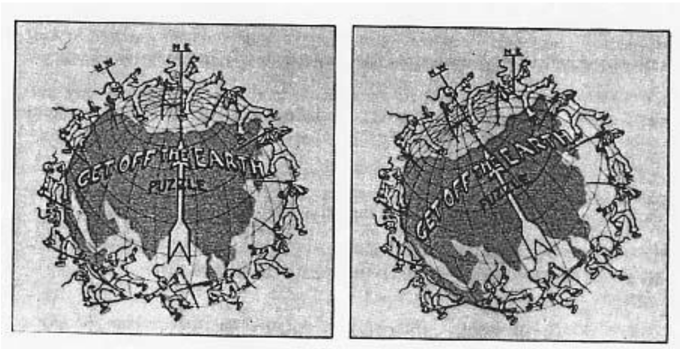


Figura 7. ¿Dónde ha quedado el guerrero que ha desaparecido? http://www.samuelloyd.com/

1.2 Anamorfosis

Una *anamorfosis* es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

En la Figura 8 se muestra un grabado de Durero en el que se observa como el artista está dibujando a su modelo, y para guardar las proporciones utiliza un retículo –un *velo de Alberti*– colocado perpendicularmente a ella. De este modo consigue reducir a escala a la mujer que desea representar en su lienzo.

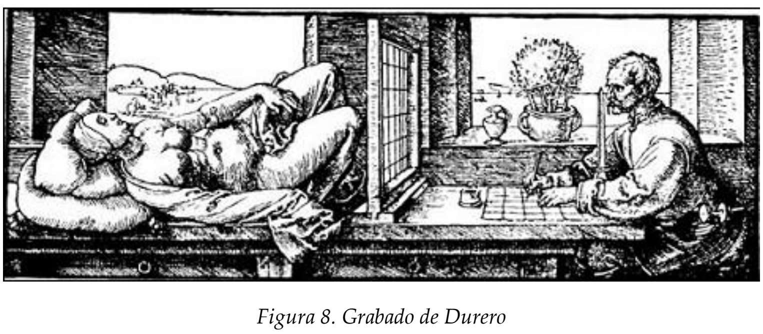


Figura 8. Grabado de Durero

Pero, ¿qué sucedería si ese retículo se colocara de manera oblicua?

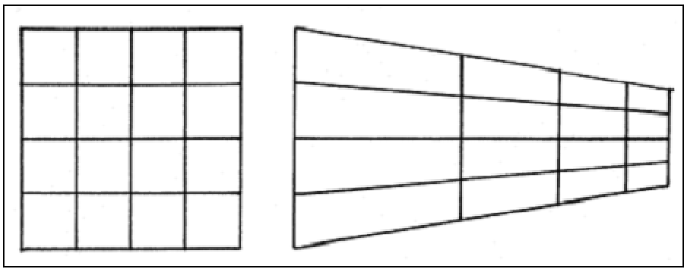


Figura 9.

La figura quedaría deformada: al construir la imagen proyectada sobre un plano oblicuo, la única manera de ver la figura en sus proporciones reales sería adoptando el punto de vista excéntrico adoptado para la proyección.

Figura 10. Los Embajadores, Holbein el joven, 1533. National Gallery, Londres

Un ejemplo de este tipo de anamorfosis –*anamorfosis oblicua*– es el magnífico cuadro *Los embajadores* (1533), la obra más célebre de Holbein el Joven (1497-1543). Representa a dos diplomáticos, posando delante de un tapiz. Entre los dos hombres, diversos objetos, símbolos del poder –laico y eclesiástico– y del conocimiento científico –relojes solares, un globo terráqueo, instrumentos de navegación y de astronomía, libros, etc–. La escena representada por el pintor está datada con gran precisión: 11 de abril de 1533. Poco tiempo antes, Enrique

VIII solicitaba al papa Clemente VII la anulación de su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca desposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero. A principios de abril, el arzobispo de Canterbury, Thomas Cranmer, anula él mismo el matrimonio anterior y declara a Ana Bolena reina de Inglaterra. El hecho no tenía precedentes, y se envió una embajada francesa para intentar una reconciliación de Enrique VIII con el papa. El cuadro de Holbein representa a los dos miembros de esta embajada: Jean de Dintevile (1504-1555) –a la izquierda, poseedor del poder político– y Georges de Selve (1508-1541) –a la derecha, depositario del poder religioso–.

En primer plano, en el centro, se observa un objeto enigmático: se trata de un cráneo estirado, cuya forma no se aprecia delante del espectador a no ser que éste adopte un cierto punto de vista con respecto al cuadro.

La técnica empleada por Holbein para producir este efecto es la de la *anamorfosis oblicua*.

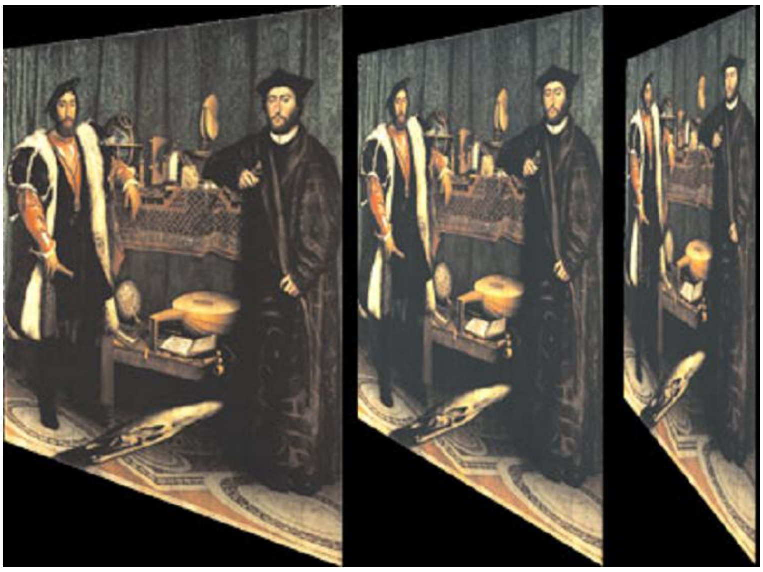


Figura 11.

Figura 12. La calavera escondida

La imagen libra su secreto cuando una se coloca al lado del cuadro para mirarlo oblicuamente: entonces se ve una calavera deformada proyectando una sombra sobre el embaldosado del suelo.

Los diseños anamórficos se utilizan en la señalización de nuestras carreteras. La razón es que las y los conductores ven las marcas sobre el asfalto desde una posición inadecuada, con un aparente encogimiento de los objetos al ir avanzando. En el ejemplo de la Figura 13, el tamaño de la flecha parece el mismo que el de la palabra CAR debajo de ella. Pero, visto de lado, se observa que la flecha es más del doble de larga que la palabra: la señalización utiliza la herramienta de *anamorfosis por estiramiento.*

Figura 13.

Otra impresionante anamorfosis por estiramiento es la de este *jugador de rugby* creado para la apertura de la copa del mundo de rugby de 1999: la figura mide 134,20 metros de largo, pero dependiendo del punto de vista del espectador, parece tener la misma altura que la de cualquier persona que pasee por la calle.

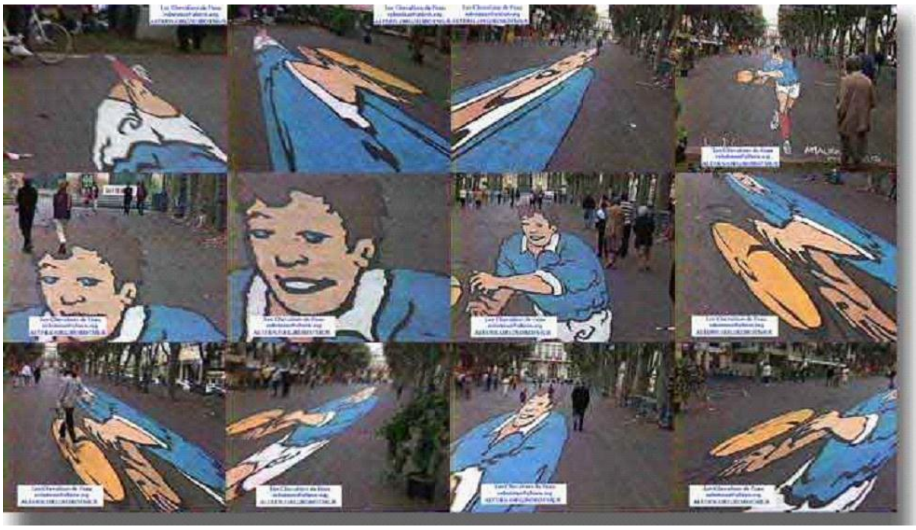


Figura 14. Les Chevaliers de l'eau (http://jourdain.ifrance.com/sommaire.htm).

Una técnica bellísima es la de la anamorfosis cilíndrica o cónica: como se muestra en la Figura 15 –y tras los correspondientes cálculos matemáticos– la figura que se desea se desarrolla sobre un cilindro o un cono –también se puede hacer sobre otro tipo de figuras, como una pirámide–. Se recupera la imagen original al ver reflejado el dibujo deformado sobre un espejo cilíndrico o cónico.

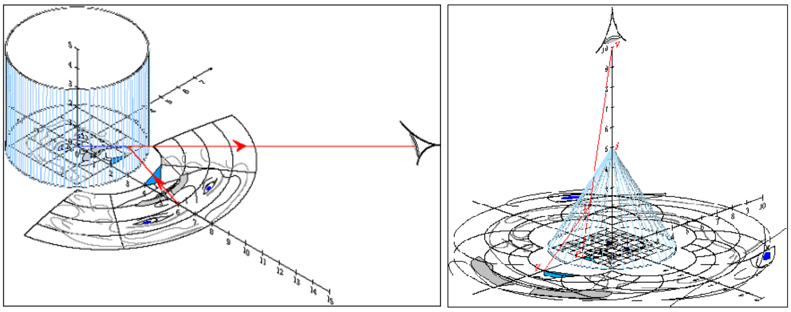


Figura 15. Anamorfosis cilíndrica y cónica. Imágenes tomadas de http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm

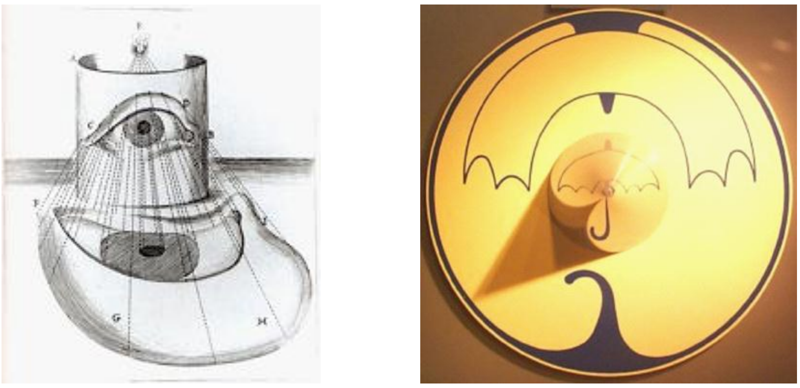


Figura 16. Mario Bettini, « L'Oeil du cardinal Colonna », 1642. "Sténopé. The Representation of Space", Cité des Sciences et de l'Industrie, París.

Figura 17. Domingo García y Antonio J. Lombillo, "Anamorfosis". Casa de las Ciencias de Logroño.

El artista Itsván Orosz es un mago de la anamorfosis, en la Figura 18 se puede ver una de sus obras. El cuadro representa un paisaje nevado, con montañas, personas caminando, barcos y –aunque en la imagen no se vea por estar colocado sobre él el cilindro– el sol en un cielo cubierto de nubes. Es decir, podría ser perfectamente una escena de *La isla misteriosa* de

Julio Verne. Y al colocar un espejo cilíndrico sobre el sol, reflejado sobre él aparece Julio Verne, que estaba *escondido* en el paisaje original.

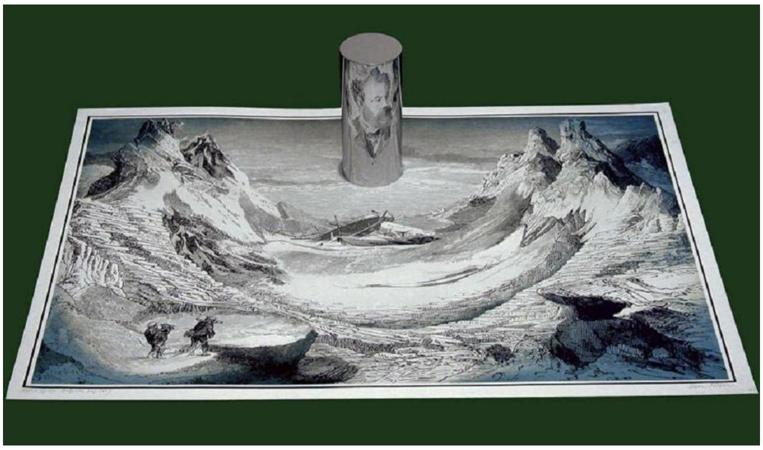


Figura 18: La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne.

La Figura 19 muestra otra de las obras de Orosz: un joven dibuja un impresionante cuervo, y cuando coloca un espejo cilíndrico en el lugar adecuado, el rostro de Edgar Allan Poe –el autor de *El cuervo*– aparece sorprendentemente reflejado.

Figura 19. The Raven.

Figura 20.

La Figura 20 muestra un peculiar juego de tazas de café, con una divertida anamorfosis que hace aparecer –al colocar la taza sobre el plato– a unas bailarinas de can-can del pintor Henri de Toulouse-Lautrec.

En la Figura 21, se muestra la obra *Deceptive outward appearance* del diseñador gráfico Ole Martin Lund Bo... y en la figura 22 se descubre el engaño...

Figura 21.

Figura 22.

Observar que el texto está dibujado sobre las maderas, no sobre la pared. El efecto conseguido es, sin duda, impresionante.

Hay muchas otras maneras de crear anamorfosis, muy utilizadas en el mundo artístico: Julian Beever, Eduardo Relero y Kurt Wenner son algunos de los artistas más conocidos en el mundo de la anamorfosis. Sus obras dibujadas en calles y edificios son una auténtica joya –y precisan estudios minuciosos previos a su elaboración final–.

2. Paradojas lógicas: de barberos y otros asuntos

Barbilandia es una ciudad en la que el barbero –Fígaro– sólo afeita a los que no se afeitan a si mismos. Como persona curiosa que soy, me pregunto ¿quién afeita a Fígaro?

Pensemos un poco... Fígaro no se puede afeitar a sí mismo, ya que sólo afeita a aquellas personas que no se afeitan a sí mismas. Pero entonces, debería de afeitarse, ya que Fígaro afeita toda el que no se afeite a sí mismo. ¡Vaya lío!

Bertrand Russell definió su denominada *teoría de tipos* que eliminaba todos aquellos conjuntos auto-contradictorios.

Así, que lamentablemente, el Barbero de Barbilandia no existe.

3. Paradojas del infinito: el hotel infinito de Hilbert

Érase una vez un hotel –*Infinito Hotel*– con una cantidad numerable de habitaciones, es decir, infinitas numeradas de la forma 1, 2, 3, etc. *Infinito Hotel* tiene contratado a Jack Torrance –si, el de *El Resplandor*– que sabe que la consigna del hotel es *Garantizamos el alojamiento a cualquier huésped*.

Un día en el que el *Infinito Hotel* estaba lleno, llega una persona que desea alojarse. ¡Qué mala suerte! Jack sabe que debe ser fiel al lema del hotel, y –había hecho un curso de teoría de conjuntos– solicita a todos los huéspedes del hotel que hagan los siguiente:

> *Por favor, si ocupas la habitación número n, pasa a la n+1. Gracias.*

De este modo, Jack consigue liberar la habitación número 1, y cumple la consigna del hotel.

Pero... ¿qué pasa con la persona que ocupaba la última habitación? No hay problema, no existe la "última habitación".

Otro día en el que el *Infinito Hotel* estaba lleno comienza un terrible temporal, y llega una excursión con infinitos Boy Scout –pero en cantidad numerable– que no se atreven a dormir en el bosque. Jack ni se inmuta, y siempre pensando en la consigna del hotel, solicita con autoridad:

> *Por favor, si ocupas la habitación número n, pasa a la 2n. Gracias.*

Así, quedan libres todas las habitaciones impares –recordar que el cardinal de los números impares es el mismo que el de todos los números naturales– y hace entrar en cada una de ellas a uno de los pusilánimes Boy Scout.

En otra ocasión en la que el *Infinito Hotel* estaba de nuevo lleno, una Agencia de Viajes hace una oferta exclusiva para personas mayores de 70 años. El descuento es tan excepcional, que infinitas excursiones –en cantidad numerable– de infinitos pensionistas –en cantidad numerable– llegan impacientes a disfrutar de las noches de baile y los desayunos del hotel. Jack es un profesional, y por megafonía anuncia:

> *Por favor, si ocupas la habitación número n y n es un número primo o una potencia de un número primo, haz lo siguiente: eleva 2 al número de habitación n que ocupas, deja libre tu habitación y ocupa la habitación* 2^n.

¿Qué lío está armando Jack? No hay que impacientarse, aún no ha terminado. El recepcionista asigna a cada excursión un número primo p, y a cada pensionista de cada excursión un número impar m. Cada nuevo huésped debe ir a la habitación p^m –justo son las de este tipo las que han quedado libres– si pertenece a la excursión p y Jack le ha asignado el impar m. Al existir una cantidad numerable de primos y de impares, Jack ha vuelto de nuevo a resolver el problema a la perfección.

4. Paradojas de la vaguedad: el eterno problema del tamaño

¿Cuántos granos de arena hay en un montón? Antes de contestar... ¿qué es un montón?

He mirado el diccionario de la Real Academia Española y en la definición de "montón" dice: *Conjunto de cosas puestas sin orden unas encima de otras.*

Bueno... entonces yo diría que un grano de arena no hace un montón. Entonces, dos granos de arena tampoco serán un montón... añadiendo otro grano, con tres granos tampoco tendremos un montón... si proseguimos de este modo el argumento –es decir, no se pasa de *no ser* un montón a *serlo* por añadir un *miserable* grano– acabamos de demostrar que 10^{100} no son un montón... pero 10^{100} es ENORME... ¿Seguro que no es un montón? Yo diría que si lo es... algo ha tenido que fallar en el argumento.

El problema proviene de la vaguedad del lenguaje... la definición de montón es bastante ambigua, y está sujeta a interpretaciones.

Otro ejemplo conocido es el del *hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo? Casi seguro que lo harías. Pero yo no soy calva, y sé que tengo 3.000.000 pelos en la cabeza. Si me quito uno, tendré 2.999.999 y seguiré sin ser calva. Si me quito otro, tendré 2.999.998 y no seré calva. Argumentando de este modo, quitando pelo a pelo --un pelo arriba o abajo no puede hacer la diferencia entre ser o no calva-- me quedaría un único pelo en la cabeza y *no sería calva*. ¿Y esto?

¿Qué soluciones se han dado a esta paradoja? Una de ellas se atribuye a Frege y Russell que abogan por acercarse a un lenguaje ideal cuyo atributo clave es la precisión. Otra manera de evitarla es cambiar la lógica binaria –si o no, verdad o falso– por lógicas multivaluadas, como por ejemplo la lógica difusa de Goguen y Zadeh, que reconoce grados de verdad para cualquier predicado. O aún mejor, puede aceptarse la paradoja, y decidir que... ¡la calvicie no existe!

5. Paradojas de la predicción: ¡Me libro seguro!

Érase una vez, en la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad –siempre decía la verdad– que pronuncia su sentencia ante un reo condenado a muerte:

Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra...

Tras el primer impacto, ya en la soledad de su celda, el reo argumenta del siguiente modo:

> *Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir... Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...*

Continuando de este modo con su argumento, el reo concluye que no puede ser ejecutado –con las normas impuestas por el rey– ningún día del mes, así que relajado y feliz, decide esperar a que pasen los días... sabe que el rey no miente nunca, así que si su condena no puede ejecutarse, le dejará libre al agotarse los días.

Sin embargo, contra todo pronóstico, un día cualquiera –por ejemplo el día 13, día de mala suerte– se presenta el verdugo en la celda con el hacha afilada y ejecuta al reo.

Desde luego, el rey no ha mentido, ya que el reo se ha llevado una buena –y fatídica– sorpresa. Pero entonces ¿dónde ha fallado ese argumento tan convincente del reo?

Una solución puede pasar por la noción de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc. que el conjunto "el mes". Un conjunto no es la mera adición de sus partes, y por ello posee cualidades diferentes que las de sus elementos. El análisis individual, día a día, del prisionero es exquisito. Pero el defecto en su argumento aparece cuando atribuye al conjunto –el mes– las mismas cualidades que poseían sus partes –cada día, tratado individualmente–, no advirtiendo que "el mes" ha incorporado algunas características, como la de contener "días sorpresa".

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

> *Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.*

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

6. Paradojas de la confirmación: ¿son todos los cuervos negros?

Carl Hempel, inventor de esta paradoja, afirma que:

> *La existencia de una vaca de color violeta incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.*

¿Por qué? Para responder, establezcamos la ley:

> *Todos los cuervos son negros,*

de una manera diferente, pero lógicamente equivalente

> *Todos los objetos no-negros no son cuervos.*

Hempel argumenta del modo siguiente:

> *He encontrado un objeto no-negro: una vaca violeta* –yo también conozco una de este color–. *Por lo tanto, esto confirma –débilmente– la ley: "Todos los objetos no-negros no son cuervos". Y así, también confirma la ley equivalente: "Todos los cuervos son negros."*

Es fácil encontrar millones de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema con la paradoja de Hempel es que, observando objetos no-negros se confirma la ley *"Todos los cuervos son negros"*, pero sólo a un nivel *infinitesimal*. La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos, que el grado con en el cual un "no-cuervo" que es no-negro confirma la hipótesis, es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una vaca de color violeta confirma del mismo modo el enunciado:

> *Todos los cuervos son blancos...*

7. Paradojas de la probabilidad: ¿me compensa jugar?

La pieza del dramaturgo Tom Stoppard *Rosencrantz y Guildenstern han muerto* comienza con una escena en la que los dos personajes secundarios de *Hamlet* juegan a *cara y cruz*: el desafortunado Guildenstern ha lanzado 90 monedas, todas han salido cara y han ido a parar –como manda el juego– al bolsillo de Rosencrantz.

A pesar de lo improbable de una tal serie, los dos personajes saben que puede suceder. Cuando los protagonistas están cansados de lanzar simplemente las monedas, Rosencrantz propone una variante: lanzará una moneda hasta que salga cara: si esto sucede en la primera tirada, dará una moneda a Guildenstern, si sucede en la segunda tirada, pasará dos monedas a su amigo; si sale cara en la tercera jugada, serán 4 las monedas que dará a Guildenstern, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez que la moneda cae en cruz.

La pregunta es ¿cuánto dinero debería pagar Guildenstern a Rosencrantz para que el juego sea equitativo?

El problema se resuelve fácilmente en términos de la esperanza matemática de ganar: la probabilidad del evento *cara aparece en la tirada n* es de

$$\mathbf{1/2^{n-1}\,(1/2) = 1/2^{n}.}$$

La *esperanza* de ganar de Guildenstern es, pues, la suma:

$$\mathbf{1/2 + 2(1/2)^2 + 4(1/2)^3 + 8(1/2)^4 + ... + 2^{n-1}(1/2)^n + \ldots =}$$

$$\mathbf{= 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + ... + 1/2 + \ldots = \infty}$$

Así, en honor a la *equidad*, el juego no debería tener lugar.

La progresión de ganadas es muy rápida: es la serie geométrica de razón **2**. Se podría reemplazar el **2** por un número inferior q y retomar los cálculos: en este caso, la esperanza de ganada de Guildenstern sería:

$$\mathbf{1/2 + q(1/2)^2 + q^2(1/2)^3 + q^3(1/2)^4 + ... + q^{n-1}(1/2)^n + \ldots =}$$

$$\mathbf{= 1/2(1 + q/2 + (q/2)^2 + ... + (q/2)^n + \ldots) = 1/(2 - q).}$$

Dependiendo del valor de q, la esperanza puede variar considerablemente...

8. Paradojas topológicas: ¡qué desorientado vas!

Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la Figura 18, se obtiene un *cilindro*, es decir, una superficie que obviamente tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados –la cara interior y la exterior de la figura–. Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180 grados, el objeto que se obtiene es una *banda de Möbius*. La banda de Möbius, como el cilindro, es un objeto geométrico de dimensión dos, pero sorprendentemente, posee un único borde –el doble de largo, su longitud es la suma de las longitudes de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro– y una única cara. En efecto, para comprobarlo, basta con recorrer con un dedo el borde de la cinta, hasta verificar que se ha recorrido todo sin levantarlo en ningún momento, y por ejemplo, pasar un lápiz por la cara de la banda, comprobando que al regresar al punto de partida, las supuestas dos caras del objeto han quedado marcadas.

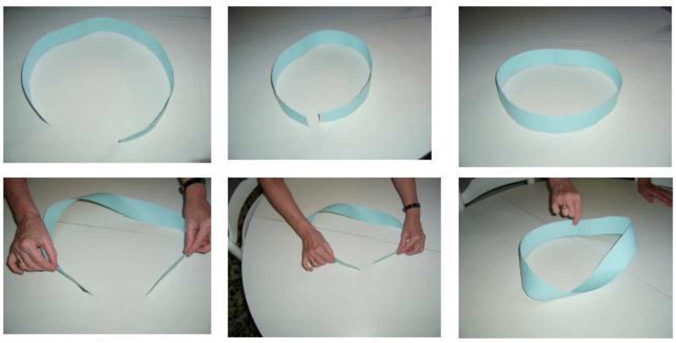


Figura 23: Construcción del cilindro (arriba) y la banda de Möbius (abajo).

¿Qué sucede si antes de pegar los extremos de la banda de papel se gira uno de ellos 360 grados? ¿Qué se obtiene? Se trata –topológicamente– de un cilindro, ya que este objeto y el obtenido al pegar sin realizar ningún giro son *homeomorfos*. En realidad, es fácil comprobar que sólo hay dos posibilidades al pegar una banda por dos de sus extremos opuestos: o bien se obtiene un cilindro –si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo par de 180 grados– o bien una banda de Möbius –si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo impar de 180 grados–…

La banda de Möbius es *no orientable*: dibuja por ejemplo una flecha sobre la banda, y muévela a lo largo de su única cara… observa que cuando regresas al punto de partida, ¡la flecha ha cambiado de sentido!

Continuamos con un par de experimentos de resultados paradójicos. Al cortar por la mitad un cilindro, se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original (figura 24). Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, en vez de quedar ésta dividida en dos lazos, se obtiene una única cinta… que es un cilindro, pues posee dos caras.

Figura 24. Ccortando un cilindro y una banda de Möbius por la mitad.

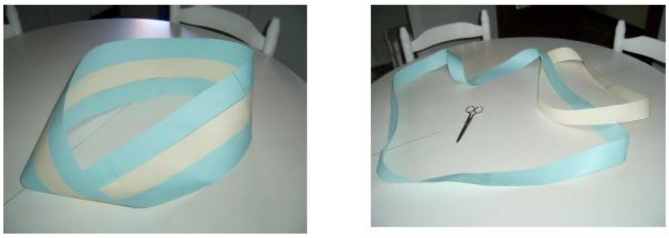


Figura 25. Cortando una banda de Möbius por la tercera parte.

Al cortar por su tercera parte un cilindro, se obtienen dos cilindros igual de largos, de alturas un tercio y dos tercios de la original. Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, resultan una banda de Möbius –igual de larga y un tercio de ancha– y un cilindro –el doble de largo y un tercio de ancho– y enlazados… ¿Y si cortáramos a otra altura? ¿Por qué la altura un medio es tan especial?

La banda de Möbius ha inspirado a artistas, arquitectos y diseñadores, como se muestra en los siguientes ejemplos:

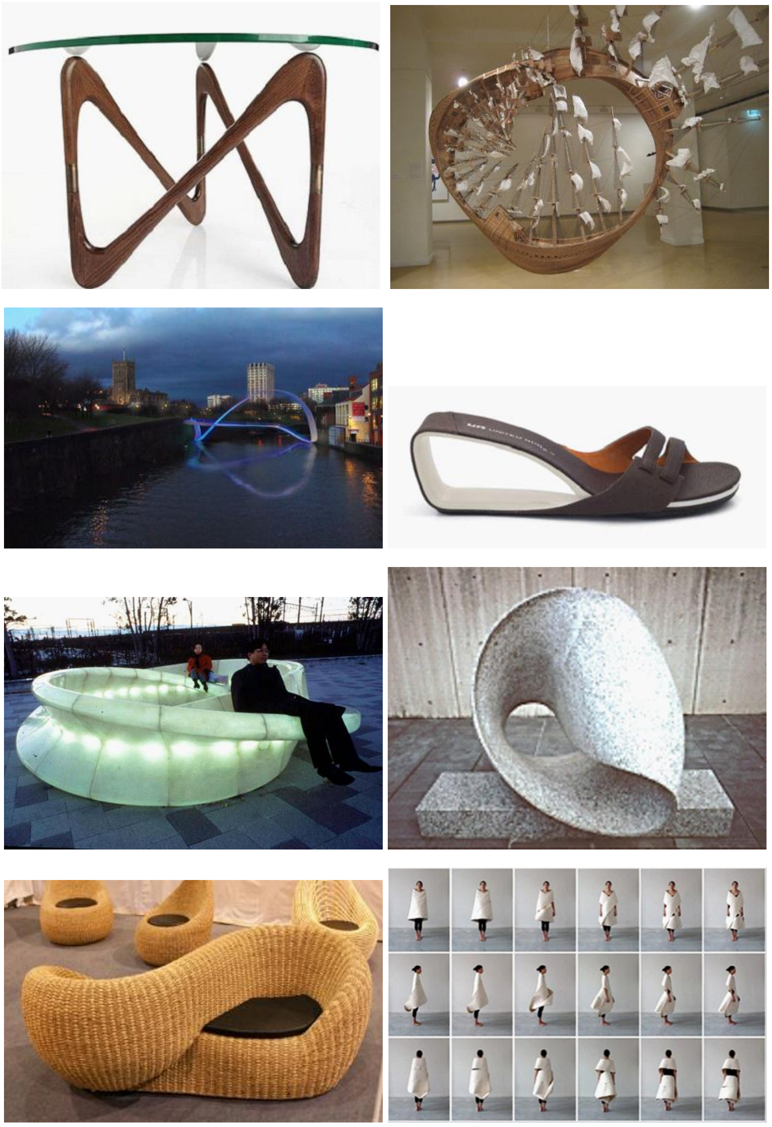


Figura 26. Mesa de café. Moebius Ship en el Museum of Contemporary Art, Sydney (Australia). Puente de Möbius en Bristol. Zapato, United Nude. Banco de Möbius, Vito Acconci. Unendliche Schleif,e Max Bill. Sofá de Möbius. Vestido de Möbius.

Nuestro conocido símbolo del reciclaje es una banda de Möbius, que también simboliza los agro-combustibles:

Figura 27.

Y para acabar de manera divertida, ¿recuerdas la *Serenata Mariachi* de Les Luthiers? Bernardo y Porfirio comparten *mariachi* para cantar a sus amadas. Comienza cantando Bernardo

Siento que me atan a ti
tu sonrisa y esos dientes
el perfil de tu nariz
y tus pechos inocentes.

Y sigue Porfirio:

Tus adorados cabellos,
oscuros, desordenados
clara imagen de un anzuelo
que yo mordí fascinado.

Cuando se dan cuenta que su amada es la misma –María Lucrecia– comienzan a interrumpirse, turnándose en sus estrofas, cantando de este modo, para el enfado –lógico– de María Lucrecia:

Siento que me atan a ti tus adorados cabellos,
tu sonrisa y esos dientes oscuros, desordenados
el perfil de tu nariz clara imagen de un anzuelo
y tus pechos inocentes que yo mordí fascinado.

¿Y que tiene que ver esto con la banda de Möbius? Podría haberse conseguido la misma serenada "combinada" de este modo: en la primera cara de una banda de papel rectangular se escribe la serenata de Bernardo; se gira esta tira de papel sobre su lado más largo –es esencial–, y se escribe la serenata de Porfirio. Se pega la tira para obtener una banda de Möbius; ahora tenemos una serenata sobre una única cara, que es la última que tanto desagrada a María Lucrecia: la banda de Möbius que *cambia la orientación* de todo lo que vive sobre ella ha cambiado dos serenatas de amor ¡por una canción grosera y desagradable!

Referencias

[1] ERICKSON, G.W. y FOSSA, J.A. *Dictionary of paradox*, Univ. Press of America, EE. UU., 1998.

[2] FALLETA, N., *Paradoxicon*, Doubleday and CO., EE.UU, 1983.

[3] LOYD, S. *Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums (with aswers)*, Lamb. Pub. CO., EE.UU., 1914.

[4] STOPPARD, T., *Rosencrantz y Guildenstern han muerto*, Edicusa, España, 1969.

Sobre la autora:
Nombre: Marta Macho Stadler
Correo Electrónico: marta.macho@ehu.es
Institución: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, España.

Cuentos Matemáticos

Fermat

Berardo Castiñeira de Aragón

Revista de Investigación

Volumen II, Número 2, pp. 147–150, ISSN 2174-0410
Recepción: 6 May'12; Aceptación: 24 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

En la oscura soledad de su despacho, un matemático se enfrenta al último reto de su vida. El suicidio pudiera ser una solución perfecta, elegante, similar a la resolución de sus problemas favoritos. Hastiado de su vida, acaba de sufrir un desengaño amoroso que le ha llevado a cometer este acto desesperado. ¿Podrán las matemáticas ayudarle a superar esta situación?.

Palabras Clave: Fermat, suicidio, desengaño, problema.

Abstract

In the dark loneliness of his office, a mathematician faces the last challenge of his lifetime. Suicide could be a perfect solucion, elegant, similar to the resolution of his favorite problems. Tired of his life, just had a broken heart that led him to commit this desperate act. Can mathematics help him overcome this?.

Keywords: Fermat, suicide, disillusionment, problem.

"Para todos los que amamos las Matemáticas"

Paul se sentó incómodo en su butaca de piel. La edad no dejaba de marcar su rostro con profundas líneas en la piel cuyo comienzo y final eran indecisos. Sus ojos, que en otro tiempo habían sido de un vivo color azul, ahora buscaban desesperadamente la luz que desprendieron tiempo atrás. Se miró las manos vacías y observó decaído que habían perdido la fuerza y el vigor de antaño. Aunque su cuerpo no había superado los cincuenta años su alma vagaba indecisa entre los noventa y los cien años y cada día que superaba era un penoso viaje hacia algún lugar que, sea cual fuese, le causaba profundo dolor.

Se echó las manos a la cabeza e indagó en sí mismo en busca de un único motivo que le impulsase a levantarse de aquel sofá. Apretó fuertemente sus sienes. Pronto comenzó a sudar y aquellas gotas de sudor que resbalaban por su piel se mezclaron con las lágrimas que florecían marchitas por sus ojos. Se tapó la cara con las manos para evitar que los fantasmas de toda su existencia le descubrieran llorando como un simple niño que no quería admitir que todos sus juguetes se habían roto y se volvían despreciables. Entonces gimió. Era un gemido profundo y vasto que llegaba al exterior como la sombra de un grito que, encadenado por el peso de los años, no es capaz de liberarse.

Lo encontró. Encontró el motivo para levantarse. Se incorporó empapado de sudor y lágrimas y se acercó a su escritorio. Abrió el cajón y sacó de él un pequeño revólver que guardaba para su propia seguridad. No dejaba de ser irónico -pensaba él- que el objeto que garantizaba su propia seguridad fuese el que iba a terminar con los fantasmas que le atormentaban. Lo colocó encima de la mesa, se sentó, cogió un papel y una pluma y mientras puso en el tocadiscos la sonata "claro de luna" de Beethoven se dispuso a escribir su testamento.

Paul había sido un brillante matemático durante toda su vida. Al comienzo de su carrera profesional, varios éxitos deslumbraron a toda la comunidad científica y su nombre era conocido por todas partes. Pronto consiguió una plaza en una prestigiosa universidad y en ella desarrolló su labor docente acompañada de su incansable tarea investigadora. Su campo era la teoría de números por la que se sintió atraído desde que conoció, casualmente, la existencia de los números que Pitágoras llamaba "perfectos", aquellos que son la suma de todos sus divisores. Con el tiempo su genialidad se tornó en mediocridad y, aunque seguía escribiendo con periodicidad en las revistas científicas y estaba en contacto con la comunidad, su nombre desapareció de los congresos más importantes y nadie contaba con él a la hora de verificar un resultado o a la hora de pedirle consejo. Nadie está muy seguro de si la muerte de la genialidad que despuntó al inicio de su carrera fue causa o consecuencia de su casi total pérdida de ilusión por el mundo de las matemáticas. éstas le insidiaban constantemente en su trabajo y en su vida y no podía separarse de ellas produciendo en él una insaciable sensación de hastío de todo.

Un día llegó al despacho una nueva profesora, Judith. La primera impresión que tuvo de ella le descolocó momentáneamente. Era una mujer hermosa. Aparentaba tener la misma edad que él y no podía dejar de observar admirado aquella sonrisa sincera que regalaba a todo el que se acercaba. Con el paso de los meses y el trabajo conjunto que les unía, Paul se enamoró profundamente de ella. Era una mujer especial y llena de virtudes. Paul, que creía que el sentimiento era recíproco, decidió un día manifestarle todos sus sentimientos y explicarle cómo en seis meses había conseguido que se volviese a emocionar con su vida, con su trabajo, con las matemáticas y, especialmente, con ella. Pero antes de que él dijese nada ella le habló de su amor por otro hombre. En aquel momento un oscuro telón cubrió el entendimiento y el alma de Paul. Nunca supo qué ocurrió en los instantes posteriores ni lo que dijo. Pareciera que todo el ánimo recobrado en el último medio año desde la llegada de Judith le hubiese golpeado violentamente. Tras dos días de intensa agonía, una tarde, sentado en su butaca de piel decidió quitarse la vida.

Como siempre hacía con todo, decidió organizar de forma meticulosa y ordenada su muerte. Después de meditarlo, consideraba que aquello no respondía a un momento de frustración nefasta si no, más bien, a la resolución adecuada y elegante de una ecuación en la que finalmente la solución, que existía y era única, era el suicidio. Escribió su testamento. Escribió también una carta en la que explicaba su situación para que la leyesen cuando encontrasen su cuerpo. Lo cierto es que dudaba que a nadie le importase mucho los motivos pero, le parecía lo más apropiado dadas las circunstancias. Y, finalmente, preparó cómo sería la noche de su muerte. Claramente -pensaba él- debía ser por la noche, que es el momento más preciso para las acciones sobrecogedoras. Es más, sería exactamente a media noche envuelto entre las notas del Réquiem de Mozart que comenzaría puntualmente a las 23:00 de forma que su cuerpo yaciese en el suelo atravesado por una bala mientras la magnífica Misa de muertos tocaba a su fin. Así quedaría patente que, en definitiva, todo acaba.

Por fin llegó la noche elegida. Era una noche abierta en la que las estrellas brillaban poderosamente queriendo ser testigos directos del suceso que iba a tener lugar. Paul lo había dejado todo preparado y aún le quedaban algunas horas hasta la media noche. Se sentó una vez más, la última, sobre su butaca de piel en medio del despacho de su casa. Contempló todo lo que le rodeaba. Un magnífico despacho acabado en madera cuyas paredes quedaban ocultas por una espléndida biblioteca atestada de libros, unos de contenido matemático, otros de literatura y una última sección llena de autores de filosofía. En su esquema inicial no había previsto que le sobrase tanto tiempo antes de la media noche así que para matar el tiempo - le pareció irónico tener que matar el tiempo antes de matarse a sí mismo- cogió un libro. Eran los dos artículos de Andrew Wiles en los que se recogía la demostración del Teorema de Fermat.

Lo abrió por una parte que conocía muy bien y había estudiado en varias ocasiones. Era una de las partes fundamentales en las que se demostraba la conjetura de Taniyama-Shimura. Aquellas fórmulas y números eran una sinfonía maravillosa orquestada por un magnífico director y a la vez autor. Todo parecía tener sentido y cerrarse en sí mismo. Contemplaba la maravilla de las matemáticas que, con su estructura perfecta, definen de manera exacta su propia esencia. El orden, la pulcritud, la puntualidad, la exactitud, la coherencia, la ausencia de sinsentidos, la lógica, todas las virtudes a las que aspira el hombre quedan embebidas en las matemáticas y es por esto que, al igual que un músico se deleita con la armonía, aquellos que saben entender las matemáticas se deleitan y disfrutan con el reto que éstas suponen. De pronto, las notas del Réquiem comenzaron a sonar. Aquellas notas llegaron a la mente de Paul como un bálsamo reconfortante. "Ya llega el momento de terminar con esto".

Continuó observando la demostración. Entonces vio algo extraño en ella. Era una nota discordante en medio de la inmensa jerarquía de notas bien organizadas que la acompañaban. No podía detectar si se trataba de un fallo del músico o, más bien, una nota que el autor no había puesto en el lugar correcto. Era un paso probablemente baladí en la demostración pero no estaba del todo detallado. Andrew Wiles había supuesto que la solución de una ecuación trivial era una constante real, lo cual tenía sentido, pero después hacía uso de ella considerando que era un número positivo y esto no quedaba reflejado en ningún paso previo. Esto le inquietó. Aquella demostración había sido revisada por cientos de matemáticos y no podía contener un fallo tan trivial pero... ¿Y si la estructura formal de la demostración había sido bien revisada pero un detalle tan nimio había pasado desapercibido? Rápidamente Paul tomó un lápiz y garabateó los pasos previos y siguientes al punto dudoso sobre el margen del libro. Parecía tener sentido que aquella constante fuese positiva pero. ¿Por qué? La intuición dejaba claro que tenía que ser así pero la intuición, tan válida para físicos e ingenieros, no es suficiente para un matemático. Tras un rato trabajando decidió usar un cuaderno pues todos los márgenes estaban ya repletos de números.

El silencio, agazapado durante el Réquiem, reinaba ahora triunfante en el despacho mientras Paul seguía concentrado y preocupado por aquella cuestión tan aparentemente sencilla pero a la par enrevesada. Maldito Fermat -pensó-. Las horas pasaban mientras Paul continuaba absorbido por aquel paso. Parecía que había avanzado bastante y, desde luego, no era algo tan absolutamente trivial como para no detallarlo en la demostración. Tenía buen aspecto el rumbo que había tomado Paul en sus notas y llevaba tres folios rellenos. Ya comenzaba a ver la luz al final del túnel. En unos pocos pasos más habría, por fin, terminado. En su mente tenía perfectamente clara la estructura de los últimos pasos y ya veía que, en efecto, aquella constante debía ser positiva. Finalmente, terminó. La última línea que escribió contenía sencillamente "por tanto, a es una constante real positiva". Respiró tranquilo y se recostó en la butaca con la satisfacción de quien ha completado un duro trabajo con un acabado brillante.

Entonces un fogonazo le cegó instantáneamente. Al recuperar la vista miró hacia la fuente de la luz. Era el primer rayo de sol que se asomaba por la ventana. La luz del sol iluminaba completamente su rostro. De pronto se dio cuenta... No se había suicidado. Contempló el libro, sus notas en los papeles, el revolver sobre la mesa. Todo tal y como lo había dejado al inicio de la noche. Entonces sonrió, era una sonrisa sincera y profunda como hacía mucho tiempo que no disfrutaba. Volvió a mirar al cielo. Parecía que Dios, a través de las matemáticas, le había regalado una vez más la vida. Se sintió descansado y sintió asimismo el rebrotar de la vida en su interior con una fuerza desconocida para él. Una vez más las lágrimas florecieron de sus ojos pero esta vez radiantes como el sol que las cubría con su luz. Oró como hacía muchos años que no había hecho. Sentado en su butaca de piel contempló sus manos y, aunque envejecidas, se dio cuenta de que aún tenían la fuerza y el ánimo para seguir trabajando y luchando. Es la maravilla de la vida -pensó de repente- que es un torrente de esperanza y fuerza que dura incluso después de la muerte, un paso más en la vida. Se levantó, arregló sus cosas, cogió su cartera llena de apuntes y se fue a la universidad.

Desde entonces no desperdició ni un solo segundo de su vida. Sus clases se convirtieron en auténticas lecciones vibrantes y emocionantes en las que sus alumnos disfrutaban y gozaban con sus maestras palabras. En la comunidad científica volvió a despuntar ilusionado como lo había hecho en su juventud y nunca dejó de hablar a todos del don inmenso recibido con la vida, escenario perfecto donde enamorarse, sufrir y amar son preciosas oportunidades para disfrutar aún más de ella. Finalmente, Paul murió felizmente una dulce tarde de otoño treinta años más tarde de "la noche de su verdadero nacimiento", como él la llamó siempre, con una sonrisa en los labios. La misma sonrisa que dedicó siempre al mundo en su paso por él.

Sobre el autor:
Nombre: Berardo Castiñeira de Aragón
Correo electrónico: berardo.castineira@me.com
Profesión: Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid. Actualmente cursa 4º de Licenciatura de Ciencias Exactas en la Universidad Complutense de Madrid.

Investigación

Labbtex: Toolbox para generación de informes en LaTeX para Matlab®

Francisco Soler, Nicoletta González, Alberto Camarero,
Mª Carmen Palomino y José Luis Almazán

Revista de Investigación

Volumen II, Número 2, pp. 151–156, ISSN 2174-0410
Recepción: 16 Jul'12; Aceptación: 20 Jul'12

1 de octubre de 2012

Resumen

En este artículo se presenta el software desarrollado por el Equipo H3lite dentro del Departamento de Ingeneniería Civil. Transportes de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid para la generación de informes en LaTeX mediante el software Matlab® y la integración en sus rutinas, **Labbtex**.

La librería Labbtex proporciona un marco flexible para mezclar texto y código Matlab® para la generación automática de documentos. Un archivo fuente simple contiene el texto de documentación y el código Matlab, al correr la aplicación se genera un documento final LaTeX que contiene el texto, gráficos y tablas indicados con el formato de un documento LaTeX. El código Matlab genera un documento LATEX usando la sintaxis. Así, LaTeX (para composición de texto de alta calidad) y Matlab® (para cálculo matemático) pueden usarse simultáneamente. Esto permite la generación de informes en tiempo real con un uso de recursos mínimo.

Palabras Clave: LaTeX, Matlab, informes, Labbtex.

Abstract

The library provides a framework Labbtex flexibility to mix text and code Matlab® for Automatic generation of documents. A single source file containing the text of documentation and Matlab code, to run the application generate a final document LaTeX containing text, graphics and tables indicated with the format of a document LaTeX . Matlab code generates a LaTeX document using the syntax. Thus, LaTeX (for text composition bond) and Matlab® (for calculation mathematical) can be used simultaneously. This allows the generation of reports real time with minimum resource use.

Keywords: LaTeX, Matlab, reports, Labbtex.

1. Introducción

Algunas de las herramientas matemáticas más utilizadas en el ámbito de la ingeniería son el software Matlab® [1], [2] y el sistema de composición de textos para documentos científicos y en especial matemáticos LaTeX. En la actualidad el software incluye una Toolbox que permite la generación de informes: Matlab Report Generator® [3] pero además de ser un módulo extra de pago al software, no genera documentos en LaTeX.

LaTeX es un sistema de composición de textos, orientado especialmente a la creación de libros, documentos científicos y técnicos que contengan fórmulas matemáticas. LaTeX está formado por un gran conjunto de macros de TeX, escrito por Leslie Lamport en 1984 [4], con la intención de facilitar el uso del lenguaje de composición tipográfica, creado por Donald Knuth. Es muy utilizado para la composición de artículos académicos, tesis y libros técnicos, dado que la calidad tipográfica de los documentos realizados con LaTeX es comparable a la de una editorial científica de primera línea. LaTeX es software libre bajo licencia LPPL.

Figura 1. Equipo H3lite

La mayoría de los paquetes matemáticos tienen la opción de guardar sus salidas en archivos con formato *.doc*, *.rtf* o *.txt*, lo que permiten usar un procesador de texto como Microsoft Word u Open Office para abrirlo, así que copiando y pegando se construye el informe final con los comentarios del análisis. Si deseamos usar LaTeX para la composición del texto del informe o artículo, encontramos que la metodologíaa de copiar y pegar resulta poco eficiente [5].

En el equipo H3lite se ha visto la necesidad de desarrollar una aplicación propia que permita de una manera sencilla la generación de informes en tiempo real. Así se ha desarrollado una Toolbox específica para tratar este problema.

Son conocidos los paquetes o librerías que conforman Matlab®, por ejemplo existen Toolboxes para Estadística o Redes Neuronales [6]. La Toolbox desarrollada permite que cualquier investigador o estudiante, a partir de sus rutinas o programas desarrollados con Matlab® genere documentos en LaTeX de una manera sencilla sin conocimientos en este último lenguaje. Si además el usuario conoce LaTeX, la utilidad de la toolbox es ilimitada.

2. Desarrollo de la aplicación

Hace tiempo que MATLAB es ampliamente conocido, aceptado y utilizado por la comunidad científica [7]. Esta aceptación se está extendiendo a aplicaciones generales en ingeniería debido a su entorno amigable y facilidad de uso. De esta manera, software estandarizado escrito en C o Fortran, se han relegado a un segundo plano, puesto que es complicada su utilización por usuarios no expertos.

La Toolbox desarrollada cuenta con 5 archivos:

1. ***abre-informe-libro.m:*** Crea el archivo .tex que irá completándose durante la ejecución de la rutina programada.
2. ***inserta-texto.m:*** Inserta el texto deseado.
3. ***inserta-tabla.m:*** Convierte una matriz de Matlab® en una tabla de LaTeX.
4. ***inserta-imagen.m:*** Inserta la imagen deseada (en esta versión, en formato postcript.
5. ***cierra-informe.m:*** Cierre el archivo y da como resultado el archivo .tex.

El diagrama de flujo que ejemplificaría la utilización de la toolbox desarrollada se resume en la Figura 2.

3. Ejemplo de utilización de la aplicación

El siguiente código genera un informe sencillo que incluye texto, imágenes y tablas obtenidas directamente del código Matlab®.

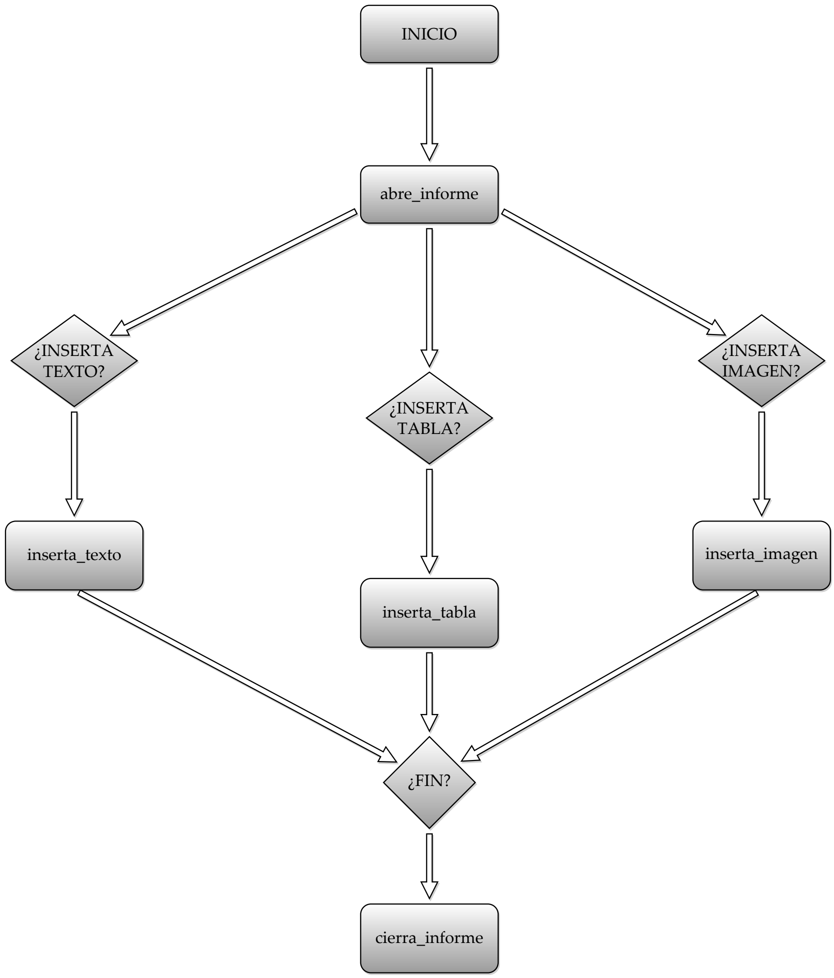
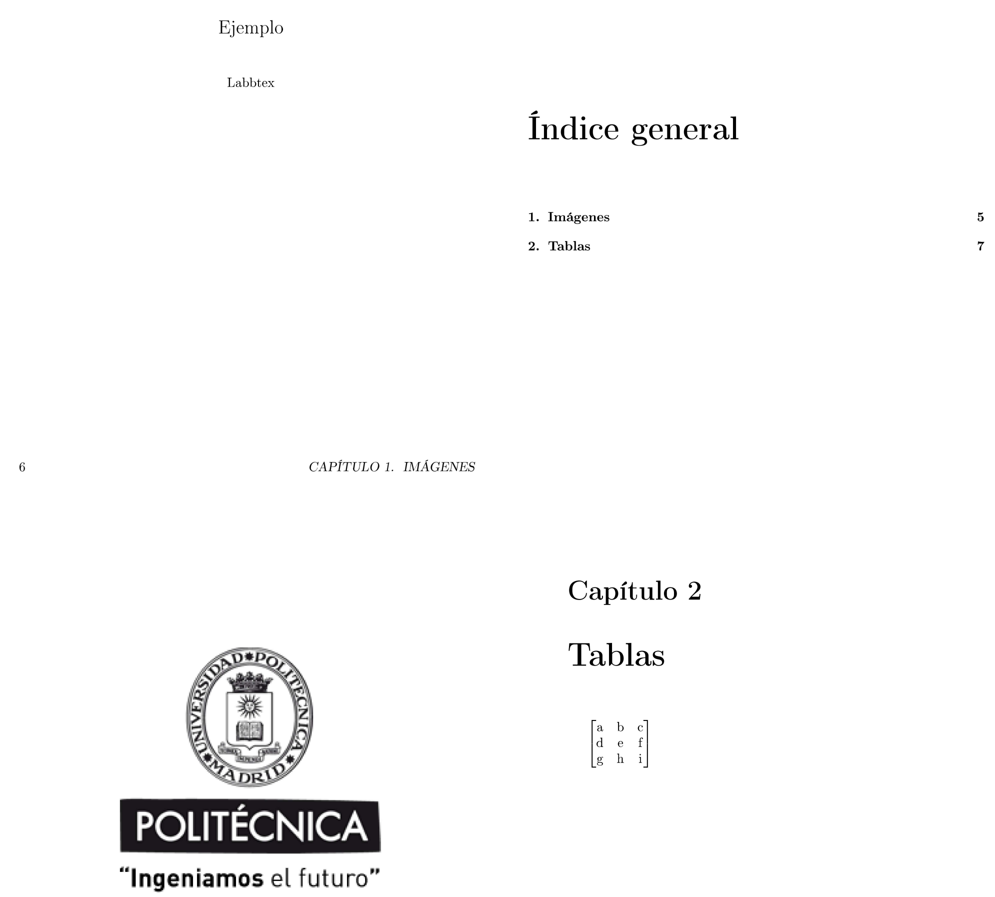


Figura 2. Diagrama de flujo

```
clear
clc
tic
narchivo='ejemplo.tex';
archivo=abre_informe(narchivo,'Labbtex','Ejemplo','f');

inserta_texto(['@chapter{Imágenes}'],archivo);
inserta_imagen(['\logoupmBN_new_ing.eps'],'Logo UPM',archivo);
inserta_texto(['Este es un ejemplo de documento.'],archivo);

inserta_texto(['@chapter{Tablas}'],archivo);

cabecera_tabla(1).value='a';
cabecera_tabla(2).value='b';
cabecera_tabla(3).value='c';
inserta_tabla([d e f;g h i],'datos',archivo,cabecera_tabla)

cierra_informe(archivo,narchivo);
toc
```

El código del ejemplo, al ejecutarse genera un documento *tex* que al compilarlo da como resultado el documento *pdf* de la Figura 3.



Ejemplo

Labbtex

Índice general

1. Imágenes	**5**
2. Tablas	**7**

6 *CAPÍTULO 1. IMÁGENES*

Capítulo 2

Tablas

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

"**Ingeniamos** el futuro"

Figura 3. Documento pdf resultante

4. Conclusiones y perspectivas futuras

La librería Labbtex es una valiosa herramienta para resolver el problema de la generación de documentos a partir de rutinas de Matlab®. Constituye un núcleo computacional estable, rápido y muy completo. Además, requiere de poca memoria y, por consiguiente, permite abordar problemas de mayor dimensión como por ejemplo los problemas en los que se utilizan bases de datos muy grandes.

La herramienta sigue en desarrollo dentro del Equipo H3lite para perfeccionar la funcionalidades de la toolbox y dotarla de más opciones y mayor versatilidad.

5. Agradecimientos

Durante la realización del proyecto: *'Tratamiento y Análisis de datos de la instruentación del dique de Botafoc'* financiado por la Autoridad Portuaria de Baleares [8], [9], [10], se observó la

necesidad de generar grandes volúmenes de documentación de manera simultanea al funcionamiento de Matlab®.

Esta aplicación comenzó a desarrollarse dentro del marco del proyecto de investigación *'TRAVIESA (Transmisión de Vibraciones del ferrocarril urbano al entorno: Estrategias, Tecnologías y materiales para su atenuación)'* financiado por el CDTI y el Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España. Además su utilidad se puso de manifiesto.

Nuestro agradecimiento a la Universidad Politécnica de Madrid por ayudar en el proceso de solicitud de inscripción en el Registro Territorial de la Propiedad Intelectual.

Referencias

[1] PÉREZ LÓPEZ C., *Matlab y sus aplicaciones en las ciencias y la ingeniería*, 2002.

[2] MATHEWS, J. H., FINK, K. D., ESCOLANO, P. J. P., CARRIÓN, A. F., y MÁRQUEZ, M. C. *Métodos numéricos con MATLAB*, volumen 2. Prentice Hall, 2000.

[3] CRITZ, D. y DEAN, L. *Report generator for a mathematical computing environment*, 2006.

[4] LAMPORT, L. *LaTeX*. 1994.

[5] RIVERA, M. A. M. Rivera. *Generación automática de reportes con R y LaTeX*, 2007.

[6] DEMUTH, H. y BEALE, M. *Neural network toolbox for use with matlab*, 1993.

[7] HERNÁNDEZ, V., BLANQUER, I., VIDAL, A., y ARIAS, E. *Slicot: Una libreria de software numérico eficiente y fiable para problemas de control con interfaces para matlab*, 1999.

[8] ALMAZÁN GÁRATE, J. L., MATAS MATEOS, A., PALOMINO MONZÓN, M. C., GARCÍA MONTES, J. R., y AMORÓS SERRET, J. R. *Tratamientos masivos de datos procedentes de la instrumentación del dique de Botafoc (Ibiza)*. Ingeniería Civil, (149):43-56, 2008.

[9] ALMAZÁN GÁRATE, J. L., y LASCONATEGUY, D. E. I. *Ingeniería marítima y portuaria: Modelización vs Instrumentación*, 2010.

[10] ALMAZÁN GÁRATE, J. L., PALOMINO MONZÓN, M. C., MONTES, J. R. G., y SERRET, J. R. A. *Tratamientos masivos de señales procedentes de sistemas de sensores de instrumentación en prototipo*, 2007.

Sobre los autores:

Nombre: Francisco Soler Flores
Correo Electrónico: f.soler@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Nicoletta González Cancelas
Correo Electrónico: nicoleta.gcancelas@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Alberto Camarero Orive
Correo Electrónico: alberto.camarero@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Mª Carmen Palomino Monzón
Correo Electrónico: mcpalomino@caminos.upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: José Luis Almazán Gárate
Correo Electrónico: joseluis.almazan@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación

Matemáticas en el Arte: La Geometría del Espacio en Las Meninas

Jesús Hernando Pérez

Revista de Investigación

G.I.E
Pensamient
Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 157--166, ISSN 2174-0410
Recepción: 5 Sep'12; Aceptación: 20 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

La perspectiva cónica que analizaremos y reconstruiremos, usando el DGS Geogebra, es el espacio del desaparecido Alcázar de Madrid donde tiene lugar una de las escenas más célebres de la pintura española: La familia del Señor rey Phelipe Quarto más conocida como Las Meninas. El resultado es un conjunto de actividades integradas en el currículo de la geometría de la Educación Secundaria.

Palabras Clave: Geometría, Pintura, Perspectiva Cónica, DGS.

Abstract

The conical perspective we will analyze and reconstruct, using the DGS Geogebra, is the space of the missing Alcázar of Madrid where takes place one of the most famous scenes of spanish painting: the family of Mr. King Philip Quarto better known as Las Meninas. The result is a set of integrated activities in the curriculum of secondary education geometry.

Keywords: Geometry, Painting, Conical Perspective, DGS.

1. Introducción.

En España, el barroco supone el momento culmen de la actividad pictórica, destacando sobre un magnifico plantel de pintores, la genialidad y maestría de Diego Velázquez, Ribera, Bartolomé Esteban Murillo o Francisco de Zurbarán. Las principales escuelas del arte barroco serán las de Madrid y Sevilla aunque también son de destacar las Escuelas Toledana y Valenciana de la 1ª mitad del siglo. En el Barroco español del siglo XVII la geometría de la perspectiva cónica está, por tanto, bien consolidada, manifestándose en una pintura de gran realismo que, representada de forma insuperable por la obra de Velázquez, funde la perspectiva aérea y la perspectiva cónica, con lo que la representación de la realidad sobre el lienzo de forma tridimensional con sensación de profundidad es magistral.

Las Meninas han sido objeto de muchos estudios. Brown [2] presenta distintos enfoques. Uno de los estudios de los más interesantes, debido también al uso novedoso y espectacular por el uso del efecto tridimensional, de Geogebra, un DGS que se está afianzando con mucha fuerza en la enseñanza de Geometría, y que nos ha servido como referencia para realizar este trabajo, es el realizado por Mora y Losada [8]. La metodología usada sigue el camino señalado por Martín Casalderey [5] en el análisis del cuadro Pala di Brera de Piero della Francesca. Siguiendo su esquema analizaremos y reconstruiremos, utilizando el DGS Geogebra, el espacio del desaparecido Alcázar de Madrid donde tiene lugar una de las escenas más célebres de la pintura barroca española: La familia del Señor rey Phelipe Quarto más conocida como Las Meninas. A través de algunas referencias de perspectiva cónica bien trazadas técnicamente por Velázquez como pueden ser la alineación de los cuadros de la pared de la derecha o el miriñaque circular que lleva la bufona, hallamos elementos como el punto principal de fuga, o la rejilla o embaldosado imaginario de la sala que nos permitirá determinarlos los medidores y por tanto las medidas en profundidad y el punto de vista. A partir de la copia de Juan Bautista Martínez del Mazo del cuadro de Jordaens, Apolo vencedor de Pan, que se encuentra al fondo a la derecha y cuyas medidas son conocidas [1], y usando la perspectiva cónica frontal para trasladar esta medida a la línea de tierra donde se halla la rejilla de baldosas imaginarias, podemos dimensionar la escena. Trabajos anteriores del autor [3] partían de la suposición de que el pintor estaba situado a una distancia del cuadro de aproximadamente la mitad de la altura del mismo, lo que era un poco mas arriesgado pues, aunque debido a las mencionadas medidas conocidas del cuadro de Jordaens que nos permitían, ahorrarnos la cuestión de si se trata o no el propio cuadro o un retrato de los Reyes con cortinaje anaranjado del que nunca se tuvo noticia, dimensionarlo en altura, también deberíamos hacer una suposición sobre la inclinación del bastidor. Con la rejilla dimensionada podremos efectuar medidas en profundidad y por tanto reconstruir la estancia, la posición de los personajes y el tamaño de las formas, incluidas las figuras humanas que en ella se encuentran. A continuación obtendremos una aproximación al espacio real euclídeo tridimensional donde tiene lugar la escena, el Cuarto Bajo del Príncipe Baltasar Carlos, pues, aunque no se ve la línea de intersección entre la pared de la izquierda y la del fondo, oculta por el bastidor, si podemos recrearla baja la suposición de que las lámparas del techo están alineadas en el centro del techo de la estancia. Finalmente compararemos los resultados obtenidos con los trabajos realizados por John F. Moffit [6] a partir de los planos del Alcázar Real originales del arquitecto real Juan Gómez de Mora (1626). El resultado es un conjunto de actividades integradas en el currículo de la perspectiva cónica y de la geometría de figuras planas y espaciales, es decir, áreas y volúmenes, de la Educación Secundaria.

2. La Perspectiva Cónica Frontal-

Atribuido el descubrimiento de la perspectiva lineal o cónica a Bruneleschi en el siglo XV, es en el Renacimiento con Paolo Uccello, Piero de la Francesca y Leonardo da Vinci, cuando se aborda el tema con autentico rigor, obteniendo representaciones pictóricas sorprendentes para la época. Desde entonces, esta forma de ver el mundo como desde fuera del cuadro (Rejón de Silva, 1764), se generaliza en la pintura y se adquiere un gran dominio de la técnica geométrica.

Utilizaremos exclusivamente, la perspectiva cónica frontal para esta aplicación. El proceso para la construcción de una figura, un cubo por ejemplo (Figura 1), podría sintetizarse de la siguiente forma.

1. Dibujamos las Línea de tierra LT y horizonte LH, fijando la distancia entre ellas.

2. Colocamos sobre la LH el punto principal P y situamos el punto de vista V sobre una perpendicular a la LH por P.

3. Se abate el punto de vista V sobre la LH y se obtiene los puntos métricos M y M’.

4. Se coloca el cuadrado sobre la LT y, desde sus vértices se trazan líneas de fuga a P.

5. Se abate un lado vertical del cuadrado sobre la línea de LT y se unen sus dos extremos con el punto métrico M obteniendo las distancias de profundidad. Los puntos de intersección de estas líneas con las que fugan al punto P desde los extremos de la base determinan la base del cubo.

6. Entonces, trazando paralelas a los lados del cuadrado desde cada vértice de la base y uniendo los puntos de corte de estas con las líneas que fugan a P se construirá un cubo con la sensación de profundidad.

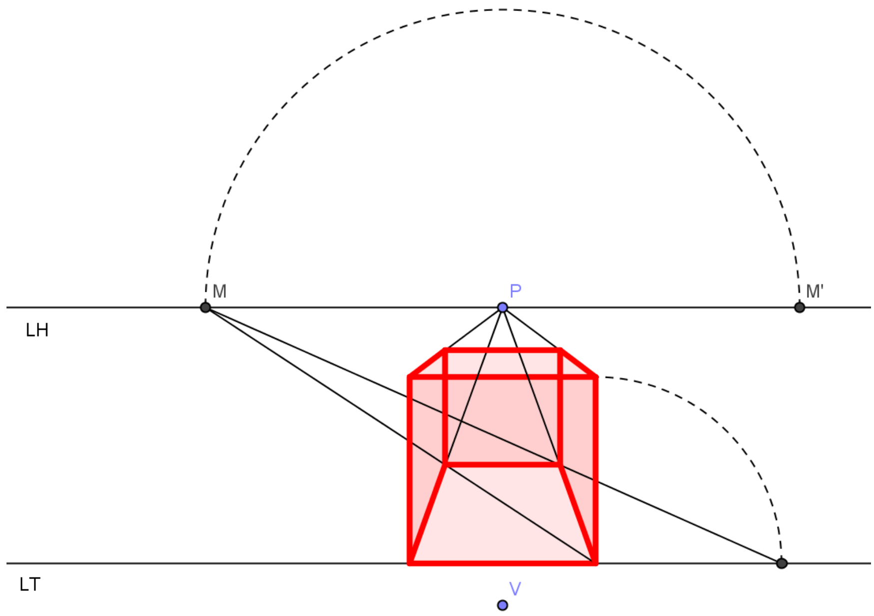


Figura 1. Perspectiva cónica frontal

3. Las Meninas

Las Meninas, nombre con el que se conoce la obra de Velázquez La familia de Felipe IV desde 1843, es una de las obras maestras de la pintura que más conjeturas, estudios e investigaciones ha suscitado.

El tema del cuadro parece trivial, la infanta y sus damitas de compañía (meninas en portugués) irrumpen en el estudio de Velázquez, pintor de cámara del rey Felipe IV, que se encuentra pensativo y observa los modelos que se dispone a pintar. Nosotros podemos ser esos modelos ya que somos contemplados por Velázquez, como también los reyes Felipe IV y Mariana de Austria, a quienes vemos reflejados en el espejo del fondo y que aparecen como meros espectadores de la escena.

Pero vayamos por partes, en primer término y de izquierda a derecha tenemos a María Agustina Sarmiento que está haciendo una reverencia y ofreciendo en una bandeja plateada un jarrito o búcaro rojo a la infanta Margarita de Austria que se encuentra en el centro de la composición y resulta ser una deliciosa y encantadora niña de seis añitos de edad. Margarita acepta con su mano el jarrito y nos observa con su candorosa mirada infantil. Un poco más a la derecha vemos a otra menina, Isabel de Velasco, que también muestra sus respetos mediante una suave reverencia. La siguiente es Maribárbola, enana macrocéfala de origen alemán, que también nos mira y, finalizando este plano, Nicolasillo Pertusato, que parece un niño pero también era un enano, bastante travieso por cierto, pues ya ves que le está dando una patada a un gran mastín tumbado en el suelo.

Un poco más atrás, a la izquierda, está el pintor Velázquez sujetando un pincel en la mano derecha y la paleta con los demás pinceles en la izquierda. Se está inspirando para pintar y se ha representado a sí mismo muy elegante y como de cuarenta años cuando ya rondaba los cincuenta y siete y no había sido todavía nombrado (lo fue tras su muerte) caballero de la Orden de Santiago. Delante de él está la parte posterior del lienzo sobre un caballete.

Ahora pasas a la zona derecha y, en un segundo plano, ves dos personajes: la dama Marcela Ulloa, "guarda menor de damas" y un caballero sin identificar que sería un sirviente de la corte y que tiene las manos juntas mientras escucha la conversación de la dama. Para marcar la distancia y el espacio, Velázquez los sitúa a ambos en penumbra y más abocetados que las meninas.

Al fondo, una puerta de madera con cuarterones se abre a una estancia posterior muy iluminada y José Nieto, aposentador de la corte, está en las escaleras, no sabemos si viene o se va. Lleva un sombrero en la mano y viste una elegante capa negra. La luz es de tal intensidad que hace brillar la escalera, la puerta y la persona de José Nieto.

Colgado en la pared ves un espejo que refleja la luz y donde el rey y la reina aparecen con un cortinaje rojo. No sabemos si están quietos posando para Velázquez o si entran en ese momento en la habitación.

La estancia es amplia y de techo alto, sería el estudio del pintor y por eso hay grandes cuadros por las paredes identificados en la actualidad como la copia de del Mazo de sendos originales de Rubens y Jordaens representando dos episodios mitológicos, Palas Atenea y Aracne (el de la izquierda) y Apolo vencedor de Pan (el de la derecha). Existen ventanas en la pared derecha y están alternativamente abiertas y cerradas lo que nos acentúa la sensación de profundidad y de atmósfera real. El gran tamaño de las figuras, casi natural, subraya aún más su presencia en un espacio muy creíble: el Cuarto Bajo del Príncipe Baltasar Carlos, la dependencia del Alcázar de Madrid que Velázquez usaba como estudio. Pasaremos a continuación a tratar de reconstruir esta estancia a partir de los detalles de perspectiva cónica contenidos en la obra.

4. Reconstrucción del espacio en Las Meninas.

Reconstruiremos, usando el Software de Geometría Dinámica Geogebra, el punto principal o punto de fuga principal que nos define la posición del pintor con respecto al cuadro, la línea del horizonte y de tierra, el plano geometral, los medidores o puntos métricos y el punto de vista que nos permitirá definir la posición de los ojos del observador en el cuadro y la propia perspectiva cónica que nos permitirá reconstruir el espacio físico real. En este punto sería necesario precisar que el proceso de representación en perspectiva cónica no siempre es inversible, pues es necesario disponer de algún dato sobre lo representado, por ejemplo las medidas de un cuadrado (puede ser una baldosa, peana, libro, alfombra, etc.) en un plano perpendicular al del plano del cuadro, es decir paralelo al plano geometral y al del horizonte. De esta forma podemos tomar medidas en profundidad con los medidores y puntos de distancia, y determinar el punto de vista y la planta del espacio representado en una red o cuadrícula. Con ello podemos dimensionar la escena, situar y reconstruir geométricamente los objetos presentes, calculando de paso sus áreas y volúmenes si disponemos de alguna medida concreta de referencia.

En este caso no disponemos de un embaldosado que nos permita reconstruir directamente la perspectiva cónica; pero si podemos encontrar el punto de fuga principal PP (el codo del aposentador real José Nieto) por medio de la fila de cuadros en la pared derecha (líneas amarillas) e incluso la línea del techo. Para dimensionar la escena debemos recurrir a algún otro detalle. Maribárbola lleva un miriñaque de apariencia circular que Velazquez representa en perspectiva cónica frontal. Reconstruyendo la cónica por medio de cinco puntos situados en el ribete blanco de la falda y proyectándola sobre el suelo (Figura 2) podemos obtener la rejilla o embaldosado de la habitación por medio del paralelogramo en el que la cónica está inscrita. Si en la realidad la cónica es una circunferencia el paralelogramo debe ser un cuadrado. El dimensionado de la rejilla se hace por medio de las medidas conocidas del cuadro del fondo a la derecha, copia de del Mazo de un original de Jordaens (223 cm). El proceso se realiza (Figura 2) trasladando el ancho del cuadro sobre la base de la pared del fondo y esta última medida sobre la línea de tierra por medio de líneas de fuga.

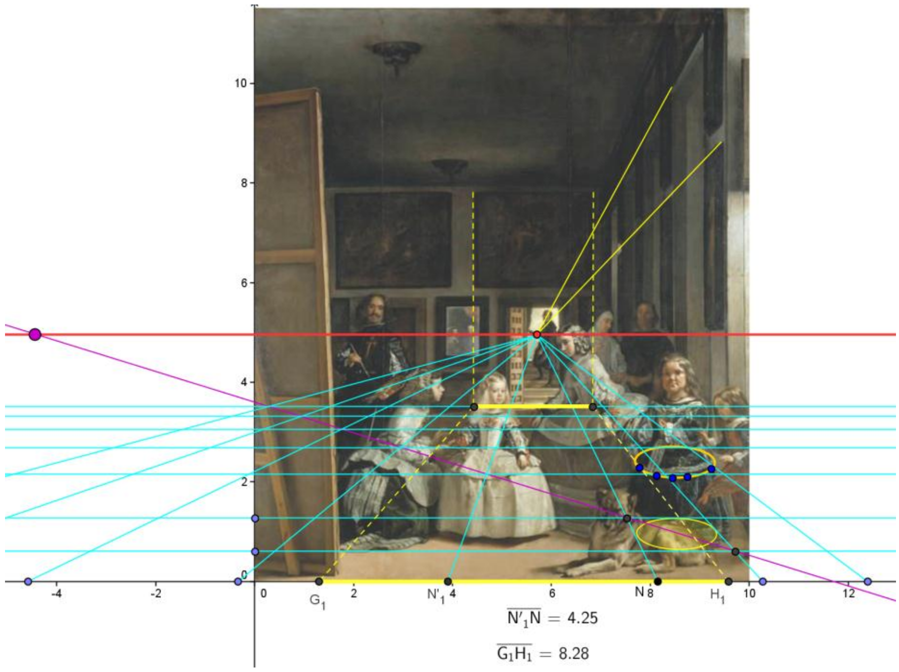


Figura 2. Reconstrucción de la perspectiva cónica frontal de las Meninas.

La proyección de la baldosa que circunscribe el miriñaque sobre la línea de tierra y la obtención de las medidas de esos segmentos sobre el plano del dibujo con Geogebra, nos permitirá establecer, por proporcionalidad, la medida x de la rejilla o baldosa.

$$\overline{N_1^{'}N} = 4{,}25$$

$$\overline{G_1H_1} = 8{,}28$$

$$\frac{\overline{G_1H_1}}{\overline{N_1^{'}N}} = \frac{2{,}23}{x}$$

$$x = 1{,}15$$

Podemos por tanto construir baldosas de 115 x 115 cm. y fugarlas hacia el PP previamente determinado. Embaldosando la estancia podemos determinar su tamaño y la posición de los personajes.

En la Figura 3 observamos el proceso de dimensionado de la estancia. Se parte de la línea de fuga de las lámparas del techo que se supone están en la mitad del mismo, lo que nos permite determinar la parte de la pared del fondo oculta por el lienzo. La parte de la estancia (en rojo) que vemos desde un poco antes de la posición del bastidor tiene una profundidad de unos 6,95 m (6 baldosas de 1,15 m.). El punto de vista (que no puede apreciarse en la imagen por el recorte necesario) se situaría a unos 4 m. por delante del bastidor, con lo que la distancia entre el observador y Velazquez es más o menos la misma que entre este y el personaje que se encuentra al fondo de la estancia por lo que la proporción entre sus alturas debería de ser, siguiendo a Leonardo da Vinci, un medio, como así aproximadamente sucede. La distancia por tanto desde donde está el observador (posiblemente los propios Reyes) hasta el fondo de la sala son unos 11 m.

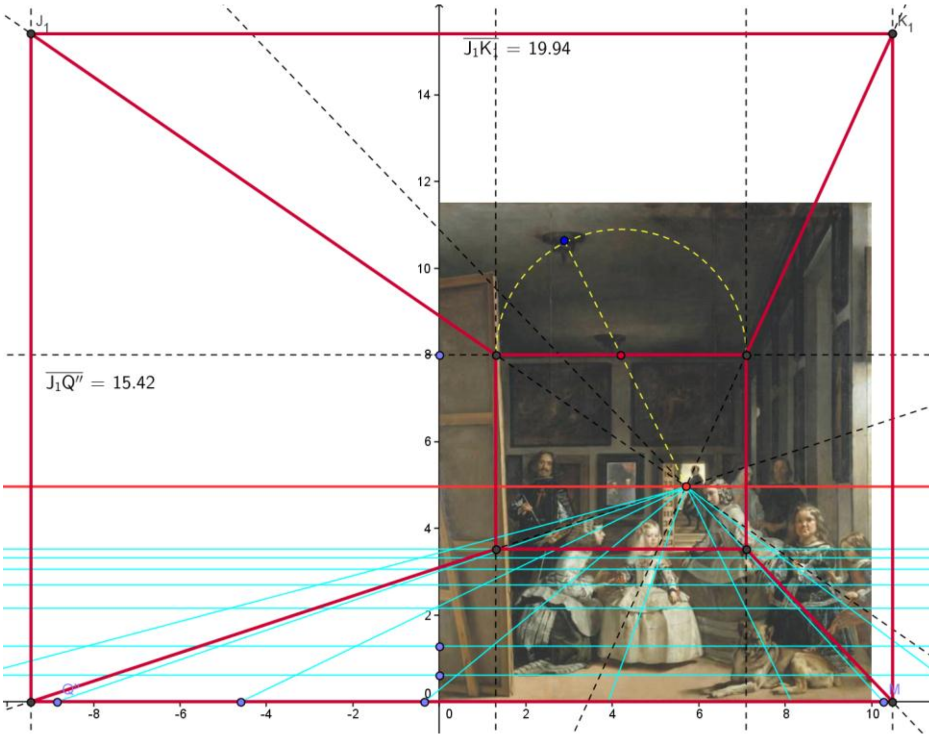


Figura 3. Reconstrucción dimensionada del Cuarto Bajo del Príncipe Baltasar Carlos del Alcázar de Madrid. .

Para calcular la anchura de la estancia y la altura de los techos recurrimos a una regla de proporciones con los datos de longitudes que figuran en la propia imagen, obtenidas sobre la escala aplicada con Geogebra y sabiendo que los 4,25 unidades medidas sobre la imagen con el programa equivalen a 1,15 m en la realidad. De esta forma:

$$Anchura = 19,94\left(\frac{1,15}{4,25}\right) = 5,39m$$

y

$$Altura = 15,42\left(\frac{1,15}{4,25}\right) = 4,17m$$

La gran pintura derecha, Apolo vencedor de Pan, cuyo óleo original se conserva en el Museo del Prado firmado por Jacob Jordaens, fue copiada por Juan Bautista Martínez del Mazo, discípulo de Velázquez, y sus dimensiones son bien conocidas. Según el estudio realizado en la referencia [1], a partir de las medidas de estos cuadros las medidas obtenidas para el ancho y el alto de la estancia son de 5,58 m y 4,6 m respectivamente, lo que indica el alto grado de aproximación de nuestro modelo.

Finalmente (Figura 4) reproducimos el Cuarto Bajo del Príncipe Baltasar Carlos del Alcázar de Madrid según los planos originales del arquitecto real Juan Gómez de Mora (1626), según la interpretación de Moffit (1986) que atribuye un ancho de 20 pies y un largo de 50 a la estancia, lo que nos permite de nuevo observar la extraordinaria coincidencia. Según la misma al ancho le corresponden 20 pies que son el equivalente de 5,58 m. y al largo 50 pies equivalentes a 13,95 m.

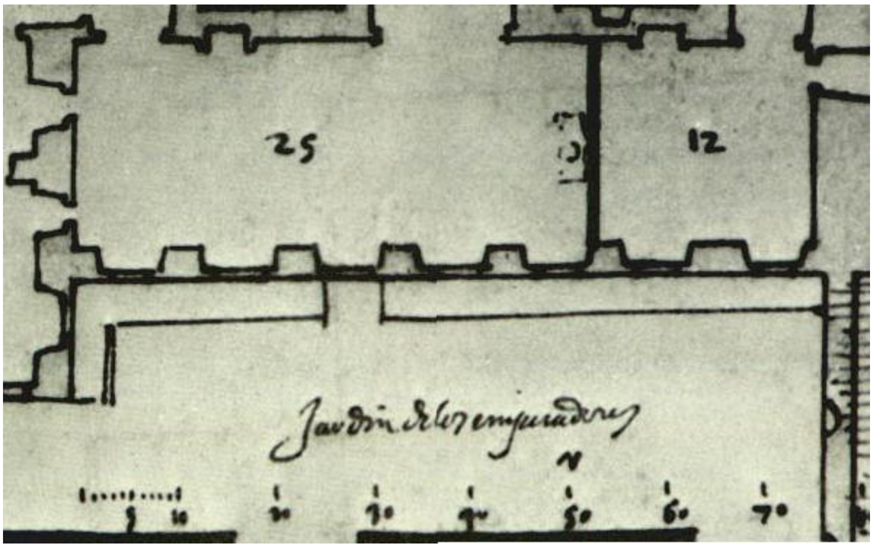


Figura 4.. Planos originales del Arquitecto Real Juan Gómez de Mora..

2. Conclusiones.

El arte como contexto y recurso didáctico para la enseñanza, muestra la presencia de las matemáticas. Encontramos matemáticas en obras maestras de la pintura, lo que demuestra la precisión y el conocimiento científico de las técnicas de representación de los autores. A partir de la obra podemos reproducir con extraordinaria precisión la realidad.

Los programas de software de Geometría Dinámica como Geogebra, y más aún en su versión Web Star, constituyen una excelente herramienta, por su sencillez y potencia, para descubrir las Matemáticas en el Arte y para el estudio transversal del éste y la Geometría en la Educación Secundaria.

La elaboración de aplicaciones didácticas debe estar en consonancia con la rigurosidad del análisis científico de los contenidos.

Referencias

[1] BENJUMEA, I. http://diegovelazquez.webcindario.com/realidad.htm

[2] BROWN, J. et al. Otras Meninas. Ediciones Siruela. Madrid, 2007.

[3] HERNANDO, Jesús. La Perspectiva Cónica en la Colección de la Escuela Barroca Española del Museo del Prado.

http://www.museodelprado.es/fileadmin/Formularios_Educaci__n/Iponencia/Jesus Hernado Perez.pdf.

[4] HOHENWARTER, Markus. Documento de Ayuda de Geogebra. Manual Oficial de la versión 3.2. http://www.geogebra.org/help/docues.pdf

[5] MARTÍN CASALDERREY, Francisco. Piero Della Francesca y el engaño de los ojos. I El Espacio, SUMA Nº 61, pp 63-70., Madrid, 2009.

[6] MOFFIT, J. F.. Anatomía de Las Meninas; realidad, ciencia y arquitectura. Boletín del Museo del Prado página 176. Septiembre-Diciembre, Madrid, 1986.

[7] MOFFIT, J. F.. Velázquez in the Alcázar Palace in 1656: The meaning of the mise –en – scene of Las Meninas. Art History nº 6, pp. 271-300, Madrid,

[8] MORA, José Antonio. et al. El misterio de las Meninas. http://jmora7.com/Meninas/index.htm

[9] MOYA, Ramiro de. El trazado regular y la perspectiva en Las Meninas. Arquitectura nº 3, pp. 3-12, Madrid, 1961

[10] PÉREZ SÁNCHEZ, A.. Pintura barroca en España 1600-1750. Ediciones Cátedra, Madrid, 1992.

[11] REJÓN DE SILVA, Diego Antonio. El Tratado de la Pintura por Leonardo De Vinci, y los tres libros que sobre el mismo arte escribió León Bautista Alberti, Imprenta Real, Madrid, 1784.

Sobre el autor:
Nombre: Jesús Hernando Pérez
Correo Electrónico: jhernando@educa.madrid.org
Institución: I.E.S Los Castillos, Alcorcón, España.

Investigación

Estimación de magnitudes

David Díaz Gutiérrez

Rocío Garrido Martos

Revista de Investigación

Volumen II, Número 2, pp. 167--194, ISSN 2174-0410

Recepción: 9 Sep'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Tener una referencia para medidas cotidianas basadas en la experiencia personal o profesional, o en datos conocidos por estudios previos, permite aproximar soluciones a problemas complejos y facilita la previsión de los recursos necesarios. Los órdenes de magnitud parecen adecuados como referencia, pues se estudian en la educación obligatoria y dan una idea inicial válida de dichas medidas, otorgando ciertamente una competencia básica que debe incluirse en el catálogo de las universidades.

Palabras Clave: órdenes de magnitud, medida, competencia.

Abstract

Having a reference for everyday actions based on personal or professional experience, or even on known data from previous studies, allow us to approximate solutions to complex problems and easies the foresight of required resources. The orders of magnitude seem to be suitable as a reference, as they are studied in the compulsory education and give an initial idea of haw valid such measures are, certainly providing a basic skill to be included in the catalog of universities.

Keywords: orders of magnitude, measure, competence.

1. Introducción

En la vida cotidiana tomamos referencias sin pensar, de forma intuitiva, y nos formamos una idea aproximada de las medidas, tamaños y formas en general de los objetos que nos rodean, sin caer en la cuenta de lo acertado de los resultados así obtenidos. Para ello nos basamos en nuestra experiencia vital y la percepción que hemos adquirido al relacionarnos con dichos objetos. Sin embargo, la medida de estos objetos cotidianos está, con relativa frecuencia, fuera del rango de resultados que tomaríamos como válidos si nos preguntaran.

De hecho, es frecuente que discutamos sobre lo acertado del razonamiento que nos lleva a concluir sobre alguno de ellos en cuestión, cuando dos o más personas dan resultados diferentes. Diferente cuestión aparece cuando uno de los presentes ofrece un resultado previo, sin dejar 'pensar' al resto, pues éste ejerce un poder de atracción –efecto 'anclaje' [1]– hacia el valor tomado como referencia, de tal forma que las demás personas tomarán resultados cercanos eludiendo un razonamiento independiente que les hubiera podido llevar a otra conclusión.

Por tanto cabe preguntarse si ciertamente tenemos una capacitación suficiente para valorar adecuadamente las medidas de los objetos que nos rodean o, por el contrario, estamos bastante lejos de hacernos una idea suficientemente cercana a la realidad de los mismos. O dicho de otra manera, si existe un riesgo de errar en la valoración de una medida, lo que implica que el elemento de azar es medible, o bien aparece una incertidumbre donde la falta de elementos de juicio dificulta la estimación –paradoja de Ellsberg [2]–.

Medir esta competencia es una ardua tarea que se escapa del objetivo de este trabajo, pero comprobar si esta competencia ha sido asimilada tras su estudio o se conoce por la experiencia vital acumulada puede ser realizado con cierto éxito si se dan los pasos adecuados.

Este trabajo trata de ahondar en los resultados obtenidos tras la realización de un cuestionario por parte de un grupo de estudiantes de ingeniería, buscando qué tipo de medidas son fácilmente reconocibles por ellos y cuáles se escapan de su entendimiento, así como chequear diferentes órdenes de magnitud y tipos de medida para comprobar los límites a la hora de utilizar la experiencia acumulada.

2. Magnitudes: órdenes, medida, estimación

2.1 Definición de orden de magnitud

Un **orden de magnitud** se puede definir como una clase de escala o magnitud de cualquier cantidad, donde cada clase contiene valores de un cociente fijo con respecto a la clase precedente. Como tradicionalmente se utiliza el sistema métrico decimal, dicho cociente fijo suele ser el 10. Desde la undécima Conferencia General de Pesos y Medidas [3] quedan definidas las seis unidades básicas del que pasa a denominarse Sistema Internacional de Medidas (SI), añadiéndose posteriormente una más hasta quedar las siete que lo conforman: medida –metro (m)–, peso –kilogramo (kg)–, tiempo –segundo (s)–, intensidad de corriente eléctrica –amperio (A)–, temperatura –kelvin (K)–, cantidad de sustancia –mol (mol)–, e intensidad luminosa –candela (cd)–; así como la tabla de los prefijos del mismo, completada en posteriores Conferencias y que actualmente es la siguiente:

Tabla 1. Prefijos del Sistema Internacional de Medidas (Fuente: Conferencia General de Pesos y Medidas)

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Esta tabla, y el sistema de potencias de 10 que utiliza, permiten emplear el exponente como medida de referencia para los órdenes de magnitud, de tal forma que una medida 1.000 veces –10^{3}– mayor que otra implica tres órdenes de magnitud de diferencia.

2.2 Importancia y necesidad de la medida y los órdenes de magnitud

La mayoría de las veces que nos encontramos solos frente a una dificultad solemos comenzar por estimar un valor de referencia sobre el que apoyarnos para comenzar a solventar el problema. Sin embargo, la carencia de una sólida base sobre la que estimar dicho valor puede llevarnos a cometer el error de pensar que la referencia tomada es válida, cuando realmente podemos encontrarnos lejos de su valor real.

Las referencias así tomadas suelen provenir de nuestra propia experiencia en situaciones similares, así como de los procesos de aprendizaje seguidos que nos hayan podido capacitar para comprender las diferentes posibilidades de la medida en cuestión, tanto como de las diferencias en los órdenes de magnitud de la misma.

Adquirir este bloque de conocimientos, ya sea a partir de los estudios ya de la experiencia, y lograr adquirir esta competencia es, pues, vital para mejorar nuestra percepción del mundo que nos rodea, permitiéndonos tomar mejores decisiones y alcanzar mayores cotas de eficiencia en la utilización de los recursos puestos a nuestra disposición.

Así, por ejemplo, podemos servirnos de esta competencia para evaluar el tiempo que nos va a llevar ir de un sitio a otro –lo que hacemos con relativa frecuencia y con notable disparidad de resultados–, la distancia entre dos puntos que pueda implicar la adquisición de cierta cantidad de un material –como cuando tenemos que comprar tela para forrar un sofá, o una barra para las cortinas–, el peso de ciertos alimentos para la realización de un guiso, o las cantidades –como cuando tenemos que decidir a priori cuántas bolsas de plástico vamos a necesitar para llevar la compra del supermercado, o el número de kilos de carne que llevaremos para la barbacoa–.

Pero también será necesario tener cierto manejo de otras medidas para nuestra labor profesional, siendo lo natural, en ambos casos –vida profesional y situaciones personales– que la competencia en magnitudes sea adquirida más con la experiencia que con los estudios.

Matemáticamente, la estimación de valores para medir situación y objetos cotidianos no deja de tener su complejidad, pues el problema no sólo consiste en armar un conjunto de valores de referencia, sino que hay que profundizar en su estructura, su definición y su desarrollo lógico, con el objetivo de que el alumno que se enfrente a ello por primera vez comprenda la necesidad de su aprendizaje, pero también la de su origen, acotación y exactitud.

Así pues, habrá que considerar cómo se enfrenta a su aprendizaje la mente del menor que no posee la experiencia ni la necesidad previa que le mueva hacia ello. Habrá que conocer qué elementos, como objetos y situaciones, son reconocibles para ellos a la hora de acercarles las referencias para cada medida. Tendremos que encontrar el mejor 'tempo' para que adquieran los conocimientos anteriores a la velocidad adecuada, sin perder los ya adquiridos, pero sin parar de sumar nuevos elementos de referencia. Y, por supuesto, tendremos que fomentar su uso fuera del aula y capacitarles para renovarlos dentro de sus experiencias y añadir otros más útiles según vayan entrando en su vida profesional.

¿Pero cómo se enseñan las magnitudes y su medida en la primaria y la secundaria?

2.3 La enseñanza y aprendizaje de magnitudes y su medida

La "medida: estimación y cálculo de magnitudes" es uno de los bloques que componen el currículo de matemáticas de la primaria junto con "números y operaciones", "geometría" y "tratamiento de la información, azar y probabilidad". Si vamos a la ORDEN de 12 de julio de 2007, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria [4] podemos encontrar lo siguiente:

> *El contenido del bloque 2, La medida: estimación y cálculo de magnitudes, busca facilitar la comprensión de los mensajes en los que se cuantifican magnitudes y se informa sobre situaciones reales que niños y niñas deben llegar a interpretar correctamente. A partir del conocimiento de diferentes magnitudes se pasa a la realización de mediciones y a la utilización de un número progresivamente mayor de unidades. Debe considerarse la necesidad de la medición, manejando la medida en situaciones diversas, así como estableciendo los mecanismos para efectuarla: elección de unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad. Se puede partir para ello de unidades corporales (palmo, pie.), arbitrarias (cuerdas, varas.) para pasar a las medidas normalizadas, que surgen como superación de las anteriores.*

Además, si seguimos leyendo encontramos que dentro de los contenidos se señalan los siguientes:

> *Medición con instrumentos y estrategias no convencionales (palmo, paso, cuerdas, palos, botellas.) y unidades (metro, centímetro, litro y kilogramo) e instrumentos convencionales (cinta métrica, regla graduada, balanza de pesas, vasos graduados…). Utilización de estrategias para estimar resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades.) en contextos familiares. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.*

Si seguimos avanzando, en el REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria [5], aunque se haya perdido el bloque de medida como tal seguimos observando una presencia transversal en muchos de los contenidos o criterios de evaluación como por ejemplo:

> *Objetivos*
>
> *3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.*
>
> *SEGUNDO CURSO*
>
> *Criterios de evaluación*
>
> *4. Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.*

Sobre el papel parecería que los alumnos de educación primaria y secundaria se han dedicado a experimentar con la medida de las magnitudes, han realizado estimaciones, experimentos, etc. Pero la realidad es bien distinta. Lo cierto es que la mayoría de los maestros de primaria y profesores de secundaria se limitan a la resolución de los ejercicios de cambios de unidades y a convertir este tema en algo alejado de la realidad. En las investigaciones que ha realizado la profesora Chamorro [6] sobre el tema destacan las siguientes apreciaciones:

> *Los alumnos se encuentran con grandes dificultades para encontrar sentido a estas actividades…¿Quién en su vida privada ha necesitado pasar de metros a decímetros, o de kilos a hectogramos? Planteadas así las cosas no es de extrañar que la trasposición didáctica clásica de la medida se reduzca a un mero saber escolar, sin prácticamente utilidad alguna fuera de la escuela.*

La problemática es bastante clara, no hay una relación entre las demandas sociales y culturales relativas a la medida y lo que aporta las matemáticas escolares.

Durante los años de enseñanza obligatoria se nos muestra cómo se miden ciertas variables, se nos introduce en el mundo de las unidades de medida y se nos facilitan una serie de herramientas para poder realizar dichas medidas. Lamentablemente no se nos enseña a estimar ninguna medida, ya fuera a través de valores con los que relacionarlas, ya con la adquisición de estos según fueran apareciendo en nuestra vida, con la experiencia vivida, tanto personal como profesional.

Si así fuera, entonces podríamos adquirir esta competencia de forma natural, según fuéramos avanzando por la senda de la vida, y las experiencias vitales a las que nos enfrentáramos tendrían el doble valor de enseñarnos a tomar decisiones y aprender de los fracasos, tanto como a percibir el valor de las cosas en su medida y en su escasez.

Una vez que hubiéramos vivido una situación, podríamos tomar nota mental de los datos conocidos de partida, de los pasos que hemos dado y de cómo todo ello nos ha llevado a un resultado con mejor o peor valoración. En la medida en que fuéramos capaces de asimilar estos pasos, estaríamos en mejor disposición para mejorar posteriores resultados dentro de la misma problemática y, por extensión, en otras situaciones parecidas donde las medidas y los órdenes de magnitud que aparecieran fueran similares.

2.4 Alguna aportación

El uso de determinadas medidas y elementos de medida en la enseñanza de estos conceptos implica el necesario aprendizaje de los conceptos utilizados en la explicación, lo que permitirá ampliar, a partir de ellos, las medidas a otros objetos o con otros elementos. A partir de ahí, se deberían fijar dichos objetos y elementos a base de tomarlos como referencia para la medición de otros, quedando ligados a un valor y a un orden de magnitud y sirviendo como referencia para ese escalón.

Sin cambiar de medida, subiendo o bajando escalones en los órdenes de magnitud, se podría establecer un nuevo elemento patrón para cada caso y, partiendo de los mismos, conocer los valores de objetos dentro del rango en cuestión. Sin más que proceder hacia arriba y hacia abajo hasta alcanzar medidas manejables por objetos cotidianos, se podrían establecer una serie de elementos clave que siguieran una especie de 'octava' de elementos en función de su orden de magnitud para cada medida.

Extrapolando este sistema al resto de medidas se acabaría poseyendo un sistema de objetos cotidianos relacionados con cada medida y cada orden de magnitud que serían nuestros acompañantes en el mundo de las estimaciones, esta vez con mayor criterio al poder relacionarlas con algo conocido.

Además, este sistema permitiría crear una asociación directa con los objetos particulares de cada profesión, lo que generaría inequívocamente un conjunto de elementos personales y profesionales relacionados entre sí, que favorecería la mejora en la estimación de resultados de aquellas situaciones novedosas que se pudieran presentar.

Qué duda cabe, que de esta forma estaríamos mejor preparados para tomar mejores decisiones, se producirían menos discusiones a la hora de valorar una situación particular, se aprovecharían mejor los escasos recursos de los que disponemos y, por fin, ganaríamos en confianza a la hora de avanzar por los intrincados caminos de la vida.

3. Población, muestra y cuestionario

Para poder comprender el verdadero alcance de la necesidad de potenciar el trabajo sobre los órdenes de magnitud y su relación con los estudios y la experiencia profesional, se prepararon varios cuestionarios para diferentes grupos objetivo en función de ambos parámetros: estudios y experiencia profesional.

El elevado coste de atender a todos los colectivos previstos llevó a la lógica conclusión de pasar uno de los cuestionarios sobre un grupo de control a modo de prueba y, a partir de los resultados obtenidos y de la probabilidad de ser extrapolados al resto de grupos, prever la necesidad o no de pasar el resto de cuestionarios.

Estos grupos se formaron atendiendo a los criterios ya mencionados de estudios y experiencia, por lo que se generan tres grandes grupos: individuos sin estudios superiores pero con cierta experiencia en su campo, individuos con estudios no relacionados con la física y las matemáticas –estudios humanísticos–, e individuos con estudios científicos. Y dado que la experiencia ganada con los años puede llegar a suplir las carencias con las que se accede al mercado de trabajo, se ha considerado tomar individuos jóvenes, seleccionando el rango de edad entre 20 y 27 años.

3.1 Población y muestra

Se ha tomado como población para el estudio los estudiantes de las universidades madrileñas, lo que confiere a los resultados cierto sesgo de conocimientos adquiridos por los mismos a lo largo de sus estudios preuniversitarios y durante la carrera universitaria, así como una falta de experiencia profesional que puede motivar resultados ciertamente diferentes de aquellos otros individuos con un perfil diferente, lo cual deberá ser objeto de un estudio posterior.

Dentro de dicha población se ha seleccionado primeramente estudios científicos y seguidamente asignaturas de cursos medios, pues en sus planes de estudios se incluyen asignaturas de física y matemáticas superiores en los primeros cursos, lo que permite asegurar que han superado materias relacionadas con magnitudes. Y ya dentro de estas carreras, se ha elegido realizar este estudio sobre alumnos de ingeniería por su mayor proximidad, maximizando la eficiencia de los escasos recursos con que se cuenta. En concreto, se ha tomado un grupo de estudiantes de tercer curso del plan de estudios 2002, de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales de la Universidad Politécnica de Madrid, todos ellos de la asignatura de 'Economía y gestión de empresas' impartida por el profesor David Díaz Gutiérrez, por ser un grupo heterogéneo tanto en edad y género, como en asignaturas superadas.

El cuestionario fue pasado en clase, sin previo aviso ni conocimiento alguno del fondo del mismo, con las autorizaciones pertinentes y dando las oportunas aclaraciones a los estudiantes antes de ello, y completando las explicaciones tras su recogida.

Cuestionario sobre ESTIMACIÓN DE MAGNITUDES

Universidades de la Comunidad de Madrid Tiempo: 10 minutos

Centro: Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales
Universidad Politécnica de Madrid

Curso: 2011/2012

Un conjunto de profesores de las universidades madrileñas estamos participando en una investigación para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, de forma que los alumnos aprendan más y mejor. Con este fin te pedimos que contestes el siguiente cuestionario.

PERFIL DEL ALUMNADO

1. **Sexo:** ☐ Masculino ☐ Femenino
2. **Año de nacimiento:** ____
3. **Antes de acceder a esta titulación cursaste:**

   ☐ Bachillerato: Rama: ______________________

   ☐ Formación Profesional / Módulo: ______________________

   ☐ Otros estudios (indicar cuáles): ______________________
4. **Nota en 'matemáticas' en la Prueba de Acceso Universitario (PAU-Selectividad):**____
5. **¿Sabrías definir el término magnitud?** ☐ Sí ☐ No
6. **En el ámbito profesional de un ingeniero naval, ¿crees que es necesario conocer las medidas de ciertas magnitudes del buque o artefacto flotante para el desarrollo de su labor?:**

   ☐ Sí

   ☐ Solamente si se trabaja en una empresa de ingeniería o en una oficina técnica

   ☐ No
7. **¿Crees que conoces las medidas de las magnitudes de objetos de uso cotidiano?:**

   ☐ Si, seguro

   ☐ Si, casi todas

   ☐ Si, las más importantes

   ☐ Algunas

   ☐ No, no estoy seguro

Figura 1. Cuestionario – perfil del alumnado

Imagen 4.2. Cuestionario – magnitudes generales y específicas

Cuestionario sobre ESTIMACIÓN DE MAGNITUDES

Responda con la mayor precisión que sepa.

MAGNITUDES GENERALES

8. ¿Cuánto mide una lavadora –alto x ancho x profundidad–?
9. ¿Qué distancia hay de la puerta de la Escuela a la de esta clase?
10. ¿Qué altura tiene el Faro de Moncloa?
11. ¿Qué capacidad tiene una bañera?
12. ¿Cuánto pesa el ALFIN –barco de regatas situado en la pradera–?
13. ¿Cuánto mide un autobús de la EMT o interurbano?
14. ¿A qué velocidad sale una bala disparada por una pistola?
15. ¿Cuánto tarda el ascensor del Aula de Dibujo en alcanzar esa planta (la 3ª) desde el piso más bajo (el 0)?
16. ¿A qué velocidad anda, por término medio, una persona?
17. ¿Cuánto pesa un coche tipo Golf?
18. ¿Cuánto mide un avión de envergadura de la familia del Airbus 320?
19. ¿Cuánto pesa una hormiga?
20. ¿Cuánto mide el diámetro del tallo de una rosa?

MAGNITUDES ESPECÍFICAS

21. ¿Cuánto mide un portacontenedores de 8.000 TEUs?
22. ¿Cuántos coches caben en un roll-on / roll-off?
23. ¿Cuántos metros de tuberías lleva un barco de carga general de 200 metros de eslora?
24. ¿Cuánto combustible consume el motor de un crucero de 3.000 pax?
25. ¿Cuánto tiempo tarda el Buque Escuela Juan Sebastián Elcano en ir de Ferrol a Cádiz?
26. ¿Qué altura tiene la zona de habilitación de un buque petrolero VLCC?
27. ¿Cuánto se tarda en descargar un contenedor de 20 pies lleno de material de oficina desde la cubierta superior al muelle del puerto?
28. ¿Qué potencia tiene el motor de un remolcador?
29. ¿Qué longitud de cables lleva un pesquero arrastrero por popa?
30. ¿Cuánto costó el *Costa Concordia*?
31. ¿Cuál es el caudal mínimo de un sprinkler contraincendios?

Muchas gracias por su participación

Figura 2. Cuestionario – magnitudes generales y específicas

3.2 Selección de las cuestiones en función de las unidades a estudiar y de los órdenes de magnitud implicados

Con objeto de conocer la capacidad de estimar ciertas magnitudes por parte de los sujetos seleccionados se han elegido una serie de cuestiones organizadas en dos grandes grupos.

Por un lado, un primer grupo con cuestiones generales que afectan a la vida diaria, tratando de acercar las cuestiones lo máximo posible a objetos y situaciones cotidianos, buscando la cercanía y aparente conocimiento a través de la experiencia asociada a su utilización o una relación diaria con ellos.

Así, se ha preguntado sobre objetos de uso y contacto diario en el hogar como son la lavadora, la bañera y un ascensor; objetos relacionados con el transporte, como un coche, un autobús o un avión; seres de la naturaleza como una rosa o una hormiga; o situaciones muy cercanas como un edificio representativo para la muestra seleccionada o la velocidad a la que andamos.

Tres cuestiones adicionales sobre objetos situados en las instalaciones de uso de los individuos de la muestra permiten valorar los resultados con un margen de perspectiva mayor, al estar asociados a situaciones que exigen una percepción diferente de ellos, como son un barco situado en la pradera anexa a la E.T.S.I. Navales, la distancia que recorren todas las mañanas al entrar en clase y el uso de un ascensor situado en dicha Escuela.

Por último, una cuestión fuera del ámbito familiar y de estudios, como es una bala, permite tener una referencia externa para poder comparar los resultados con las cuestiones anteriores.

Un segundo grupo de cuestiones se refiere a preguntas relacionadas con sus estudios y la profesión a qué da lugar, de nuevo con una organización interna que divide las preguntas en subgrupos con un objetivo claramente definido.

Así, en este caso se tienen cuestiones relacionadas con conocimientos impartidos en cursos precedentes, como son la eslora de un portacontenedores, el tiempo de descarga de un contenedor o la potencia de un motor; cuestiones de carácter intuitivo a partir de dichos conocimientos, como son la capacidad e un ro-ro, el tiempo de viaje de un buque o la altura de habilitación de un petrolero.

Por último, se han añadido dos grupos de preguntas relativas, uno a cuestiones técnicas que serán impartidas más adelante en asignaturas de cursos superiores, como son el caudal de un sprinkler o el consumo de un motor; y otro a cuestiones puramente profesionales como son los metros de tuberías de un buque de carga general o la longitud de cables de un arrastrero por popa. Una cuestión adicional sobre el precio que cuesta comprar un crucero da, como en el caso anterior, una referencia externa al no ser motivo de ninguna asignatura de los estudios y difícilmente pueda ser conocida por los estudiantes si no es por una elevada habilidad en esta competencia.

Por otro lado, las cuestiones debían abarcar las diferentes unidades básicas definidas por la Conferencia General de Pesos y Medidas siempre que ello fuera posible, sin perder de vista la necesaria cercanía de las mismas a la vida cotidiana de las personas. Por ello se tomaron las unidades de medida –metro (m)–, peso –kilogramo (kg)– y tiempo –segundo (s)–, y no se tuvieron en cuenta las unidades de intensidad de corriente eléctrica –amperio (A)–, temperatura –kelvin (K)–, cantidad de sustancia –mol (mol)–, e intensidad luminosa –candela (cd)–, por ser aquéllas más cercanas e intuitivas, y éstas menos conocidas y más complejas incluso de entender.

También se tomaron algunas unidades derivadas de las anteriores, como la capacidad, el caudal, la velocidad o la potencia, así como unidades fuera de esta clasificación, como el precio. En la Tabla 2 se detallan las unidades de cada cuestión.

Tabla 2. Unidades empleadas en el cuestionario (Fuente: Elaboración propia)

Nombre	**Unidad**	**Símbolo**	**Cuestiones**
Medida	metro	m	8, 9, 10, 13, 18, 20, 21, 23, 26, 29
Peso	kilogramo	kg	12, 17, 19
Tiempo	segundo	s	15, 25, 27
Capacidad	litros	l	11
Caudal	litros por segundo	l/s	24, 31
Velocidad	metro por segundo	m/s	14, 16
Potencia	caballos de vapor	CV	28
Capacidad	unidades	ud	22
Precio	euro	€	30

Además de estudiar las unidades, se tomaron en consideración los órdenes de magnitud de cada unidad de las anteriores, eligiendo diferentes valores a lo largo de la escala de medidas, desde valores de 10^{-6} hasta 10^{8}, implicando, en este caso, quince órdenes de magnitud.

En la Tabla 3. aparecen los órdenes de magnitud de cada cuestión, clasificados en función de la medida elegida.

Tabla 3. Órdenes de magnitud empleados en el cuestionario

Orden de magnitud	**Unidad**	**Cuestiones**
-6	Peso	19
-3	Medida	20
-1	Medida, Caudal	8, 24
0	Velocidad, Tiempo, Caudal	16, 25, 31
1	Medida, Tiempo	(9, 13, 18, 26), 15
2	Medida, Velocidad, Capacidad, Tiempo	(10, 21), 11, 14, 27
3	Peso, Capacidad, Potencia, Medida	(12, 17), 22, 28, 29
4	Medida	23
8	Precio	30

Fuente. Elaboración propia

La selección de las preguntas en función del orden de magnitud requiere preferenciar aquellas cuestiones en el entorno del orden 1, pues es el que se toma como referencia para las medidas intuitivas, por lo que tiene pleno sentido comprobar en ese rango la grado de acierto en las mismas. Las cuestiones con órdenes de magnitud menores u mayores que aquellas buscan, por el contrario, conocer la facilidad o dificultad con la que se extrapolan los resultados más cercanos.

4. Resultados

Las respuestas dadas a cada cuestión se valoran de dos formas diferentes. Por un lado, se toma un valor medio de referencia para cada pregunta obtenido a partir de fuentes objetivas y de él se genera un intervalo de validez de la cuestión, y por otro lado se toma el orden de magnitud del resultado y se aceptan los resultados si están en su rango.

4.1 Perfil del alumnado

El tamaño de la muestra, 58 alumnos, es suficientemente grande como para poder asumir, para la mayoría de las variables de estudio, que sus valores se distribuyen según una distribución normal. La muestra se compone mayoritariamente de hombres, 4 de cada 5 individuos, el 60% de ellos nacidos entre 1990 y 1991, procedentes de un bachillerato científico tecnológico –el 72%–, donde un 56% obtuvieron una nota superior a 6 en la prueba de acceso a la universidad, *selectividad*. Su conocimiento del tema, a priori, supone que casi todos –el

98%– conocen el término *magnitud*, y no sólo creen que es necesario conocer las medidas de ciertas magnitudes del buque o artefacto flotante para el desarrollo de su labor profesional como ingeniero naval en un 95%, si no que el 62% asegura conocer todas magnitudes, o al menos las más importantes, de objetos de uso cotidiano.

4.2 Magnitudes generales

Los resultados válidos para cada una de las cuestiones propuestas se exponen a continuación.

Cuestión nº8. ¿Cuánto mide una lavadora –alto x ancho x profundidad–[7, 8]?

Alto: entre 0,650 y 0,850 metros

Ancho: entre 0,480 y 0,600 metros

Profundidad: entre 0,500 y 0,600 metros

Orden de magnitud: -1

De las 55 respuestas, sólo un 16% tiene una percepción adecuada del alto de una lavadora, mientras que el ancho y la profundidad, medidas 'horizontales' frente a la anterior 'vertical', la aciertan un 33% y un 31%, respectivamente. El orden de magnitud lo fallan un 20% de los que responden a la cuestión 'alto', baja al 9% en la 'profundidad' y al 4% en el 'ancho'.

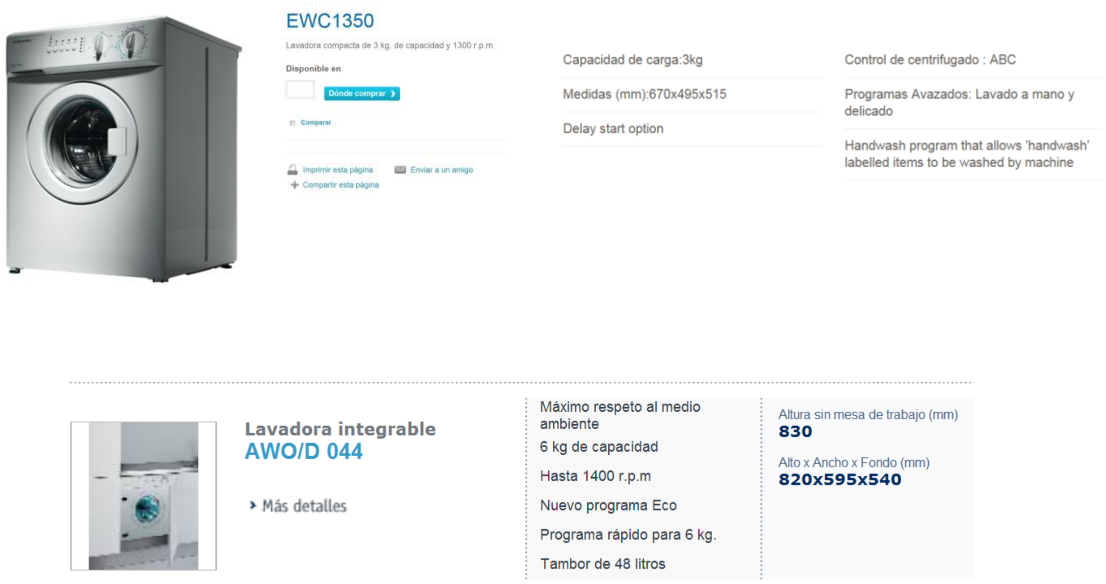


Figura 1. Características de distintas marcas de lavadoras (Fuente: Whirpool y Electrolux)

Cuestión nº9. ¿Qué distancia hay de la puerta de la Escuela a la de esta clase? Se toman como válidos los valores entre 50 y 60 metros [9].

Orden de magnitud: 1

De nuevo 55 respuestas, de las cuales el 33% aciertan dentro del intervalo de validez. Más de la mitad –56%– de las respuestas obtenidas subvaloran la distancia. El orden de magnitud lo fallan sólo el 6% de los individuos.

Figura 2. Planta primera de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales (Fuente: Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales}

Cuestión nº10. ¿Qué altura tiene el Faro de Moncloa? 92 metros más 20 metros de antena [10]. Se toman como válidos los valores entre 85 y 120 metros.

Orden de magnitud: 1, 2

De las 57 respuestas, apenas un 17,5% tiene una percepción adecuada de la altura del Faro de Moncloa. De nuevo nos encontramos con un elevado porcentaje del 63% de individuos que responden valores inferiores al mínimo del intervalo. El orden de magnitud lo aciertan todos, por cuanto implica dos valores.

Figura 3. Faro de Moncloa (Fuente: http://jimsadob.blogspot.com.es/2009/01/madrid-nevado.html)

Cuestión nº11. ¿Qué capacidad tiene una bañera? Entre 150 y 250 litros [11].

Orden de magnitud: 2

De las 57 respuestas, hasta un 19% calcula adecuadamente la capacidad de una bañera. En este caso, un 49% dan valores superiores al máximo del intervalo. El orden de magnitud es errado por un 21% de los encuestados.


PRIME-line 257 / 259 BAÑERA OVAL

Longitud	Ancho	Profundidad	Capacidad en Litros	Peso Kg	Referencia	Precio
1800	800	450	ca. 155	ca. 20	NU B 0257 0000 BL 00	
2000	900	450	ca. 200	ca. 26	NU B 0259 0000 BL 00	

* Hidromasaje disponible en 5 diferentes versiones a partir de 3.200 €.(No incluye Bañera)

* Bañera sin kit de desagüe ni desbordamiento (excepto en Hidromasajes)

PORTOFINO Trend Duo 335 BAÑERA OVAL

Figura 4. Características de una bañera (Fuente: Duscholux)

Cuestión nº12. ¿Cuánto pesa el ALFIN –barco de regatas situado en la pradera–? Alrededor de 2.000 kilogramos [12]. Se toman como válidos los valores entre 1.800 y 3.000 kilogramos.

Orden de magnitud: 3

En número de respuestas, 42 de 58 individuos –un 72%–, da una idea de la dificultad que ha supuesto contestar esta pregunta. De ello un 24% se acercan a una respuesta válida, mientras que la mitad subestiman el peso de la embarcación. El orden de magnitud lo fallan el 14%, llegándose dar el caso de un individuo que se pasa ¡hasta 3 órdenes de magnitud por encima!

Figura 5. Barco velero de competición ALFIN-UPM (Fuente: Elaboración propia)

Cuestión nº13. ¿Cuánto mide un autobús de la EMT o interurbano? 12 metros [13]. Se toman como válidos los valores entre 10 y 15 metros.

Orden de magnitud: 1

De las 57 respuestas, el 63% aciertan, esto es 2 de cada 3. De nuevo los que fallan lo hacen por debajo del mínimo, un 26%, que coincide con el numero de lo que yerran en el orden de magnitud.

Figura 6. Autobús híbrido GNC-eléctrico de la Empresa Municipal de Transportes (EMT) (Fuente: www.espormadrid.es)

Cuestión nº14. ¿A qué velocidad sale una bala disparada por una pistola? Alrededor de la velocidad el sonido [14]. Se toman como válidos los valores entre 300 y 400 metros por segundo.

Orden de magnitud: 2

Responde el 79% de los 58 encuestados, acertando un 26% y con un 50% de ellos respondiendo con valores inferiores al mínimo del intervalo. El orden de magnitud también produce elevados valores, pues un 24% se queda corto.

Figura 7. Disparo de una bala (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº15. ¿Cuánto tarda el ascensor del Aula de Dibujo en alcanzar esa planta (la 3ª) desde el piso más bajo (el 0)? Se toman como válidos los valores entre 15 y 30 segundos [15].

Orden de magnitud: 1

De las 54 respuestas, más de la mitad –un 52%– estiman acertadamente tiempo de duración del viaje en ascensor. El orden de magnitud apenas lo fallan un 11%.

Figura 8. Ascensor OTIS Gen2 (Fuente: Otis)

Cuestión nº16. ¿A qué velocidad anda, por término medio, una persona? Se toman como válidos los valores entre 3 y 8 kilómetros por hora [16].

Orden de magnitud: 0

Pregunta que contestan la gran mayoría, 56 respuestas, y con buen criterio, un 80% de acierto. Un 11% fallan el orden de magnitud.

Figura 9. Dos personas andando de paseo (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº17. ¿Cuánto pesa un coche tipo Golf? Entre 1.158 y 1.286 kilogramos [17]. Se toman como válidos los valores entre 1.000 y 1.400 kilogramos.

Orden de magnitud: 3

De las 53 respuestas, un 38% estiman bien el peso del vehículo en cuestión. Otro 36% responden valores inferiores al mínimo del intervalo, porcentaje coincidente con el de errores en el orden de magnitud.

Figura 10. Volkswagen Golf (Fuente: Volkswagen)

Cuestión nº18. ¿Cuánto mide un avión de envergadura de la familia del Airbus 320? 34,10 metros [18]. Se toman como válidos los valores entre 30 y 45 metros.

Orden de magnitud: 1

Pregunta respondida apenas por el 71% de los individuos, con un porcentaje de acierto del 19,5%, y un sorprendente 61% de respuestas por encima del máximo. El orden de magnitud lo fallan un 15% de encuestados.

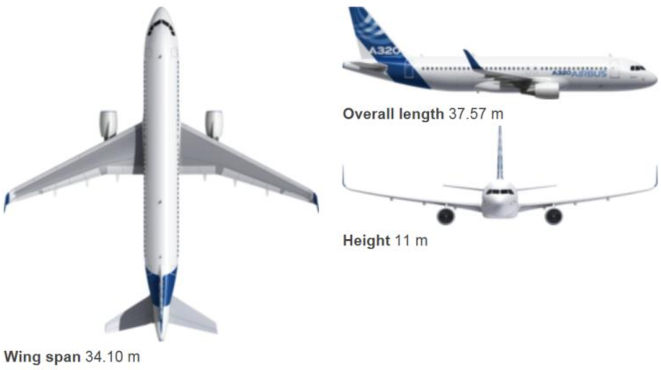


Figura 11. Envergadura de un avión: distancia entre los extremos de las alas (Fuente: Airbus)

Cuestión nº19. ¿Cuánto pesa una hormiga? Alrededor de 3 miligramos [19]. Se toman como válidos los valores entre 0,001 y 0,010 gramos.

Orden de magnitud: -6, -5

Pregunta ampliamente respondida –90%–, con un bajo porcentaje de acierto del 17 %, y una elevadísima sobreestimación del 71% de respuestas que piensan que el peso de una hormiga es mucho mayor. Hasta un 52% fallan al estimar el orden de magnitud.

Figura 12. Hormiga transportando una hoja (Fuente: www.taringa.net)

Cuestión nº20. ¿Cuánto mide el diámetro del tallo de una rosa? Alrededor de 3 milímetros. Se toman como válidos los valores entre 0,001 y 0,006 metros.

Orden de magnitud: -3

Con un 95% de respuestas, alcanza un valor alto de aciertos, un 76,5%, y un bajo nivel de sobreestimaciones del 14,5%, cifra que coincide prácticamente con el número de errores al estimar el orden de magnitud, un 16,5% de los encuestados.

Figura 13. Una rosa y un libro (Fuente: Google imágenes)

4.3 Magnitudes específicas

Los resultados válidos, en este caso, para cada una de las cuestiones específicas propias de los estudios de Ingeniería Naval propuestas se exponen a continuación.

Cuestión nº21. ¿Cuánto mide un portacontenedores de 8.000 TEUs? Entre 300 y 350 metros de eslora [20].

Orden de magnitud: 2

Responde un 79% de los encuestados, de los cuales el 22% valoran adecuadamente la eslora, mientras un 72% estima con valores mucho menores. El orden de magnitud lo acierta el 100% de los encuestados.

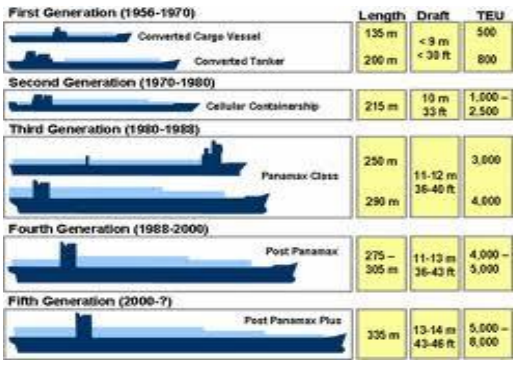


Figura 14. Características básicas de los portacontenedores en función de su capacidad de carga (Fuente: Temas de tráfico marítimo)

Cuestión nº22. ¿Cuántos coches caben en un roll-on / roll-off? Entre 800 y 1.500 unidades [21].

Orden de magnitud: 3

Con un 78% de respuestas y apenas un 18% de aciertos, se tiene un 53% de valoraciones por debajo del mínimo. El orden de magnitud no lo manejan bien un 9% de los encuestados.

TIPO	BARCOS		DWT		CAPACIDAD	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
RORO	554	56,7	3950	60,3	197900	70,0
CONRO	80	8,2	920	14,1	46950	16,6
CONVRO	69	7,0	500	7,7	21500	7,6
CAR-FERRY	161	16,5	330	5,1	10050	3,6
CAR-CARRIER	75	7,7	670	10,2	2650	0,9
HIBRIDO	11	1,1	70	1,1	860	1,0
HEAVY RORO	27	2,8	100	1,6	282710	0,3
TOTAL	977	100,0	6540	100,0		100,0

Figura 15. Tipos de barcos de transporte de carga rodada (Fuente. Roll-on/Roll-off el buque abierto) [22]

Cuestión nº23. ¿Cuántos metros de tuberías lleva un barco de carga general de 200 metros de eslora? Entre 15.000 y 20.000 metros.

Orden de magnitud: 4

De nuevo se repiten los números anteriores, 76% de respuestas, 20% de aciertos y 66% de subestimaciones. El número de errores al estimar el orden de magnitud se queda en el 7% de los encuestados.

Figura 16. Tuberías en la cámara de máquinas de un barco (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº24. ¿Cuánto combustible consume el motor de un crucero de 3.000 pax? Alrededor de 0,65 litros por segundo. Se toman como válidos los valores entre 0,60 y 0,70 litros por segundo.

Orden de magnitud: -1

Con apenas un 45% de respuestas es la pregunta menos contestada, y de hecho los que se atreven a dar una estimación yerran en general, ya que sólo acierta el 11% de ellos, mientras que el 62% dan valores por debajo y el 27% valores superiores. El 15% estiman un orden de magnitud superior.

Figura 17. El motor de un barco puede medir varios metros de largo (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº25. ¿Cuánto tiempo tarda el Buque Escuela Juan Sebastián Elcano en ir de Ferrol a Cádiz? Unos 3 días. Se toman como válidos los valores entre 3 y 4 días.

Orden de magnitud: 0

Responden un 79% de individuos, con un 22% de aciertos. El 54% piensan que el buque tarda menos, lo cual no es cierto debido a las maniobras de a bordo, que retrasan su viaje. El 4% mal estiman el orden de magnitud.

Figura 18. Buque Escuela de la Armada española Juan Sebastián Elcano (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº26. ¿Qué altura tiene la zona de habilitación de un buque petrolero VLCC? Para cada cubierta unos 3 metros. En total, para toda la habilitación, entre 16 y 20 metros.

Orden de magnitud: 1

Esta cuestión ha sido claramente mal planteada, pues de las 39 respuestas –67%–, hay 5 acertadas, pero otras 13 que suponen que la habilitación se refiere a una sola cubierta, no al conjunto de todas ellas, por lo que se puede aceptar un total de 18 respuestas válidas –46%–, o alternativamente eliminar la pregunta del cuestionario. En todo caso nadie estima un orden de magnitud fuera del real.

Figura 19. Buque petrolero VLCC (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº27. ¿Cuánto se tarda en descargar un contenedor de 20 pies lleno de material de oficina desde la cubierta superior al muelle del puerto? Menos de cinco (5) minutos de media. Se toman como válidos los valores entre 60 y 250 segundos.

Orden de magnitud: 2

Se recoge un 69% de respuestas, de las cuales un 27,5% son acertadas. Aquí sí se observa un claro error de estimación, al encontrarse un 35% de valoraciones fuera del orden de magnitud.

Figura 20. Operación de descarga de un contenedor desde un buque de carga general (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº28. ¿Qué potencia tiene el motor de un remolcador? Entre 1.500 y 3.000 caballos de vapor.

Orden de magnitud: 3

Del 64% de respuestas, sólo un 22% aciertan con su estimación. Otro 19% subestima estos valores. Y un 27% toman un orden de magnitud diferente del propuesto, entendiendo que se pregunta por un remolcador de puerto que son los más numerosos.

Figura 21. Buque siendo remolcado por tres remolcadores de puerto (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº29. ¿Qué longitud de cables lleva un pesquero arrastrero por popa? Entre 1.000 y 2.000 metros.

Orden de magnitud: 3

Del 66% de individuos que valoran, un 26% alcanza a acertar, lo que supone el mayor valor dentro de este grupo de cuestiones específicas. Aún así, un 44% subestiman en sus estimaciones y un 11% fallan al estimar el orden de magnitud.

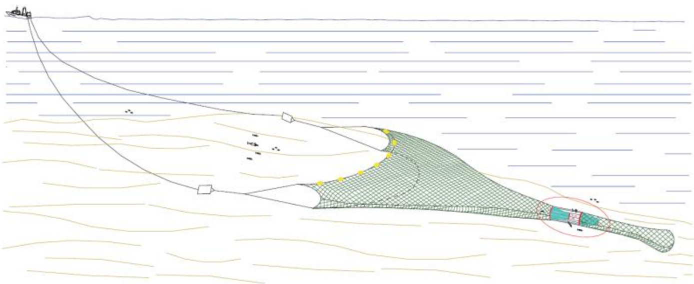


Figura 22. Arrastrero faenando (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº30. ¿Cuánto costó el Costa Concordia? Unos 400 millones de euros [23]. Se toman como válidos los valores entre 350 y 500 millones de €.

Orden de magnitud: 8

Se lanzan a contestar menos de 2 de cada 3 encuestados, concretamente el 60% de ellos, y únicamente aciertan el 9%, el valor más bajo de aciertos de todo el cuestionario. La inmensa mayoría, un 72% valoran por debajo del mínimo. El orden de magnitud no lo tienen claro el 11% de los encuestados.

Figura 23. El Costa Concordia antes de encallar (Fuente: Google imágenes)

Cuestión nº31. ¿Cuál es el caudal mínimo de un sprinkler contraincendios? Entre 0,5 y 2 litros por segundo [24].

Orden de magnitud: 0

Del 57% de respuestas, apenas un 12% alcanza a acertar. Un 42% estima valores superiores al máximo propuesto, y hasta un 27% se equivocan al estimar el orden de magnitud.

Figura 24. Sprinkler contraincendios (Fuente. http://wilsonfiresprinklers.com/)

5. Discusión y conclusiones

A pesar de que el estudio queda ceñido a los estudiantes de ingeniería, es manifiestamente evidente la enorme complicación que conlleva tratar de dotar a los ingenieros, o a cualquier otro graduado, de una manera correcta de estimar los órdenes de magnitudes específicos de su ámbito si no han trabajado desde un principio con las magnitudes generales. Este problema se va solucionando sólo, a lo largo del tiempo, con la experiencia adquirida en la futura labor profesional del estudiante.

Lo mismo ocurre en el campo privativo de las experiencias personales, pues sólo a medida que vamos conociendo situaciones reales tenemos consciencia de sus valores y los vamos asimilando, sin ningún tipo de orden, en nuestra memoria experimental, lo que nos permitirá utilizar esta información siempre y cuando el método propio que hayamos gestionado para memorizar estos datos sea suficientemente robusto y nos permita encontrar dicha información.

Sin embargo, sí hemos podido comprobar que, con los objetos cotidianos, la mayoría de los estudiantes han tenido muchas dificultades al tratar de utilizar referencias que les permitieran estimar adecuadamente sus magnitudes, lo que confirma claramente que los métodos empleados en la enseñanza de estas herramientas matemática dista mucho de ser efectivo.

A modo de conclusiones breves nos gustaría destacar las siguientes:

1. El estudio señala que los alumnos tienen muchos problemas a la hora de estimar magnitudes, ya sean las generales directamente relacionadas con sus actividades cotidianas, ya las específicas de sus estudios, en este caso los de ingeniería naval.
2. Que las preguntas de tipo general tienen un porcentaje de error abrumadoramente alto, llegando a obtenerse ciertas respuestas totalmente incongruentes, como que el peso de una hormiga es 1 gramo.
3. Que la forma en que se enseñan las magnitudes y su medida, tanto en la educación primaria como en la secundaria, no parecen ser adecuados en tanto no suponen facilidad de uso a la hora de solventar situaciones reales.
4. Que también es evidente que esto afecta los estudios superiores, donde se podrían introducir algunas actividades adicionales que facilitaran la adquisición de las magnitudes propias de su entorno como, por ejemplo en el caso del Grado de ingeniería naval, conocer datos relativos a los distintos buques que navegan a través de situaciones reales donde experimenten con sus principales medidas, o ayudarles a utilizar los datos estudiados como referencias posteriores –cálculos de consumos de equipos, valores de consumos eléctricos, datos económicos, etc.–

De todo lo anterior podemos concluir que resulta absolutamente necesario replantearse las vías utilizadas para enseñar estos temas en la educación obligatoria, siendo perentoria la modificación de las líneas educativas contextualizando la realidad del estudiante en las situaciones expuestas en el aula, lo que conllevaría un aprendizaje más eficiente y coadyuvaría en los estudios posteriores de carácter profesional.

No quisiéramos acabar sin hacer mención explícita de la necesidad de contrastar esta información, ya de por sí suficientemente elocuente, en los demás grupos de individuos relacionados en el epígrafe 3, para conocer de modo inequívoco la fiabilidad de los resultados obtenidos.

Referencias

[1] KAHNEMAN, Daniel; SLOVIC, Paul; TVERSKY, Amos. *Judement under uncertainty,* cap. 6, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1982.

[2] HEAP, Shaun H., HOLLIS, Martin, LYONS, Bruce, SUDGEN, Robert, WEALE, Albert. *The theory of choice. A critical guide,* pp. 44-46, Ed. Wiley-Blackwell, 1992.

[3] http://www.bipm.org/en/convention/cgpm/

[4] ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria.

http://www.boe.es/boe/dias/2007/07/20/pdfs/A31487-31566.pdf

[5] REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

http://www.boe.es/aeboe/consultas/bases_datos/doc.php?id=BOE-A-2007-238

[6] CHAMORRO, María del Carmen. *Didáctica de las Matemáticas*, cap. 8, Pearson Educación, Madrid, 2005.

[7] http://www.whirlpool.es/app.cnt/whr/es_ES/pageid/pgproducts001/catid/3/subcatid/11/flst/1

[8] http://www.electrolux.es/Products/Lavado_y_Secado/Lavadoras/Daily4You_Compacta/EWC1350

[9] http://www.etsin.upm.es/ETSINavales/Escuela/Organizacion_Medios/Localizador

[10] http://ccaa.elpais.com/ccaa/2012/01/17/madrid/1326836109_277342.html

[11] http://www.duscholux.es/producto_banera.php

[12] http://www.portmannautic.com/venta.php?rubro=2

[13] http://www.emtmadrid.es/web_emt_babel/files/0b/0bf81cd8-171a-46eb-8683-51d3ca36c148.pdf

[14] http://www.glock.com/espanol/index_pistols.htm

[15] http://www.otis.com/site/es-esl/Pages/Gen2Comfort.aspx

[16] HORNILLOS, Isidoro. *Andar y correr,* pp. 10-11, INDE Publicaciones, Barcelona, 2000.

[17] http://comunicacion.volkswagen.es/gama-de-modelos/modelos/golf/golf__836-837-935-c-13776__.html

[18] http://www.airbus.com/aircraftfamilies/passengeraircraft/a320family/a320/specifications/

[19] http://www.dateriles.com/2011/07/cuanto-pesa-una-hormiga.html

[20] POLO, Gerardo; CARLIER, Manuel; SECO, Elena. *Temas de tráfico marítimo,* pp. 307-312, Universidad Politécnica de Madrid, 2011.

[21] http://www.suardiaz.com/eContent/newsdetail.asp?id=270&idcompany=4

[22] PINIELLA, Francisco. *Roll-on/Roll-off el buque abierto*, pp. 23-28, Universidad de Cádiz, 1993

[23] WARD, Douglas. *Complete Guide to Cruising & Cruise Ships 2012*, p. 318, Berlitz Publishing, London, 2012

[24] http://www.tyco-fire.com/TFP_translate/TFP632_ES.pdf

Sobre los autores:

Nombre: David Díaz Gutiérrez
Correo Electrónico: david.diaz@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid – E.T.S.I. Navales

Nombre: Rocío Garrido Martos
Correo Electrónico: rocio.garrido@uam.es
Institución: Universidad Autónoma de Madrid – Facultad de Educación

Investigación

Agente Virtual Inteligente Aplicado a un Entorno Educativo

Celia G. Róspide y Cristina Puente

Revista de Investigación

Volumen II, Número 2, pp. 195–208, ISSN 2174-0410
Recepción: 20 Sep'12; Aceptación: 26 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

El presente artículo presenta el desarrollo de un agente virtual inteligente o chatbot cuyo dominio de conocimiento se corresponde con el temario de una asignatura académica, con el objetivo de lograr su interacción con el alumno y resolver sus dudas sobre la materia, suponiendo, así, un refuerzo en su proceso de aprendizaje.

Palabras Clave: Agente Virtual Educativo Inteligente, Chatbot, e-Learning, Respuesta Flexible.

Abstract

The current paper introduces the development of a virtual agent or chatbot, whose knowledge domain belongs to the contents of an academic subject. The goal of the process is to achieve interaction between the application and the student, and, therefore, to help him in his learning process.

Keywords: Intelligent Virtual Agent, Chatbot, e-Learning, Flexible Answer.

1. Introducción

Desde siempre, y más en los últimos tiempos, vivimos en un mundo en el cual debemos esforzarnos cada día por lograr una sociedad más capacitada y preparada. Para ello, la educación se convierte en un aspecto de vital importancia, debiendo entenderse como un bien compartido.

Respecto a este punto, cabe recuperar las palabras de Velásquez Córdoba [1] cuando, citando a Víctor Guédez [2] subrayaba un modelo de educación fundamentado en la *motivación a ser más*, apelando para ello a la colaboración de los demás. Este prototipo se apoya en una idea de educación que se aleja del sistema individual de aprendizaje, basándose en una trama de intercambio de conocimientos entre personas en desarrollo constante.

La implantación de un nuevo sistema educativo, con una reducción de clases presenciales y un incremento de trabajos prácticos del alumno, propicia que se creen nuevas herramientas para solventar de manera automática las dudas que pudieran aparecer referentes a una materia de estudio. En este orden de magnitud, se materializan numerosas posibilidades de potenciación de la educación a través de la participación activa, entre las que se encuentra la ofrecida por las nuevas tendencias tecnológicas y, en concreto, la que puede ser brindada por un agente virtual o chatbot.

Un chatbot puede definirse como un programa diseñado para mantener una conversación con una persona. Recientemente, este tipo de aplicaciones han visto aumentada su capacidad tras haber sido dotadas de Inteligencia Artificial, la cual aproxima su comportamiento al generalmente ejercido por el ser humano, debiendo éste exhibir, según Kasabov [3], las siguientes características:

- Aprender nuevos problemas e incrementar normas de solución.
- Capacidad de adaptación en línea y en tiempo real.
- Ser capaz de analizar condiciones en términos de comportamiento, el error y el éxito.
- Aprender y mejorar a través de la interacción con el medio ambiente (realización).
- Aprender rápidamente del estudio de grandes cantidades de datos.
- Basarse en una memoria de almacenamiento masivo, con la posterior recuperación de dicha capacidad.

Dicha inteligencia distingue varios tipos de procesos válidos para la obtención de resultados racionales, entre los que destacan dos de ellos por su relación con la base sobre la que se cimentan los chatbots: la ejecución de una respuesta predeterminada para cada entrada, y la búsqueda del estado requerido dentro del conjunto de estados producidos en función de la entrada recibida.

Generalmente, cuando se habla de agente virtual suele aludirse a una entidad de software que consta de un propósito específico. Los agentes tienen sus propias ideas sobre las tareas a ejecutar. Con objetivos concretos se distinguen los agentes de las aplicaciones multifunción, que son típicamente más pequeñas, según explicó Hayes-Roth [4].

En la actualidad, son diversos los usos de que se provee a estos agentes, siendo los siguientes, quizá, los más representativos: la exploración de datos en la red, la atención de clientes en sitios web comerciales (compras, ventas y comercio electrónico), la consulta sobre productos, la explicación de manuales de instrucciones, la administración de canales de IRC[1] actuando como moderadores (con capacidad, incluso, para expulsar y banear usuarios), o el mero entretenimiento.

Con todo, su empleo en el ámbito de la educación no se encuentra aún demasiado explotado. En la última década han surgido nuevos tipos de sistemas, basados en robots virtuales, que han demostrado ser de gran apoyo en la capacitación de alumnos y en el trabajo de los profesores. Es el caso de los Sistemas Tutores Inteligentes (STI), los cuales buscan modelar el sistema de forma que pueda adaptarse al comportamiento del estudiante, identificando la forma en que éste resuelve un problema, a fin de poder brindarle ayudas cognitivas cuando lo requiera.

Un tutor inteligente es, según Vanlehn [5]:

> *Un sistema de software que utiliza técnicas de Inteligencia Artificial (IA) para representar el conocimiento e interactúa con los estudiantes para enseñárselo.*

Por otro lado, una nueva definición [6] describe los STI como

> *Sistemas que modelan la enseñanza, el aprendizaje, la comunicación y el dominio del conocimiento del especialista y el entendimiento del estudiante sobre ese dominio.*

[1] Se le llama IRC (Internet Relay Chat) a una red de comunicación en tiempo real, similar al Messenger, en la que se puede hablar con un grupo de usuarios al mismo tiempo.

Sin embargo, estos agentes no están orientados a la resolución de dudas académicas sobre una asignatura concreta.

2. Características y objetivos fundamentales

El sistema inteligente desarrollado pretende facilitar el aprendizaje de la materia por parte del alumno, basándose en la interacción usuario-máquina, por medio de la cual el estudiante formulará sus dudas concretas acerca de la materia. Dicha comunicación, que podrá llevarse a cabo con total flexibilidad, proporcionará de manera orientativa la información que el alumno desea obtener. Asimismo, se tendrá constancia de la evolución del mismo a lo largo del curso, de manera que la información proporcionada podrá verse ampliada, de forma automática, con aquellos contenidos en los que el alumno necesite hacer especial incisión.

Gracias a la solidez de su arquitectura, el sistema permite la ejecución simultánea de sus funcionalidades por parte de varios usuarios, los cuales dispondrán de una información actualizada en todo momento. Por tanto, el agente creado puede definirse como un sistema interactivo, capaz de proveer a su interlocutor de una respuesta en tiempo real.

Cabe mencionar que el idioma nativo de la base de conocimientos del agente es el inglés. Este hecho ayuda notablemente a agilizar la programación y el análisis de las cadenas de entrada introducidas por el alumno, puesto que la estructura de formulación de preguntas en esta lengua es mucho más parametrizable y estricta que la del castellano.

De hecho, el castellano es un idioma cuya gramática presenta una dificultad latente, destacando las formas verbales, tiempos y modos. La estructura gramatical que compone las frases admite una amplia variedad de formulación. Además, el vocabulario permite una gran cantidad de giros, sinónimos y variantes. Por esta razón, se ha escogido el inglés como lengua materna, debiendo, consecuentemente, establecerse la comunicación con el agente en esta lengua.

Además, una nueva ventaja de su empleo es el aumento de la visión internacional del desarrollo, así como su integración con numerosas herramientas semánticas, la mayoría de ellas construidas en base al inglés. Con ello, la mejora y posible adaptación de este sistema a otros entornos, cobra una probabilidad de materialización mayor.

Por otra parte, y para garantizar su correcto ejercicio, el sistema debe ser capaz de cumplir dos objetivos fundamentales:

- Comprender las preguntas formuladas por el alumno, distinguiendo entre las que atañen a la materia de la asignatura y las que presentan un carácter general.

- Elaborar una respuesta en consonancia con lo cuestionado, pudiendo resolver las dudas del alumno sobre el contenido de la disciplina.

Para el cumplimiento del primero de ellos es necesario tener en cuenta la siguiente directriz, revelada por el estudio del estado del arte: el mejor método de comprensión empleado por un chatbot es el análisis de los patrones de diálogo empleados por su interlocutor humano. Es decir, el sistema analizará de forma individual la entrada introducida por el usuario, detectando en ella patrones considerados clave para la posterior elaboración de la respuesta. Este procedimiento, otorgará una total flexibilidad a la estructura que debe presentar la pregunta del alumno.

Una vez determinados los patrones empleados por el usuario, se comprobará la correspondencia de los mismos con el contenido de una base de datos, conformando la conveniente respuesta a la pregunta formulada.

La consecución de ambos objetivos conlleva la facilitación del proceso de aprendizaje del alumno, pudiéndose éste realizar a través de un mecanismo flexible, dinámico e interactivo, el cual, se espera, atraerá al estudiante y fomentará su implicación en la materia.

2.1. Integración

El sistema estará integrado en una plataforma de e-Learning, por medio de la cual el alumno podrá iniciar el proceso de comunicación con el chatbot.

El término e-Learning engloba procesos de enseñanza-aprendizaje por medio de Internet. Una plataforma contenedora de esa modalidad, como puede ser *Moodle*, ofrece ambientes de aprendizaje diseñados e integrados en un entorno privado dotado de las herramientas necesarias para el aprendizaje y el mejor seguimiento de la evolución del alumno.

2.2. Aspectos distintivos

El lenguaje AIML, extensión del lenguaje XML, fue diseñado específicamente para ayudar en la creación de la primera entidad chatbot informática de lenguaje artificial online, A.L.I.C.E Por tanto, se trata de un lenguaje especializado en la creación de agentes software con lenguaje natural.

Sin embargo, en este sistema no se utiliza AIML para interpretar el lenguaje por los siguientes motivos:

- No existe una plataforma estandarizada que permita el funcionamiento del código AIML. Para utilizarlo, es imprescindible el empleo de HTML, Program D ó E, y acceder al sitio web pandorabots.
- AIML es un lenguaje muy rígido. Realiza matcheos exactos, es decir, el usuario debe ingresar exactamente la frase que el bot tiene almacenada en su base de conocimientos, de manera que para comprender al usuario el agente debería tener indicadas todas formas y expresiones posibles que el usuario podría utilizar.
- Elaborar una respuesta en consonancia con lo cuestionado, pudiendo resolver las dudas del alumno sobre el contenido de la disciplina.
- AIML no soporta la aceptación de variantes adicionales de entrada, como pueden ser:
    - Palabras de diez letras.
    - Sólo dígitos.
    - Sólo signos.
- AIML no permite operar con el valor ingresado en la entrada por el usuario.

3. Arquitectura

La arquitectura de todo proyecto informático puede entenderse como la disposición conjunta y ordenada de elementos software y hardware para cumplir con una determinada función. Evidentemente, la combinación de arquitecturas muy distintas e inconsistentes deriva en la obtención de un proyecto ingobernable, tanto o más cuanto mayor sea la envergadura del mismo.

La arquitectura externa del sistema refleja todos los elementos, componentes o sistemas que intervienen en la implantación del sistema global. Se instaura la arquitectura Cliente-Servidor, la cual responde a un modelo de aplicación en el que las tareas se reparten entre el proveedor de recursos, el servidor, y el demandante, el cliente. Este último se erige como la parte activa de la relación, estando diseñado con la asunción de recibir respuesta por cada petición que realice. El servidor, fracción pasiva, se encarga de procesar dichas peticiones y enviar una respuesta a las mismas, orientando siempre su actuación hacia la maximización de la eficiencia.

La arquitectura interna describe el alcance del proyecto dentro del ámbito de las unidades funcionales programadas para la ejecución de las diferentes funcionalidades. Se ha escogido la aplicación del patrón Modelo –Vista – Controlador (MVC), gracias al cual se separa la lógica de negocio del interfaz del usuario, facilitando la evolución por separado de ambos aspectos, e incrementando la reutilización y la flexibilidad de la aplicación. La lógica del interfaz va a cambiar con más frecuencia que la información almacenada en la base de datos (lógica de negocio), de manera que este diseño impedirá que, si hay necesidad de modificar el interfaz, haya que cambiar trabajosamente los datos asociados.

Además, es imprescindible la interactuación con una base de datos, soporte de almacenamiento del sistema. Entre sus registros, contará con la información relacionada con el acceso de usuarios al sistema, el dominio de conocimiento del chatbot (apuntes de la asignatura) y el procedimiento para reconocer los patrones introducidos por el usuario en la entrada.

En base a las arquitecturas externa e interna definidas, se expone una imagen que recoge el tránsito de información y el lugar físico (cliente o servidor) en el que se desarrollan cada una de las operaciones a llevar a cabo.

Figura 1. Arquitectura específica del sistema

Como se puede apreciar en la figura, el cliente web consta de dos partes fundamentalmente, el interfaz y la sección de validación de entrada. Para implementar el estilo del interfaz se han empleado HTML5, CSS y J-Query.

El módulo de validación de entrada emplea AJAX, JQuery y Javascript, para la actualización asíncrona de la vista, y es el encargado de enviar la pregunta al servidor y esperar su respuesta. La funcionalidad aportada por AJAX es vital para este tipo de sistemas; ya que permite realizar cambios sobre la página sin necesidad de recargarla de nuevo, lo que aumenta la interactividad, velocidad y usabilidad del sistema.

El servidor web contiene tres partes fundamentalmente: el módulo de análisis de pregunta, programado en PHP, el algoritmo de respuesta, desarrollado con el analizador morfológico Flex, y la base de datos anteriormente mencionada.

4. Implementación

Como contenido fundamental de esta sección se especifican los aspectos y técnicas de desarrollo exclusivas del proyecto, los cuales le otorgan su distinción y particularidad y definen los métodos idóneos para llevar a cabo su implementación.

Asimismo, se presentan los diferentes módulos que componen el núcleo central de desarrollo, cimentados sobre la arquitectura anteriormente descrita, detallando sus funciones principales y funcionamiento, así como el modo en que se logra su interconexión.

4.1. Técnicas específicas

En primer lugar, cabe destacar que el bot responderá únicamente a cuestiones que versen sobre la asignatura; es decir, estará completamente ceñido a la materia, salvo alguna honrosa excepción, propia de todo chatbot. Éstos, comúnmente, tienen la capacidad de responder a preguntas, consideradas de baja prioridad, acerca de conocimientos que deben tener sobre sí mismos. "¿Quién es tu creador?", "¿Dónde vives?" o "¿Cómo te llamas?", son algunas de las preguntas, "extraoficiales", que este sistema podrá contestar al usuario que se las formule.

Un punto importante en el desarrollo de este sistema consiste en otorgar flexibilidad y realismo al proceso de comunicación con el chatbot; para ello, se opta por utilizar diferentes estrategias:

- Dar ilusión de estar escuchando. Para ello se incluyen subcadenas de la entrada del usuario en la respuesta.
- Admitir ignorancia. El programa reconoce no saber la respuesta a algunas preguntas.
- Realizar un adecuado cambio de tema. Arrastrar al usuario hacia la conversación que el bot quiere, en lugar de ser él quien la elija.
- Reconocer cuándo el usuario divaga y no formula una pregunta orientada a conocer algo sobre la materia, instándole a hacerlo.

Una funcionalidad añadida al simple procedimiento de pregunta-respuesta es que el bot, tras reconocer una pregunta sobre la disciplina que debe resolver al usuario, además de proporcionarle la correspondiente respuesta, recurre a la página de los apuntes de la asignatura en la que se verifica la contestación ofrecida, mostrándosela por pantalla. Este hecho, evidentemente, refuerza la explicación proporcionada y, de alguna manera, sirve como referencia visual al alumno.

Otro aspecto a tener en cuenta es el seguimiento que se realiza de la evolución del alumno durante el curso. El sistema consulta el contenido de una tabla de la base de datos en la que se encuentran almacenados los aspectos en los que el estudiante ha fallado en el último examen de la asignatura, haciéndole un recordatorio de manera automática del contenido que debería revisar.

Con el fin de realizar una correcta clasificación de las preguntas realizadas por el usuario, que ayude a su mejor tratamiento y comprensión, se lleva a cabo su catalogación según tipo y prioridad.

- De alta prioridad. Son aquellas consultas que contienen patrones considerados clave por el sistema. Admitir ignorancia. El programa reconoce no saber la respuesta a algunas preguntas.

- De baja prioridad. Aquellas relacionadas con los conocimientos que el robot debe tener acerca de él mismo o de la asignatura (¿Cómo te llamas? – 'What is your name?', ¿Cuándo será el próximo examen? – 'When will the next exam take place?').

- De orientación. Se proporcionan cuando no se encuentran las consultas ingresadas, con el objetivo de orientar al alumno hacia lo que desea saber realmente (¿Qué quieres saber de...? – 'What do you want to know about...?', ¿Te refieres a...? – 'Do you mean...?').

4.2. Módulos

Como se dejó constancia en la especificación de la arquitectura, el sistema contará con varios módulos, especializados cada uno en una función concreta.

4.2.1. Interfaz

A través del interfaz se produce la interacción del usuario con el sistema; se trata del elemento virtual que identifica visualmente a la aplicación. El aspecto que más destaca ante el usuario es el avatar gráfico que representa al bot. Este, cambiará su imagen en función del contenido hacia el que haya evolucionado la conversación, constando de un total de 9 imágenes distintas, siendo algunas de ellas las siguientes:

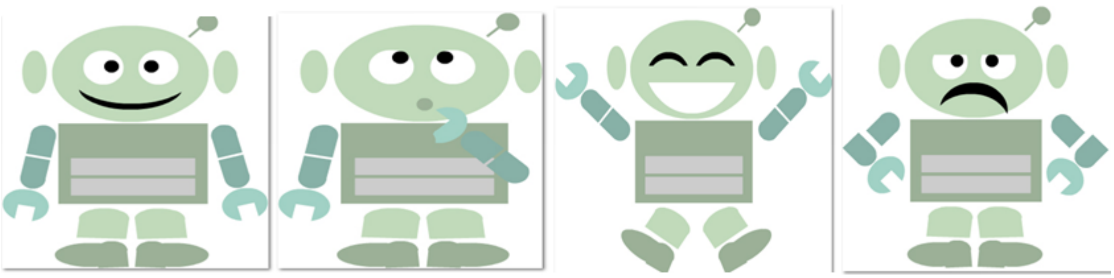


Figura 2. Ejemplo de avatares del chatbot

4.2.2. Validación de Entrada

El módulo de Validación de Entrada se encarga de dar la bienvenida al usuario al sistema y de realizar una primera consulta en base de datos para comprobar si el usuario debería repasar contenidos de la asignatura, en función de los resultados obtenidos en sus exámenes. En caso de que así sea, se le mostrará la siguiente pantalla, donde se le indicará que sus resultados obtenidos no han sido demasiado buenos, y que debería revisar los conceptos recogidos en las ventanas que aparecen a su derecha:

Este módulo, además, tiene como objetivo enviar la pregunta al servidor (previa validación de la misma), donde se analizará, y esperar la respuesta, incluyéndola, tras ser recibida, al final del área de texto. La validación de la entrada se realiza eliminando de ella los símbolos y caracteres que puedan dificultar su comprensión por los siguientes módulos que la traten (?, !, [,], etc.), según su equivalencia con los correspondientes códigos ASCII.

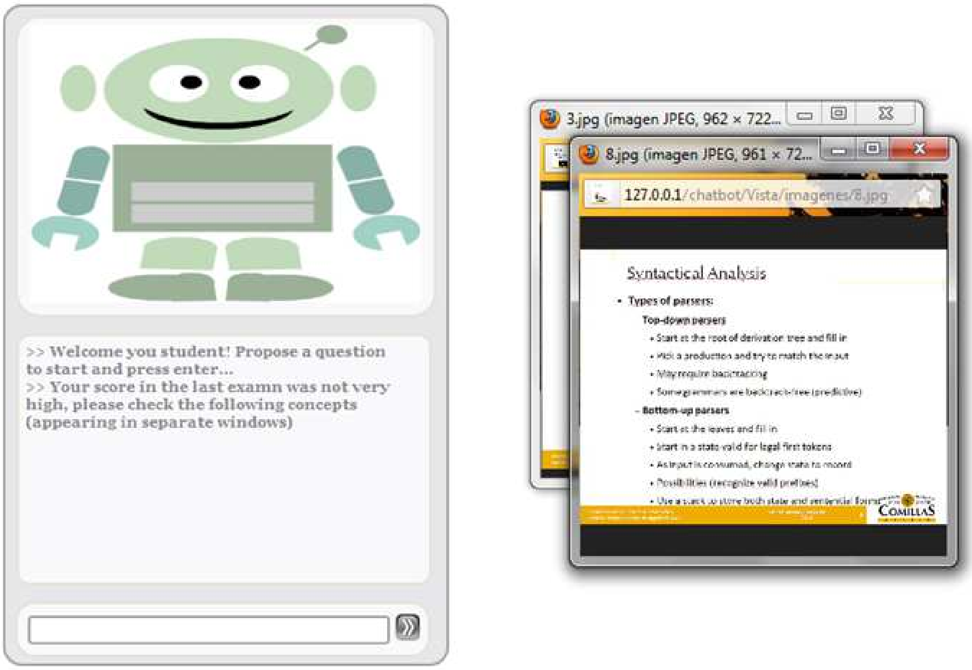


Figura 3. Propuesta de revisión de contenidos

4.2.3. Análisis de la pregunta

El módulo de Análisis de la Pregunta, íntegramente programado en PHP y albergado en el servidor web, tiene como objetivo, como su propio nombre indica, analizar el contenido de la entrada del usuario, para detectar en ella los patrones coincidentes con el contenido de las tablas *Saludos*, *Estados*, *Insultos*, e *Información* de la base de datos. Así, al llegar una pregunta, se separan cada una de las palabras de la misma en un vector, siendo contrastados a continuación los términos clave con el contenido de las citadas tablas. Dichos procedimientos de comparación pueden considerarse sub-módulos dentro del análisis.

El primer sub-módulo que entra en acción es el que opera sobre la tabla de Insultos. El sistema se encarga de detectar palabras malsonantes en la pregunta, y de proporcionar una respuesta adecuada a las circunstancias. Se contabiliza el número de veces que el alumno ha incluido una palabra de este tipo, hasta un máximo de tres, momento en el que es expulsado de la aplicación.

Una vez pasado el filtro impuesto por el primer sub-módulo, se procede a comprobar si el usuario ha saludado. En caso afirmativo, el bot hará lo propio, dándole la bienvenida.

El sistema, asimismo, tiene contabilizadas el número de ocasiones en las que el usuario saluda, de manera que, en caso de realizarlo más de una vez, le recordará que ya lo hizo previamente, animándole a formular una pregunta relacionada con la asignatura.

El tercer sub-módulo que analiza la entrada es el de *Estados*, el cual se encarga de dar respuesta a preguntas destinadas a conocer cómo se encuentra el bot, cuál es su estado.

Por último, el sub-módulo de *Información* finaliza el análisis. Su objetivo es contestar cuestiones básicas sobre el propio chatbot (quién te creó, dónde vives, etc.) y la asignatura (cuáles son la hora y aula del próximo examen, cuál es despacho de tutorías, quién es el profesor de la asignatura, etc.)

Figura 4. Secuencia de saludos

Destaca que, para ciertas repuestas, el sistema abre un *pop-up* con el documento que las certifica. Por ejemplo, si el usuario pregunta que en qué aula tendrá lugar el próximo examen de la asignatura, el chatbot añadirá a su respuesta el documento con toda la información acerca del examen.

En caso de que ninguno de los sub-módulos anteriores haya sido capaz de proporcionar una respuesta adecuada (siempre que la pregunta cubra las características propias de ellos), la entrada pasará íntegra al Algoritmo de Respuesta, que analizará de una manera más profunda la composición de la misma.

El modo de envío de la cadena al Algoritmo de Respuesta será a través de un fichero, añadiendo a la cadena el carácter '#', el cual indicará el fin de la entrada.

4.2.4. Algoritmo de Respuesta

Cuando se habla de Algoritmo de Respuesta se quiere hacer referencia, fundamentalmente, a aquéllas respuestas académicas extraídas de los apuntes de la asignatura que el bot proporciona al alumno.

Dicho Algoritmo ha sido desarrollado en Flex, herramienta de análisis morfológico diseñada para generar escáneres, es decir, programas que reconocen patrones léxicos en un texto. Flex es capaz de reconocer las expresiones regulares previamente definidas, según la descripción del escáner a generar, en la cadena de entrada, la cual divide en tokens[2] para su correcto análisis.

Las palabras que este sistema reconocerá como patrones son las siguientes:

- Conceptos propios y específicos de la materia educativa.
- Términos que determinen lo que el usuario quiere saber de los conceptos de la materia

[2] Un token es una unidad sintáctica gramatical con significado propio.

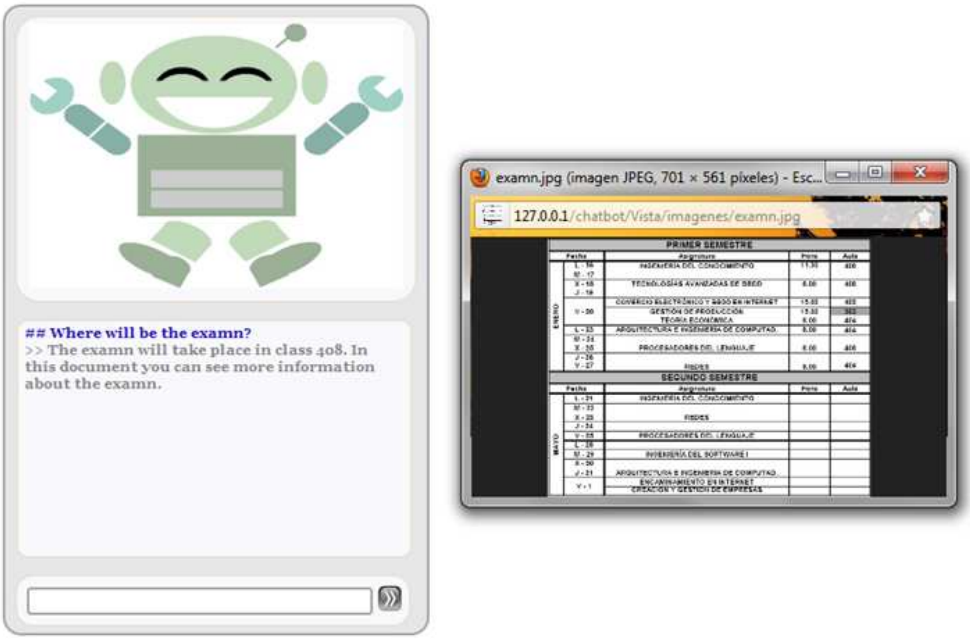


Figura 5. Pregunta por el aula en la que tendrá lugar el examen

(función, tipos, etc.).

- Pronombres interrogativos que conduzcan a la formulación de la clase de pregunta (qué, cuál, etc.).
- Palabras y expresiones utilizadas típicamente para despedirse.
- Vocablos empleados para expresar agradecimiento.
- Expresiones para referenciar coloquialmente al interlocutor.

Las reglas de reconocimiento de dichos patrones tienen la estructura [patrón]-[acción], o lo que es lo mismo, si se reconoce en la cadena de entrada alguno de los patrones establecidos, se ejecutará la acción que se detalle a continuación, escrita en código C. Esa acción puede conllevar el inicio de un nuevo estado.

La organización del código Flex se divide por estados, los cuales determinan la estructura lógica de la cadena introducida. De acuerdo a ello, las palabras de la cadena de entrada van transitando de estado a estado, procurando la formulación de las preguntas con una completa concordancia gramatical.

Los distintos estados en los que queda dividido el código Flex, y algunas de sus funciones principales son:

- **INITIAL**. Se encarga de dirigir la ejecución hacia los correspondientes estados en función del token recibido, tal y como se muestra en la Figura 5, controlar cuándo el usuario no formula una pregunta correcta, o elaborar una respuesta cuando el usuario no pregunte nada acerca de la asignatura.
- **PREGUNTA**. A él se llega cuando, desde INITIAL, se ha detectado un pronombre interrogativo. Se encarga de dirigir la ejecución hacia el estado correspondiente según la entrada, y de detectar preguntas ajenas al contenido de la asignatura. Para ello, lleva un contador

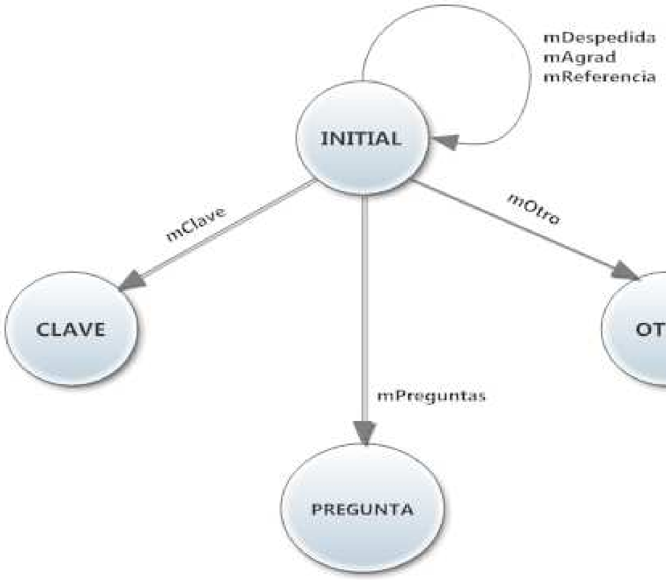


Figura 6. Autómata del estado INITIAL

del número de palabras que transcurren entre la aparición del pronombre interrogativo y la siguiente clave y, si es mayor que 3, deshecha la posibilidad de que la pregunta verse sobre la materia.

- **OTRO**. A este estado se transita cuando se ha empleado un término que determine lo que el usuario quiere saber de los conceptos de la materia. Una vez en él, por tanto, sólo se considerará la llegada de patrones reconocidos como conceptos de la asignatura. Además tiene la capacidad de detectar, en una estructura anidada, la posible formulación errónea de las preguntas.

- **CLAVE**. Es el estado receptor de la cadena cuando se ha introducido un término clave de la asignatura. Su función principal consiste en detectar si la pregunta ha sido formulada correctamente, o bien no se ha mencionado nada significativo acerca de dicha clave.

- **INTERMEDIO**. Es el estado al que se transita después de la formulación correcta de una pregunta, es decir, cuando existe una estructura anidada de preguntas realizadas (detallada más adelante).

Dichos estados comparten la función de almacenar en un fichero el conjunto de palabras clave encontradas en la entrada del usuario, para realizar su posterior cotejamiento con el contenido de la base de datos.

Por otro lado, el empleo de Flex permite otorgar al sistema de las siguientes habilidades:

- Almacenamiento de un **histórico** de lo cuestionado en la iteración anterior.

- Admisión de la formulación de cualquier número de preguntas en la misma entrada, permitiéndose la introducción de **varias estructuras anidadas**, como podría ser *'Could you tell me how does the semantic analysis work and what is a token?'*. Para ello, cuando se detecta un término de la asignatura tras haber empleado con anterioridad un pronombre interrogativo y/o un término que determine lo que el usuario quiere saber de los conceptos de la materia, siendo la estructura de la frase gramaticalmente correcta, se almacena la palabra correcto en el fichero a cotejar, la cual indica que el contenido anterior del fichero conforma una búsqueda positiva en la base de datos. A continuación, se salta al estado INTERMEDIO, para continuar con el análisis de los siguientes vocablos.

- Advertir la hora del día en que se está produciendo la conversación, e incluir referencias sobre lo temprano o tarde que es, así como despedirse con *'Good night'* en caso de superar determinada una hora.
- Detección e inclusión de referencias amistosas a su interlocutor en la respuesta.
- Conocimiento de la duración de la conversación (por medio de un fichero que actúa como contador del número de frases dichas por un mismo usuario) y, en caso de brevedad de la misma, ser capaz de comunicarle al alumno su asombro y preguntarle si no desea resolver ninguna duda adicional.

Al finalizar el análisis de la cadena, se devuelve el control al motor PHP, donde se comienza una búsqueda en base de datos de la posible correspondencia entre el contenido de ésta y las palabras clave detectadas.

La tabla sobre la que se realiza la búsqueda está constituida a través de una **ontología** de términos de la asignatura en función de la diapositiva de los apuntes a la que hacen referencia; es decir, cada diapositiva contiene una serie de palabras clave, asociadas de manera unívoca, en su conjunto, a ella. Con este método, no es necesario indicarle al sistema todas las formas y expresiones posibles con las que el usuario puede hace referencia a una pregunta concreta, sino que únicamente se requiere la manifestación de ciertas palabras clave, de las que se realiza su **composición de lugar**.

Al realizar la búsqueda en base de datos por medio de dichas palabras, podrá existir una concordancia total de las palabras clave a una diapositiva concreta, o no. En caso de que dicha concordancia sea total, se elaborará la correspondiente respuesta a lo preguntado y, además, se abrirá un *pop-up* que muestre la diapositiva que certifique la respuesta dada.

Sin embargo, si la concordancia es parcial, habiendo varias diapositivas involucradas en el proceso, se realizará una operación denominada de **máxima coincidencia**, asignando un porcentaje que simbolice el grado de pertenencia de la pregunta a cada una de las diapositivas. La que alcance el mayor valor, será la que se ofrecerá como respuesta.

5. Conclusiones y trabajos futuros

Tras la elaboración del proyecto, se han obtenido varias conclusiones en relación a los agentes virtuales:

- El usuario no disfruta en una conversación mantenida con una máquina, por tanto, los chatbots han de desarrollarse de tal modo que sean capaces de imitar el comportamiento humano.
- El mejor método de comprensión empleado por un chatbot es el análisis de los patrones de diálogo empleados por su interlocutor humano.
- Una mayor aproximación a la entrada literal del usuario, conlleva una mayor probabilidad de fallo en la respuesta ofrecida.
- Elaborar un chatbot de uso específico a partir de un diseño de uso general limita el desarrollo.

En cuanto a los trabajos futuros, además de los puntos orientados al contexto educativo citados anteriormente, este desarrollo constituirá una sólida base para la adaptación del prototipo a diversos entornos; destacando, por encima de todos, la aplicación.

Referencias

[1] VELÁSQUEZ CÓRDOBA, Luis Fernando. *Compromiso y trascendencia de la educación*. Revista electrónica de Psicología Social. FUNLAM, Bogotá, 2007.

[2] GUÉDEZ, Víctor. *Educación y Proyecto Histórico Pedagógico*. Universidad Nacional Abierta, Fondo Editorial del Vicerrectorado Académico, Caracas, 1987.

[3] KASABOV, Nikola. *Advanced Neuro-Fuzzy Engineering for Building Intelligent Adaptive Information Systems. in: Fuzzy Systems Design: Social and Engineering Applications*. L.Reznik, V.Dimitrov and J.Kacprzyk (eds) Heidelberg, Physica-Verlag 249-262, 1998.

[4] HAYES-ROTH, Barbara. *An Architecture for Adaptive Intelligent Systems*. Artificial Intelligence, Vol. 72, 329-365, Elsevier, Stanford, 1995.

[5] VANLHEN, Kurt. *Student Modeling*. Foundations of Intelligent Tutoring Systems, 55-78, Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

[6] WOLF, B. *Context Dependent Planning in a Machine Tutor*. Ph.D. Dissertation, University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts, 1984.

Sobre las autoras:

Nombre: Celia Gómez Róspide
Correo electrónico: cgrospide@gmail.com
Institución: ICAI, Universidad Pontificia Comillas.

Nombre: Cristina Puente Águeda
Correo electrónico: cpuente2@upcomillas.es
Institución: ICAI, Universidad Pontificia Comillas.

Juegos Matemáticos

Un poco de Matemagia

José Mª Navas

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

Volumen II, Número 2, pp. 209--216, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Jul'12; Aceptación: 23 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Junto a los clásicos juegos de manipulación, para los que se necesita una considerable habilidad manual, hay otra rama del ilusionismo que se basa en procedimientos más sutiles, entre los que están cogiendo auge en los últimos años los que parten de conceptos matemáticos, algunos enormemente simples, otros de cierta complejidad. Así nació lo que ha dado en llamarse Matemagia.

Palabras Clave: Magia, Ilusionismo, Matemagia, Gilbreath.

Abstract

Besides the classic manipulation-based games that require considerable manual skill, there is another branch of illusionism that relies on more subtle procedures. Among them are gaining prominence in recent years those whose origins are mathematical concepts, some of them extremely simple, others quite complex. Thus was born what has been called Mathemagic.

Keywords: Magic, Mathemagic, Gilbreath.

1. Introducción

¿Magia, Ilusionismo o Prestidigitación? Esta pregunta me la formuló, poco antes de mi intervención, uno de los participantes en la Segunda Jornada Internacional Matemáticas Everywhere (celebrada en Castro Urdiales), a la que fui invitado a dar una sesión de "Matemagia". Me sirvió como introducción entonces y… ahora también.

En la práctica, las tres palabras resultan sinónimas, aunque si nos fijamos en el origen de la tercera veremos que atiende a "juegos de habilidad manual". De hecho, éste es uno de los caminos posibles para hacer los juegos, aunque no el único. Otras vías recurren a procedimientos más sutiles, sin que sea necesaria ninguna habilidad manual especial, como son los que se fundamentan en conceptos matemáticos. Me parece más adecuado, en este caso, no hablar de prestidigitación, sino de "ilusionismo" (porque se trata de crear ilusión) o "magia" (si se pretende dotarlo de cierto misterio).

La primera forma indicada de hacer magia (la de la habilidad manual) estuvo en boga durante muchos años, desde que a mediados del siglo XIX el francés Jean-Eugène Robert-Houdin estableció los principios de la magia moderna, hasta bien entrada la segunda mitad del siglo XX. Eran los tiempos en que la magia se popularizó en teatros y salas de fiesta, donde los magos hacían aparecer conejos o palomas de su chistera o de los sitios más inverosímiles, para hacerlos desaparecer después. En los casinos de Las Vegas se sigue practicando esta forma de magia (corregida y aumentada), conocida entre los profesionales como "grandes ilusiones".

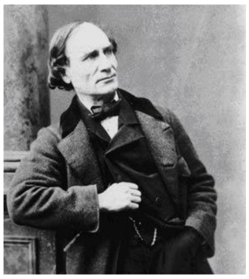


Figura 1. Jean-Eugène Robert-Houdin

Pero otra forma de hacer magia empezó a desarrollarse. Ya no se atendía tanto a la habilidad manual o a la construcción de sofisticados armatostes, sino al cerebro, que, a fin de cuentas, es el lugar donde reside la magia. Permítaseme mencionar y rendir homenaje aquí a mi admirado Ramón Riobóo, autor de un fenomenal libro que tituló *Magia pensada*, con un subtítulo encantador: *Magia para hacer con el cerebro… sin olvidar las manos*. (Su éxito entre los magos fue tan arrollador que tuvo, a petición de sus colegas, que escribir otro más, al que llamó… *Más magia pensada*.)

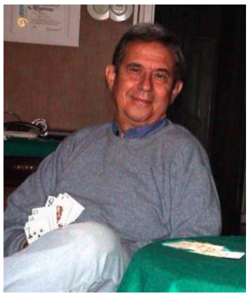


Figura 2. Ramón Riobóo

En la sesión desarrollada en las Jornadas me ocupé de una de estas últimas formas de crear ilusión, la que se desarrolla a partir de principios matemáticos muy variados, desde todos los puntos de vista. Algunos son extremadamente simples, mientras otros esconden aspectos muy sutiles.

2. Matemagia

Este término expresa por sí solo lo que pretende describir, por lo que me parece innecesario hacerlo. Es de cuño relativamente reciente y no me atrevo a asegurar quién es el padre de la criatura (de hecho, no me extrañaría que naciera más o menos simultáneamente en varios sitios, de forma independiente).

Una de esas "paternidades" hay que buscarla en los numerosos, conocidos y admirables trabajos de Martin Gardner publicados durante un cuarto de siglo en la famosa revista *Scientific American*. El autor, mago aficionado, introducía de vez en cuando, entre las variadas curiosidades que comentaba, algún juego mágico, aunque debe advertirse que esto ocurría pocas veces. Sus trabajos en el campo de la magia se concentraron en unos pocos libros, mucho menos divulgados que los abundantes que recopilan algunos de sus artículos (editados en España por Aguilar). Destaca entre aquellos *Mathematics, magic and mistery*, traducido al español como *Magia inteligente*.

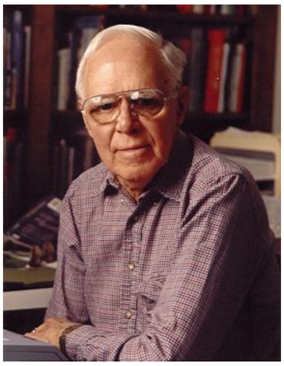


Figura 3. Martin Gardner

También en Norteamérica encontramos a magos como Karl Fulves o el canadiense Steward James, que desarrollaron multitud de juegos (sobre todo de cartas) con bases matemáticas, aunque no fuesen dados a explicar sus fundamentos, quizá porque sus libros no iban dirigidos a personas con conocimientos matemáticos e interés en la materia, sino a magos que se contentaban con los efectos demoledores de los juegos expuestos. Junto a ellos tenemos a figuras como Bob Longe, Harry Lorayne, William Simon o Raymond Blum, aunque me permito destacar (desde nuestro particular punto de vista) a Persi Diaconis, Profesor de Estadística y Matemáticas en la Universidad de Stanford (tras haberlo sido en Harvard, donde se doctoró).

En España encontramos algunos profesores de matemáticas que publican libros de matemagia, como Pedro Alegría (de la Universidad del País Vasco) o Fernando Blasco (de la Universidad Politécnica de Madrid), además de Miquel Capó o Isidoro Lander. En Francia podemos citar a Hiéronymus (pseudónimo) y Dominique Souder. En Italia, a Ennio Peres.

Figura 4. Pedro Alegría, Fernando Blasco y Miquel Capó

3. La sesión de las Jornadas de Castro Urdiales

Como ejemplo de juegos con fundamento bien simple, empecé haciendo tres que se basan en una circunstancia aritmética tan simplona como que los dados de jugar se construyen de forma que la suma de dos caras opuestas siempre vale 7 (bien 6+1, ó 5+2 ó 4+3). Con un poco (o un mucho) de imaginación pueden obtenerse, a partir de este hecho, resultados realmente sorprendentes: los participantes de las Jornadas pueden dar fe (vamos, digo yo…).

Figura 5. Durante la sesión de Matemagia en Castro Urdiales

Tras otros juegos, también de base sencilla, como las "milagrosas" propiedades de los múltiples de 9 o de los números primos, expuse uno en el que el orden de las permutaciones posibles al ordenar tres cartas permite crear un código con el que comunicarse con un compinche, ante la estupefacción del respetable, que, incluso sospechando que debía haber un acuerdo secreto, no podía imaginarse cuál podría ser. Este juego fue creado en 1920 por William Fitch Cheney jr, -primer doctorado en matemáticas por el MIT y profesor en varias universidades estadounidenses- y "resucitado" hace diez años por Michael Kleber.

Terminé la sesión exponiendo el Principio de Gilbreath, que quizá merezca un apartado propio.

3.1 El Principio de Gilbreath

Que ningún lector se asuste, siendo como es un ilustre matemático, por desconocer este principio. Se trata de algo que tiene pocas aplicaciones fuera de la cartomagia.

Empezaré presentando al autor. Norman L. Gilbreath era un mago aficionado y joven estudiante de matemáticas en la U.C.L.A. cuando en julio de 1958 publicó en la revista de magia *The Linking Ring* un juego al que llamó "Magnetics Colors", basado en lo que ahora se conoce como Primer Principio. Pese a lo novedoso del juego, hubo que esperar a enero de 1959 para que alguien pareciera ocuparse de él. En el número de esa fecha de la misma revista apareció un artículo de Charles M. Hudson (que pronto se convertiría en el redactor de cartomagia de la publicación) en el que presenta dos efectos basados en "*el nuevo principio*". El artículo terminaba con un post-scriptum en el que el famosísimo mago Ed Marlo daba su versión del "Magnetics Colors". Tres meses más tarde, Hudson publica el fruto de sus reflexiones en el artículo "Second thoughts on the Gilbreath Principle", que precedió a dos efectos de Ron Edwards que también utilizaban el nuevo principio.

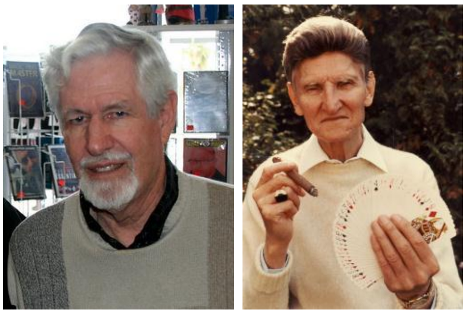


Figura 6. Norman L. Gilbreath y Ed Marlo

El interés por la novedad pareció apagarse, pues hubo que esperar siete años hasta que en el número de junio de 1966 de la citada revista apareció "Hocus Pocus Parade", en el que Norman, además de variantes del juego primitivo, formula por primera vez lo que hoy se conoce como Segundo Principio de Gilbreath. (Como curiosidad, en el número de agosto Hudson dijo que este segundo principio había sido descubierto independientemente por su amigo George Lord, dos meses después de la aparición de "Magnetics Colors". También Fulves decía que hacía juegos sobre la base del primer principio, antes de 1958.) El primer principio resulta ser un caso particular del segundo.

Ahora sí: todos los grandes cartomagos de la época (Paul Curry, Rot Walton, Nick Trost, Peter Kane, etc.) se ocuparon de las enormes posibilidades del principio.

Hora es ya de que enunciamos los dos principios. El primero fue expresado así por su autor:

> *Si un juego de cartas clasificadas en rojas y negras alternadas una a una se corta en dos paquetes, con una carta negra en la cara de uno y una roja en la cara del otro, y se*

> *mezclan a la americana, cada par de cartas consecutivas del juego así mezclado estará compuesto de una carta roja y otra negra.*

Nota para los que no sean viciosos de las cartas: la *mezcla a la americana*, también llamada *por imbricación* o *por hojeo,* se hace tomando en cada mano la mitad aproximada de la baraja y soltando las cartas alternativamente –más o menos- de cada mano, de forma que se van entremezclando las de un lado con las del otro. Es la forma que suele usarse en los casinos (¿quién no lo ha visto alguna vez en una peli?, tanto que mi admirado Woody Aragón utiliza esta denominación –*como en los casinos*- para pedirle a un espectador que mezcle la baraja) y la más habitual, entre varias, que tienen los magos de mezclar las cartas. También suele ser usada por los jugadores de bridge.

Y el segundo principio fue formulado así:

> *Si dos series de cartas clasificadas en orden inverso la una de la otra son mezcladas a la americana, las dos mitades del conjunto resultante estarán compuestas cada una de las mismas cartas de las series originales.*

Como puede verse, el primer principio queda englobado en el segundo, ya que la alternancia de colores no es más que una miniserie de dos cartas.

(¡Ah! Que siga sin preocuparse el lector que no acabe de enterarse de lo que quiere decir lo leido: el que esto escribe se quedó con una espectacular cara de tonto la primera vez que lo leyó, ¡y he sobrevivido y ahora lo entiendo sin reservas! Incluso me atrevo a explicarlo. Atrevido que es uno…)

Poco después, en sendos artículos de agosto y septiembre de 1966, Hudson reformulaba el segundo principio añadiendo que las cartas de cada serie serán las mismas pero *estarán desordenadas*. Esto aclara algo el sentido del principio (¿o lo enreda más?).

Terminaré intentando derenredar el lio (sin claras esperanzas de conseguirlo) siguiendo la última formulación del principio general, enunciada por su autor en el número de mayo de 1989 de la revista *Genii*:

Elijamos una característica cualquiera de las cartas (su color, su palo, su valor, el diseño de su dorso, etc.). Consituimos un grupo de cartas basándonos en esa característica (por ejemplo: ordenamos cinco cartas por su valor, del 1 al 5). Constituimos otros grupos similares y los apilamos. Hacemos ahora otra pila con las mismas cartas, pero invirtiendo su orden (en nuestro ejemplo, del 5 al 1). (Puede ser necesario usar más de una baraja.)

Si mezclamos a la americana ambas pilas, el paquete resultante estará compuesto de series consecutivas de cartas, cada una con las mismas cartas que consituían el grupo inicial, pero sin que tengan que estar en el mismo orden.

En el ejemplo sencillo que pusimos, si nos limitamos a un solo grupo (del 1 al 5) la segunda pila estará constituida por cartas ordenadas del 5 al 1. Es decir, cuando vayamos a mezclarlas, tendremos dos pilas como sigue:

Mano izquierda	Mano derecha
1	5
2	4

Mano izquierda	Mano derecha
3	3
4	2
5	1

Puede verse (con un mínimo de tranquilidad) que, vayamos soltando las cartas como las soltemos, las cinco cartas de abajo tendrán los cinco valores, aunque no sabremos en qué orden, pero sin posibilidad de que ninguno aparezca repetido. Lo mismo ocurrirá con las cinco cartas de arriba.

Con este principio pueden hacerse auténticas diabluras, gracias al ingenio de muchos magos que han sabido sacarle jugo.

4. Bibliografía comentada

Existe una abundante bibliografía sobre Matemagia, pero la mayoría se encuentra en editoriales especializadas en temas de magia, con una distribución restringida a las tiendas propias del ramo, cuyo acceso es exclusivo para magos (o debería serlo). Estos libros, además de resultar acceso dificultoso para el profano, presentan un interés relativo para el matemático que quiera estudiar el tema, ya que no suelen explicar el porqué de lo que ocurre, quizá porque el autor no lo sepa con claridad o no le interese, contentándose con enseñar a hacer juegos impactantes, satisfaciendo así el deseo del lector.

Por ello, me limitaré a mencionar algunos libros escritos por matemáticos aficionados a la magia y que resulten fáciles de conseguir.

[1] ALEGRÍA, Pedro. *Magia por principios*, editado por el autor, 2008.

Pedro es Profesor de la Universidad vasca. Clasifica un centenar de juegos en 17 principios (uno de ellos el de Gilbreath, *of course*) y los expone con una austeridad espartana, lo que hace que el libro deba ser leído despacito y meditado. Cuesta unos 30 € y merece la pena la inversión para el que esté interesado en la materia.

[2] BLASCO, Fernando. *Matemagia*, Temas de Hoy, 2007.

Fernando es Profesor de la Politécnica madrileña. Su libro no tiene tantos juegos como el anterior, pero no resulta tan denso. Puede ser encontrado en La Casa del Libro y en El Corte Inglés. Cuesta unos 20 € y también merece la pena.

[3] GARDNER, Martin. *Magia inteligente*, DeMente, 2007 (también hay otra traducción anterior, que debe estar agotada).

Puede encontrarse en Internet (aunque con dificultades) y el que lo localice debe comprarlo: además de magnífico e histórico, es barato (del orden de 20 € más gastos de envío).

Por si acaso, doy también la referencia de la versión original, de la que existen ejemplares sin restricciones:

[4] GARDNER, Martin. *Mathematics, magic and mistery*, Dover. 1956.

Puede comprarse en la web de la editorial o en amazon. Cuesta unos 10 $ más gastos de envío.

[5] HIÉRONYMUS. *Tours extraordinaires de mathémagique,* Ellipses, 2005

[6] HIÉRONYMUS. *Nouveaux tours extraordinaires de mathémagique*, Ellipses, 2009.

El autor de estos dos libros, que usa pseudónimo, es profesor y mago. Baratos y variados, pueden encontrarse en Internet (del orden de 10 € cada uno).

[7] SOUDER, Dominique: *80 petites expériences de maths magiques*, Dunod, 2008.

[8] SOUDER, Dominique: *60 tours magiques de mathématiques et de logique,* Ellipses, 2010.

También baratos, variados y localizables en Internet (del orden de 10 € cada uno).

[9] DIACONIS, Persi & GRAHAM, Ron. *Magical mathematics,* Princeton University Press, 2012.

A través de la web de la Politécnica de Madrid (no sé si de otras universidades) puede conseguirse gratis. Si se compra, cuesta unos 30 $

[10] SIMON, William. *Mathematical magic*, Dover, 1993.

Otro clásico y barato (unos 10 €), conseguible en la web de la editorial.

[11] Por último, doy una web totalmente recomendable (por no decir obligatoria):

http://www.divulgamat.net

hay que pinchar en *El rincón matemágico*, fenomenal "hijo" de Pedro Alegría, en donde puede encontrarse una magnífica colección de juegos, que crece cada mes.

Sobre el autor:
Nombre: José Mª Navas
Correo Electrónico: jnavas@ciccp.es
Institución: Profesor de la Universidad Politécnica de Madrid, Miembro de la Sociedad Española de Ilusionismo.

Críticas

Imágenes Matemáticas

Equipo Editorial
Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

Volumen II, Número 2, pp. 217–220, ISSN 2174-0410
Recepción: 20 Jul'12; Aceptación: 25 Jul'12

1 de octubre de 2012

Resumen

Fruto de una de las actividades organizadas por el Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático, miembros del mismo decidieron publicar "Imágenes Matemáticas".

Palabras Clave: Imágenes matemáticas, fotografía matemática.

Abstract

As the result of the activities organized by Educational Innovation Group Mathematical Thinking, members of this decided to publish "Mathematical Images".

Keywords: Mathematical Images, mathematical photograph.

1. Ficha Técnica

Título: Imágenes Matemáticas

Autores: Mariló López, Javier Rodrigo y José Manuel Sánchez

Nº Páginas: 98

Editorial: Tébar

ISBN: 9788473604901

Fecha de Edición: 07-2012

Encuadernación: Rústica

Tamaño: 190 × 190 mm

2. El Libro

Este libro tiene por objetivo que el lector observe que existen matemáticas allá donde miremos, en nuestro entorno más cotidiano, camuflado en el paisaje mobiliario urbano, en la naturaleza, o en pequeños objetos o hechos anecdóticos que conviven con nosotros y que nos rodean. Desde la forma de una patata frita hasta las formas fractales de la naturaleza, las matemáticas son la ciencia que gobierna el universo. El texto trata por lo tanto de acercarnos aquellas matemáticas susceptibles de ser vistas, o descubiertas con la ayuda de una vista perspicaz.

Figura 1. Portada de Imágenes Matemáticas[1]

Los autores, y a la sazón compañeros de la revista, han tratado de elaborar una obra que pueda servir de referencia para aquellos que en su labor docente cotidiana necesiten "acercar" las matemáticas a sus alumnos. Se presenta una colección de imágenes relacionadas con algún concepto matemático a través de una frase que hace el papel de título de la fotografía. De manera adicional a las imágenes, se aportan textos explicativos que ayudan a descubrir y entender aquellas ideas matemáticas que subyacen en cada una de las fotografías expuestas. Además de los textos mencionados anteriormente, el lector encontrará fórmulas, hechos anecdóticos y aplicaciones cotidianas de los teoremas expuestos que sin duda alguna ayudarán a comprender y descubrir la belleza que se oculta tras las matemáticas.

El valor añadido de esta obra es que está hecha "a mano", considerando el amplio concepto que supone elaborar un libro de forma cuidadosa y casi artesanal en su concepción. El libro está diseñado para un amplio público en general, y como tal su lenguaje y forma ha sido cuidadosamente elegido para que ningún lector se sienta profano a la hora de considerar su lectura. Este cuidado se deja entrever por ejemplo entre las citas motivadoras consideradas para cada uno de los tópicos expuestos, las imágenes explicativas consideradas o el sencillo lenguaje utilizado para exponer complejos conceptos matemáticos. En definitiva se trata de un libro muy recomendable, estimulante e inspirador.

Parte del contenido del texto está formado por las 40 fotografías más destacadas que se presentaron al Concurso de Fotografía organizado por el Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y celebrado en la Universidad Politécnica de Madrid durante el curso 2007-2008, cuyo principal objetivo era el acercamiento de las matemáticas a los estudiantes.

Como resultado de este concurso, el Grupo confeccionó una exposición de gran valor divulgativo que ha tratado de combinar la belleza de las imágenes con conceptos matemáticos que van apareciendo de forma natural a través de la propia fotografía y del texto que las acompaña. Se considera especialmente valioso el hecho de que las imágenes hayan sido captadas por estudiantes y no por profesionales, lo que pone de manifiesto cómo ven la matemática nuestros alumnos.

Después de unos años en los cuales la exposición ha sido llevada a diversos centros, se decidió publicar el contenido de la misma en papel. Así se ha editado el texto *"Imágenes Matemáticas"* de la Editorial Tébar (ISBN: 978-84-7360-490-1). La exposición está a disposición de cualquier

[1] http://www.editorialtebar.com/im-genes-matem-ticas/12/176

11. PUNTO DEL INFINITO

"[El infinito] nunca se encuentra realizado, no está presente en la naturaleza, ni es admisible como fundamento de nuestro pensamiento racional.
[...] el infinito, que es en realidad la negación de un estado vigente en todas partes, es una espantosa abstracción - tratable solamente mediante el uso consciente o no del método axiomático."
David Hilbert

La **Geometría Proyectiva** puede entenderse, de forma intuitiva, como la geometría que se obtiene cuando nos colocamos en un punto, mirando desde ese punto. Así, cualquier línea que incide en el ojo del observador le parece sólo un punto pues el ojo no puede ver los puntos que hay detrás. La geometría proyectiva, que cambia los postulados de la geometría euclídea en algunos matices, parte de los siguientes principios:

1º) Dos puntos definen una recta.

2º) Todo par de rectas se cortan en un punto (cuando dos rectas son paralelas decimos que se cortan en un punto del infinito conocido como punto impropio).

Detalle de la proyección en "La última cena" de Leonardo da Vinci (1495-1497)

Gérard Desargues es el iniciador de la geometría proyectiva. En su obra publicada en 1639 fundamentó matemáticamente los métodos de la perspectiva que habían desarrollado los artistas del Renacimiento. En el siglo XIX, la geometría proyectiva y la geometría hiperbólica, se consolidaron dentro de las matemáticas. El gran paso fue conseguir construir la geometría proyectiva dentro de la geometría euclidiana-cartesiana con lo que si se acepta la segunda, hay que admitir la primera.

28 | Punto del Infinito

Fugando hacia el infinito

Imágenes Matemáticas | 29

Figura 2. Extracto del libro

centro que la solicite y ahora ha querido plasmarse en un libro. El propósito de esta decisión ha sido que la exposición y su contenido didáctico puedan llegar con mayor facilidad al público interesado.

Se trata de un libro de gran belleza cuyo contenido fotográfico intenta mostrar cómo la matemática está presente en múltiples aspectos de la vida cotidiana y es visible para cualquier ciudadano. Sólo es preciso observar con UNA MIRADA MATEMÁTICA. Cada imagen se acompaña del sencillo texto explicativo que introduce al lector en el contenido matemático que se ha querido plasmar en ella.

Pensamos que resulta una publicación interesante para los estudiantes y muy bonita para todos los amantes de las matemáticas y de la fotografía.

Sobre los autores:

Nombre: Mariló López
Correo electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Departamento de Matemática e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Javier Rodrigo
Correo electrónico: jrodrigo@upcomillas.es
Institución: Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Ingenieros Industriales. Universidad Pontificia Comillas, España.

Nombre: José Manuel Sánchez
Correo electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Entrevista

Adela Salvador. Una vida dedicada a las Matemáticas

Nieves Martín Díaz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

Volumen II, Número 2, pp. 221–yyy, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Sep'12; Aceptación: 25 Sep'12

1 de octubre de 2012

Resumen

En el verano de 2012 tuve la oportunidad de entrevistar a la matemática Adela Salvador, que no sólo se ha preocupado de la enseñanza de la materia en Institutos o Universidades, sino que también ha realizado importantes investigaciones en el campo de la Lógica Borrosa (entre otros) y especializado en la vida de otras Mujeres Matemáticas que la precedieron. Lleva dando clases unos 45 años, de forma ininterrumpida. Ha dirigido, coordinado o colaborado con más de 83 proyectos de investigación o de innovación educativa. Ha escrito 76 libros, 116 artículos, 94 ponencias a congresos, y ha impartido montones de cursos, seminarios, conferencias durante todos esos años.

Palabras Clave: Hans Freudenthal, René Frédéric Thom, Lotfi Zadeh, Coeficiente de Hurst, Adela Salvador, Lógica Borrosa, Mujeres Matemáticas.

Abstract

In the summer of 2012 I had the opportunity to interview the mathematician Adela Salvador, who has not only been concerned with the teaching of mathematics in schools or universities, but also has conducted significant research in the field of fuzzy logic (among other) and she especially studied other mathematicians women lives who preceded her. She has been about 45 years teaching without interruption. She has managed, coordinated and collaborated with more than 83 research projects or educational innovation. He has written 76 books, 116 articles, 94 conference papers, and has given lots of courses, seminars, conferences for all those years.

Keywords: Hans Freudenthal, René Frédéric Thom, Lotfi Zadeh, Hurst Coefficient, Adela Salvador, Fuzzy Logic, mathematicians women.

1. Entrevista

- Para empezar por el principio, pregunta muy básica, de esas de $1 + 1 = 2$, *¿Quién enseñó a sumar a Adela Salvador?*

Ni idea, no tengo ni idea de quién me enseñó a sumar, ni siquiera de quien enseñó a sumar a mis hijos, pero sí puedo recordar ahora, porque es reciente, los primeros pasos de mis nietos en esto de sumar, y de los números. Por ejemplo, la niña que ahora tiene 5 años, desde que tenía 2, cuando subíamos las escaleras iba contando todos los escalones: 1, 2, 3... Luego cuando empiezan a contar se ponen como locos y quieren llegar a mil, un millón, se dan cuenta que pueden contarlo todo.

- ¿Y cómo era Adela Salvador de pequeña? Le gustaban también las matemáticas, ¿por eso decide estudiarlas?

Figura 1. Adela Salvador Alcaide

Me gustaba todo. Era muy buena alumna, en el colegio sacaba muy buenas notas, casi todas Sobresaliente y Matrícula de Honor. Es más, era una niña bastante repelente porque cuando me ponían un Notable me disgustaba muchísimo e iba muy enfadada por esa malísima nota que me habían puesto.

- Y al final se decidió por las Matemáticas.

Sí, cuando empecé a estudiar el Selectivo de Ciencias, no tenía ni idea de qué iba a estudiar. Me gustaba por ejemplo haber sido Ingeniero Agrónomo, o haber sido Bióloga, pero me eché novio, decidí que me iba a casar, que iba a formar una familia, y entonces me pareció una buenísima idea estudiar matemáticas, pero no para investigar sino para ser profesora, me parecía que era una profesión adecuada para tener tiempo y poder dedicárselo a mis hijos y poder hacer una vida de familia.

- ¿Qué tal le fue la carrera?

La carrera fue también muy bien. Más de la mitad de mis notas son Matrículas de Honor. Pero ya en seguida empecé a dar clases. En cuarto de carrera ya estuve dando clases en el mismo Colegio en el que yo había estudiado. Cuando se enteraron los profesores de la Universidad que estaba dando clases, me llamaron y me dijeron que quería que diera clases allí en la Universidad, y en quinto de carrera estuve dando clases en el departamento de Geometría y al acabar la Carrera, me volvió a llamar otro catedrático y me dijo que quería que fuera a trabajar con él, así que estuve en dos departamentos distintos, en el de Geometría dando clases a los alumnos de 2º de Física, y en el de álgebra dando clases a los alumnos de 4º de Matemática. Pero, en seguida, hice las primeras oposiciones que hubo a Instituto, que era lo que a mí me gustaba, y empecé a ser profesora de secundaria (entonces, de enseñanza media).

- ¿De qué época estamos hablando, cuando sacó esas primeras oposiciones a Instituto?

Me examiné en 1970, ya embarazada de mi segundo hijo, Luis. Y en el año 1971 había sacado las oposiciones y me fui a mi plaza, a Valencia.

- ¿Y cómo se enseñaban las Matemáticas allí, en aquella época? Sería muy diferente.

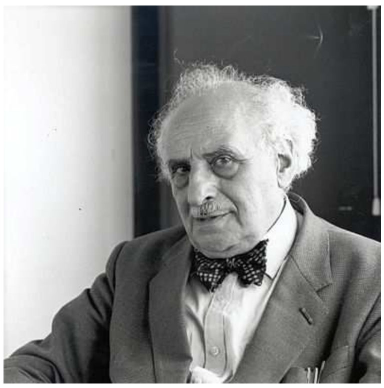


Figura 2. Hans Freudenthal (1905-1990)

Sí aquella época era bastante terrible, estábamos en lo que se llamó siempre las "Matemáticas Modernas" y enseñábamos cosas extrañísimas, como por ejemplo que nos dijeran los estudiantes cuantos elementos tenía el conjunto de partes, de partes, de partes, del conjunto vacío. Esas cosas tan abstractas, tan sin conexión con la realidad, que al alumnado, aunque era muy bueno, le resultaban complicadas, difíciles. Nos parecía que hablábamos en chino, que no conectábamos con el alumnado, por eso empezamos a reunirnos personas que teníamos inquietudes con la enseñanza de las matemáticas y fundamos el Grupo Cero de Valencia. Los primeros socios fundadores fuimos cinco catedráticos y profesores agregados: Francisco Hernán, Marisa Carrillo, Eliseo Borrás, Joaquín Dopazo y yo. Luego se fueron incorporando nuevas personas, continuamente fue creciendo, lo dejaron muy pocos, como yo. Incluso a las últimas personas que forman el grupo a lo mejor ni las conozco. Teníamos unas ideas..., discutíamos mucho, teníamos muy claro cómo queríamos que fuera la enseñanza. Por ejemplo, una frase que era de Freudenthal: "Hacer matemáticas en la clase de matemáticas". Queríamos ser capaces de explicar toda la materia que teníamos a través de problemas, no contar, cómo muchas veces se hace en las clases en la universidad: definición, propiedad, demostración, y así. Sino simplemente proponer al alumnado unos problemas y que resolviéndolos fueran adquiriendo los conceptos.

- ¿Algún problema que recuerde especialmente?

Un problema bastante bonito, con el que trabajábamos las gráficas de funciones, era estudiar la luz de las estrellas. Podíamos dar una gráfica de la luz que nos llegaba y había que interpretar cómo se podía producir esa gráfica. Por ejemplo utilizando una gráfica donde se representaba la luz de unas estrellas dobles, entonces tener que dar la explicación de cómo era el sistema de esas estrellas para que se pudiera producir esa gráfica. Podía ser que la explicación fuera que había una estrella doble, donde una estrella giraba alrededor de la otra, siendo una estrella más brillante y otra más oscura, por lo que iba cambiando la luz que se recibía. O por el contrario, conociendo cómo era la situación de esas estrellas ver cómo tenía que ser la gráfica de su luz.

- Imagino que tampoco habría mucho material didáctico en aquellos años.

Eso me parece importante. Si nosotros queríamos explicarlo todo a través de los problemas, el hacer un problema bonito, interesante, de éxito, que captara la atención de los estudiantes y que les llevara incluso a inmiscuirse y a quererlo resolver, eso lleva mucho tiempo y cuesta mucho esfuerzo, es imposible hacerlo una persona sola, hay que reunirse en grupo. Al principio no queríamos publicar nada, hacíamos nuestros problemas, los explicábamos en nuestra clase, hasta que un día vimos que había personas que estaban tomando esos materiales – lo cual no nos importaba, porque nos parecía bien- pero que los estaban tomando desde una perspectiva muy diferente a nuestra forma de enseñar: cogían uno de nuestros problemas de éxito y lo ponían en un primer momento, incluso lo publicaban, como un problema motivador y luego ya explicaban el resto de la materia de la forma tradicional: definición, concepto, propiedad..., olvidándose del problema motivador. Entonces decidimos que no teníamos más remedio que publicar esos materiales que ya teníamos elaborados.

- Para que no fueran especialmente manipulados.

R.-Sí, para que se utilizaran completos, para que no desvirtuaran el trabajo que estábamos haciendo.

-Y algún libro también empezaron a publicar. R.-Sí, sí, publicamos libros. Primero publicamos cuadernillos, 12 o 14 por lo menos. Y luego publicamos libros para 1º, 2º y 3º de Bachillerato. Y luego publicamos otros libros de informática.

- Habría muchas cosas por hacer en aquellos años, muchas experiencias nuevas, anécdotas, que ahora le hagan sonreír un poco. Sí, en aquel momento por ejemplo nos llamaron un día de Madrid para que viniéramos a dar una conferencia, vinimos unos cuantos del grupo y cuando fuimos a dar la conferencia nos dijeron que la habían prohibido las fuerzas del orden público, que no la podíamos dar.

- Qué año era, en los 70, la segunda...

No recuerdo, aunque creo que fue antes de la muerte de Franco.

- Y que les prohibieran una conferencia es que tenían un carácter un poco revolucionario en el grupo.

Desde luego no éramos conscientes, pero debíamos ser muy subversivos o muy revolucionarios cuando las fuerzas del orden público nos prohibían dar una conferencia. También nos pasó que tuvimos un problema bastante grave con unos profesores del Grupo Cero que trabajaban en un pueblo del interior de Valencia, Utiel: la asociación de padres de alumnos del instituto se enfadaron muchísimo e intentaron abrirles un expediente. La investigación llegó a Valencia y cuando los inspectores fueron a hablar con los directores de los centros y les preguntaron si éramos unos subversivos, y que qué hacíamos, los directores les dijeron, pero bueno si estas son las personas que más trabajan, cómo vais a abrir un expediente a unos profesores con los que están los alumnos encantados, y aquello se quedó así, pero si hubiéramos tenido alguna enemistad con alguno de nuestros directores, quizás hubiéramos tenido un serio problema.

-Esto también tendría una parte anecdótica, creo que había por ahí un Señor llamado Galileo...

Sí, los motivos que dieron estos padres de Utiel para lo del expediente era que un libro de estos que habíamos editado, que los dibujos estaban hechos por los propios alumnos y que tenían los defectos, pero también la gracia, la frescura propios de eso, aparece una frase de Galileo y ponía algo así como "el Galileo de espaldas" y estaba pintado el cogote de Galileo. O por ejemplo, había otro problema en el que había un gráfico en el que les enseñábamos -según estos padres- a robar bancos, pues era un problema de trigonometría con unos túneles. ¡Pobres ladrones como hubieran seguido nuestras enseñanzas para robar bancos!

- Aparte, que no entiendo muy bien cómo de unos gráficos se puede llegar al robo, lo del cogote no lo entiendo tampoco, ¿qué problema había?

Que era una falta de respeto a un sabio importante.

- Hoy nos puede asombrar muchísimo. Lo cierto es que tenían mucho éxito porque estaban en el candelero por una cosa o por otra.

Después ya de la muerte de Franco, empezaron las escuelas de verano, los profesores a asociarse de otra manera, y entonces sí que nos llamaban de todas partes de España a dar cursos de verano, a dar conferencias, a explicar lo que hacíamos y sí que fuimos bastante reconocidos. Quisimos organizar, en el año 82 unas Jornadas de Matemáticas en Valencia y, como era el sitio donde había aulas grandes, pedimos ayuda a la Universidad para que nos cedieran el aula e invitamos a René Thom, que era medalla Fields que trabajaba en la Teoría de las Catástrofes. En la Universidad de Valencia se quedaron muy asombrados porque ellos cuando daban esas conferencias y traían a expertos importantes tenían a media docena de persona escuchando y nosotros sin embargo tuvimos que rechazar asistentes porque ya se nos llenaba el aula. Tuvimos un éxito total de asistencia.

Figura 3. René Frédéric Thom (1923-2002)

- Y a parte de esas Jornadas, hicieron otras muchas actividades en Valencia.

Otro grupo que también formamos fue el Grupo Cero de Informática o Grupo Golem, donde también decíamos de forma taxativa como creíamos que había que enseñar la informática en secundaria que entonces estaba en mantillas, estaba iniciándose su introducción en los centros de enseñanza. Había gente que pensaba que con un ordenador de 1Kb de memoria se podía enseñar, lo que ahora nos parece inconcebible. Nosotros decíamos que no, que para la enseñanza y la educación hacían falta ordenadores de mayor capacidad, luego el tiempo nos fue dando la razón. Escribimos el libro blanco de la informática, y todas las cosas que decíamos en aquel momento contrastaban mucho con la opinión general, que creían que se podían utilizar ordenadores muy pequeños, que creo que se llamaban Spectrum.

- Después de Valencia llega a Madrid ¿Cuándo, por qué?

Sí, estuve 13 años en Valencia, muy a gusto, pero decidí que yo era de Madrid, que tenía que volver a mi tierra. Pedí el traslado y estuve trabajando en el Instituto San Mateo. Rompí totalmente con el Grupo Cero porque, aunque ellos me dijeron que siguiera trabajando con ellos, entonces no existía Internet, si hubiera existido habríamos podido continuar en conexión, pero en aquel momento los 350 km que nos separaban eran mucha distancia.

- Y en Madrid forma otros grupos y hace otras actividades.

Sí, muy pronto en Madrid volví a formar grupos, estuve dirigiendo el Seminario Permanente de Didáctica de las Matemáticas de la Comunidad de Madrid. También estuve trabajando con otro grupo sobre el Lenguaje LOGO para la formación de conceptos espaciales para niños pequeños, menores de seis años, que claro, con esa edad no tenían por qué saber leer ni escribir. Después también fui socia fundadora de otra asociación, la Organización Española para la Coeducación en Matemáticas Ada Byron, y por entonces de formó la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas. Esto fue a mi modo de ver un cambio drástico en la forma de trabajar, porque en el Grupo Cero nos habíamos reunido personas que teníamos una forma de ver la enseñanza de las matemáticas parecida, mientras que en estas Sociedades de Profesores de Matemáticas era por el espacio, los madrileños con los madrileños en Madrid, los de Sevilla en Sevilla..., y se fueron formando distintas sociedades que luego cristalizaron con la Federación Española de Sociedades de Profesores, pero ya eran personas que les unía la cercanía del trabajo pero no la forma de entender la enseñanza. Creo que ahí en algunas ocasiones se perdió riqueza en lugar de aumentarla.

- Y no era lo único que hacía...

En aquella época trabajaba mucho: dando clases en el Instituto; estuve trabajando en la Universidad Complutense de Madrid como Profesor Asociado, en la especialidad de Metodología, que me hacía mucha ilusión; estuve escribiendo libros con la Editorial Anaya con José Colera y Miguel de Guzmán (¡un lujo!); trabajando en estos grupos que he comentado antes de innovación educativa como el de Ada Byron, o el grupo en la Comunidad de Madrid. Además naturalmente, me ocupaba de mis hijos, de mi casa y comencé con la tesis doctoral. Con cada uno de esos grupos trabajaba en distintas cosas. Por ejemplo el primer año que estuvimos en ese Seminario Permanente de la Comunidad de Madrid recopilando y recogiendo todo lo que se sabía sobre el número de oro, que luego ha habido mucha gente que ha vuelto a ocuparse sobre él, pero que en aquel momento había muy poco en España. También estuvimos investigando en transformaciones geométricas y sobre un tema muy interesante en el que sin embargo no he visto trabajar a mucha gente, cómo se modifican las longitudes, las áreas y los volúmenes cuando hay un cambio de escala. El siguiente año queríamos que se pusiera una asignatura en Bachillerato que se llamara Taller de Matemáticas donde se construyeran materiales para la clase de Matemáticas, y estuvimos elaborando esos posibles materiales. Teníamos, en un edificio que era de la Comunidad de Madrid, como una cocina con unos armarios llenos de martillos, clavos, alicates, tijeras para recortar y así fabricar esos materiales. Lo pasamos muy divertido. En la Organización Española para la Coeducación en Matemáticas, una de las cosas interesantes fue el hacer unas plantillas para el análisis de los libros de texto. Cuando analizamos libros de texto fuimos conscientes –antes no lo habíamos sido- de que esos libros eran tremendamente machistas, la mujer adulta no aparecía para nada, únicamente podía aparecer como ama de casa o como reina, pero no existían mujeres profesionales, que fueran médicos o arquitectos, mientras que sí existían hombres con esas profesiones. Entonces, contamos cuantas ilustraciones había de niñas, mujeres, niños y hombres, y al rellenar esas plantillas fuimos conscientes, y quisimos que la gente fuera consciente, de que se trataba de distinta manera a unos y otras. De esta forma cuando en los centros se tuviera que elegir un libro de texto que pudiera hacer un análisis rápido en ese sentido. Esto podía ser una exigencia a las editoriales para que en los libros de texto no ahondaran más en los estereotipos masculinos y femeninos. Otra cosa que hicimos fue una guía de prácticas buenas para la clase de Matemáticas viendo cómo se podían mejorar la enseñanza. Se consideraban las emociones en la resolución de problemas. El juego en la clase de matemáticas. La cooperación en el trabajo en grupos, en lugar de la competición. Y otra de las cosas que me encantó y en la que me inmiscuí mucho fue en rescatar biografías de mujeres matemáticas, me especialicé en doce mujeres matemáticas de todas las épocas y estuve buscando todo lo que encontraba sobre ellas para poder conocer mucho mejor sus biografías.

Quiero añadir que en este grupo había profesores y profesoras de matemáticas, no sólo mujeres, y de distintas comunidades autónomas, no sólo de Madrid.

- Y después de todas estas vivencias, hace su Tesis Doctoral y llega a la Universidad.

Cuando ya estaba en Madrid, fui un verano a la Universidad Menéndez Pelayo a unos cursos sobre lógica borrosa e inteligencia artificial. Me pareció muy sorprendente y me gustó muchísimo. Cuando me comentaron de Pedro Burillo, que estaba en la Universidad de Alcalá de Henares, trabajaba en ese mismo tema, me fui a hablar con él y empezó a dirigirme la tesis. Presenté la Tesis Doctoral firmé todas las oposiciones que salían en el Boletín Oficial y, sin conocer a nadie en la Escuela de Caminos, sin haber trabajado allí porque yo había estado en la Complutense y Caminos es de la Politécnica, tuve la suerte de sacar la oposición, y ahí he estado trabajando hasta ahora que ya me voy a jubilar. En 1990-91 fue mi primer curso como Profesora Titular de Universidad. Desde mi Tesis Doctoral seguí investigando en los temas propios de mi tesis, sobre espacios vectoriales T-S-difusos. Luego he seguido trabajando en lógica borrosa hasta el momento actual, publicando artículos, congresos...

- Y qué son los conjuntos borrosos, si nos puede explicar a los que no somos matemáticos.

Es una forma de pensar diferente. La Matemática Clásica se basa en la teoría de conjuntos y en ella hay que conocer siempre si un elemento pertenece a un conjunto o no pertenece. Sin embargo en todo lo que es subjetivo, las cosas no funcionan así. Uno de los ejemplos clásicos que más se utilizan es considerar el conjunto de las personas altas: si una persona mide dos metros es alta y si una persona mide un milímetro menos que una persona alta, sigue siendo alta. Sin embargo bajando de milímetro a milímetro llegamos a 1,20 m. y esa persona ya no es alta. ¿Donde está la frontera?, no se sabe. Lotfi Zadeh lo que hizo fue definir unos nuevos conjuntos que en lugar de tener una función de pertenencia con valores nada más que de 0 o 1, un elemento pertenece (y se le asigna un 1) o no pertenece (y se le asigna un 0), pudiera tener un grado de pertenencia, y tomar valores en el intervalo [0, 1]. Ese pequeño cambio supone una modificación de todas las Matemáticas, tener que construir desde la base, desde el concepto de conjunto, todo el resto de la Matemática, y está dando muy buenos resultados en todo lo que es la Inteligencia Artificial y en control, en este caso control borroso.

- Pero esto no tiene que ver con los fractales, o con la teoría del caos.

No, no tiene nada que ver. La lógica borrosa es lógica y Matemática Básica, pero ciertamente también he investigado y también he publicado en cuestiones que tienen que ver con Fractales y con Caos. Durante bastantes años estuve dando cursos de doctorado sobre Fractales y Caos, e investigué en esto. Una de las cuestiones en las que he publicado algunos artículos es sobre medir la dimensión fractal de las series temporales, que me ha servido por ejemplo para calcular el Coeficiente de Hurst, a ver si ese coeficiente puede ser un indicador de la extinción de especies, que utilizamos para que nos dijera si se podían extinguir unos pajaritos de los que teníamos datos de 20 años, o si se extinguían unas plantas con semillas con diferente comportamiento.

Figura 4. Lotfi Asker Zadeh (1921-)

- Todos esos años, además de la enseñanza ha hecho trabajos colaterales, complementarios, de cooperación y de coeducación.

De Cooperación estuve en El Salvador. Como allí no tenían doctores o magister, como lo llamaban allí, intentamos que los profesores de matemáticas que estaban en San Salvador pudieran mejorar su titulación y dar un salto en su formación matemática. Como esa experiencia resultó bastante positiva, hicimos lo mismo en Cuzco, donde también diseñamos una Maestría de Matemáticas y los primeros cursos los dábamos nosotros para que luego ellos siguieran formando a su profesorado. Luego estuve también en Caracas, en Venezuela, con esa misma idea.

- Tiene una gran labor investigadora, pero la educación, la enseñanza le sigue inquietando también, después de tantos años, aunque vaya a jubilarse ahora en la Universidad, va a seguir trabajando...

Siempre me ha seguido interesando mucho, ahora ya no se llama investigación, se llama innovación educativa, donde ahora mismo tenemos el grupo "Pensamiento Matemático", con el que hacemos bastantes actividades: hemos organizado concursos, exposiciones como una de fotografías, otra de mujeres matemáticas, trabajos con el alumnado en que leían una novela con contenido matemático y tenían que rellenar una plantilla. La revista donde va a publicarse esta entrevista es de este grupo de Innovación Educativa. Este año por ejemplo hemos tenido un proyecto de Innovación Educativa en el que se han hecho unos talleres en donde el alumnado de grado ha trabajado de una forma diferente en geometría, en resolución de problemas y en nuevas tecnologías. Y seguimos trabajando en eso.

- Para los que quieran conocer más de su trabajo, donde podemos leer sus escritos, en Internet, si hay algún libro que nos quiera recomendar, alguna publicación.

Por ejemplo en la página web del grupo de investigación "Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil", (MAIC), se pueden bajar distintos materiales y ver, por ejemplo, algunos presentaciones digitales de algunas conferencias. Un libro que a mí me parece muy bonito y muy bien presentado es un libro publicado en Proyecto Sur que se llama "Matemáticas en la Matemática: el juego de Ada", que trata de dar la posibilidad al profesorado de Matemáticas de contar las biografías de estas mujeres matemáticas, dando sugerencias de actividades, de problemas, en las que al trabajar esos problemas pudieran contar anécdotas o vivencias de estas mujeres.

- ¿Y alguna nueva publicación en mente? Libros, artículos.

La última que tengo en mente, que aún no he empezado a escribir, que me han pedido, se va a llamar "Coeducación en la clase de Matemática". Estoy pensando en los temas que podría tratar este libro, y espero que salga muy pronto. Y artículos, sí, sigo investigando en todo esto de los conjuntos borrosos, estoy ahora mismo queriendo terminar un artículo donde se calcula la dimensión y la base de una similaridad borrosa (relación borrosa reflexiva, simétrica y Min-transitiva). He trabajado en conseguir que una relación borrosa sea transitiva, y si no lo es sustituirla por otra que lo sea y esté próxima a la inicial. Para transitivizar una relación hay algo que es muy clásico que es calcular el cierre transitivo, pero la distancia que hay entre esa relación borrosa y la original es en general bastante grande, por lo que hay que analizar cómo conseguir transitivizar relaciones con una distancia menor.

Referencias

[1] FIGUEIRAS, Lourdes; MOLERO, María; SALVADOR, Adela; ZUASTI, Nieves. *El juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas*, Proyecto Sur de Ediciones, S. L., Depósito Legal: GR. 494/98, I.S.B.N.: 84–8254–118–8, 1998.

[2] GARMENDIA, Alfonso; SALVADOR, Adela; CRESPO, Cristina; GARMENDIA, Luis. *Evaluación de impacto ambiental*, Pearson Prentice Hall, 2005.

[3] GARMENDIA, Alfonso; SALVADOR, Adela. *Fractal Dimension of Bird Population Sizes Time Series*, Mathematical Biosciences: MATH BIOSCI, Vol.: 206, pp. 155–171, DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.mbs.2005.03.014, 2007.

[4] GARMENDIA, Alfonso; SALVADOR, Adela; GARMENDIA, Luis. *The importance of the intensity and frequency of perturbations on the germination delay*, Mathematical Biosciences: MATH BIOSCI. Vol.: 211, pp. 153–165, DOI: 10.1016/j.mbs.2007.10.002, 2008.

[5] GARMENDIA, Luis; SALVADOR, Adela; MONTERO, Javier. *Computing a T-transitive lower approximation or opening of a proximity relation*, Fuzzy Sets and Systems, Vol.: 160, nº 14, pp. 2097–2105, . DOI information: 10.1016/j.fss.2009.01.015, 2009.

[6] MOLERO, María. SALVADOR, Adela. MENÁRGUEZ, Trinidad. GARMENDIA, Luis. *Análisis matemático para ingeniería*, EDITORIAL: Pearson Educación, S. A., I.S.B.N. 978-84-8322-346-8, Depósito Legal: M-10929-2007, 2007

[7] SALVADOR, Adela. Grupo de investigación "Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil" (MAIC), http://www.caminos.upm.es/matematicas/Fdistancia/PIE/innovacion.htm

[8] LÓPEZ, Mariló, Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático", http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/WEBGIE/actividades_gie.html

Sobre la autora:
Nombre: Nieves Martín Díaz
Correo electrónico: nieves@elplanetadeloslibros.com
Profesión: Periodista y Directora del portal web www.elplanetadeloslibros.com.

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

G.I.E

Pensamient

Matemátic