

EXPERIENCIAS DOCENTES

EXPOSICIÓN: "RIETE CON LAS MATES"

MANIFESTO FOR A "SOCIAL CAFÉ"

INVESTIGACIÓN

USE OF DECISION TREES ALGORITHM FOR THE
TERRITORIAL LOGISTIC PLANNING

ALGORITMO ESTEGANOGRÁFICO DE CLAVE PRIVADA

POSIBILIDADES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE
INGENIERÍA POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

LA ÉTICA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA EN
ALEXANDRE GROTHENDIECK

CRÍTICAS

LOS SECRETOS DEL INFINITO.
150 RESPUESTAS AL ENIGMA

JUEGOS MATEMÁTICOS

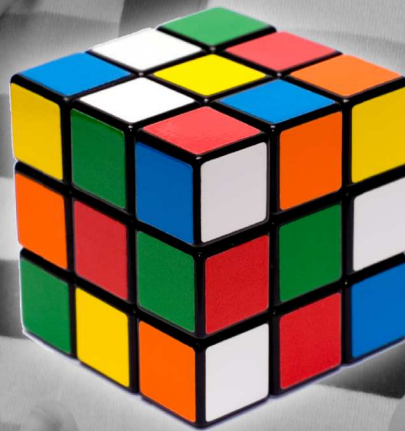
LAS MATEMÁTICAS DEL CUBO DE RUBIK

CUENTOS MATEMÁTICOS

EL CERO

ENTREVISTA A:

JUAN MEDINA:
CREADOR DE
LASMATEMATICAS.ES



Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen III, Número 2, Octubre 2013

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

Se permite la reproducción parcial o total de los contenidos de la publicación para fines educativos, dándose el debido crédito a sus autores y a la propia revista. Se prohíbe, sin embargo, la reproducción parcial o total de este texto por cualquier medio o formato incluyendo el electrónico, con fines lucrativos.

Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

y

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid



MAIC

Volumen III, Número 2, ISSN 2174-0410

Coordinación Comité Editorial

Mariló López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Javier Rodrigo Hitos

José Manuel Sánchez Muñoz

Comité Científico

Mariló López González, Adela Salvador Alcaide, Sagrario Lantarón Sánchez, Ascensión Moratalla de la Hoz,

Javier Rodrigo Hitos, José Manuel Sánchez Muñoz, Raquel Caro Carretero, Fernando Chamizo Lorente,

Luis Garmendia Salvador, José Juan de Sanjosé Blasco, Arthur Pewsey, Alfonso Garmendia Salvador,

Fernanda Ramos Rodríguez, Milagros Latasa Asso, Nieves Zuasti Soravilla

1 de octubre de 2013

Índice de Artículos

Editorial del Número 2 (Vol. III)	1
---	---

Experiencias Docentes

Exposición “Ríete con las Mates”	9
<i>Mariló López González</i>	
Manifiesto for a “Social Café”	17
<i>Paolo Politi</i>	

Historias de Matemáticas

La ética de la investigación científica en Alexandre Grothendieck	21
<i>Domingo Fernández Agis</i>	

Cuentos Matemáticos

El Cero	45
<i>José Miguel Bel Martínez</i>	

Investigación

Use of decision trees algorithm for the territorial logistic planning	51
<i>Jorge Quijada-Alarcón, Nicoletta González, Francisco Soler y Alberto Camarero</i>	
Algoritmo esteganográfico de clave privada	59
<i>Anier Soria Lorente, Rayner Manuel Sánchez Reyes y Andys Marcos Ramírez Aberasturis</i>	
Posibilidades de resolución de problemas de ingeniería por el método de diferencias finitas	73
<i>Rubén Galindo Aires</i>	

Juegos Matemáticos

Las matemáticas del cubo de Rubik	97
<i>Ramón Esteban Romero</i>	

Críticas

“Los Secretos del Infinito. 150 Respuestas al Enigma”, Antonio Lamúa Olivar	111
<i>Mariano Soler Dorda</i>	

Entrevistas

Juan Medina: creador de lasmatematicas.es	115
<i>Equipo Editorial</i>	

Editorial del Número 2 (Vol. III)

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 001-008, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Sep'13; Aceptación: 25 Sep'13

1 de octubre de 2013

Resumen

Presentamos el segundo número del tercer volumen de la Revista “Pensamiento Matemático” que nuevamente incluye diversos artículos encuadrados en las diferentes secciones habituales de la Revista, cubriendo un amplio espectro de la Matemática y sus aplicaciones.

Abstract

We present the second number of the third volume of the “Mathematical Thinking” Journal. It includes some papers framed in the different sections of the Journal. The articles cover a wide range of the Mathematics topics and its applications.

Introducción

La revista prosigue su andadura con este sexto número y con buenas noticias que avalan la solidez del proyecto.

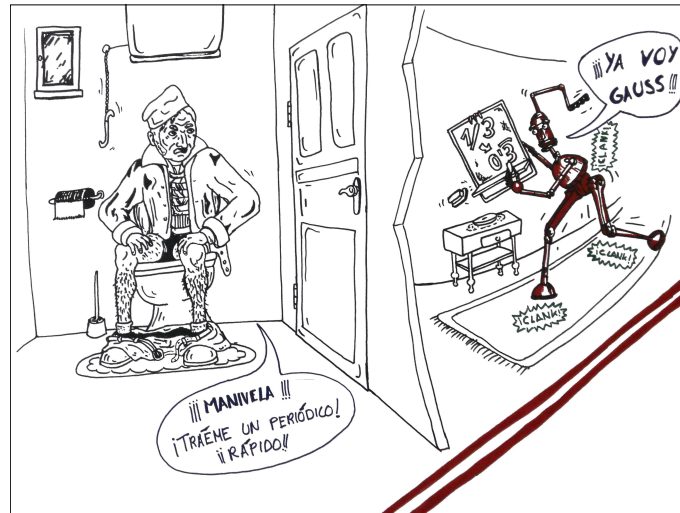
En Junio del presente año 2013 conseguimos superar el umbral de las 10.000 descargas, lo cual pone de manifiesto que Pensamiento Matemático interesa mucho a la comunidad científica. Además, en nuestro afán de mejorar día tras día este proyecto, ahora nuestra web puede consultarse tanto en español como en inglés lo que aumentará la difusión internacional de la Revista al abrirla al público internacional. Hemos mejorado nuestra calificación en bases de datos de referencia como Latindex, llegando a cumplir 34 de los 36 criterios de calidad bibliográfica, lo cual certifica la efectividad de los cambios llevados a cabo durante los últimos tres años en la publicación, encaminados a seguir los estándares de calidad internacionales.

Pero lejos de conformarnos con todas las implementaciones que hemos llevado a cabo en los últimos números, pretendemos seguir mejorando nuestra publicación, no sólo haciéndola más accesible y atractiva, sino además publicando nuevos contenidos que interesen a toda la comunidad educativa y científica. Queremos ser un proyecto donde de forma paralela importen los autores, que son los protagonistas, y también los contenidos plasmados en la revista. Pensamiento Matemático se nutre de la colaboración desinteresada de multitud de miembros de la comunidad que consideran este proyecto como “altavoz” de su creatividad.

A continuación presentamos brevemente los artículos que componen el presente número en sus diferentes secciones.

Experiencias Docentes

El artículo *“Exposición: Ríete con las Mates”* presenta la exposición “Ríete con las Mates: Viñetas Cómicas Matemáticas” que el Grupo de Innovación Educativa (GIE) “Pensamiento Matemático” de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) ha confeccionado con la colaboración de alumnos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la UPM. El trabajo quiere poner de manifiesto la utilidad de las exposiciones como recurso docente en la enseñanza de las matemáticas.



Panel relativo al concepto de número periódico.

En *“Manifiesto por un Café Social”* se expone fundamentalmente la idea de que la ciencia no debería quedar fuera del debate público, pero desarrollar un coloquio abierto entre científicos y no científicos no es tarea fácil. Razón de más para intentarlo. La idea *Social Café* (Café Social o Ciudadanos en el Café) podría resultar un formato adecuado para discutir temas en los que la ciencia, la tecnología y la sociedad se mezclarán. El sabor obtenido seguro que resultaría estimulante.



Incontro/dibattito

Giovedì 12 marzo 2009, ore 21
SMS-Rifredi, Via Vittorio Emanuele 303, Firenze

Quanti abitanti può sostenere il nostro pianeta?

con **Liano Angeli** (consulente internazionale della FAO)

Massimo Livi Bacci (docente di demografia, Università di Firenze)

Moderatore: **Paolo Politi** (Consiglio Nazionale delle Ricerche)

Póster de Science Café, Florencia (2009).

Historias de Matemáticas

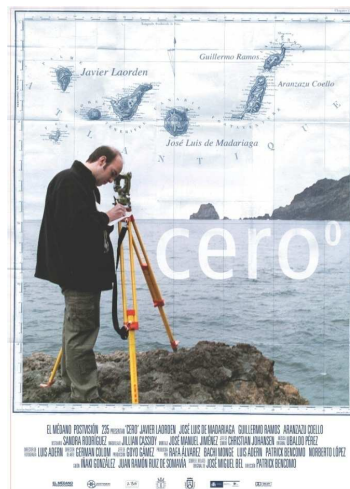
En *“La ética de la investigación científica en Alexandre Grothendieck”* se aborda la cuestión del lugar de la ética de la investigación científica en el pensamiento del gran matemático Alexandre Grothendieck, prestando una atención particular a su excepcional obra *Récoltes et semailles*, en la que éste pasa revista a su vida como investigador y profesor. En relación con este asunto, nos referiremos a la ética de la investigación científica, tanto en lo que tiene relación con la investigación misma, como en lo que tiene que ver con la dimensión comunitaria de la ciencia y sus implicaciones sociales.



Alexandre Grothendieck (1988).

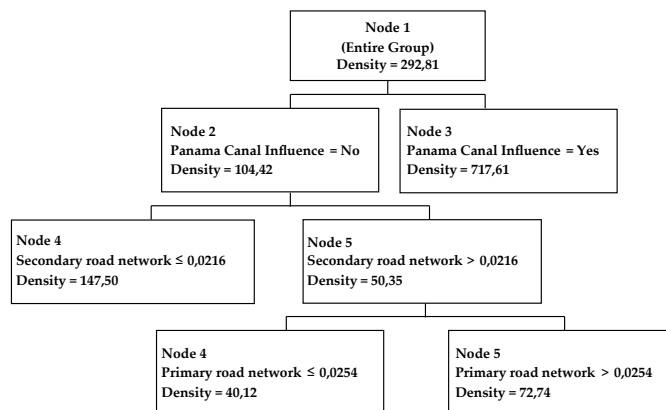
Cuentos Matemáticos

“El Cero” es un relato corto de ficción, basado en hechos históricos, fue ganador del 2º Certamen de Relatos “San Isidoro” el año 2001 y publicado en la revista Topografía y Cartografía ese mismo año y en Mapping en 2010. En 2005, subvencionado por la Comunidad de Madrid y los Cabildos de Tenerife y El Hierro, se rodó en esta isla el cortometraje del mismo título basado en esta historia que, estrenado en Santa Cruz en 2006 tuvo amplia difusión en festivales internacionales.



Cartel del cortometraje “El cero”, basado en este cuento.

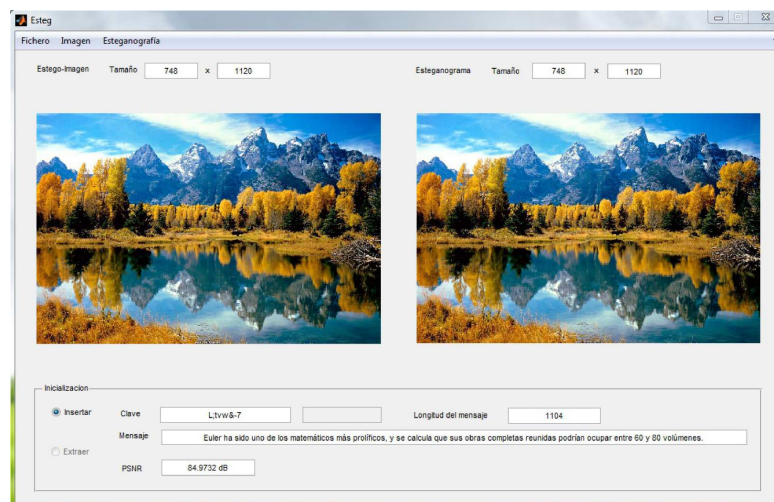
Investigación



Decision tree.

En *“Use of decision trees algorithm for the territorial logistic planning”* se presenta la minería de datos, y en particular los árboles de decisión utilizados en diferentes campos: ingeniería, medicina, banca y finanzas, etc., para analizar una variable objetivo a través de variables de predicción. El siguiente artículo examina el uso del algoritmo de árboles de decisión como una herramienta en la planificación logística territorial. El árbol de decisión construido ha estimado índices de densidad de población para unidades territoriales con similares características logísticas en un modo conciso y práctico.

En *“Algoritmo esteganográfico de clave privada”* se muestra la esteganografía con clave privada, un sistema similar a sistemas criptográficos de cifras simétricas. En este artículo se presenta un nuevo algoritmo esteganográfico, el cual utiliza una clave privada, que permite generar una secuencia binaria pseudoaleatoria, indicando así los píxeles de la imagen donde serán insertados los elementos de la secuencia binaria del mensaje secreto. El algoritmo propuesto, mejora en cuanto al nivel de imperceptibilidad respecto al método de los bits menos significativos¹.

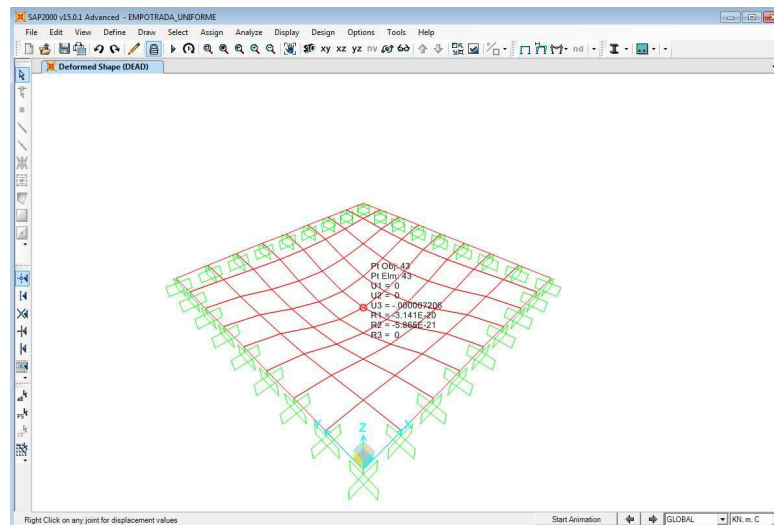


A la izquierda se muestra la imagen original mientras que a la derecha se muestra el esteganograma para la clave privada $L; tw8-7$.

En *“Posibilidades de resolución de problemas de ingeniería por el método de diferencias finitas”* se expone la importancia de la obtención de la solución de determinados problemas de ingeniería mediante la resolución de ecuaciones en derivadas parciales que tienen que ser evaluadas numéricamente. El método de resolución numérica más extendido es sin duda el método de

¹ El método de los bits menos significativos, indica el procedimiento esteganográfico que a través de una operación lineal, se encarga de ocultar información en el bit menos significativo de cada byte de algún medio digital.

los elementos finitos, que ha superado al método de las diferencias finitas principalmente por su sencillez conceptual y por las limitaciones de éste último método para adaptarse a mallas irregulares; sin embargo, diversos autores han seguido desarrollando y aplicando el método de diferencias a todo tipo de problemas. En este artículo se presenta una aplicación numérica al cálculo estructural de una placa, que se resuelve por el método de las diferencias finitas y que permite obtener soluciones óptimas incluso para el problema de carga localizada, poniendo de manifiesto la idoneidad de aplicación de métodos de diferencias generalizados en su resolución y cuya formulación se presenta. En particular se resuelve 3 casos de aplicación: placa apoyada en sus cuatro lados bajo carga uniforme, placa apoyada en sus cuatro lados bajo carga puntual en el centro y placa empotrada en sus cuatro lados bajo carga uniforme.



Modelo realizado con SAP 2000 para placa empotrada con carga uniforme.

Juegos Matemáticos

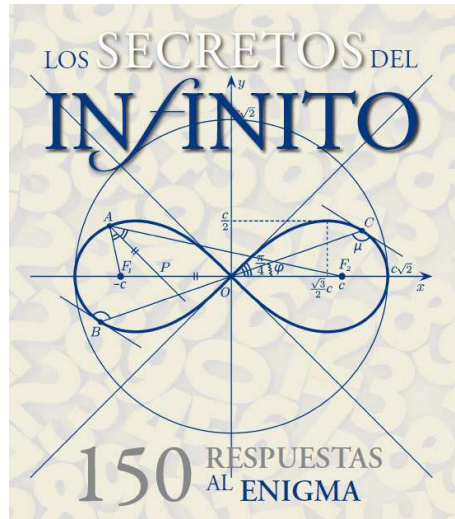
En *“Las matemáticas del cubo de Rubik”* se hace una presentación de cómo podemos utilizar el cubo de Rubik para presentar algunos conceptos básicos de la teoría de grupos y cómo podemos utilizar ésta para resolver el cubo de Rubik.



Ernő Rubik y variación de su cubo original.

Críticas

En *“Los Secretos del Infinito. 150 Respuestas al Enigma”* de Antonio Lamúa Olivar se presenta una reseña de este libro, que revela 150 secretos universales escondidos bajo el infinito. El autor trata de mostrar el conocimiento que tenemos de este concepto a través del tratamiento dispar que ha tenido históricamente en disciplinas tan dispares como la vinculación del infinito con el espacio, la religión, la energía, las espirales, el pensamiento, la probabilidad, la geometría o el cálculo.



Portada del libro.

Entrevistas

En esta ocasión charlamos con Juan Medina, profesor de matemáticas de la Universidad de Cartagena (España) y creador de lasmaticas.es, un portal que presenta más de 3.000 vídeos de autoayuda para estudiantes de todos los niveles. Su web se ha convertido de este modo en un lugar de referencia para todos aquellos interesados en “mejorar” sus matemáticas.



Juan Medina.



Finalizamos esta presentación animando a los lectores a colaborar con sus trabajos a las futuras ediciones de la Revista. Sois todos vosotros la razón de existir de este proyecto. Este proyecto continúa su andadura gracias a la colaboración de todos los miembros de la comunidad científica que están interesados en el proyecto. El Comité editorial es sólo la vía de transmisión de los trabajos entre los autores y los lectores.

“Vamos a levantarnos y dar las gracias, porque si no aprendimos mucho hoy por lo menos hemos aprendido un poco, y si no hemos aprendido un poco, por lo menos no estamos enfermos; y si estamos enfermos, por lo menos no estamos muertos. Así que vamos todos a dar gracias.”

Buda

“Desarrolla una actitud de gratitud y da las gracias por todo lo que te sucede, sabiendo que cada paso adelante es un paso hacia el logro de algo más grande y mejor que tu situación actual.”

Brian Tracy

“Sólo un exceso es recomendable en el mundo: el exceso de gratitud.”

Jean de La Bruyère

¡Gracias por estar “al otro lado”!

El Comité Editorial

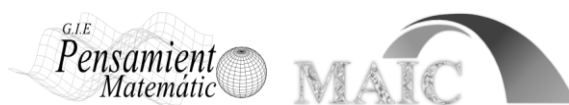
Experiencia Docentes

Exposición “Ríete con las Mates”

Mathematical exhibition “Laugh with Maths”

Mariló López González

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 009–016, ISSN 2174-0410

Recepción: 31 Jul'13; Aceptación: 20 Sep'13

1 de octubre de 2013

Resumen

Este artículo presenta la exposición “Ríete con las Mates: Viñetas Cómicas Matemáticas” que el Grupo de Innovación Educativa (GIE) “Pensamiento Matemático” de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) ha confeccionado con la colaboración de alumnos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la UPM. El trabajo quiere poner de manifiesto la utilidad de las exposiciones como recurso docente en la enseñanza de las matemáticas.

Palabras Clave: Exposiciones Matemáticas, Viñetas Matemáticas, Divulgación Matemática.

Abstract

This paper presents the exhibition “Laugh with Maths: Mathematical Cartoons” that the Educational Innovation Group (GIE) “Mathematical Thinking” (“Pensamiento Matemático”) of the Polytechnic University of Madrid (UPM) has done with the collaboration of students of the Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos of the UPM. The work wants to show the utility of the exhibitions as a teaching resource in the teaching of mathematics.

Keywords: Mathematical exhibitions, Mathematical Cartoons, Mathematical Popularization.

1. Introducción

Continuamente es posible encontrar conceptos científicos, concretamente matemáticos, que no se conocen, no se entienden o no se les da importancia, por no haber contado con una transmisión exitosa que llegue a numeroso público. Una forma interesante y atractiva de divulgar estos conceptos, por ejemplo matemáticos, es mediante la organización de exposiciones. La belleza de las imágenes y los elementos que conforman una exposición, tienen como objetivo captar la atención del público con la pretensión de que éste se interese

por lo que está viendo. De esta manera, los contenidos van apareciendo de forma natural a través de la propia imagen, del objeto expuesto o del texto que les acompaña.

La importancia de las exposiciones reside en que representan una vía para captar nuevos públicos y atraerlos, en este caso, hacia el mundo de la ciencia. En general atraen tanto al público habitual de los ámbitos de estudio, universidades, colegios, institutos, etc. que desean conocer en profundidad los temas expuestos, como a público desconocedor de estos temas que quieran iniciarse en ellos. Por esto último, refiriéndose a la importancia de este tipo de muestras en la captación de nuevo público, decir que permiten entrar en entornos de estudio y formación sin el temor de no saber cómo manejarse en ellos.

El GIE “Pensamiento Matemático” lleva a cabo una serie de exposiciones itinerantes sobre Matemáticas que hacen llegar al mayor número posible de personas la utilidad y la necesidad de esta ciencia en numerosos campos a todos los niveles. En general, las exposiciones itinerantes ofrecen un verdadero efecto multiplicador de los objetivos de comunicación social de la ciencia.

La exposición que se presenta en este artículo “Ríete con las Mates: Viñetas Cómicas Matemáticas” propone hacer llegar de forma clara, visual y divertida a numeroso público, conceptos relacionados con las matemáticas, una ciencia muchas veces temida. Lo hace a través de la búsqueda de los segundos sentidos, los absurdos o los malos entendidos. Las matemáticas representan en numerosas ocasiones una conexión lógica entre ideas y conceptos, entre el lenguaje cotidiano y el científico. Estas conexiones pueden usarse de manera cómica si el que recibe la información tiene la suficiente “cultura matemática” para entender esas conexiones. Para lograr este objetivo y el de llamar la atención del público sobre la necesidad de que conozcan ciertos conceptos matemáticos y que los sepan aplicar en su vida cotidiana, el GIE ha recopilado e inventado una colección de viñetas relacionadas con las matemáticas. Estas viñetas reflejan situaciones cotidianas, preocupaciones sociales o malos entendidos desde un punto de vista matemático.

Con esta exposición se quiere poner de manifiesto la necesidad de tener una cultura matemática hasta para reír.

2. Sobre la exposición

Con la finalidad de acercar a los estudiantes y al público en general a las matemáticas de una manera sencilla y divertida, el GIE “Pensamiento Matemático” se propuso durante el curso 2012-2013 recopilar ciertos chistes matemáticos y hacer sus propias versiones gráficas, así como inventar algunos nuevos. El fin era crear una exposición de paneles gráficos con ciertos gags cómicos donde se plasmaran conceptos matemáticos desde un punto de vista e interpretación en tono de chiste. Además estas viñetas se acompañarían de un panel explicativo donde se explicara brevemente el concepto matemático que apareciera en dicha viñeta.

Para realizar la propuesta se convocó un anuncio entre los alumnos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la UPM en el que se pedía la colaboración de todo aquel que estuviese interesado en realizar dibujos estilo cómic y viñeta. Se seleccionaron dos alumnos del primer curso de Grado en Ingeniería Civil y Territorial:

Noelia Esteban Rivera y Álvaro Llera Fernández, los cuales son autores de las ilustraciones de la exposición.

El resultado del trabajo han sido 24 paneles gráficos a lo largo de los cuales se ha trazado un recorrido por una colección extensa y variada de la Matemática. En ellos se tratan temas como los números racionales e irracionales, las series numéricas, las funciones reales de variable real y sus gráficas, los conjuntos, los límites, las derivadas y las integrales, la lógica, las constantes matemáticas, los sistemas de numeración,....

Esta exposición propone una determinada visión del mundo a través del conocimiento de conceptos matemáticos que aparecen como un instrumento cotidiano y útil hasta para reír.

A continuación se muestran algunos de los paneles con sus carteles explicativos:



Figura 1. Panel relativo al concepto de serie numérica.

Series

En matemáticas, una serie es la generalización de la noción de suma a los términos de una sucesión infinita. Puede verse entonces como el resultado de sumar los términos: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Lo cual suele escribirse en forma más compacta con el símbolo de sumatorio: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Esta viñeta utiliza el doble sentido de la palabra serie como elemento matemático y como vocablo que define cierto tipo de emisiones televisivas.

Figura 2. Cartel explicativo del panel relativo al concepto de serie numérica.

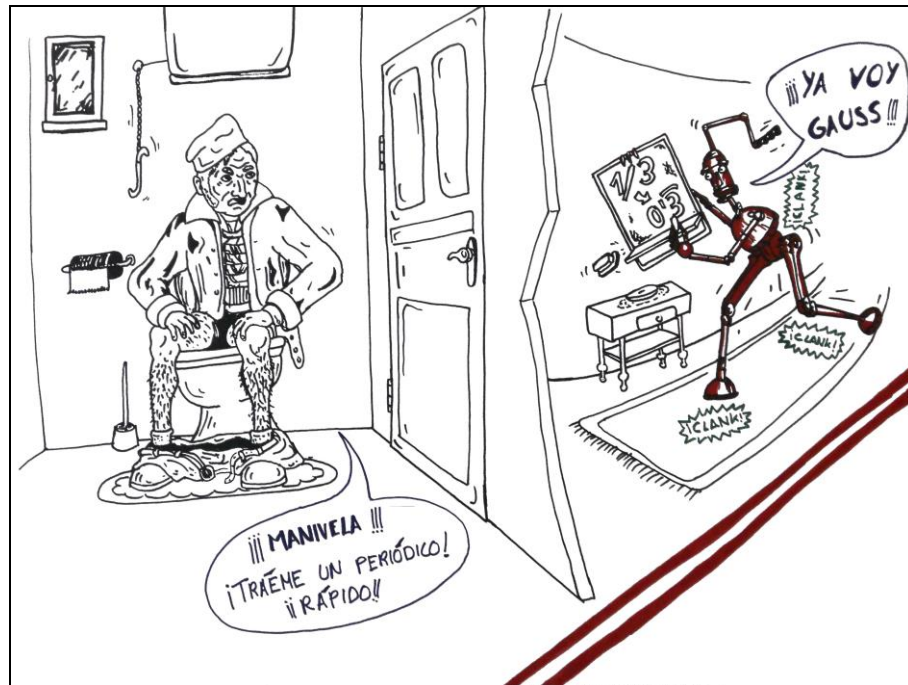


Figura 3. Panel relativo al concepto de número periódico.

Números periódicos

Los números racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$ se caracterizan porque poseen un número finito de decimales ó un número infinito de decimales que se repiten (periódicos). No todos los números reales cumplen esta propiedad. Los números irracionales son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas.

En esta viñeta se utiliza la idea de que $\frac{1}{3}$ es un número racional de periodo 3, es decir 0,333333333...

Figura 4. Cartel explicativo del panel relativo al concepto de número periódico.



Figura 5. Panel relativo al concepto de conjuntos y subconjuntos.

Teoría de Conjuntos

Los conjuntos son colecciones abstractas de objetos que representan una herramienta básica en la formulación de cualquier teoría matemática. La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de estos elementos.

Una relación entre conjuntos es la relación de inclusión. Una subcolección de elementos B de un conjunto dado A es un subconjunto de A .

Este cartel hace uso de la relación de inclusión para dar una idea jocosa de la visión que los estudiantes tienen de su relación con las matemáticas.

Figura 6. Cartel explicativo del panel relativo a la teoría de conjuntos.

3. Conclusiones del trabajo

Con esta exposición se considera que se ha puesto de manifiesto la apertura de las matemáticas, que las ideas y los conceptos matemáticos están abiertos a cualquier persona. Esta ciencia trabaja sobre demostraciones y abstracciones y las viñetas que forman la exposición reflejan la belleza de estas ideas para resaltar ciertas situaciones o realidades sociales del día a día. Resulta así un instrumento para la objetivación y pone de manifiesto que las matemáticas estudiadas proporcionan una realidad para analizar en nuestra vida cotidiana.

La exposición sirve como instrumento para medir nuestra competencia en matemáticas y para poner de manifiesto situaciones matemáticas en nuestro entorno. ¿Estamos preparados para comprenderlas?

El lenguaje y los conceptos matemáticos son necesarios, representan una herramienta imprescindible para el progreso y los ciudadanos tenemos que conocerlos. Además podemos sacarles partido para “echar unas risas” y pasar un rato agradable. Las matemáticas aparecen en la sociedad formando parte de la cultura social por lo que pueden y deben ser utilizadas en los chistes. En muchas situaciones cotidianas se necesitan las matemáticas para expresarse siendo así una necesidad social.

Con esta exposición estamos seguros de que se ha puesto de manifiesto que un poco de “cultura matemática” puede hacernos reír y abrirnos a nuevos conceptos e ideas de esta ciencia.

La exposición se encuentra a disposición de todo centro que la solicite, ya sea colegio, instituto, universidad, biblioteca, centro cultural,... Solo debe contactar con el GIE a través de su página Web:

<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/WEBGIE/index.html>

Referencias

- [1] DRI, Liliani Elena. *Los matechistes. Crear y reír en la clase de matemáticas*, Dunken, Buenos Aires, 2007.
- [2] FLORES, Pablo; MORENO, Antonio J. *Matemáticas competentes... Para reír*, Graó, Barcelona, 2011.
- [3] FLORES, Pablo. *Humor gráfico para el aula de matemáticas*, Arial, Granada, 2013.
- [4] MILLÁS, Juan José; FORGES. *Números pares, impares e idiotas*, Alba, Barcelona, 2000.
- [5] PAULOS, John Allen. *Un matemático lee el periódico*, Tusquets, Barcelona, 1999.
- [6] QUINO. *Todo Mafalda*, Lumen, Barcelona, 2011.

Sobre la autora:

Nombre: Mariló López González

Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Experiencias Docentes

Manifesto for a “Social Café”

Manifiesto por un “Café Social”

Paolo Politi

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 017–020, ISSN 2174-0410

Recepción: 8 Jul'13; Aceptación: 31 Jul'13

1 de octubre de 2013

Abstract

Science should not stay out of public debate, but an open confrontation between scientists and non-scientists is not easy. All the more reason to try. *Social Cafés* are a suitable format to discuss about topics where science, technology and society mix. The resulting flavour may be attractive.

Keywords: Science, Society, Economy, Public Debate

Resumen

La ciencia no debería quedar fuera del debate público, pero desarrollar un coloquio abierto entre científicos y no científicos no es tarea fácil. Razón de más para intentarlo. La idea *Social Café* (Café Social o Ciudadanos en el Café) podría resultar un formato adecuado para discutir temas en los que la ciencia, la tecnología y la sociedad se mezclarán. El sabor obtenido seguro que resultaría estimulante.

Palabras Clave: Ciencia, Sociedad, Economía, Debate público

Neutrality of science is dead and scientism has rather been replaced by a strong mistrust towards science and scientists. This suspicion, if not aversion, is often explained as a plain consequence of scientific ignorance. Therefore, the remedy would be to strengthen the teaching of science at school, to improve the quality of scientific reports, to disseminate science news, to organize popular conferences. And scientists should be involved, specially in the popularization process. All these activities are useful and necessary, no doubt, but would it be enough? No, in my view.

Science, often mixed up with technology, is related to many aspects of our everyday life and if it is regarded as helpful and now essential it is also perceived as potentially dangerous or source of concern. Furthermore, science disputes on, e.g., GMO, cloning or global warming do not oppose “the scientific community” to “the rest of the world”. Most of times, disputes are also among scientists and since these topics are not “purely” scientific, the debate inevitably has a political side. And once the debate gets ideological every statement, every opinion seems to have the same strength of others. The answer is not to fish the topic out of the “political sea”

and say “Hey, that’s science!”, but possible alternative solutions are much more laborious. Here I’m going to discuss one.



Incontro/dibattito

Giovedì 12 marzo 2009, ore 21
SMS-Rifredi, Via Vittorio Emanuele 303, Firenze

Quanti abitanti può sostenere il nostro pianeta?

con **Liano Angeli** (consulente internazionale della FAO)

Massimo Livi Bacci (docente di demografia, Università di Firenze)

Moderatore: **Paolo Politi** (Consiglio Nazionale delle Ricerche)



Caracas, Venezuela

Sulla terra siamo 6 miliardi e 700 milioni e gli abitanti delle città hanno appena superato gli abitanti delle campagne. Quanto ancora possiamo crescere di numero? Se non ci saranno abbastanza risorse per tutti, cosa faranno, o stanno già facendo, gli uomini per contendersele?

Pur essendo invocato il contenimento demografico, non è chiaro se misure come pianificazione familiare o sviluppo economico saranno sufficienti, così come non è chiaro se gli oltre 800 milioni di affamati siano dovuti a mancanza di cibo o dei soldi per comprarlo, e quanto la diffusione dei biocombustibili contribuirà all'aumento dei prezzi degli alimenti.

E intanto, invece, in Europa la popolazione invecchia e si fanno meno figli, e senza la temuta immigrazione si corre il rischio di un'implosione demografica.

Incontri organizzati dall'associazione culturale Caffè-Scienza
con la collaborazione dell'Istituto dei Sistemi Complessi del CNR e dell'Assessorato alla Cultura del Comune di Firenze,
e con il patrocinio del Comune di Firenze

Per maggiori informazioni: info@caffescienza.it, Tel. 055 5226686 (Paolo Politi)

Figure 1. Poster of a Science Café, held in Florence (2009).

I don't think there is *the* right way to discuss about science and technology, because the way should always be related to the people you are addressing and to the purpose you have in mind. My suggestion is to favour a public discussion on themes with a relevant scientific and technological aspect, in a broad sense. Such discussions may take place in various places, real or virtual ones, but I look with sympathy face-to-face discussions among people, gathered somewhere. These type of meetings are not new but they are preferentially confined to classical culture, think to Literary Cafés or reading clubs, or to genuine political topics. French Cafés Citoyens, where people meet and discuss on the most diverse subjects, are an exception. Science Cafés are another exception and they are now widespread in all continents.

I myself have organized a Science Café (Caffè Scienza, in italian) for several years, in Florence. Rather than explaining how it was organized, I prefer to give a simple and short “guide

to the future", because after this experience, I would feel the need to go a step further towards a Social Café. Three ingredients are most important: *the organizing committee, the format, and the venue*. Let's consider them in order.

The organizing committee

It is not required that organizers come from the academia, but it is necessary to have connections with it and to be able to get in touch with potential guests in very different disciplines. It is also useful that the committee includes people with interests or specializations in different areas, e.g., hard sciences, life sciences, economics, social and political sciences. University students would be specially suited to take part in such a committee. Non-scientists should also be welcome.

The format

One or two guests, not more. Ten-fifteen minutes each to introduce themselves and propose some ideas to start the discussion. No slides. An active moderator should strongly avoid soliloquy whose only content is "How good I am". The guest is there for a public discussion, not to promote science (or, even worse, their activity). Finally, allow one to two hours for discussion.

The venue

The venue may be any public place with free entrance where guests, moderator and public are on the same plane, literally. More precise recommendations would be useless, this point being strongly dependent on the region where events are organized.



Figure 2. Possible logo for a Social Café.

Researchers may be doubtful about the format giving free speech on “scientific” topics to anyone. Well, if in a scientific conference every participant has free speech, the same should be true for a public debate, because it is how you argue which gives greater or less weight to what you say. According to my experience, a debate is more likely to be spoiled by a logorrheic, confusing or haughty guest rather than by the public.

Finally, to be concrete I would like to give some examples of topics which have important scientific or technical aspects, but also have a relevant social impact: energy sources; biomedical research; food production; waste management; finance and banking; voting systems; climate changes; cultural heritages; robotics; pharmaceutical drugs; social networks; traffic management; alternative medicines; animal testing. These topics are enough to organize several seasons of debates.

Last but not least, I would like to extend an invitation to scientists. Do something beyond research, teaching, meetings and all that paperwork which we are submerged. Many of us do a good work full time, but it is so important to go outside our Institutes!

References

- [1] <http://www.caffescienza.it/>
- [2] <http://www.cafescientifique.org/>

Sobre el autor:

Nombre: Paolo Politi

Correo electrónico: paolo.politi@isc.cnr.it

Institución: Istituto dei Sistemi Complessi, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Firenze, Italy.

Historias de Matemáticas

La ética de la investigación científica en Alexandre Grothendieck

The ethics of scientific research in Alexandre Grothendieck

Domingo Fernández Agis

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 021–044, ISSN 2174-0410
Recepción: 16 Abr'13; Aceptación: 25 Jun'13

1 de octubre de 2013

Resumen

En este trabajo abordamos la cuestión del lugar de la ética de la investigación científica en el pensamiento del gran matemático Alexandre Grothendieck, prestando una atención particular a su excepcional obra *Récoltes et semailles*, en la que éste pasa revista a su vida como investigador y profesor. En relación con este asunto, nos referiremos a la ética de la investigación científica, tanto en lo que tiene relación con la investigación misma, como en lo que tiene que ver con la dimensión comunitaria de la ciencia y sus implicaciones sociales.

Palabras Clave: Grothendieck, ciencia, matemáticas, ética, investigación.

Abstract

In this paper we address the question of the place of ethics of scientific research in the thought of the great mathematician Alexandre Grothendieck, studied with particular attention his great work *Récoltes et semailles*, a work in which he analyzes his life as researcher and as professor. In this matter, we will refer to the ethics of scientific research, both in terms of the research itself, as it has to do with the communal dimension of science and its social implications.

Keywords: Grothendieck, science, mathematics, ethics, research.

1. Introducción

Récoltes et semailles. Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien, es una extensa obra de Alexandre Grothendieck, en la que éste pasa revista, a lo largo de más de mil quinientas páginas, a su vida como matemático. La obra no ha sido aún publicada formalmente, pero de ella existe una edición mecanografiada y fotocopiada, realizada a cargo de la Universidad de

Montpellier. Grothendieck, cuya peripecia vital podría sin que cayésemos en exageración alguna calificarse de extraordinaria, nació en Berlín, el 28 de marzo de 1928. Como él mismo relata en diferentes pasajes de esta obra, el activismo político de sus padres (que llegaron a participar en la Guerra Civil española al lado de los anarquistas), les llevaría a separarse de sus hijos en 1933, dejando a Alexandre al cuidado de una familia en Hamburgo y a su hermana internada en una institución también en Alemania. Esa experiencia de la ruptura del núcleo familiar sería muy traumatizante para él, dedicando una buena cantidad de páginas de esta obra a meditar sobre cómo marcó su carácter ese pasaje de su vida. Más tarde, en 1939, volvería a reunirse con sus padres en Francia. Desde donde su padre sería deportado al campo de exterminio de Auschwitz, en el que falleció en 1942. A partir de entonces permanece con su madre, a la que estuvo siempre muy ligado. Ella, que fallecería en 1957 en Montpellier, ejerció un fuerte influjo sobre su personalidad.



Figura 1. Los Grothendieck (Sascha Shapiro -padre- y Hanka -madre-) y Alexandre (con 5 años) [6].

Al iniciar sus estudios universitarios, seducido por el prestigio que en la época tenía la física atómica, pensó en estudiar física, aunque luego se decidió por la matemática, considerando que ésta persigue un conocimiento más fundamental que el buscado por aquella. En todo caso, al narrar sus primeros años como estudiante en la universidad de Montpellier, comenta cómo siempre siguió su propio programa de lecturas e investigaciones, aun sin llegar a desatender las exigencias propias de sus estudios universitarios [10, p. 543].

Su verdadera introducción en el mundo matemático se producirá cuando se traslade a París para proseguir su formación universitaria. No obstante, ya en su etapa de estudiante de bachillerato se había producido su descubrimiento de las matemáticas que, según él mismo relata, a partir de entonces, se convierten en la pasión dominante de su vida hasta 1970. Su trayectoria profesional en este campo difícilmente podría haber sido más brillante, llevándole a formar parte del Grupo Bourbaki, ser nombrado profesor permanente del IHES en París, recibir la Medalla Fields y el Premio Crafoord (que rechazó), entre otros muchos honores [14, pp. 120 y ss.].

Como él mismo se ocupará de recalcar en la obra en la que vamos a centrar nuestra atención, dos ideas centrales en el arranque de la nueva geometría se deben a labor investigadora, la de *esquema* y la de *espacio topológico*. Hay además una tercera idea a la que él da gran importancia y que, a su juicio, no ha sido suficientemente desarrollada, la de *motivo* [2, pp. 12 y ss.]. Sobre la necesidad de desarrollar este ámbito del conocimiento matemático insistirá en su *Esquisse d'un Programme*, documento que acompaña a su solicitud de un puesto de investigador en el CNRS [9, p. 43]. Por lo demás, entre sus muchos logros matemáticos habría que destacar el desarrollo de la geometría algebraica, así como el enunciado y demostración del teorema de Riemann-Roch-Grothendieck. Él mismo afirma que, en sus primeros “*quince años de trabajo matemático intenso, había eclosionado, madurado y crecido en mí una vasta visión unificadora, encarnándose en algunas ideas-fuerza muy simples. La visión era la de una 'geometría aritmética', síntesis de la topología,*

de la geometría (algebraica y analítica), y de la aritmética, de la que encontré un primer embrión en las conjeturas de Weil” [10, p. L6].



Figura 2. Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES).¹

Estamos, por tanto, ante la obra de una de las grandes figuras de la matemática del siglo XX, alguien a quien podríamos calificar de auténtico visionario, dotado de una creatividad proteica, que se lanza, a mediados de los años ochenta del pasado siglo, a realizar un verdadero ajuste de cuentas con esa rama central del conocimiento científico a la que ha dedicado la mayor parte de su vida.

En esta obra y en los escritos que han seguido a su voluntario alejamiento del ‘gran mundo’ matemático, Grothendieck pone en práctica una auténtica *parresía*, guiado por la cual analiza ese paradigmático entorno, así como su propia subjetividad y sus experiencias vitales. Podríamos añadir, en relación con ello y con respecto a su trabajo de escritura que, en la elaboración de este libro, que no es tan sólo una memoria de su actividad como científico sino también el diario de una larga exploración interior, sostiene que su “ausencia de complacencia con respecto a mí mismo, me ha dado igualmente esta calma interior, o esta fortaleza, que me han preservado de las trampas de la complacencia con respecto a otros, lo que no sería sino una falsa ‘discreción’. Todo lo que creía tener que decir, en uno u otro momento de la reflexión, ya sea sobre mí, o sobre alguno de mis colegas, de mis ex alumnos o amigos, o sobre un medio o una época, lo he dicho” [10, p. L23]. Su propósito, señala, no es hacer un “análisis de clase” del mundo matemático, sino un “cuadro de costumbres” del mismo, dando cuenta de las relaciones de poder, valores imperantes y miserias ocultas en él [10, p. 630].

Es relevante señalar que, de 1948 a 1970, Grothendieck se considera integrado y de hecho forma parte del ‘gran mundo’ matemático. Sin embargo, en esa última fecha, se aleja voluntariamente de dicho ambiente, abandonando su puesto en el IHES, por entender que no puede trabajar en una institución que recibe subvenciones del “Ministère des Armées”. Entonces, tras un breve paso por el Collège de France (su cátedra será suprimida, por considerarlo demasiado izquierdista para tan venerable institución) y la universidad de Orsay (Paris VI), marcha a la

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Institut_des_Hautes_Études_Scientifiques. (Consultada 5-6-2013)

universidad de Montpellier, donde desempeña su puesto como profesor hasta su jubilación [1, p. 198].

Abundando algo más en su modo de abordar la escritura de *Récoltes et semailles*, diríamos que la manera de plantearse su elaboración es una clara proyección de su forma de trabajar en matemáticas. No sólo en las partes de la obra en las que expone resultados logrados en sus investigaciones anteriores o plantea nuevos desarrollos. También en aquellas otras, las más numerosas, en que se embarca en una reflexión de naturaleza filosófica a propósito de la ciencia y la ética que, a su juicio, ha de regirla. En cualquier caso, Grothendieck se plantea siempre las cuestiones con gran originalidad, sin prestar apenas atención a lo que ya se ha dicho sobre ellas. De hecho encontramos, al margen de las imprescindibles alusiones a matemáticos y a publicaciones específicas del ámbito matemático, muy pocas referencias a otros autores. Tan sólo podríamos hablar, en ese sentido, de someras alusiones, entre las que merecen ser destacadas las alusiones a Jung, Koestler y Whitehead.

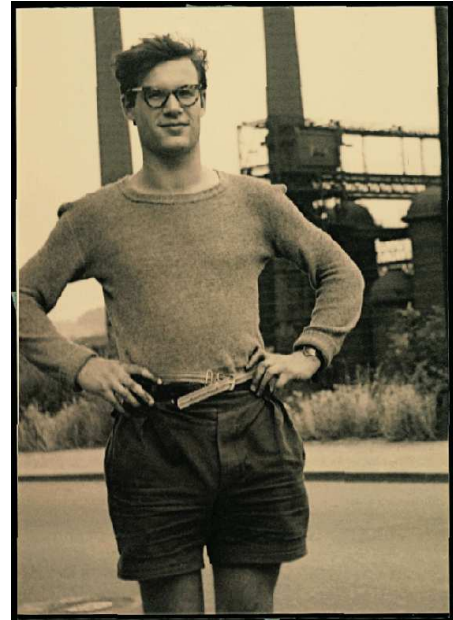


Figura 3. Alexandre Grothendieck (1951) [6].

Una cuestión esencial es la que se refiere a la forma en que se ve a sí mismo, en el contexto de la historia de la ciencia. Al respecto habría que recordar que, en lo que en principio podría juzgarse como un considerable alarde de inmodestia, compara su labor matemática con la de Einstein en la física. Sobre ello podríamos decir que, en todo caso, como ha señalado Philippe Douroux, no ha sido el único en el mundo matemático en considerar que ese paralelismo es real [6]. Sea como fuere, veamos la explicación de su actitud que él nos ofrece: *“La comparación entre mi contribución a las matemáticas de mi tiempo y la de Einstein a la física, se ha impuesto a mí por dos razones: una y otra obra se realizan a favor de una mutación de la concepción que tenemos del ‘espacio’ (en el sentido matemático en un caso, en el sentido físico, en el otro); y la una y la otra toma la forma de una visión unificadora, abrazando una vasta multitud de fenómenos y de situaciones que hasta aquí aparecían como separadas las unas de las otras”* [10, p. 59]. En efecto, Grothendieck se considera a sí mismo una *rara avis* en la historia de las matemáticas, sobre todo por su interés y capacidad de unificación en ese campo. En tal sentido, habla de su hermandad espiritual con Evariste Galois pues también éste ha sido un “marginal” en el mundo matemático, tal como Grothendieck se percibe a sí mismo. *“Para mi propia tranquilidad, creo sin embargo distinguir una suerte de hermano potencial (¡y providencial!)”;* que, como decíamos, se trataría, nada menos, que de Evariste Galois [10, p. 63].

Su dedicación al trabajo investigador no sólo ha tenido un enfoque tan original como el de Galois, sino que se ha desarrollado con una intensidad de difícil parangón. A propósito de su reconocida capacidad de trabajo, nos dice que *“es sobre todo a partir de los años 1955 y siguientes, cuando tengo a menudo la impresión de ‘volar’- de hacer las matemáticas jugando, sin ninguna sensación de esfuerzo —¡como lo hacían mis mayores, cuya facilidad milagrosa deseaba tanto tener y que me había parecido estar fuera de mis posibilidades! Hoy me parece que tal facilidad no es el privilegio de algún don excepcional (como lo he encontrado en algunos, en los momentos en que tal ‘don’ me parecía enteramente ausente de mí), sino que aparece como el fruto de la unión de un interés apasionado por esa materia (...), y de una más o menos larga familiaridad con ella”* [10, p. 429].

Matiza sus afirmaciones, señalando que eso no significa que crea ser capaz de resolver, en poco tiempo, cualquiera de los problemas clásicos de la matemática que siguen estando abiertos. *“La facilidad de la que hablo no es la de quien se propone y permite alcanzar tal objetivo, fijado de*

antemano: probar tal conjetura o darle un contra-ejemplo... Es más bien la que permite lanzarse a lo desconocido, en la dirección que un oscuro instinto nos dice que es fecunda, con la íntima certeza, que nunca será desmentida, de que cada día y cada hora de nuestro viaje no dejará de aportarnos su cosecha de conocimientos nuevos” [10, pp. 429–430].

En cuanto a las motivaciones que le llevaron a emprender la redacción de *Récoltes et semailles*, habría que hacer mención a una serie de factores internos y externos, él mismo nos dice que “los hechos exteriores vienen a alimentar la reflexión, en la medida solamente en que suscitan y provocan un relanzamiento de la aventura interior o contribuyen a esclarecerla”. Desde esa perspectiva, habla del “enterramiento y pillaje” de su obra matemática, que ha suscitado en él una intensa reacción egótica pero que, “al mismo tiempo, me ha revelado ligazones profundas e ignoradas que me vinculan a la obra surgida de mí” [10, p. 9].

En enero de 2010, su autor hizo pública una “*Déclaration d’intention de non-publication*”, en la que afirma que no desea que ninguna de sus obras publicadas sea reeditada y rechaza asimismo la publicación de las inéditas [12, p. 210]. Esto, además de complicar la difusión y el conocimiento de sus textos, plantea un problema de gran envergadura en relación a las veinte mil páginas de material matemático inédito que se conservan en la universidad de Montpellier y que contienen, según los especialistas que las han consultado, planteamientos y resultados de extraordinario interés [5].

Nos quedaría hacer referencia, para acabar este apartado inicial, a una cuestión crucial, como es la relación de Grothendieck con la escritura. Sobre ello ha reflexionado por extenso en *Récoltes et semailles*, donde podemos leer estas líneas, que tienen tanta fuerza como capacidad de síntesis demuestran poseer. Para él, que concibe no sólo la filosofía sino la propia matemática como un ejercicio de escritura, “el simple hecho de escribir, de nombrar, de describir –aunque no sea más que describir intuiciones alusivas o simples ‘suposiciones’ reticentes a tomar forma – tiene un poder creador”. La escritura es instrumento de la pasión de conocer y camino hacia el descubrimiento. La considera la etapa “más creativa, que siempre precede a la demostración y nos da los medios para ello”. Incluso cuando no nos conduce al descubrimiento de lo verdadero, el trabajo de la escritura jamás es trabajo perdido, ya que nos permite intuir armonías misteriosas cuyo sentido habrá que explorar. Tan sólo mediante ese trabajo habremos “podido entrar en contacto íntimo con esta realidad, con esta armonía escondida y perfecta” [10, p. 210].

2. El lugar de la ética en *Récoltes et semailles*

Ya desde las primeras páginas de esta obra, encontramos una crítica, que por su naturaleza no deja de sorprender, a la visión que habitualmente se nos ofrece del científico. Denuncia a través de ella el seductor *mito heroico*, creado en torno a la figura del investigador. En concreto, frente a la extendida vigencia de tal mito, hace notar que “en las motivaciones del ‘científico’, que a veces le llevan a ocuparse intensamente de su trabajo, la ambición y la vanidad juegan un papel tan importante y casi universal como en cualquier otra profesión” [10, p. A2]. Pero, al mismo tiempo no deja de señalar que no sólo son esas las motivaciones de quien hace de la ciencia su profesión, ya que están presentes igualmente la intuición y la búsqueda de algo que podría denominarse “la belleza”. Al respecto, aclara, haciendo uso su peculiar ironía, que “ser ambicioso no impide forzosamente sentir la belleza de un ser o de una cosa, de acuerdo. Pero lo que es seguro es que no es la ambición lo que nos la hace sentir” [10, p. A3].

En consecuencia, encontramos representadas aquí dos pasiones contrapuestas, en un juego de contradicciones que, a la postre, más que del científico en particular, resulta ser propio de la condición humana. Esa realidad humana es algo que nos pone a salvo de cualquier idealización de la actividad científica y que es preciso tener presente, a la hora de evaluar cualquier posible desviación de los principios que han de regir la ética de la investigación [21, p. 26]. Volviendo al lado positivo de esa contradicción, habría que decir que, en el fondo, la tarea de quien busca

la belleza abstracta es un marchar a contracorriente. Él mismo explica sus iniciales vivencias en este sentido, recordando cuando realizó, en sus tiempos de escolar, su primera “composición de matemáticas”, que trataba sobre los *tres casos de igualdad de los triángulos*. Ese primer trabajo fue premiado por su profesor con un suspenso, al no haber seguido las pautas de la demostración que figuraban en el libro de texto [10, p. 1]. Jamás dejará de considerar que ese incidente es revelador de una actitud con la que se ha seguido encontrando a lo largo de toda su carrera, que se resume en el castigo de quienes osan pisar otro terreno que el ya trillado por el tránsito habitual de los que dan por válido únicamente lo que sea acorde con lo establecido. Pese a ello, Grothendieck no ha renunciado a aventurarse en lo desconocido, todo lo contrario.

Respecto al trabajo de otros matemáticos, que no osan lanzarse a la exploración de terrenos inexplorados, su juicio es siempre ambivalente. En efecto, nos dice que *“han hecho cosas, cosas bellas a veces, en un contexto ya definido, al que no habrían soñado tocar”*. Pero puntualiza, acto seguido, que *“se han quedado prisioneros sin saberlo de estos círculos invisibles e imperiosos, que delimitan un universo en un medio y una época dados”* [10, p. 7]. Para sortearlos, habrían necesitado reencontrar en ellos mismos la capacidad de estar solos.

Al mismo tiempo, nos confirma que, desde su primera aproximación, solitaria, a las matemáticas, cuando era un alumno de bachillerato, su objetivo ha sido construir una teoría coherente, irreproachable desde el punto de vista formal [3, p. 151]. Por eso concentraba todas sus energías en mantener la promesa que se había hecho a sí mismo de desarrollar una teoría que me le resultara plenamente satisfactoria [10, p. 4]. En su búsqueda, advirtió que, en ocasiones, *“un haz de puntos de vista convergentes sobre un mismo y vasto paisaje, en virtud de eso que hay en nosotros apto para escoger el Uno a través de lo múltiple, da cuerpo a algo nuevo; a una cosa que supera cada una de las perspectivas parciales”* [10, p. 16].

En una nota a pie de página, describe las dos opciones a las que se ha enfrentado tantas veces en su carrera. Éstas han sido, perderse en el detalle o avanzar como un sonámbulo que, en realidad, no ve el horizonte que se abre ante él, tan sólo lo intuye en función de aquello que tiene en la imaginación [4, p. 226]. Reconoce que, a lo largo de sus años de dedicación a las matemáticas, ha tenido que realizar mucho trabajo del primer tipo, a pesar de lo cual, *“al nivel de las ideas y de las grandes intuiciones directrices, me parece que mi obra está exenta de toda ‘pérdida’, por increíble que pueda parecer”*. Sostiene, en efecto, que desde siempre ha sentido *“esta seguridad nunca fallida para aprehender en cada momento, si no los resultados, al menos las direcciones más fértiles que se ofrecen para ir derecho hacia las cosas esenciales”* [10, p. 18].

En sus escritos son muy numerosas las ocasiones en las que habla de su conocida pasión por las estructuras matemáticas, que tanto ha marcado la dirección y profundidad de sus investigaciones. A este respecto, en *Récoltes et semailles* anota que lo que más le fascina en esa ciencia no es el número, ni la extensión, *“sino siempre la forma. Y, entre los mil y un rostros que escoge la forma para revelarse a nosotros, la que me ha fascinado más que ninguna otra y continúa fascinándome, es la estructura oculta de las cosas matemáticas”* [10, p. 27]. En esa misma página añade a modo de aclaración que, *“la estructura no es, de ninguna manera, algo que nosotros podamos inventar”*. Ciertamente, para él, la estructura existe por sí misma y tan sólo puede ser descubierta por el investigador. Podemos crear un lenguaje, un entramado conceptual con el que referirnos a ella y describirla, podemos aproximarnos a ella mediante el uso de poderosas metáforas [17, p.30], pero nunca podemos inventarla. Al lanzarse en su búsqueda, *“más que dejarme distraer por los consensos que hacen ley en torno a mí, sobre lo que es ‘serio’ y lo que no lo es, he depositado mi confianza simplemente, como en el pasado, en la humilde voz de las cosas y en aquello en mí que sabe escucharla”* [10, p. 32].

Ese tono entusiasta se disipa cuando hace una valoración de la situación de la matemática a finales del siglo XX. Entonces, el tinte de sus apreciaciones es bastante crítico, pues, en su opinión, se ha producido un *aplanamiento* y un *estrechamiento* del pensamiento matemático, al quedar éste despojado de toda inclinación a explorar el lado más misterioso de los objetos matemáticos. Así, a su parecer, *“hemos entrado en una época de desecación, en la que esta fuente, aunque*

no esté ciertamente acallada, el acceso a ella está condenado por el veredicto sin apelación del desprecio general y las represalias del ridículo” [10, p. L20]. En ese sentido hace notar que “espontaneidad y rigor son las dos vertientes, ‘sombra’ y ‘luz’, de una misma cualidad indivisa. Es de sus esponsales, únicamente, de donde nace esta cualidad particular de un texto, o de un ser, que se puede intentar evocar por una expresión como ‘cualidad de verdad’” [10, p. L41].

Entre sus consideraciones sobre la naturaleza del trabajo matemático, encontramos otro aspecto de gran importancia. Nos referimos a las reiteradas ocasiones en las que alude a la función de la escritura en la investigación. Siguiendo el aliento de esas reflexiones, pone de manifiesto una visión de la aventura del descubrimiento, que puede calificarse de mística. En efecto, es difícil interpretar de otra manera sus palabras cuando dice que “el papel de la escritura no es consignar los resultados de una investigación, sino más bien el proceso mismo de la investigación –los trabajos del amor y los resultados de nuestros amores con Nuestra Madre el Mundo, lo desconocido, que sin descanso nos llama en Ella para conocerla todavía en su Cuerpo inagotable, por todo en Ella donde nos llevan las vías misteriosas del deseo” [10, p. L42].

Tras habernos detenido en sus consideraciones sobre la importancia de la escritura, habría que añadir ahora una breve digresión, siguiendo los planteamientos de Grothendieck, acerca de cómo la escritura se acomoda al ritmo del pensamiento y le permite desarrollar y perseverar en una línea de indagación [10, p. 442].

“Para los matemáticos –afirma–, me parece claro que la escritura ha sido desde siempre un medio indispensable, cualquiera que sea la persona que ‘hace matemáticas’, hacer matemáticas es, ante todo, escribir. Está claro que así sucede también en cualquier trabajo de descubrimiento en el que el intelecto tenga una función importante. Pero seguramente no es este el caso de la ‘meditación’, por la que entiendo el trabajo de descubrimiento de sí. En mi caso, sin embargo, y hasta el momento, la escritura ha sido un medio eficaz e indispensable en la meditación. Como en el trabajo matemático, ella es el soporte material que fija el ritmo de la reflexión, y sirve de referencia y encauzamiento para una atención que de otro modo tiene tendencia a dispersarse por los cuatro vientos” [10, p. 94].

Lo que él denomina meditación, es en realidad una actividad intensamente filosófica, que le ha llevado establecer un lévinasiano paralelismo entre el proceso investigador y el hecho de descubrir la alteridad. Por ello afirma haber adquirido “la convicción de que la naturaleza del trabajo de descubrimiento es la misma de una persona que descubre al otro” [10, p. 1]. Este mismo planteamiento reflexivo, le ha llevado a conceder una gran relevancia a la figura del niño y lo que éste representa. A su juicio, el investigador tiene que dejarse conducir por el niño que lleva dentro, pues “el descubrimiento es el privilegio del niño. (...) el niño que no tiene aún miedo de equivocarse, de parecer idiota, de no ser tomado en serio, de no hacer las cosas como todo el mundo” [10, p. 1]. Sobre ello insiste en no pocas ocasiones, así se aprecia cuando dice que “a menudo, cuando hago matemáticas o cuando hago el amor o cuando medito, es el niño el que actúa. No siempre es el único que actúa. Pero cuando no está, no hay ni matemáticas ni amor ni meditación” [10, p. 111]. Vemos así que vincula lo que representa la infancia con la posibilidad de inventar y arriesgarse, pero también con la capacidad de estar solo y jugar solo, que son ingredientes necesarios para fomentar la creatividad, en particular la creatividad científica, a la que él ha honrado como pocos [20, pp. 3–4]. Por ello no deja de remarcar que “solamente el niño es por naturaleza solitario” [10, p. 127].

Siguiendo en esa línea, recurre de nuevo a la narración de una anécdota personal, con objeto de poner de relieve que, aunque la presunción infantil pueda llevar al error, el descubrimiento de ese error es un verdadero descubrimiento para el niño que lo realiza y tiene sobre su actitud frente al conocimiento un efecto de gran importancia. “Esta confianza que un niño puede tener en sus propias luces, fiándose de sus facultades antes que tomar por valor seguro las cosas aprendidas en la escuela o leídas en los libros, es algo precioso. Sin embargo, es constantemente desanimada por el entorno”. Como ejemplo cita su fallido intento, en la época de colegial, de demostrar que el valor

atribuido al número Pi es erróneo, señalando que, tomar conciencia de su error y del porqué del mismo supuso dar un paso adelante para él [10, p. 127]. En consecuencia, la tesis defendida es que el miedo al error no debe hacernos retroceder, ya que los errores, a su manera, pueden ser tan productivos como, de suyo, lo son los aciertos.

No obstante, nunca pierde la oportunidad de hacer una autocrítica, señalando de forma reiterada que, tras sus esfuerzos como investigador había asimismo un impulso egótico, si bien matiza que, *“a partir de un cierto momento en mi vida de matemático, ha habido esta ambigüedad constante de una cohabitación, de una interpenetración estrecha entre ‘el niño’ y su sed de conocer y de descubrir, su asombro en las cosas entrevistadas y en aquellas examinadas de cerca, y de otra parte el yo, el ‘patrón’, regodeándose en sus obras, o por la continuidad opinada e incesante de una construcción de conjunto de grandiosas dimensiones”* [10, p. 277]. Ve en esa dualidad un condicionante casi imposible de superar. Aunque esto es algo que también puede esconder una faceta positiva, si las dos tendencias mencionadas encuentran una forma equilibrada de coexistir.

Pero tal equilibrio no puede nunca traicionar la libertad de pensamiento, que él concibe como *“un instrumento entre otros para revelarnos y permitírnos sondear esta profundidad tras la superficie, esta vía secreta en las cosas, que no es ‘secreta’ sino porque somos demasiado perezosos para mirar, demasiado inhibidos para ver”* [10, p. 436]. A ello se debe su insistencia en que, pese a lo que pudiera parecer, sentir la emoción del descubrimiento es algo más propio del niño que del sabio. Tan sólo el niño percibe *“el género de milagro que –tal como la eclosión inesperada de una flor– se produce a cada paso en todo trabajo de descubrimiento; en mayor o menor medida, esa no es la cuestión. La embriaguez del descubrimiento no es el privilegio de un gigante, como una tradición tiránica querría hacernos creer, más bien es el del niño”* [10, p. PU71].

Abundando en ello, considera que el progreso del conocimiento presupone la capacidad de cuestionar y escuchar la realidad. Sostiene que, en el fondo, eso *“es la cosa más simple, la más espontánea del mundo, de la que nadie en el mundo tiene el privilegio. Es un ‘don’ que todos hemos recibido desde la cuna – hecho para expresarse y extenderse sobre una infinidad de rostros, de un momento a otro, de una persona a otra”* [10, p. 5]. Sin duda, está profundizando en esa misma dirección, al defender que nuestra cultura ha dejado de respetar lo que él llama el sueño, ha dejado de tomarse en serio sus sueños, de ver en ellos una conexión con algo profundo [10, p. 10], con ello hemos perdido o estamos en riesgo de perder la capacidad de atravesar la superficie de las cosas.

Una reflexión de gran calado ético es la que aborda la existencia de coacciones y temores entre los científicos, en un medio que muchos suponemos libre de tales miserias humanas. En concreto, sobre el miedo que impera en el ámbito de las matemáticas y, a su entender, en el mundo científico en general, realiza un interesante apunte personal. En tal sentido, nos dice que no tomó *“conciencia del miedo que somete el mundo matemático (y por lo tanto, sino más aún, los otros medios científicos)”* hasta el momento en que se apartó de la élite científica. A lo largo de los años que precedieron a tal ruptura, no tiene reparos en reconocer que, *“progresivamente y sin cuestionármelo, había entrado en el papel de ‘gran jefe’, en el mundo de Who is Who matemático”* [10, pp. 22–3].

A su juicio, impera una perversa dinámica en ese mundo, ya que para estar dentro de él, con poder y reconocimiento, hay que dar por válido el funcionamiento habitual de rígidas estructuras de poder. De lo contrario, el investigador se verá situado en una posición en la que quienes tienen poder se permiten despreciarlo y pueden impedir que se den a conocer los resultados de su investigación [10, pp. 27–8]. Partiendo de su experiencia, asevera que quien no se acomoda a esa manera de funcionar, es poco menos que imposible que sobreviva en dicho medio.

Al hilo de estas consideraciones, es preciso recordar que Grothendieck muestra una extraordinaria sensibilidad frente a los abusos de poder en el medio matemático. Narra, a ese respecto, varias anécdotas de sus inicios en ese “gran mundo”, relacionadas con el modo en que ejercían su poder matemáticos que ya habían alcanzado reconocimiento y estaban en posesión de un

gran prestigio. El rechazo de Grothendieck ante esos abusos es radical, aunque no deja de censurar su propio comportamiento en otra época, pues relata que, en el momento en que vivió algunas de esas experiencias, estaba tan interesado en integrarse en ese mundo y disfrutaba tanto con el reconocimiento que iba adquiriendo en él, que no veía esos abusos de poder como algo deleznable. Por el contrario, percibía esas situaciones como si fuesen algo *natural*. Fue a raíz de su abandono de ese gran mundo, en 1970, cuando llegó a ser completamente consciente de lo que en realidad significaban aquellas actitudes [10, pp. 31 y ss.].

De nuevo desde su experiencia personal, tampoco omite referirse al miedo reverencial que provocaban las grandes figuras de las matemáticas; a cómo ese miedo impedía a las personas que ocupaban una posición de debilidad en él plantear cuestiones, en el curso de una discusión que se suponía abierta. De tal forma que, cuando se atrevían a hacerlo, era en privado y, tal como confiesa el mismo Grothendieck (que durante años fue uno de sus más relevantes miembros), no se establecía un auténtico diálogo entre los interlocutores, aunque la cuestión planteada fuese pertinente [10, p. 37].

Como elemento de contraste, tiene siempre presente la ética que regía en el Grupo Bourbaki, durante el tiempo en que formó parte de él [3, p. 169]. Grothendieck considera que, para abordar las cuestiones relacionadas con la ética de la investigación, es pertinente hablar de su vinculación a este grupo, así como de los rasgos que caracterizaban su funcionamiento en tanto que pequeña comunidad científica [10, pp. 46 y ss.].

No obstante, un episodio que le hizo percibir la distancia a la que se encontraba de la sensibilidad imperante en el ambiente matemático fue la iniciativa, que promovió a finales de 1977, contra la ley que prohíbe dar asilo a un extranjero sin papeles en Francia. Al ver la falta de solidaridad y la nula acogida de su iniciativa en el mundo matemático, en particular entre los miembros del Seminario Bourbaki, Grothendieck afirma que comprendió que algo había cambiado en ese ambiente y que ya no era su lugar, aquél en el que se había introducido exitosamente veinte años atrás [10, p. 56].

Otra dimensión de ese miedo del que hablábamos, tiene que ver con el poder de apartar a un investigador del camino que quiere continuar, descorazonándolo y haciéndole sentir que sería una pérdida de tiempo seguir por él, Grothendieck afirma que esa potestad “puede ejercerse a discreción”, y recuerda de la manera más incisiva que *“es el poder que Cauchy usó con respecto a Galois, y Gauss con relación a Jacobi”* [10, p. 72]. Él mismo reconoce haber empleado ese poder y sostiene, igualmente, que ha visto *“a matemáticos influyentes y brillantes hacer uso del poder de descorazonar y rechazar, tanto con respecto del trabajo sólido que visiblemente debía ser hecho, como con relación a tales trabajos de envergadura que ponían claramente de manifiesto la potencia y originalidad de sus autores. Varias veces, quien así usaba su poder discrecional ha resultado ser alguno de mis antiguos alumnos. Esta es sin duda la experiencia más amarga que me ha sido dado vivir en mi vida de matemático”* [10, p. 72].

Especial importancia para el objetivo del presente trabajo tiene la nota 24 de *Récoltes et semailles*, que se refiere de manera específica a la ética de la investigación científica. Afirma en ella que *“la ética de la que quiero hablar se aplica, antes que a ninguna otra cosa, al medio formado en torno a una actividad de investigación donde, por tanto, la posibilidad de dar a conocer sus resultados y de recoger el consiguiente crédito es una cuestión de ‘vida o muerte’ para el estatuto social de todo miembro, quizá incluso de ‘sobrevivir’ en tanto que miembro de este medio, con todas las consecuencias que eso implica para él y su familia”* [10, p. 159]. El respeto al trabajo realizado con rigor debe, en consecuencia, regir la valoración del mismo a cargo de la comunidad científica. Además de esto, el acceso a los medios de difusión de los resultados de la investigación debe hacerse en condiciones de mérito y equidad.

A despecho de todo ello, una ley despótica que, según Grothendieck, impera en toda la sociedad y no sólo en el mundo matemático, es que *“el deseo egótico de probar su propia importancia y el placer secreto que acompaña su cumplimiento, son generalmente más fuertes y apreciados cuando*

el poder del que se dispone encuentra ocasión para causar inconvenientes al prójimo, quizá su humillación” [10, pp. 73–4]. Grothendieck realiza de nuevo aquí una autocrítica, reconociendo haber cometido un abuso de poder al no recomendar la publicación de las investigaciones de un joven matemático. Muestra, por tanto, a través de esa autoinculpación, cómo en ese mundo (y en los medios científicos en general) pueden producirse con facilidad estos abusos [10, pp. 77–8].

Por lo que a él se refiere, el principio más elemental de la ética del trabajo que se aplica a sí mismo, se centra en no fingir que se trabaja, sino hacerlo de verdad. Para ello, afirma, hay que ponerse a la labor con todas las ganas y cuando se tienen de verdad deseos de entregarse a lo que hace [10, p. 93]. Al lado del mencionado principio, su principal guía “ha sido la búsqueda constante de una coherencia perfecta, de una armonía completa que adivinaba detrás de la superficie turbulenta de las cosas y que me esforzaba en desbrozar pacientemente, sin abandonar jamás. Era un sentido agudo de la ‘belleza’, seguramente, lo que constituía mi olfato y mi única brújula. Mi mayor alegría ha sido, más que contemplarla cuando aparecía a plena luz, verla desprenderse poco a poco del manto de sombra y de brumas en el que le gustaba esconderse sin descanso” [10, pp. 101–2]. Estas palpitantes aseveraciones nos remiten al concepto clásico de verdad como *aletheia*, esa interpretación de la verdad como resultado de un proceso de desvelamiento, tan vinculada a una tradición del pensamiento occidental, que va de los presocráticos hasta Heidegger.

En el contexto que ofrece su concepción de la verdad hay que entender su tendencia a intentar traducir cualquier enunciado aparentemente novedoso, a los términos de otros enunciados ya conocidos y demostrados. Si esto no abocaba a ningún resultado, quería decir que el enunciado en cuestión era realmente original y que valía la pena adentrarse en su análisis y demostración. Es decir, a su desvelamiento. Considera que esta manera de proceder lo alejaba de la forma de afrontar la investigación del resto de los miembros del grupo Bourbaki y que, por lo demás, hacía poco menos que imposible para él trabajar en grupo [23, pp. 148 y ss.]. También admite que esto ha condicionado su labor como profesor durante la mayor parte de su carrera [10, p. 104]. En todo caso, del difícil encaje de sus procedimientos de trabajo dentro del normal funcionamiento docente, nos da una elocuente muestra en *Esquisse d'un Programme* [9, p. 42].

Otro aspecto de gran relevancia ética, que somete asimismo a consideración, es la resistencia que ejerce el maestro a ser desplazado o superado por sus alumnos. Cuestión clásica donde las haya, que él analiza al tiempo que habla del reconocimiento y la satisfacción que éste produce, pero señalando igualmente cómo exige también un gasto enorme de energía estar a la altura de él. En ese contexto, hay que entender su alusión a la sensación de libertad que sintió en el momento en que renunció a mantener esa posición de dominio dentro del mundo matemático, cediendo su lugar los que vengan detrás y demuestren reunir las condiciones necesarias para desarrollar y mantener el necesario esfuerzo [10, p. 110].

Eso no supone, por lo que a él se refiere, renunciar a su empeño mayor, que ha sido encontrar la evidencia [4, pp. 29–30]. Un término en este contexto, cuyo significado él perfila diciendo que “en matemáticas, las cosas ‘evidentes’, son también aquellas sobre las que tarde o temprano alguno debe caer. No son ‘invenciones’ que se pueden hacer o no hacer. Son cosas que están ya ahí, desde siempre, que están en medio de todo el mundo sin que se les preste atención, aparte de dar un gran rodeo ante ellas o pasar por encima de ellas” [10, p. 122].

En última instancia, la búsqueda de la evidencia cuadra a la perfección su reconocida pretensión de “hacer salir de la oscuridad lo que es desconocido para todos, no solamente para mí (como lo he visto antes), y esto, además, con la finalidad de ser puesto a disposición de todos, para enriquecer el patrimonio común. En otros términos, es el deseo de contribuir al engrandecimiento, al enriquecimiento de esta ‘cosa’, o ‘patrimonio’, que sobrepasa mi persona” [10, p. 134].

No obstante, no deja de censurar, una vez más, las formas egóticas que reviste a veces el deseo de agrandar el campo del conocimiento científico [10, p. 135]. Por eso intenta desprenderse de toda pretensión de perennidad. De ese modo, con respecto a la suerte que el futuro deparará a su obra, sostiene no tener “ninguna inquietud con respecto a estas cosas, sobre la suerte que el

porvenir, la ‘posteridad’, les reservará (además de ser dudoso incluso que haya una posteridad ...). Lo que me interesa en este pasado, no es en absoluto lo que he hecho (y la fortuna que es o será la suya), sino más bien lo que no ha sido hecho, en el vasto programa que tenía entonces ante los ojos, y del que solamente una muy pequeña parte ha sido realizado” [10, p. 138].

Esto, en cierta forma, entra en contradicción con las emociones que dice haber experimentado al apreciar una falta de reconocimiento por parte de otros matemáticos, que han utilizado sus hallazgos científicos sin hacer mención de su procedencia. Tal vez la percepción de esas contradicciones haya sido uno de los factores que le han conducido a lo que él denomina la “meditación”. De nuevo, el término puede inducir a error y Grothendieck se ocupará de explicar al lector de qué forma lo entiende por y por qué ha sido el descubrimiento de ésta, crucial en su vida [10, p. 90]. La describe como un ir retirando las capas que cubren un núcleo, como si se tratase de una cebolla a cuyo más profundo interior queremos acceder. Nos dice que es la pasión por el conocimiento, que ha marcado toda su vida, la que le ha llevado a la meditación. La meditación le ayuda a resolver, mediante un trabajo laborioso, todo conflicto interior. De forma análoga, diríamos que ese sería un paso previo para abordar la resolución de cualquier conflicto exterior, pero insiste en el aspecto íntimo y personal de este abordaje meditativo de los conflictos que desgarran la personalidad [10, p. 93].

Meditar y pensar son actividades que tiene mucho en común, aunque se mantengan vivas entre ellas ciertas diferencias de fondo. Su enfoque de esta cuestión recuerda a la distinción clásica entre conocer y comprender. En ese sentido, la meditación nos pondría en el camino de conseguir una comprensión de aquello que constituye su objeto. “El pensamiento y su formulación meticulosa, juegan un papel importante en la meditación, tal como la he practicado hasta el momento. Ella no se limita, sin embargo, a un trabajo exclusivo del pensamiento. Este, por sí sólo, es impotente para aprehender la vida. Es eficaz sobre todo para detectar las contradicciones, a menudo enormes hasta lo grotesco, en nuestra visión de nosotros mismos y de nuestras relaciones con el otro, pero a menudo no es suficiente para aprehender el sentido de estas contradicciones” [10, p. 94]. Ese sentido ha de ser esclarecido mediante la meditación.

Por otra parte, la naturaleza de la meditación es, según él la entiende, propia de una aventura en solitario. Siendo esto algo que comparte con “cualquier trabajo de descubrimiento, incluso cuando se inserta en un trabajo colectivo” [10, p. 127]. Acentúa su sesgo solitario el hecho de ir contra los “inveterados consensos” y conducirnos a asumir la realidad de ideas que están en confrontación directa con lo comúnmente admitido. Sin embargo, frente a las grandes metas que intenta alcanzar el pensamiento, el objetivo de la meditación es llegar a conocer “las cosas humildes y evidentes, cosas que no valen mucho. Son las que no encontraría en ningún libro o tratado, por sabio, profundo, genial que fuera –las que ningún otro puede encontrar por mí” [10, p. 129].

La meditación le ha llevado a ahondar cuestiones de naturaleza ontológica e incluso teológica. Así, en contra de la célebre frase de Einstein, según se desprende de cierto pasaje escrito por Grothendieck, Dios sí juega a los dados. Él, que confiesa no ser seguidor de ninguna religión, hace gala sin embargo de una actitud religiosa en su aproximación a esa dimensión de la realidad que siente la vocación de conocer. Al mismo tiempo, sus planteamientos ontológicos y teológicos poseen una nada despreciable originalidad. En particular, cuando afirma que, a su juicio,

“Dios ha creado el mundo a media que lo descubría, o más bien, crea el mundo eternamente, a medida que lo descubre –y lo descubre a medida que lo crea. Ha creado el mundo y lo crea día tras día, recomenzando millones de millones de veces, sin descanso; titubeando, equivocándose millones y millones de veces y rectificando el tiro, sin abandonar ... Cada vez, en este juego de sondeo de las cosas, de la respuesta de las cosas (‘no está mal este golpe’, o, ‘ahí te equivocas por completo’, o ‘esto marcha sobre ruedas, continúa así’), y de nuevo sondeando, rectificando o retomando el intento precedente, en respuesta a la respuesta precedente ..., cada ida y vuelta en este diálogo infinito del Creador y las Cosas, que tiene lugar en cada ins-

tante y en todos los lugares de la Creación, Dios aprende, descubre, alcanza un conocimiento de las cosas cada vez más íntimo, a medida que estas toman vida y forma, y se transforman entre sus manos” [10, p. 2].

Todo ello nos lleva a pensar, cuando menos, por más paréntesis y comillas que le queramos poner, en la necesidad de insertar el conocimiento de lo concreto en planteamientos más amplios, sin renunciar a indagar acerca de cuestiones a las que no podemos dar una respuesta científica, pero que es arriesgado dejar de abordar [10, p. 426].

3. Las relaciones con el entorno investigador

Un primer aspecto a abordar en este apartado es el funcionamiento y ética interna del grupo Bourbaki [13, p. 664]. Como es sabido, este grupo estaba formado por brillantes matemáticos, que crearon una dinámica colectiva de trabajo y firmaron conjuntamente sus obras, bajo el pseudónimo de Nicolas Bourbaki [1, pp. 198 y ss.]. Para dar cuenta del contenido y significado de la ética que regía su funcionamiento, se refiere a la relación entre dos de sus principales figuras, Jean-Pierre Serre y André Weil.

“Progresivamente, Serre ha ejercido sobre el grupo un ascendente comparable al de Weil. En el tiempo en que formé parte de Bourbaki, eso no dio lugar a situaciones de rivalidad entre los dos hombres, y no he tenido conocimiento de ninguna enemistad que se hubiera establecido entre ellos más tarde. Aún con la perspectiva de veinticinco años, Bourbaki, tal como lo conocí en los años cincuenta, me parece un éxito destacable a nivel de la calidad de las relaciones, en un grupo formado en torno a un proyecto común. Esta calidad de grupo me parece de una esencia aún más rara que la calidad de los libros que salieron de él. Ese ha sido uno de los privilegios de mi vida, haberme encontrado con Bourbaki y haber formado parte de él durante algunos años” [10, p. 46].



Figura 4. Jean-Pierre Serre y Alexandre Grothendieck (1961) [6].

Así pues, al hacer balance de su paso por él, Grothendieck excluye todo influjo negativo sobre su personalidad, proveniente del Grupo Bourbaki. En primer lugar, afirma que si se alejó de dicho grupo ello fue debido a que sus intereses investigadores, además de su ya mencionado sistema de trabajo, le llevaron por caminos diferentes a aquellos por los que transitaban sus integrantes [10, p. 46]. En otro orden de cosas, sostiene que *“este medio ‘bourbakico’ ha ejercido seguramente una fuerte influencia en mi persona y sobre mi visión del mundo y mi lugar en el mundo”* [10, p. 51]. En este punto, Grothendieck se autocensura, hablando de cierta propensión a la fatuidad, que dice haber tenido durante años, aunque afirma que la había racionalizado mediante

ideas meritocráticas. Sin embargo, considera que esa inclinación no provenía de su contacto con el grupo, sino que estaba en él desde antes de esa época.

De manera aún más clara, las posiciones éticas que imperaban en el Grupo Bourbaki, se especifican en esta referencia a Jean Dieudonné y a cómo éste definía la ética de dicho grupo.

“Esta ética de la que quiero hablar quedaba generalmente implícita, pero estaba sin embargo presente, viva, objeto (me parece) de un consenso intangible. El único que me la expuso en términos claros y netos, por lo que recuerdo, fue Dieudonné, sin duda una de las primeras veces en las que fui su huésped en Nancy. Es posible que volviera sobre ello en algunas otras ocasiones. Visiblemente, sentía que era algo relevante, y debí percibir en consecuencia la importancia que le concedía, para acordarme aún hoy, treinta y cinco años después. Por el simple hecho de la autoridad moral de mis mayores y de Dieudonné, que claramente expresaba entonces un consenso del grupo, debí hacer mía tácitamente esta ética, sin haberle concedido sin embargo un momento de reflexión, ni comprender lo que la convertía en importante” [10, p. 78].

La regla en la que venía a resumirse el contenido de esa ética podría formularse de la manera siguiente: *“toda persona que encuentra un resultado digno de interés debe tener el derecho y la posibilidad de publicarlo, con la única condición de que ese resultado no haya sido ya objeto de una publicación” [10, p. 79].*

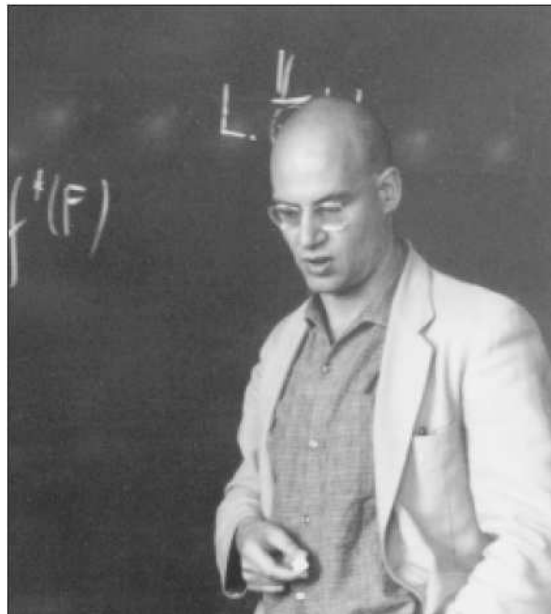


Figura 5. Alexandre Grothendieck (hacia 1965) [6].

Con respecto a lo que sucede en nuestra época, su impresión denota un hondo pesimismo. En efecto, para él, la ética que le había transmitido Dieudonné, utilizando para ello las palabras más sencillas, *“ha muerto en tanto que ética de un cierto medio. O más bien, este mismo medio ha muerto al tiempo que lo ha hecho esta probidad que era su alma. Esta probidad se ha conservado en algunas personas aisladas y ha reaparecido o reaparecerá en otras en las que se había degradado. Su aparición o su desaparición entre alguno de nosotros forma parte de los episodios cruciales de la aventura espiritual de uno y otro. Pero la escena sobre la que se desarrolla esta aventura ha sido transformada. Un medio que me había acogido, que fue el mío, del que estaba secretamente orgulloso, no existe ya” [10, pp. 79–80].*

Frente a esa claudicación ética que detecta y se esfuerza en poner de relieve con sus referencias al ambiente matemático, su actitud se ha ido modificando con el tiempo. Sostiene que, en

principio, ha sido muy combativo, denunciando y atacando esa falta de coherencia con respecto a la ética de la investigación. Pero, más tarde, dice haber comprendido su verdadera vocación no es denunciar, sino *“aprender, conocer este mundo a través de mí y conocerme a través del mundo. Si mi vida puede aportar algún beneficio, sea a mí mismo o a otro, es en la medida en que sea fiel a esta vocación”* [10, p. 83].

Nuevos matices se añaden a estas ideas sobre la ética de la investigación, cuando leemos la nota 31, de *Récoltes y semailles*. En ella recoge algo de enorme relevancia, que aclara la forma de entender las matemáticas que siempre le ha caracterizado.

“Ronnie Brown me ha hecho llegar una reflexión de J. H. C. Whitehead (del que fue alumno), hablando del ‘esnobismo de los jóvenes, que creen que un teorema es trivial porque su demostración es trivial’. A muchos de mis amigos de antaño les vendría bien meditar sobre estas palabras. Este ‘esnobismo’ no está hoy solamente limitado a los jóvenes, conozco más de un matemático prestigioso que lo practica corrientemente. Soy particularmente sensible a esto, porque lo mejor que he hecho en matemáticas (y en otras cosas también ...), las nociones y estructuras que he introducido y me parecen más fecundas, y las propiedades esenciales que he podido desentrañar mediante un trabajo paciente y obstinado, caen todas ellas bajo el calificativo de ‘trivial’. (¡Ninguna de estas cosas habría tenido en nuestros días grandes posibilidades de verse aceptada para una nota en los CR, si el autor no fuera ya una celebridad!) Mi ambición de matemático durante toda mi vida, o más bien mi pasión y mi alegría, han sido constantemente encontrar las cosas evidentes” [10, pp. 162–3].

A su juicio, semejante actitud, además de demostrar una cierta ceguera ante la belleza matemática, implica asimismo abuso de poder y deshonestidad. Por más que esto se presente envuelto en el paño aterciopelado de la defensa *“intransigente de la intangible pureza de la matemática”* [10, pp. 162–3].

Junto a Dieudonné, Serre encarnaba para Grothendieck, no sólo la elegancia y la competencia técnica, sino también una actitud frente a la investigación irreprochable desde el punto de vista ético. Sin embargo, considera que ha traicionado esos valores al tomar partido a favor de lo que él denomina su *“enterramiento”*, al igual que han hecho, a su juicio, otros ilustres miembros del mundo matemático [10, p. L29]. Tengan más o menos fundamento esas acusaciones, lo cierto es que su formulación denota una desilusión de enormes proporciones, ente lo que él percibe como una muy extendida ausencia de respeto a la ética de la investigación científica [18, pp. 202–4].

Se añade a ello otro asunto que le ha resultado especialmente penoso. En concreto, la falta de reconocimiento por parte de su antiguo alumno y, ya en esa época, matemático de enorme prestigio, Pierre Deligne, quien, a su juicio, ya desde antes de su partida del IHES, se había esforzado en borrar toda traza de la influencia de éste último sobre su propio trabajo. Afirmación que habría que matizar, a la luz de la lectura del trabajo de éste titulado, *“Quelques idées maîtresses de l’oeuvre de A. Grothendieck”* [2]. En todo caso, para él, la actitud de Deligne es el primer signo de una labor de enterramiento con respecto a su obra matemática que pretende dar a conocer [10, p. 237]. Por otra parte, como ya hemos evocado, refiriéndose implícitamente a su antiguo discípulo, dirá que ha sido una experiencia terriblemente dolorosa para él ver a algún antiguo discípulo, al que él había amado, aplastar por placer el trabajo y la carrera de otro de sus discípulos más recientes [10, p. L13].

Expresado esto, afirma que la cuestión que queda por resolver es determinar si todo lo que nos ha relatado son acontecimientos particulares o, por el contrario es denotativo de una *“degradación general de las costumbres”* [10, p. 339]. Más adelante, expresará esa misma idea, en conexión con lo que considera que ha sido el expolio de su obra, al decir que la pregunta que se plantea es si lo que ha sucedido tiene que ver con las singularidades de su carácter o se trata de algo que hay que explicar por la claudicación ética que se ha producido en el mundo de la ciencia [10, p. 353].

Por lo demás, en las páginas de *Récoltes et semailles*, pasa también revista a su trabajo de dirección de investigaciones y sus relaciones con los alumnos que se formaron con él. Al hilo de esas evocaciones, se lamenta de no haber antepuesto, en algunos momentos, el valor único de cada persona a las necesidades de la investigación. En ese sentido admite que, presionado por la búsqueda de resultados en su programa de investigación, ha juzgado de manera incorrecta a algunos investigadores, considerándolos incompetentes, cuando quizá tan sólo se encontraban en una situación de bloqueo temporal o induciéndolos a investigar en un campo que no les interesaba o no les convenía, dadas sus peculiaridades e intereses [10, pp. 58 y ss.].

Otra cuestión compleja de evaluar, de la que asimismo se hace eco, es su propensión a imponer su visión de los problemas y sus descubrimientos, antes que animar a sus alumnos a desarrollar sus propias visiones. Un mal muy común, que impregna toda la actividad docente e investigadora, podríamos decir. Al respecto, admite que esa propensión no ha desaparecido nunca aunque, al tomar conciencia de ella, haya procurado atenuar sus efectos negativos [10, p. 59].

No obstante, insiste en el valor que tiene su empeño de transmitir a los alumnos la autoexigencia y el rigor, además de franquearles el paso hacia los conocimientos necesarios para llevar a cabo una investigación científica. Señalando que *“es un rigor interior, independiente de los cánones de rigor que pueden prevalecer en un momento determinado en una disciplina (digamos) determinada. (...) Y si he podido, quizá, a pesar de todo, transmitir a mis alumnos alguna cosa valiosa, además de un lenguaje y saber hacer, es sin duda esta exigencia, esta atención, este rigor –si no en la relación con otros y consigo mismos (que a ese nivel me fallaba como a cualquiera), al menos en el trabajo matemático”* [10, p. 61].

Ampliando esas apreciaciones sobre lo que se debe o no transmitir a los alumnos-colaboradores, acabará matizando el sentido de su autocrítica, al decir que

“No sería exacto, sin embargo, decir que el trabajo que proponía a mis alumnos, y que ellos realizaban conmigo, era un trabajo puramente técnico, de pura rutina, no apto para poner en juego sus facultades creadoras. Ponia a su disposición puntos de partida tangibles y seguros, entre los cuales ellos tenían toda libertad de elegir y a partir de los que podían avanzar, como yo mismo lo había hecho antes que ellos. No creo que nunca haya propuesto un tema a un alumno que yo mismo no hubiera abordado con gusto por mí mismo; ni que haya habido un recorrido tan árido en el viaje que alguno de ellos ha hecho conmigo, que yo no haya pasado por otros tan áridos como ese en el curso de mi vida de matemático, sin descorazonarme o extraviarme, cuando estaba claro que el trabajo debía hacerse y que no había otro camino” [10, p. 174].

Esta matización no le impide seguir con su profunda autocrítica, tan inhabitual en el mundo del que durante tantos años se ha movido. En ese sentido, llega a la conclusión de que la causa del fracaso que ha experimentado en ocasiones, en su relación de trabajo con sus alumnos-colaboradores, estaba más que nada en *“actitudes de fatuidad en mí, en mi relación con la matemática”*. Y da una sencilla explicación al respecto, afirmando que esas actitudes *“debían impregnar más o menos fuertemente, si no el trabajo propiamente dicho en compañía de tal alumno, al menos el ambiente o el aire que rodeaba mi persona”*. Concluyendo esas apreciaciones con unas lapidarias palabras, en las que expresa que, aún en la forma más civilizada y disimulada, la fatuidad nos impide captar la belleza de las cosas y apreciar la calidad humana de las personas que nos rodean, por lo que tiene efectos letales en la comunidad científica [10, p. 175].

Reconoce, no obstante, que el argumento que acababa siendo determinante en su relación con los alumnos-colaboradores, era considerarlos como *fuerza de trabajo*, que podía contribuir al desarrollo de su programa de investigación. Sin embargo, para él, no hay en ello nada denigrante, ya que esos colaboradores podían hacer suyas las líneas de investigación abiertas por él y sentirse partícipes del logro de los resultados [10, pp. 276–7]. Grothendieck no considera, por tanto, que esta forma de proceder sea en sí misma conflictiva ni tenga que generar ningún

enfrentamiento. La interpreta como necesaria en la actividad científica y entiende que es lógico que marque la relación entre el maestro y los discípulos [10, p. 42].

Palabras aún más ácidas escribe, y con esto concluiremos, mostrando su relativo asombro, a propósito de cómo ha influido el cambio en su situación profesional, en la consideración que merece el trabajo realizado por sus alumnos. En efecto, tras haber reflexionado sobre ello, afirma que *“este tipo de mecanismos debe ser prácticamente universal, no solamente en el mundo matemático, sino en todos los sectores de la sociedad sin ninguna excepción. Sobrepasa ampliamente todo caso concreto. Si tan excepcional (como me parece) es la situación en el caso de mi persona y de los que a los ojos del establishment aparecen como ‘mis protegidos’, es porque el pasado he estado investido del estatuto de ‘uno de los suyos’, con el efecto habitual de ‘mínimo de obertura’ con respecto a mí y ‘los míos’. Este estatuto me fue retirado a mi partida en 1970”* [10, p. 416]. Es decir, en el momento en que abandona el IHES, por considerar que sus principios pacifistas le impedían seguir trabajando en una institución que se financiaba, al menos parcialmente, con fondos militares.

4. Consideraciones ético-políticas sobre ciencia, naturaleza y sociedad

Centraremos nuestra atención en este apartado sobre las razones del abandono de Grothendieck del IHES, el paralelismo que existe entre su compromiso social y su compromiso ecológico, la atención que presta en todo momento a la ética de la investigación científica, su interpretación de la vinculación entre conocer y comprender y, por último, haremos alusión a cómo concibe su responsabilidad en tanto que científico y, más allá de ello, como persona.



Figura 6. Alexandre Grothendieck (1975) [6].

En la nota a pie de página número 42 de *Récoltes et semailles*, explica *“l’évènement percutant”* que provocó su abandono del IHES. En sus propias palabras, el *acontecimiento impactante* en cuestión fue el que ya hemos mencionado. A saber, la financiación parcial del centro por parte del ‘Ministère des armées’. Este hecho fue considerado por Grothendieck como *“incompatible con mis axiomas de base”*. No podía vivir en esa contradicción pues, para él, el pacifismo no es sólo

una doctrina, sino sobre todo el elemento clave de toda forma ética de afrontar los conflictos sociales.

A continuación, añade unas interesantes consideraciones sobre los primeros años de funcionamiento del IHES, haciéndonos ver la magnitud de su implicación en dicho centro. A través de estas consideraciones va emergiendo la impresión en el lector de lo duro que debió ser para Grothendieck tomar la decisión de marcharse. “*Durante los años heroicos del IHES, Dieudonné y yo fuimos los únicos miembros, y los únicos en proporcionarle credibilidad en el mundo científico*”. En efecto, Jean Dieudonné puso en marcha la edición de *Publications Mathématiques*, mientras que Grothendieck se ocupaba del desarrollo de los *Seminarios de Geometría Algebraica*. Ambas actividades dieron prestigio y reconocimiento a este centro en su primera andadura. Todo ello fue creando un sentimiento de identificación con esa institución, que explica que alejarse de ella fuese para él “*especie de desenraizamiento con respecto a mi hogar, antes de revelarse como una liberación*” [10, pp. 169–170].

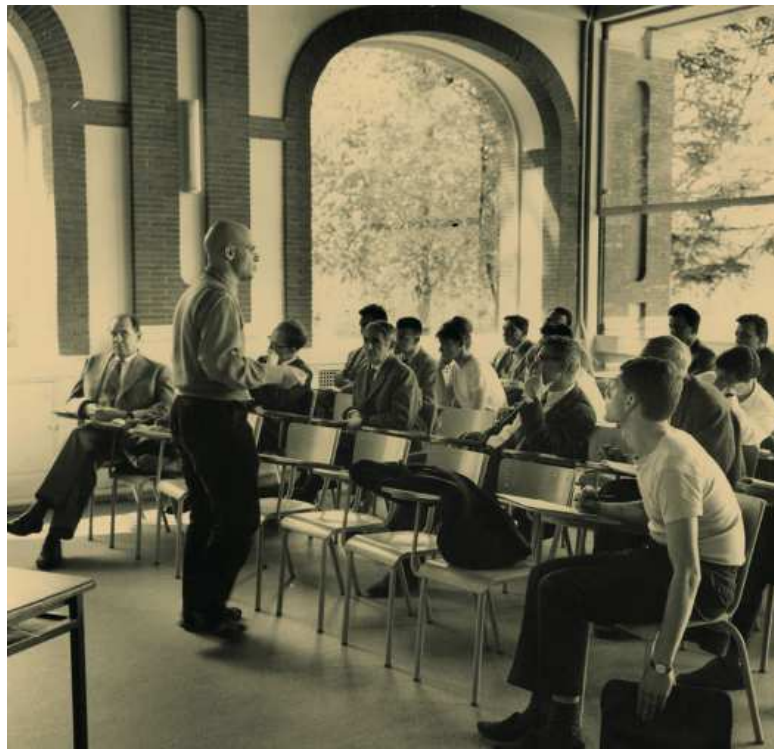


Figura 7. Alexandre Grothendieck durante una sesión del SGA (Seminario de Geometría Algebraica) probablemente el SGA3 (1962–1964) [6].

El sentimiento de liberación irá incrementándose a medida que ahonde en sus reflexiones sobre el valor del conocimiento científico y sus repercusiones sobre la naturaleza y la sociedad. Por otra parte, las circunstancias que relata al hablar del ‘enterramiento’ de su figura y su obra matemática, van provocando un progresivo alejamiento del selecto grupo formado por los matemáticos de reconocido prestigio. Hay que señalar, no obstante, que se trataría en todo caso de un *enterramiento* bastante relativo pues, como evoca Douroux, nueve de las medallas Fields concedidas desde 1970 se han otorgado a investigadores que han realizado sus trabajos siguiendo las líneas abiertas por Grothendieck [6]. Se añade a esto una percepción cada vez más aguda del casi nulo interés de la comunidad científica por implicarse en los problemas ecológicos y sociales de su tiempo. Un buen ejemplo es la dura lección que se desprende de lo que le sucedió hacia finales del año 1977, cuando fue “*citado en el Tribunal Correccional de Montpellier por el delito de haber ‘albergado gratuitamente y alimentado a un extranjero en situación irregular’ (...)*”. Con

ocasión de esta citación supe de la existencia de este parágrafo increíble de la ordenanza de 1945, que rige el estatuto de los extranjeros en Francia” [10, pp. 53–4]. En esa coyuntura, Grothendieck estaba convencido de haber sido tomado como ‘cobaya’, por su notoriedad pública, ya que según sus noticias nunca antes se había aplicado con tanto rigor esa ley.

El hecho más relevante, para nosotros, es que su relación con los miembros del grupo Bourbaki se resiente de una forma irreparable cuando presente a los integrantes del mismo la campaña que quiere promover, en contra de la ley por la que había sido procesado [10, pp. 54–5]. Experimentará entonces una enorme decepción, ante la reacción de los matemáticos frente a su demanda de apoyo para denunciar la ley mencionada. Expresándose en términos que no pueden ser más elocuentes, afirma que “*obscuramente, sentía que no vivíamos en el mismo mundo. Había creído reencontrar hermanos en esta ocasión excepcional en la que me encontraba y me parecía estar delante de extraños*” [10, p. 55]. Esa impresión se mantiene desde entonces, apreciándose claramente en la denuncia que realiza de la falta de respeto a la ética de la investigación científica en su carta de rechazo del Premio Crafoord [11].

El otro pivote sobre el que gira tal alejamiento es, como ya hemos dicho, el compromiso de Grothendieck con la causa pacifista y con la ecología. El carácter pionero de su labor y la intensidad de su compromiso han sido puestos de relieve por Céline Pessis [19, pp. 9 y ss.]. Pero podemos tener una referencia de primera mano a propósito de ello a través de la lectura de la nota a pie de página que, en *Récoltes et semailles*, dedica a explicar la constitución y funcionamiento del grupo *Survivre et vivre*. Como puede leerse en este texto, “*Survivre et vivre (que se denominaba al principio Survivre, tan solo) es el nombre de un grupo, de vocación inicial pacifista y, en seguida, igualmente ecológica, que nació en julio de 1970 (al margen de una Summer School, en la Universidad de Montreal), en un medio de científicos (y sobre todo, de matemáticos). Evolucionó rápidamente hacia una dirección ‘revolución cultural’, ampliando su audiencia más allá de los medios científicos*”. Relata en esa nota cómo el principal medio de acción de *Survivre et vivre* fue el boletín que editaba. El primero de esos boletines fue escrito al completo por Grothendieck. Él lo califica de “*ingenuo y pleno de convicción*”². Se imprimieron mil ejemplares y fue distribuido en el Congreso Internacional de Niza de 1970. Las adhesiones que recogió fueron testimoniales, aunque generó gran inquietud en los medios matemáticos por su denuncia de la penetración del aparato militar en la ciencia, un tema clave en el despertar de la izquierda extraparlamentaria durante aquellos días [10, pp. 757–8].

En otro orden de cosas, de su sensibilidad ecologista, así como de su manera de conectar sus posicionamientos en ese terreno con otros aspectos de su vida, es muy ilustrativo el relato que nos ofrece de una experiencia que tuvo al instalarse de nuevo en la provincia de Languedoc-Rosellón, tras su marcha del IHES. Encontró un campo de cerezos muy bello, al que volvía de vez en cuando en el curso de sus paseos. Un día tuvo la dolorosa experiencia de ver todos esos magníficos árboles cortados a la altura de algo más de un metro del suelo. Ni siquiera se habían molestado en agacharse para cortarlos por la base aquellos que ya no los consideraban dignos de vivir, al no ser lo suficientemente productivos. Grothendieck supo ver en ello una metáfora, no sólo de la cruel agresión hacia la naturaleza, sino también de un espíritu despiadado que se manifiesta de igual manera en la forma de actuar de unos humanos contra otros, sobre todo en el ámbito científico [10, p. 393]. Es fácil apreciar, a través de la lectura de su obra no estrictamente matemática, cómo esta crítica a los valores que imperan en la realidad económica y en el mundo científico, aparece siempre acompañada de una defensa de los ideales pacifistas. Para él, es inexcusable la tarea de rechazar la violencia en todas sus formas, de renegar de la guerra, en uno mismo y en el mundo, abominando de todo cuanto esta significa y rechazando cualquier relación con el ámbito militar [10, p. 535].

Entendemos mejor su juicio al respecto cuando explica que, en la cultura científica, predominan los valores generales de la cultura occidental, que para él tiene un marcado acento patriarcal. Conlleva esto el predominio del yang, lo masculino, sobre el yin, lo femenino, en la

² GROTHENDIECK, A., *Survivre et vivre*, n° 1, <http://science-societe.fr/survivre-1/>, 1970.

vieja terminología taoísta a la que él recurre [10, p. 464]. A su entender, “*nuestra época se caracteriza por ser aquella en la que se ha dado una exacerbación a ultranza de esta degradación cultural*” [10, p. 465]. Grothendieck está pensando en todo cuanto de negativo ha traído esa cultura basada en valores negadores de lo femenino; en concreto, la carrera espacial paralela a la carrera de armamentos y al enfrentamiento entre las dos superpotencias (cuando escribe estas consideraciones faltan aún cuatro años para el desmoronamiento de la URSS y del bloque prosoviético), la degradación de la naturaleza e incluso el riesgo de desaparición de la especie humana. En su intervención en el coloquio “*Le Travailleur Scientifique et la Machine Social*”, en diciembre de 1970, ya se había hecho eco de todo ello, cuestionándose la falta de autocrítica que impera en el mundo de la ciencia, con respecto a las consecuencias del progreso científico-tecnológico [8].

Una de las ideas clave que expone a lo largo de su original obra es que hemos de aprender a aceptar el valor en sí que la naturaleza posee, a partir de una aceptación del otro y de nosotros mismos. Expresado en sus propios términos, la “*aceptación nueva de mi propia persona ha ido en paralelo con una aceptación del otro. La una y la otra están indisolublemente ligadas*” [10, p. 486]. Pero no se trata, cuando hablamos de aceptar al otro, tan sólo de practicar la tolerancia. Aceptar al otro es algo mucho más profundo que tolerarlo, asevera. Se trata de contemplar al otro como a alguien que me completa y complementa. Y va aún más allá, señalando que “*en buena lógica, la aceptación del otro debería también implicar la aceptación de su forma de ver las cosas, nos parezca esta errónea o no, incluso si se trata de su manera de ver a nuestra persona*” [10, p. 489].

En esa línea, contraponer valores ‘masculinos’ y valores ‘femeninos’, le permite hacer una interpretación de la cultura y de la ciencia de su época. Así, haciendo mención a la dialéctica taoísta del yin y el yang, proyectada sobre la matemática, llega a establecer la siguiente contraposición de actitudes y conceptos. El primero de ellos tendría un carácter *femenino*, mientras que el segundo se caracterizaría por su adscripción *masculina* [10, pp. 541–2]. Habla, siguiendo ese presupuesto, de las contraposiciones siguientes: sensibilidad/razón (o intelecto); instinto/reflexión; intuición /lógica; inspiración/método; visión/coherencia; lo concreto/lo abstracto; lo complejo/lo simple; lo vago/lo preciso; sueño/realidad; lo indefinido/lo definido; lo inexpresado/lo expresado; lo informe/lo formado; lo infinito/lo finito; lo ilimitado/lo limitado; el todo (la totalidad)/la parte; lo global/lo local (o lo parcial).

De forma análoga, siguiendo asimismo esa línea de razonamiento, llega a establecer otra serie de antítesis, en la que el primer concepto correspondería ahora con lo *masculino* y el segundo con lo *femenino*. Según él, responden a dos fuerzas inherentes al pensamiento, en general, que se singularizan a través de los pares antagónicos que recogemos a continuación: la parte/el todo; lo particular/lo general; multiplicidad/unidad; efecto/causa; pureza/fecundidad; lo simple/lo complejo; lo abstracto/lo concreto; lo preciso/lo vago; orden/caos; estructura/sustancia [10, p. PU31]. No disponemos aquí de espacio para desarrollar el contenido de ambas series de contraposiciones, aunque su enunciación es elocuente por sí misma. En todo caso, a desplegar el trasfondo de dichas contraposiciones consagra Grothendieck un considerable número de páginas.

Quizá el elemento más interesante a retener, a través de esas contraposiciones, sea que nos inducen a comprender la necesidad de un equilibrio entre *intuición* y *lógica*, algo que resulta esencial para captar cómo funciona la investigación en las ciencias formales [10, p. 550]. A este respecto, es crucial poner aquí de relieve que Grothendieck habla de dos formas de aproximarse a los problemas matemáticos. Para exponerlas plantea el ejemplo de una nuez, en cuyo interior queremos penetrar. Una manera de hacerlo sería perforar o romper la cáscara; la otra sumergir la nuez en un fluido adecuado y esperar a que la cáscara se disuelva en él. Esta segunda es la forma de aproximarse a los problemas matemáticos que dice preferir [10, pp. 552–3]. En efecto, haciendo un repaso de su producción, constatamos que esta segunda estrategia es la que caracteriza su manera de entender la tarea del investigador. Así, su modo de enfocar la investigación le ha llevado, siguiendo el peculiar enfoque que acabamos de mencionar, a trabajar más en terrenos desconocidos o inexplorados que siguiendo senderos ya abiertos. En todo caso,

él confiesa en más de una ocasión que, cuando no le quedaba otro remedio, para seguir con provecho alguno de los caminos ya abiertos tenía que hacer suyo el problema en cuestión [10, p. 554].

Siguiendo con la interpretación que elabora, a partir de la mencionada dialéctica del yin y el yang, aborda la cuestión del conflicto en los seres humanos. La plantea en diferentes niveles, que van desde la relación entre los sexos hasta la vinculación con la naturaleza, pasando, claro está, por las relaciones con uno mismo. En ese contexto habla de las relaciones de poder en el seno de la pareja y de los conflictos que generan [10, p. 568]. Planteado el caso extremo, nos dice, la mujer llega a despreciar en ella todo lo que es femenino y a adoptar como propios los valores y actitudes que le han enseñado a considerar mejores: los masculinos [10, p. 569]. En todas estas apreciaciones, como él mismo manifiesta, constatamos el influjo que ejercieron sobre él las tempestuosas relaciones que mantenían sus padres, así como el duro carácter de su madre, que tan sólo asumía como auténticos valores aquellos que se identificaban con la condición masculina.

Esas apreciaciones, que tanto parecen alejarse de su principal foco de atención en esta obra, sin embargo, en realidad no lo hacen, ya que nos permiten entender su reflexión acerca de la actitud del ser humano frente a *“la realidad universal de la represión y del conflicto”*. Él mismo puede explicar, al hilo de ellas, el cambio que se produjo a partir de cierto momento en su forma de enfrentarse a los problemas personales y sociales. Relata así cómo, durante años, su *“actitud con respecto a la realidad universal de la represión y del conflicto era una actitud de revuelta militante –de revuelta contra esta ‘espada’ que pretendía cortar en dos lo que, por naturaleza, debía ser uno, era uno”* [10, p. 600].

Al hilo de sus reflexiones sobre el conflicto, se desarrolla y expresa la convicción de que todo cuanto existe tiene su razón de ser. En este sentido, cabría preguntarse si su actitud es conformista. Pudiera parecerlo en efecto, pero, cuando la analizamos con detenimiento, vemos que sería simplificarla mucho definirla de ese modo. Su punto de vista le aproxima a la metafísica leibniziana. *“En el fondo, sé bien desde hace mucho tiempo (no sabría siquiera decir desde cuando, incluso si durante mucho tiempo he fingido ignorarlo . . .), que toda cosa en este mundo tiene su buena razón de existir, e incluso, si se comprende el fondo de las cosas, seguramente toda cosa es buena tal como es”* [10, p. 601].

En otros momentos su posición nos recuerda a la forma en que Hegel integra esas tesis leibnizianas. Así sucede cuando confiesa que, durante mucho tiempo, *“había excluido ‘el conflicto’ de gran número de cosas –lo tomaba como una especie de ‘mácula’, un estremecimiento inadmisibile, una ‘dificultad’ tenaz e inesperada (quizá revulsiva) en el concierto de la Creación. Ha bastado que al fin tome conciencia tan sólo un poco íntimamente del conflicto, en lugar de aparentar batirme con él, para que mi relación con él se transforme profundamente”* [10, p. 601].

Más aún, para él, lo propio de nuestra especie es el conocimiento del *“conflicto”* y el empeño en comprenderlo y resolverlo, *“me parece propio del hombre, de la especie humana. Se me presenta como el gran misterio sobre el sentido particular, el destino particular de nuestra especie”* [10, p. 601]. Así pues, lo que nos importa, como seres humanos, es descubrir el *sentido* que tiene el sesgo conflictual que tan a menudo adquiere la vida humana. Grothendieck precisa que lo que le *“interesa en el misterio del conflicto, no es el aspecto mecánico, científico, un aspecto exterior a mi persona, tanto como el famoso ‘teorema de Fermat’*. Sino la cuestión del sentido del conflicto. Este sentido me concierne de forma inmediata y esencial, como concierne a cada uno de los innumerables hombres y mujeres que se han desgarrado y matado entre ellos en el curso de innumerables generaciones y que han transmitido a sus hijos el conflicto tomado de sus padres” [10, p. 603].

Su convicción, a este respecto, es firme y sin fisuras. Considerando siempre que el enigma de la omnipresencia del conflicto en la historia del ser humano, puede ser desentrañado y comprendido. *“Es para mí algo evidente –y este ‘sentimiento del misterio’ tan familiar, que hay algo profundo a sondear, me dice al mismo tiempo que ‘ese algo’ es este sentido, justamente. La ‘fe’ en cuestión*

se recubre con una fe en mis facultades, cuando estas me revelan, aquí sin sombra alguna de duda, que hay ante mí un 'sentido' a descubrir" [10, p. 603].

Motivo de reflexión es también en qué medida afecta a la investigación y a su ética, la necesidad de buscar apoyo y aprobación. Son recurrentes, a este respecto, las referencias a la dificultad de trabajar al margen de grupos y camarillas. En *Récoltes et semailles* evoca, en tal contexto, la figura de Kepler, que pese a todo intentó no romper con los consensos establecidos, aunque sus descubrimientos le condujesen a ello. Tomando como base ese relato, comentará la dificultad que hoy existe para salirse de los encuadres impuestos. Ya no existe la Inquisición, viene a decirnos; por tanto, no se arriesga quien lo hace a perecer en la hoguera, pero sí a convertirse en un marginado en el mundo científico [10, p. 677].

Para ir encaminándonos hacia el final de estas consideraciones, sería necesario abordar la cuestión de la comprensión de la realidad, entendida como fuerza transformadora, que se construye sobre el conocimiento, pero que a veces se aventura más allá de sus bien establecidos límites. En ese sentido, hay que recordar que, para él, la fuerza de la comprensión que transforma a la persona tan sólo puede aparecer a través de una intensa experiencia personal. Es una *"fuerza que, de un ensamblaje de ingredientes, hace surgir de repente una comprensión que renueva la persona. Esta fuerza no es 'del orden de la inteligencia'. Dudo que el trabajo intelectual, sea el que sea, digamos la lectura de libros, por sabios, profundos o sublimes que sean, estimule en absoluto su aparición. Cuando llega a asomar, es en el silencio solamente y en contacto con lo más íntimamente personal y nuestra experiencia"* [10, p. 748].

Este asunto abre el camino a planteamientos que le aproximan a lo religioso, aspecto que está concisa y claramente abordado en esta nota a pie de página de *Récoltes et semailles*. Señalemos, al paso, que es la referencia más concreta que encontramos a ese tema en las más de mil quinientas páginas del libro. En ella nos dice que no se siente *"miembro de ninguna confesión religiosa particular. Por la educación recibida de mis padres, he sido ateo (con una querencia antirreligiosa) hasta la edad de catorce años. Una destacable exposición de mi profesor de ciencias naturales, sobre la historia de la evolución de la vida sobre la tierra, me hizo entonces comprender, sin la posibilidad de la menor duda, la presencia de una inteligencia creadora actuando en el Universo. Esta comprensión, que entonces se quedó en un nivel intelectual, se amplió y afinó en el curso de mi maduración ulterior"* [10, p. 761].

No es del todo ajena esa forma de entender la religiosidad a aquello que, según él mismo afirma, le ha fascinado en su trabajo matemático, que no es otra cosa que la búsqueda de la unidad en la multiplicidad. Esa es la fuerza, sostiene, que jamás ha dejado de impulsarle, *"como un instinto oscuro, es aprehender sin cesar y desentrañar lo que es común a situaciones que pueden ser desemejantes. Por hacer un aforismo: he descubierto, o he sabido intuitivamente desde siempre, que 'la diferencia' pertenece a la superficie y que el parentesco aparece en profundidad. Es así que la búsqueda de la unidad me ha conducido a menudo, incluso sin que lo haya buscado y hasta sin darme cuenta, a bucear en lo profundo"* [10, p. PU25].

Haciendo suya una venerable tesis aristotélica, señala que la búsqueda de lo general conlleva una abstracción creciente [10, p. PU25]. Ese impulso rector le aproxima a un matemático con quien siente que comparte el enfoque esencial de la tarea científica y aún el modo de enfrentarse a la vida. Se trata de Bernhard Riemann. A esta vinculación le dedica una nota a pie de página, cuyo contenido esclarece tanto su valoración del trabajo de éste como la interpretación que realiza de su propia tarea dentro de las matemáticas. En ella escribe que su forma de plantearse la investigación atestigua *"la profundidad de un espíritu de una cualidad muy rara y, quizá, única –la de aquel en el que un pensamiento científico, innovador y fecundo, se otorga libre curso en los campos privilegiados de la abstracción (la matemática y la física), se ha aliado a una intuición directa y penetrante de las cosas más delicadas y más esenciales"*. Añadiendo que lo que constituye la grandeza de Riemann no son sus dotes excepcionales, sino haber logrado seguir siendo él mismo, preservando siempre su inocencia [10, p. PU75].

Para acabar estas páginas, resultará quizá esclarecedor hacer referencia a aquello que Grothendieck considera que constituye el núcleo de su sentido de la responsabilidad. A propósito de ello, subraya que éste se centra en lo que puede o no hacer en el mundo, y se concreta en “*estar realmente presente y en verdad en lo que hago –tanto cuando me expreso a través de un texto o de viva voz como cuando leo o escucho. Me corresponde entonces, cuando me expreso, estar atento a la escucha de un ‘sentido’ en mí, buscando su forma en el lenguaje. Es este ‘sentido’, desde luego, lo que une una a una las palabras que deben expresarlo*” [10, p. PU82].



Figura 8. Alexandre Grothendieck (1988) en una de sus últimas fotos conocidas [6].

Referencias

- [1] ACZEL, A. D., *The Artist and the Mathematician, The story of Nicolas Bourbaki, the Genius Who Never Existed*, New York, Thunder's Mouth Press, 2006.
- [2] DELIGNE, P., *Quelques idées maîtresses de l'oeuvre de A. Grothendieck*, Paris, Société Mathématique de France. Séminaires et Congrès, n° 3, 1998.
- [3] DIEUDONNÉ, J., *Matemáticas vacías y matemáticas significativas*, en Guénard, F. – Lelièvre, G. (Edits.), *Pensar la matemática. Seminario de Filosofía y Matemática de la ENS*, dirigido por J. Dieudonné, M. Loi y R. Thom, Barcelona, Tusquets, 1999.
- [4] DIEUDONNÉ, J., *L'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Paris, Hachette, 1987. [Versión española, DIEUDONNÉ, J., *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Madrid, Alianza, 1989].
- [5] DOUROUT, Ph., *Le trésor oublié du génie des maths*, Liberation, 1 de julio, 2012.
- [6] DOUROUT, Ph., *Alexandre Grothendieck. Un voyage à la poursuite des choses évidentes*, 8 de febrero. 2012. <http://images.math.cnrs.fr/Alexandre-Grothendieck.html>
- [7] EPSTEIN, D. y BOULOUQUE, C., *Survivre et vivre*, Paris, Denoël, 2008.

- [8] GROTHENDIECK, A., *Comment je suis devenu militant?*, *Survivre et vivre*, n° 6, enero, 1971.
- [9] GROTHENDIECK, A., *Esquisse d'un Programme*, Manuscrito, 1984.
<http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/EsquisseFr.pdf>
- [10] GROTHENDIECK, A., *Récoltes et semailles. Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien*, Montpellier, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1985.
- [11] GROTHENDIECK, A., *Lettre à l'Académie royale des sciences de Suède*, *Le Monde*, 4 de mayo, 1988.
- [12] GROTHENDIECK, A., *Déclaration d'intention de non-publication*, 3 de enero, 2010,
<http://sbseminar.files.wordpress.com/2010/02/grothendiecks-declaration-original.png>
- [13] HERNÁNDEZ, J., *La matemática y sus elementos, de Euclides a Bourbaki*, *La Gaceta de la RSME*, vol. 5.3, 2002.
- [14] HERSH, R. y JOHN-STEINER, V., *Loving and Hating Mathematics, Challenging the Myths of Mathematical Life*, Princeton, Princeton University Press, 2011.
- [15] LORENZO, J. (DE), *La matemática: de sus fundamentos y crisis*, Madrid, Tecnos, 1998.
- [16] LORENZO, J. (DE), *Matemáticas e ideología. Nicolás Bourbaki*, *Boletín de la Real Academia de Extremadura de las Letras y las Artes*, n° 17, 2009.
- [17] LORENZO, J. (DE), *Ciencia y arteificio*, A Coruña, Netbiblo, 2009.
- [18] MUÑOZ, E., *Dinámica y dimensiones de la ética de la investigación científica y técnica*, *Arbor* n° 730, 2008.
- [19] PESSIS, C., *Les années 1968 et la science. Survivre ... et Vivre, des mathématiciens critiques à l'origine de l'écologisme*, Paris, Mémoire en Sciences Sociales. EHESS-Centre Alexandre Koyré, 2009.
- [20] QUADRAT, A., *New perspectives in algebraic systems theory*, *Proceeding of MTNS*, Virginia (USA), 2008.
- [21] SHRADER-FRECHETTE, K., *Ethics of scientific research*, Boston, Rowman&Littlefield Publishers, 1994.
- [22] THOM, R., *Matemática y teorización científica*, en GUÉNARD, F. – LELIÈVRE, G. (Edits.), *Pensar la matemática*. Seminario de Filosofía y Matemática de la ENS, dirigido por J. Dieudonné, M. Loi y R. Thom, Barcelona, Tusquets, 1999.
- [23] ZALAMEA, F., *Grandes corrientes de la matemática del siglo XX. La matemática de las estructuras*, *Boletín de matemáticas*, n° 18 (2), 2011.

Sobre el autor:

Nombre: Domingo Fernández Agis

Correo electrónico: dferagi@ull.edu.es

Institución: Facultad de Filosofía. Universidad de La Laguna. Tenerife, España.

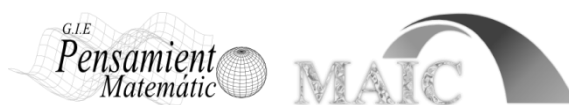
Cuentos Matemáticos

El Cero

The Zero

José Miguel Bel Martínez

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 045–050, ISSN 2174-0410

Recepción: 4 Feb'13; Aceptación: 10 Ago'13

1 de octubre de 2013

Resumen

Este relato corto de ficción, basado en hechos históricos, fue ganador del 2º Certamen de Relatos “San Isidoro” el año 2001 y publicado en la revista *Topografía y Cartografía* ese mismo año y en *Mapping* en 2010.

En 2005, subvencionado por la Comunidad de Madrid y los Cabildos de Tenerife y El Hierro, se rodó en esta isla el cortometraje del mismo título basado en esta historia que, estrenado en Santa Cruz en 2006 tuvo amplia difusión en festivales internacionales.

Palabras Clave: Geografía, Cartografía.

Abstract

This fictional short story, based on historical events, won the 2nd Stories Contest “San Isidoro” in the year 2001 and was published in the magazine “*Topografía y Cartografía*” in the same year, and in *Mapping* in 2010.

In 2005, subsidised by the Community of Madrid and the town halls of Tenerife and El Hierro, it was shot in this island the short film of the same title based on this story which, performed for the first time in Santa Cruz in 2006, had a wide circulation in international festivals.

Keywords: Geography, Cartography.

El ferry “Barlovento”, feo barco de bonito nombre, dejaba lentamente por su estribor La Gomera, mientras a proa se adivinaba la silueta brumosa de El Hierro. Por delante cincuenta millas de océano y, para mí, más de dos meses de estancia en aquella isla misteriosa y desconocida aún.

Empezaré por decirles que soy Ingeniero Técnico en Topografía del Instituto Geográfico Nacional, y que iba a El Hierro con la misión de nivelar: es decir, determinar el nivel medio

del mar o nivel 0 a partir del mareógrafo, y desde allí llevar altitudes de precisión a más de cien clavos, repartidos a través de más de cien kilómetros de carreteras y caminos de la isla.

Un sábado fui al cabo de Orchilla, en el extremo occidental de la isla. Se llegaba por un largo y polvoriento camino al final del cual estaba el imponente faro. Un paraje desolado e impresionante. Cerca de la torre había un viejo sentado en una piedra que miraba atentamente acercarse mi coche, un desvencijado Nissan Patrol curtido en cien campañas. Cuando al fin me detuve en medio de una polvareda, el viejo, entrecerrando los ojos y protegiéndose del sol con la mano, leyó atentamente el rótulo del costado del coche: "INSTITUTO GEOGRÁFICO NACIONAL".



Figura 1. Faro del cabo de Orchilla.

—Al fin llega “cristiano”. Ya empezaba a pensar que nunca vendría —dijo mirándome como a un aparecido.

—Perdone amigo, pero creo que se equivoca.

—No, no me equivoco. Usted ha venido a poner el “0”. Lo sé muy bien: llevo esperándole aquí toda mi vida.

Mi mente trataba de discernir si estaba hablando con un loco o con un visionario.

—No sé como lo sabe, pero en efecto, mi trabajo aquí es determinar el cero o nivel medio del mar para referir a él todas las altitudes de la isla y así...

—¡Basta! Y perdone que le interrumpa. ¡Ceros de altitud...! ¿A quién le puede importar eso? Ese cero lo tienen todos los países del mundo; incluso cada isla por pequeña que sea, como ésta. No “cristiano”, no, yo le hablo del único cero importante que hay, del que se llevaron esos malditos ingleses: el Meridiano 0.

Quise replicar sin saber exactamente cómo, pero el viejo lo impidió con un ademán.

—Bien, parece que realmente usted no sabe nada. Me llamo Ezequiel Quintero Padrón —dijo algo más calmado—, y mi padre fue el último torrero de este faro que tuvo el privilegio de custodiar el Meridiano 0. Cuando yo nací, ya hacía unos años que se lo habían llevado, o robado mejor dicho.

—Verá Ezequiel —interrumpí yo ahora—, ya sé que el meridiano origen pasaba por aquí hace cien años más o menos, hasta que a alguna comisión geográfica se le debió ocurrir trasladarlo a Greenwich y la verdad, no creo que eso sea un robo exactamente.

—Escuche: ¿usted es cartógrafo?

—Sí, se puede decir que sí.

—Pues sepa usted que hace dos mil años otro cartógrafo llamado Ptolomeo, que además era un gran sabio, decidió que el origen de todos los mapas del mundo sería esta línea en la que estamos sentados, y que otro cartógrafo francés, hace más de doscientos años, lo midió simultáneamente con otros colegas suyos repartidos por Europa. ¿Y sabe por qué eligieron este lugar? Yo se lo diré. Porque esta línea era la última tierra conocida. Era el fin y el principio. El fin del miedo y el principio del valor. Aquí los medrosos se daban la vuelta y sólo los valientes seguían. Esta línea era la última tierra que vio Colón y todos los grandes navegantes que le siguieron y aún hoy le siguen.



Figura 2. Certificado a nombre del autor.

¿Ve usted aquella vela blanca en el mar? Es un pequeño velero rumbo Oeste: va a América. Puede ser español, francés o alemán; hasta puede que sea inglés, qué más da. Dentro de unos minutos cruzará la Línea y cambiará la vida fácil de Europa por otra de vientos, temporales y soledad. Probablemente le llevará meses culminar su viaje, pero lo conseguirá. El Meridiano Cero le habrá convertido en un gran hombre, porque delimita la vulgaridad de la Grandeza.

—Y ¿de qué es origen ese meridiano de “grenich”, o como quiera que se llame ese sitio del demonio? Mire, yo no conozco ese lugar, ni Dios quiera que nunca lo conozca, pero sí lo vi una vez en una foto de una revista. ¿Sabe que es sólo un monolito en un prado? ¿Qué delimita esa línea? ¿Las vacas de las ovejas quizás? Pasa por infinidad de países sin pena ni gloria y hay que poner mojones de cemento para que la gente sepa que lo está cruzando. ¿Sabe acaso que mi Meridiano sólo pasa por el océano, este cabo y los dos polos?

Intenté replicar de nuevo, pero tampoco esta vez me dejó.

—Mi padre esperó toda su vida en vano a que nos devolvieran lo nuestro. En su lecho de muerte me dijo que antes de que yo muriera vendría otro cartógrafo a poner el Meridiano en su sitio, el único sitio posible: aquí. Siempre he estado seguro de que así sería, porque mi padre no mentía nunca. Pero ahora que está usted aquí, es cartógrafo y viene precisamente con la misión de establecer un cero, estoy más convencido si cabe. Son muchas coincidencias. ¿No le parece?

—Ahora mismo Ezequiel, lo que me parece es que ya anochece y debo irme si no quiero perderme por estos caminos. Le prometo volver a la semana que viene, si va usted a estar aquí.

—¿Estar, dice? Aquí nací y no me he movido en toda mi vida: primero como hijo de torrero, luego como torrero y desde que me jubilaron hace más de 20 años y automatizaron el faro, sobrevivo aquí con la única compañía de mi amigo Esteban y sus cabras. Y cuando muera, aquí me enterrarán, junto a mi padre y todos mis antepasados guardianes del Meridiano, aunque yo no lo haya sido. Estaré...

Volví el sábado siguiente. No sé por qué, pero me gustaba hablar, o mejor dicho oír hablar, a aquella especie de Quijote canario, mezcla de locura y grandeza. Allí seguía, esta vez acompañado de otro viejo y unas cuantas cabras.

—Buenas tardes, Ezequiel y compañía. Supongo que será usted Esteban, ¿no?

—Buenas tardes “cristiano”. Así es, este es mi amigo Esteban —éste saludó con un ademán—. ¿Ha pensado en lo que hablamos el otro día?

—Por eso estoy aquí. He pensado y he llegado a la conclusión de que no sé exactamente lo que espera usted de mí.

—¡Agüita con el cristiano! Pues está bien claro: Que restablezca el Meridiano 0 donde debe estar. Y dese prisa, porque ya noto que me faltan las fuerzas y mi final está cerca, muy cerca.

—¿Y por qué no lo restablece usted, si le interesa tanto?

—¿Cree que no lo he intentado? Me cansé de escribir cartas a ministros, al mismo Franco y, más tarde, al Rey. Incluso di una carta a unos turistas ingleses para su reina. Pero nadie respondió, porque esa no es la forma de hacer esto. La única posible es que un cartógrafo como usted, se convenza de la verdad de mis razonamientos y de la Historia, y afirme y diga que éste es el Meridiano Origen, exactamente igual que hicieron Ptolomeo y el francés.

—No sea ingenuo ¿No ve que no me harían caso? Para empezar habría que cambiar todos los mapas del mundo. Además...

—¡Pues que los cambien, demonios! Pero no ve que le asiste la razón, la lógica y veinte siglos de historia.

La conversación siguió por idénticos derroteros y yo no veía la forma de convencer al viejo de la imposibilidad de su pretensión.

—Bien amigos, el sol se oculta y debo irme. Nos veremos.

Pero no volví. Aunque admiraba su fe y su tesón, el problema sin solución del meridiano de aquel hombre empezaba a cansarme. Sólo el último día de mi estancia en El Hierro fui a despedirme de Ezequiel. Pero no estaba. Solamente vi a Esteban con sus cabras.

—¿Viene a ver a Ezequiel? Pues sepa que llega tarde. Anteayer le dio un ataque y se quedó como muerto: blanco como una pared. Se lo llevaron unos turistas al hospital de Valverde y me han dicho que está muy mal. Igual ya murió y bien que lo sentiría: es mi único amigo y un gran hombre, aunque usted parece no haberse dado cuenta. Estuvo esperándole aquí día tras día sin moverse, igual que el mismísimo meridiano —me reprochó.

Fui en el Nissan a Valverde a toda velocidad. Tenía que hacer algo y rápido. En la papelería compré “tipex”, letras y números adhesivos y allí mismo, sobre el mostrador, tracé en la hoja del mapa 1/50.000 del IGN una gruesa línea vertical que pasaba por el faro. Después borré cuidadosamente los números de la escala de longitudes y los sustituí por los nuevos. En el correspondiente al faro de Orchilla rotulé:

MERIDIANO 0° - ORIGEN DE LAS LONGITUDES

Corrí al hospital rogando que siguiera vivo. Tuve suerte: allí estaba rodeado de sondas y tubos. Cuando le tendí el mapa, lo cogió con sus manos temblorosas y se lo acercó a los ojos un buen rato... Sonrió aliviado mientras acariciaba con mimo aquella línea y aquellas letras. Después me indicó que me acercara, mientras me cogía la mano con fuerza. Con un hilo de voz me susurró:

—¿Ve como yo tenía razón? Usted era el cartógrafo que yo esperaba. Ahora podré reunirme con mi padre y con todos los demás Guardianes del Meridiano. Dios le bendiga, “cristiano”.

No había tiempo para más: debía llegar al barco de Tenerife que zarpaba del puerto de la Estaca. Allí tomaría otro que llegaría a la Península tres días más tarde. Cerca ya de Cádiz llamé al hospital de Valverde y hablé con el médico. Ezequiel murió feliz dos horas después de irme, abrazado a su mapa con tal fuerza, que nadie pudo quitárselo. Con él lo enterraron en el pequeño cementerio anejo al faro de Orchilla.

A pocas millas a proa ya se adivinaba la blancura de Cádiz. Mis ojos se llenaron de lágrimas, quizá por el fuerte viento. Me esperaba aún un largo viaje por carretera hasta mi

cómoda casa en la ciudad de Madrid (coordenadas geográficas: Latitud 40° 24' 30" Norte y Longitud 14° 25' 56" Este).

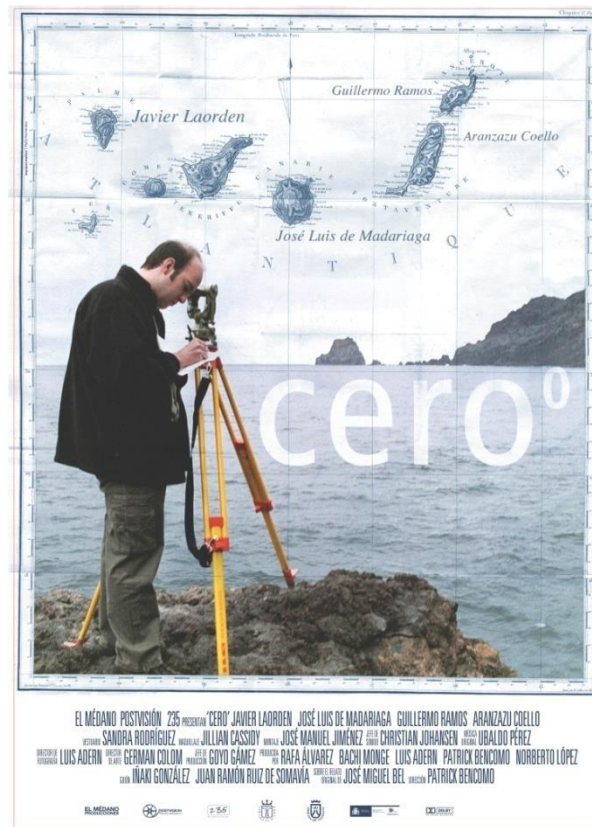


Figura 3. Cartel del cortometraje "El cero", basado en este cuento.

Sobre el autor:

Nombre: José Miguel Bel Martínez

Correo Electrónico: jmbelm@gmail.com

Institución: Ingeniero Técnico en Topografía (Colegiado N° 492), Instituto Geográfico Nacional, España.

Investigación

Use of decision trees algorithm for the territorial logistic planning

Uso del algoritmo árboles de decisión en la planificación logística territorial

Jorge Quijada-Alarcón, Nicoletta González,
Francisco Soler y Alberto Camarero

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 051–058, ISSN 2174-0410
Recepción: 14 Mar'13; Aceptación: 31 Jun'13

1 de octubre de 2012

Abstract

Data mining, and in particular decision trees have been used in different fields: engineering, medicine, banking and finance, etc., to analyze a target variable through decision variables. The following article examines the use of the decision trees algorithm as a tool in territorial logistic planning. The decision tree built has estimated population density indexes for territorial units with similar logistics characteristics in a concise and practical way.

Keywords: Data mining, decision trees algorithm, territorial logistic planning.

Resumen

La minería de datos, y en particular los árboles de decisión han sido utilizados en diferentes campos: ingeniería, medicina, banca y finanzas, etc., para analizar una variable objetivo a través de variables de predicción. El siguiente artículo examina el uso del algoritmo de árboles de decisión como una herramienta en la planificación logística territorial. El árbol de decisión construido ha estimado índices de densidad de población para unidades territoriales con similares características logísticas en un modo conciso y práctico.

Palabras Clave: Minería de Datos, Arboles de decisión, planificación logística territorial.

1 Introduction

In the last decades, it has been developed numerous techniques for analysis and modeling of data in different areas of statistics and artificial intelligence. Data mining is the process of discovering actionable and meaningful patterns, profiles, and trends by sifting through your data

using pattern recognition technologies [1]. The relationships and summaries derived through a data mining exercise are often referred to as models or patterns [2]. Data mining it's also considered in the intersection of the artificial intelligence (machine learning) and the statistics techniques, even though there is some remarkable differences between them, i.e., artificial intelligence has been more concerned to offer algorithmic solutions with an acceptable computational cost, while the statistic has been concerned over the power of generalization of the results obtained, i.e., be able to infer results to more general than the studied situations [3]. In the late 1980s and mostly on 1990s data mining begins to be as we know it, as a result of the increase of the computing power, a faster data collection and the apparition of new techniques of data learning and storage.

Any problem with stored data it is a problem to be dealt with using data mining. Some of these problems are: search of the unexpected by description of the multivariate reality, search for associations, typologies definition, detection of temporal sequences and prediction [3]. However, it's important to do a process of data preparation. Zhang et al. [4] argue for the importance of data preparation at three aspects: (1) real-world data is impure; (2) high-performance mining systems require quality data; and (3) quality data yields high-quality patterns. Some areas with data mining applications are: civil engineering [5, 6, 7], medicine [8, 9, 10]; education [11, 12, 13]; Banking and Finance [14, 15, 16].

One of the data mining techniques is decision tree. A decision tree is a logical model represented as a binary (two-way split) tree that shows how the value of a target variable can be predicted by using the values of a set of predictor variables. The first widely-used program for generating decision trees was "AID" (Automatic Interaction Detection) developed by Morgan and Sonquist [17]. AID was followed by many other decision tree generators including THAID [18], and ID3 [19] and, later, C4.5 [20]. The theoretical underpinning of decision tree analysis was greatly enhanced by the research done by Breiman et al. [21], embedded in a program they developed CART[®] (a registered trademark of Salford Systems). Recent advancements in decision tree analyses include the TreeBoost method [22] and Decision Tree Forests [23].

In particular, some decision trees applications in planning of logistic node in the latest research are: modeling on the environmental impact of airport deicing activities to determine important explanatory variables for predicting levels of chemical oxygen demand and dissolved oxygen in the airport's waterways [24]; evaluating countermeasures to secure cargo at United States southwestern ports of entry [25]; spatial decision tree application to traffic risk analysis [26]; Deriving decision rules to locate export containers in container yards, including a decision tree from the set of the optimal solutions to support real time decisions [27]. Others researches include concepts of territorial planning using decision trees: consider the classification of location contexts [28]; primary and secondary road network analysis using decision trees algorithm [29].

2 The territorial logistic planning and the general trend analysis of logistic platforms.

Since the first experience in Land Use Planning (LUP) in 1933, to develop the Tennessee River System in the United States of America, and integrate the water control with the conservation and preservation of the land resources [30, 31], the LUP's definitions [32, 33] have considered the perspective of sustainability. This planning process requires consider each logistic node impact on the spatial economy and regional development, and the possible synergies between them, even though the planners often allocate the nodes on the territorial space without considering the one effect over the others. The territorial logistic planning is an essential

part of a sustainable regional development.

The general trend analysis of the exploitation and planning of nodes or logistic platforms is to compare the ratios and parameters of the international literature. One of the most used bibliographies [34] discusses that according to the Growth Poles Theory that the development is not uniform and is carried out in specific places around activities of agglomeration. The infrastructures around an activity can improve the accessibility to suppliers and customers. The transport terminals, therefore are a kind of economic forces to generate links to other sectors of the economy and become sources of economic activity, so are often considered as growth poles; e.g. a terrestrial terminal growth strategy turns around the formation of logistics platforms, where the distribution centers share installations and also have a better access to the transport terminal. There are two major groups of techniques in the analysis of efficiency and performance of transport infrastructure: known as Data Envelopment Analysis DEA [35, 36, 37] has been traditionally used for the relative efficiency estimation of a set of peer entities called Decision Making Units (DMUs). Econometric estimation of distances functions [38, 39, 40, 41] its an empirical estimation of cost functions. The methodology of DEA models generalizes the traditional analysis of activity ratios allowing consider simultaneously multiple inputs and/or outputs. DEA and the estimation of frontier functions are alternatives to calculate the production boundary and therefore the efficiency of the production and costs. DEA is a non-parametric method based on linear programming while the estimation of frontier functions use econometric methods (parametric methods).

3 Methodology

In order to aim the research purpose to determine the relationship between a target territorial logistic variable and their decision variables, it was developed the following methodology in two steps: step 1 to determine the work stage and step 2 to develop the artificial intelligence model.

Step 1: Determination of the work stage

Diagnosis and state of the art. It consists on the review of the State of the art to identify the set of variables to characterize the target territorial logistic variable of study using specialized search services in two steps.

1. *Determination of physical and functional decision variables:* i.e. a systematic study of all the physical and functional decision variables (of ports, airports, road network, railroads, etc) susceptible to research for our target territorial logistic variable. It includes the study of the variables of territorial context as population, environment and regional economic grow.
2. *Getting the value of the decision variables:* Once the decision variables to be studied are known get its variables values using different information sources. The variable values have to be referred to territorial units identified in the country. Data set is established as follows:

$$(n, M) = (n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, M) \quad (1)$$

The dependent variable M is the target variable and the vector n is composed of the predictor variables $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$. This data set is called the learning or training dataset and is needed to build a decision tree model.

Step 2: Construction of the model of artificial intelligence

The software chosen for to build the decision tree is DTREG [42]. The process DTREG uses to build and prune a tree is complex and computationally intensive. Here is an outline of the steps:

1. Build the tree.
 - (a) Examine each node and find the best possible split.
 - Examine each predictor variable.
 - Examine each possible split on each predictor.
 - (b) Create two child nodes.
 - (c) Determine which child node each row goes into. This may involve using surrogate splitters.
 - (d) Continue the process until a stopping criterion (e.g., minimum node size) is reached.
2. Prune the tree.
 - (a) Build a set of cross-validation trees.
 - (b) Compute the cross validated misclassification cost for each possible tree size.
 - (c) Prune the primary tree to the optimal size.

The method for evaluating the quality of splits when building classification trees is Gini, where each split is chosen to maximize the heterogeneity of the categories of the target variable in the child nodes.

$$GiniIndex = 1 - \sum_j p_j^2 \quad (2)$$

Where the equation 2 contains values of probability of p_j for a class j .

The method used to determine the optimal tree size is V-fold cross validation, a technique for performing independent tree size tests without requiring separate test datasets and without reducing the data used to build the tree.

4 Results and discussion

The target logistic variable selected for the study is the Population Density (Population Per Square Kilometer) for explain the distribution of the population according to the distribution and development of the logistics nodes in the different territorial units that conform the country.

Figure 1 shows the principal child nodes and its predictor variables of the decision tree built for the target variable. After complete the process of build the tree, the predictor variables chosen by the decision tree algorithm were:

- Panama Canal Influence (binary 1/0)
- Secondary road-network (Kilometer Per Square Kilometer)
- Primary road-network (Kilometer Per Square Kilometer)

The principal predictor variable is the Panama Canal Influence that is a binary variable: 1 for the territorial units under the Panama Canal Influence, and zero for the others.

The territorial units that conforms the node 3 in the figure 1 correspond to the strip of land adjacent to the Panama Canal, with special economic areas, container ports, transatlantic rail-road and Tocumen International airport. This strip of land include Panama City and Colon City

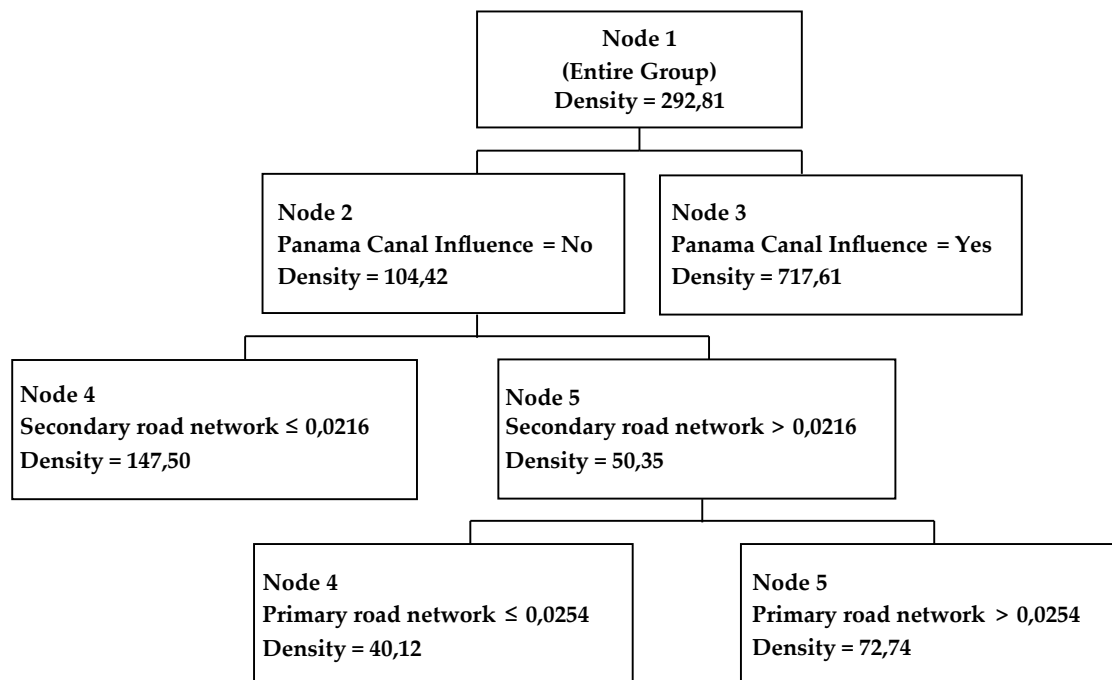


Figure 1. Decision three.

and has the highest population density index. The activities of transport, storage, communication, wholesale and retail trades, and real estate activities make the greatest contribution to the provincial GDP.

For the rest of the country where the logistics nodes development is lower than in the strip of land adjacent to the Panama Canal the principal characteristic is the relationship between the road network and the population density.

5 Conclusions

The decisions tree built for the target variable Population Density chose three predictor variables which explain the distribution of the population in the country according to the distribution and development of the logistics nodes. This allows to territorial planners to take in consideration the present scenario.

The decisions tree built has estimated Population Density index for territorial units with similar logistics characteristics in a concise and practice way. The characteristics of each group of territorial units has been analyzed using expert criteria.

The predictor variable "Panama Canal Influence" chosen by the decision tree algorithm, it is the principal predictor variable and allows to the territorial planners divide the country at least in two principal zones: the first under the Panama Canal influence with a highest logistics nodes development, and the second without the Panama Canal influence and a lowest logistics nodes development.

References

- [1] MENA, J., *Data mining your website*, Digital Pr, 1999.
- [2] HAND, D. J., MANNILA, H., and SMYTH, P., *Principles of data mining*, The MIT press, 2001.
- [3] ALUJA BANET, T., *La minería de datos, entre la estadística y la inteligencia artificial*, Questiió: Quaderns d'Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa, vol. 25, N° 3, pp. 479–498, 2001.
- [4] ZHANG, S., ZHANG, C., and YANG, Q., *Data preparation for data mining*, Applied Artificial Intelligence, vol. 17, N° 5-6, pp. 375–381, 2003.
- [5] CHUNCHUN, H., NIANXUE, L., XIAOHONG, Y., and WENZHONG, S., *Traffic flow data mining and evaluation based on fuzzy clustering techniques*, International journal of Fuzzy Systems, vol. 13, N° 4, pp. 344–349, 2011.
- [6] LEE, W. H., TSENG, S. S., SHIEH, J. L., and CHEN, H. H., *Discovering traffic bottlenecks in an urban network by spatiotemporal data mining on location-based services*, IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, vol. 12, N° 4, pp. 1047–1056, 2011.
- [7] GUO, Y., HU, J., and PENG, Y., *Research on CBR system based on data mining*, Applied Soft Computing, vol. 11, N° 8, pp. 5006–5014, 2011.
- [8] SHOUMAN, M., TURNER, T., and STOCKER, R., *Using data mining techniques in heart disease diagnosis and treatment*, in Electronics, Communications and Computers (JEC-ECC), 2012 Japan-Egypt Conference on, IEEE, 2012, pp. 173–177.
- [9] AARTS, S., VOS, R., VAN BOXTEL, M., VERHEY, F., METSEMAKERS, J., and VAN DEN AKKER, M., *Exploring medical data to generate new hypotheses: an introduction to data and text mining techniques in epidemiology*, Multimorbidity in general practice: Adverse health effects and innovative research strategies, 2012.
- [10] KOH, H. C. AND TAN, G., *Data mining applications in healthcare*, Journal of Healthcare Information Management, vol. 19, N° 2, p. 65, 2011.
- [11] HUNG, J. L., HSU, Y.-C., and RICE, K., *Integrating data mining in program evaluation of k-12 online education*, Educational Technology Society, vol. 15, N° 3, pp. 27–41, 2012.
- [12] YADAV, S. K., BHARADWAJ, B., and PAL, S., *Mining education data to predict student's retention: A comparative study*, arXiv preprint arXiv:1203.2987, 2012.
- [13] ASIF, R., MERCERON, A., and PATHAN, M., *Mining student's admission data and predicting student's performance using decision trees*, ICERI2012 Proceedings, pp. 5121–5129, 2012.
- [14] RAVI, V., NEKURI, N., and RAO, C. R., *Privacy preserving data mining using particle swarm optimisation trained auto-associative neural network: an application to bankruptcy prediction in banks*, International Journal of Data Mining, Modelling and Management, vol. 4, N° 1, pp. 39–56, 2012.
- [15] KWAK, W., SHI, Y., and KOU, G., *Bankruptcy prediction for korean firms after the 1997 financial crisis: using a multiple criteria linear programming data mining approach*, Review of Quantitative Finance and Accounting, pp. 1–13, 2012.
- [16] PRASAD, U. D., and MADHAVI, S., *Prediction of churn behavior of bank customers using data mining tools*, Business Intelligence Journal, vol. 5, N° 1, 2012.
- [17] MORGAN, J. N. AND SONQUIST, J. A., *Problems in the analysis of survey data and a proposal*, (Original AID), 1963.

- [18] MORGAN, J. N. AND MESSENGER, R. C., *Thaid, a sequential analysis program for the analysis of nominal scale dependent variables*, Survey Research Center, University of Michigan, 1973.
- [19] QUINLAN, J.R., *Induction of decision trees*, Machine learning, vol. 1, N° 1, pp. 81-106, 1986.
- [20] QUINLAN, J. R., *C4. 5: programs for machine learning*, Morgan kaufmann, 1993.
- [21] BREIMAN, L., FRIEDMAN, J., STONE, C. J., and OLSHEN, R. A., *Classification and regression trees*, Wadsworth International Group, 1984.
- [22] FRIEDMAN, J. H., *Stochastic gradient boosting*, Computational Statistics Data Analysis, vol. 38, N° 4, pp. 367–378, 2002.
- [23] BREIMAN, L., *Decision tree forests*, Machine Learning, vol. 45, N° 1, pp. 5–32, 2001.
- [24] FAN, H., TARUN, P. K., SHIH, D. T., KIM, S. B., CHEN, V. C. P., ROSENBERGER, J. M., and BERGMAN, D., *Data mining modeling on the environmental impact of airport deicing activities*, Expert Systems with Applications, vol. 38, N° 12, pp. 14899–14906, 2011.
- [25] BAKIR, N. O., *A decision tree model for evaluating countermeasures to secure cargo at united states southwestern ports of entry*, Decision Analysis, vol. 5, N° 4, pp. 230–248, 2008.
- [26] ZEITOUNI, K. AND CHELGHOU, N., *Spatial decision tree application to traffic risk analysis*, in Computer Systems and Applications, ACS/IEEE International Conference on. 2001, 2001, pp. 203–207.
- [27] KIM, K. H., PARK, Y. M., and RYU, K. R., *Deriving decision rules to locate export containers in container yards*, European Journal of Operational Research, vol. 124, N° 1, pp. 89–101, 2000.
- [28] SANTOS, M. Y. AND MOREIRA, A., *Automatic classification of location contexts with decision trees*, 2006.
- [29] QUIJADA-ALARCON, J., GONZÁLEZ CANCELAS, N., CAMARERO ORIVE, A., and SOLER FLORES, F., *Road network analysis using decision trees algorithm: A case of study of Panama*, in proceedings in Advanced Research in Scientific Areas. The 1st Virtual International Conference, EDIS Publishing Institution of the University of Zilina, Slovak Republic, 2012.
- [30] TENNESSEE WRITERS' PROJECT, *Tennessee: a guide to the state*, Scholarly Pr, 1939.
- [31] MONOD, J., and DE CASTELBAJAC, P., *L'aménagement du territoire*, Presses universitaires de France, 1987.
- [32] AGRICULTURE ORGANIZATION OF THE UNITED NATIONS, *Guidelines for land-use planning*, Food & Agriculture Org., vol. 1, 1993.
- [33] MINISTRY OF AGRICULTURE AND LAND AFFAIRS OF THE REPUBLIC OF SOUTH AFRICA, *White Paper on Spatial Planning and Land Use Management*, 2001.
- [34] RODRIGUE, J. P., COMTOIS, C., and SLACK, B., *The geography of transport systems*, Taylor & Francis, 2009.
- [35] ROLL, Y., and HAYUTH, Y., *Port performance comparison applying data envelopment analysis (DEA)*, Maritime Policy and Management, vol. 20, N° 2, pp. 153-161, 1993.
- [36] TONGZON, J., *Efficiency measurement of selected Australian and other international ports using data envelopment analysis*, Transportation Research Part A: Policy and Practice, vol. 35, N° 2, pp. 107-122, 2001.
- [37] BONILLA, M., CASASUS, T., MEDAL, A., and SALA, R., *An efficiency analysis with tolerance of the Spanish port system*, International Journal of Transport Economics= Rivista Internazionale de Economia dei Trasporti, vol. 31, N° 3, 2004.

- [38] LIU, C. I., JULA, H., and IOANNOU, P. A., *Design, simulation, and evaluation of automated container terminals*, Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, vol. 3, N° 1, pp. 12-26, 2002.
- [39] TOVAR, B., JARA-DÍAZ, S., and TRUJILLO-CASTELLANO, L., *A multioutput cost function for port terminals: some guidelines for regulation*, World Bank Policy Research Working Paper No.3151, 2003.
- [40] TOVAR, B., TRUJILLO, L., and JARA-DÍAZ, S., *13 Organisation and Regulation of the Port Industry: Europe and Spain*, Essays on microeconomics and industrial organisation, vol. 1262, pp. 189, 2004.
- [41] TOVAR, B., JARA-DÍAZ, S., and TRUJILLO, L., *Funciones de producción y costes y su aplicación al sector portuario. Una revisión de la literatura*, Documento de trabajo, vol. 6, 2004.
- [42] SHERROD, P., *Dtreg predictive modeling software*, Software available at <http://www.dtreg.com>, 2003.

Sobre los autores:

Nombre: Jorge Quijada-Alarcon
Correo electrónico: jorge.quijada@alumnos.upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Nicoletta González Cancelas
Correo electrónico: n.gcancelas@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Francisco Soler Flores
Correo electrónico: f.soler@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Alberto Camarero Orive
Correo electrónico: alberto.camarero@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación

Algoritmo esteganográfico de clave privada

Steganographic algorithm of private key

Anier Soria Lorente, Rayner Manuel Sánchez Reyes
y Andys Marcos Ramírez Aberasturis

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 059–072, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Feb'13; Aceptación: 31 Jun'13

1 de octubre de 2013

Resumen

La esteganografía con clave privada, es un sistema similar a sistemas criptográficos de cifras simétricas. En este artículo se presenta un nuevo algoritmo esteganográfico, el cual utiliza una clave privada, que permite generar una secuencia binaria pseudoaleatoria, indicando así los píxeles de la imagen donde serán insertados los elementos de la secuencia binaria del mensaje secreto. El algoritmo propuesto, mejora en cuanto al nivel de imperceptibilidad respecto al método de los bits menos significativos¹.

Palabras Clave: Esteganografía, Criptografía, Esteganograma, Clave privada.

Abstract

The steganography with private key, is a similar system to cryptographic systems of symmetric ciphers. In this paper a new steganographic algorithm is presented, which uses a private key, that it permits generating a binary pseudo-random sequence, indicating thus the pixels of the image where the elements of the binary sequence of the secret message will be inserted. The proposed algorithm, improves as to the level of imperceptibility in relation to the method of least significant bits².

Keywords: Steganography, Cryptography, Steganogram, Private key.

1. Introducción

Hoy en día la comunicación está estrechamente vinculada a internet y sin duda alguna se ha convertido en parte de la infraestructura del mundo moderno. Este hecho, ha posibilitado

¹ El método de los bits menos significativos, indica el procedimiento esteganográfico que a través de una operación lineal, se encarga de ocultar información en el bit menos significativo de cada byte de algún medio digital.

² The method of least significant bits, indicate the steganographic procedure than through a linear operation, it's entrusted of hiding information in the least significant bit of each byte of some digital medium.

que la información transite mediante disímiles medios de comunicación, siendo utilizada en considerables aplicaciones en la ciencia, en la ingeniería, en la industria etc... En general, se inquiera que la comunicación se realice de manera privada y segura, lo cual ha llevado consigo que los mecanismos de seguridad de la información cobren cada vez mayor importancia y sean desarrollados con gran prontitud. Con el transcurso del tiempo la seguridad en los ordenadores ha jugado un rol fundamental en nuestra sociedad, la cual se rige por la comunicación y el intercambio de información mediante Internet, siendo la comunicación e información partes fundamentales para su desarrollo.

El masivo almacenamiento de información en forma digital mediante soporte electrónico, unido al enorme desarrollo de las comunicaciones, ha propiciado un modo de trabajo y de vida del que difícilmente podríamos ya sustraernos. Los medios para el almacenamiento y la transmisión de información están disponibles a muchos y a un bajo coste. Podemos acceder de modo masivo e inmediato a diferentes bases de datos ubicadas en diferentes puntos del mundo. La sociedad demanda nuevos servicios de comunicación: banco por la red, comercio, firma digital con valor mercantil, etc.; se exige confidencialidad, integridad y accesibilidad a la información.

Existen, sin embargo, muchos problemas todavía no del todo resueltos en este universo de las comunicaciones. Existe el peligro de que nuestra información, muchas veces confidencial, pueda ser accedida por personas no deseadas: consultada, modificada, destruida; también podemos ser perjudicados de forma que se desbarate, por un agente externo, los protocolos de autorizaciones, siendo impedidos a acceder a nuestra propia información. La información en tránsito es fácilmente interceptada. Frente al deseo de confidencialidad podemos sufrir un ataque de interceptación; frente al deseo de autenticación podemos ser suplantados; frente al deseo de integridad de nuestra información podemos sufrir modificaciones e incluso destrucción de nuestra información; frente al deseo de autenticidad podemos sufrir ataques de falsificación. Es por ello que se han adoptado diferentes formas para la protección de la información, ya que los riesgos de ser interceptada son muy altos, pudiendo así ser plagiada o modificada. Por tal motivo el uso de la Criptografía y la Esteganografía [1, 2, 3, 7, 10, 17] ha jugado un papel significativo para la seguridad de la información.

La esteganografía consiste en ocultar en el interior de una información, aparentemente inocua, otro tipo de información (cifrada o no), de manera tal, que se puede definir la esteganografía como el conjunto de técnicas que permiten ocultar cualquier tipo de información de tal forma que la presencia de un mensaje no pueda ser detectada [11]. De modo que la esteganografía constituye un conjunto de técnicas las cuales permiten ocultar o camuflar cualquier tipo de datos dentro de información considerada como válida, en cuanto a este artículo imágenes digitales. La esteganografía permite burlar la vigilancia electrónica en Internet, o simplemente que terceras personas no tengan acceso a dicha información. Con el avance de la informática y de Internet se ha propiciado un marco ideal para que los métodos esteganográficos alcancen un elevado auge. La esteganografía actual, se basa en ocultar información binaria en los bits que juegan un papel redundante en un archivo. Los bits que forman el mensaje a ocultar se insertan en el archivo ya existente, procurando que el resultante después de la inserción sea similar al original.

La esteganografía utiliza medios digitales, tales como archivos de texto, audio, imagen y video [5, 6, 7, 8, 14], que son utilizados como el archivo de transporte para ocultar la información, a este medio se le conoce como contenedor, cubierta o estego-medio. Cuando el mensaje secreto es ocultado en el estego-medio mediante una técnica esteganográfica se obtiene un estegograma que contendrá el mensaje oculto en el estego-medio. Luego una vez que los datos han sido ocultados, la información puede ser transferida a través de los medios de comunicación inseguros.

Entre las técnicas más usadas en la esteganografía se encuentra las correspondientes al dominio espacial [4]. El sistema matricial de coordenadas de una imagen es lo que se denomina

dominio espacial, de manera que el término dominio espacial se refiere al conjunto de píxeles que componen a una imagen. La aplicación de la esteganografía en el dominio espacial, radica en que los algoritmos son utilizados en la manipulación de los píxeles y en la inserción de la información secreta en los bits menos significativos o bien de mayor redundancia. Los métodos del dominio espacial implican la generación de una nueva imagen modificando el valor del píxel en una simple localización, basándose en una regla global aplicada a cada localización de la imagen original. El proceso consiste en obtener el valor del píxel de una localización dada en la imagen, modificándolo por una operación lineal o no y colocando el valor del nuevo píxel en la correspondiente localización de la nueva imagen. El proceso se repite para todas y cada una de las localizaciones de los píxeles en la imagen.

Otra de las técnicas dentro de la esteganografía tiene que ver con el dominio de la frecuencia, la cual está vinculada a los cambios de las altas y bajas frecuencias de la imagen, de forma tal, que las altas frecuencias como los bordes, las líneas y ciertos tipos de ruidos son utilizados para ocultar información. Dentro de esta técnica se utilizan transformadas tales como la de Fourier [13], la transformada discreta de los cosenos [6, 14, 19, 20] y la de wavelets [5, 6, 15, 18]. Existen otros trabajos de gran relevancia dentro de la esteganografía, los cuales se pueden encontrar en [9, 12, 16, 19, 21].

En este artículo se presenta un nuevo algoritmo correspondiente al dominio espacial, el cual se expondrá en la próxima sección. Además, el mismo hace uso de una clave privada que propiciará el mensaje secreto sólo a aquel receptor que porte de la misma; dicha clave genera una secuencia binaria pseudoaleatoria, que indica aquellos píxeles de la imagen, donde serán insertados los elementos de la secuencia binaria del mensaje secreto. Para finalizar, en la última sección, se expondrán los resultados conseguidos a partir de dicho algoritmo y luego se darán las conclusiones a las que fueron arribadas.

2. Desarrollo del algoritmo esteganográfico

Una clave privada en un sistema esteganográfico es similar al cifrado simétrico, donde el remitente escoge un estego-medio y oculta el mensaje mediante una clave privada. De forma tal, que si la clave privada utilizada para ocultar la información secreta es conocida por el receptor, el mismo puede extraer la información secreta mediante el proceso de extracción. Evidentemente, la esteganografía de clave privada requiere del intercambio de dicha clave, aquí es precisamente, donde entra a jugar un papel fundamental, la criptografía asimétrica o de clave pública [10]³. A continuación se describen los pasos necesarios para implementar el algoritmo propuesto en este artículo, véase la figura 1. Nótese que en el algoritmo que sigue a continuación, se omite el paso de transformar el mensaje secreto en una secuencia binaria, así como la entrada de la imagen original o estego-imagen por parte del usuario, pues claramente estos pasos se encuentran de forma implícita.

2.1. Proceso de inserción

1.- Procesar la clave.

1.1.- Solicitar una clave de 64 bits al usuario. La clave se puede introducir directamente o puede ser el resultado de alguna operación anterior.

1.2.- Calcular 15 subclaves.

³ La criptografía asimétrica o de clave pública es el método criptográfico, que utiliza un par de claves para el intercambio de información. Ambas claves pertenecen al emisor; una de ellas es pública y la otra es totalmente privada. Además, los métodos criptográficos garantizan que este dúo de claves sólo se pueda generar una vez, de modo que se puede asumir que no es posible que dos personas o entidades hayan obtenido casualmente la misma pareja de claves.

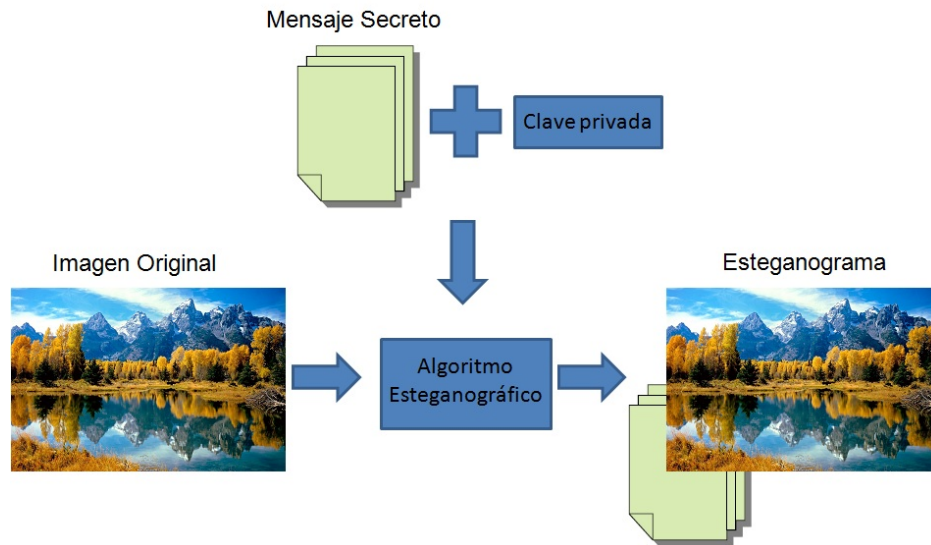


Figura 1. Proceso de inserción.

- 1.2.1.- De cada uno de los ocho bytes de la clave entrada por el usuario se elimina el octavo bit, el menos significativo. Para ello hay que realizar la siguiente permutación en la clave de 64 bits

45	21	60	12	23	49	33	5
62	57	3	38	1	19	54	9
15	20	7	50	43	4	46	31
58	36	53	22	41	35	29	55
27	14	44	63	6	51	34	11
42	28	61	17	13	37	52	30
10	39	25	2	59	18	26	47

reduciéndose la misma a 56 bits. El bit 1, el más significativo de la clave transformada, es el bit 45 de la clave original, el bit 2 pasa a ser el bit 21, etc...

- 1.2.2.- Dividir la clave permutada en dos mitades de 28 bits cada una, $c_1^{(1)}$ el bloque que contiene los 28 bits de mayor peso y $c_1^{(2)}$ los 28 bits restantes.
- 1.2.3.- Calcular las 15 subclaves, comenzando a partir de $i = 1$.
- 1.2.3.1.- Rotar 1 o 2 bits a la izquierda de $c_i^{(1)}$ y $c_i^{(2)}$ para conseguir $\tilde{c}_i^{(1)}$ y $\tilde{c}_i^{(2)}$ respectivamente. El número de bits de desplazamiento está dado mediante $1 + \text{mod}(i - 1, 2)$, $i = 1, \dots, 15$.
- 1.2.3.2.- Concatenar $\tilde{c}_i^{(1)}$ y $\tilde{c}_i^{(2)}$ y permutar el resultado mediante la correspondiente compresión $\text{mod}(i, 2)$

30	52	7	19	39	55	28	13
4	18	53	29	47	9	32	6
43	24	40	17	50	2	15	1
5	27	54	14	49	37	38	22
31	12	48	23	33	10	26	25
42	3	41	34	8	35	51	11

37	34	15	23	48	22	42	47
49	54	43	24	55	3	35	40
19	11	14	44	10	29	45	52
21	25	31	9	41	28	33	1
13	32	4	51	17	8	39	30
27	38	20	12	5	53	50	7

De esta manera se obtiene la subclave C_i , que tiene una longitud de 48 bits.

1.2.3.3.- Regresar a 1.2.3.1, hasta que se haya calculado la última subclave C_{15} .

2.- Conseguir una secuencia binaria cuya cantidad de bits iguales a 1 coincida con la longitud de la secuencia binaria del mensaje secreto. Para ello se deben seguir los siguientes pasos:

2.1.- Hacer $k = 1$. Denotar el número de bits de la secuencia binaria de la clave introducida por el usuario mediante NumBits1.

2.1.1.- Aplicar la correspondiente expansión mod(NumBits1, 8)

37	17	9	10	40	23	14	18
3	42	39	35	15	32	24	28
12	22	48	47	19	7	44	16
30	27	20	42	25	33	2	31
4	23	12	5	26	21	38	43
41	34	3	7	1	11	31	37
6	36	29	45	46	13	28	17
27	19	11	8	3	29	1	47

(1)

47	1	39	2	48	40	31	11
9	18	3	23	21	8	35	25
31	14	20	12	38	37	16	27
36	46	7	17	32	48	10	33
34	15	28	22	24	2	42	5
23	29	43	13	41	26	12	39
45	27	29	11	44	30	17	4
18	37	1	19	7	9	6	47

(2)

13	48	15	29	37	10	24	5
11	7	47	21	12	27	3	35
21	41	31	44	30	19	39	23
2	34	17	25	22	46	36	31
33	43	9	4	14	28	17	4
7	11	3	8	32	19	47	26
40	23	45	38	6	12	42	8
18	42	37	12	4	16	20	2

(3)

17	8	18	38	11	42	21	1
29	46	23	47	31	39	43	35
23	28	17	37	22	45	7	20
13	33	15	32	6	44	29	12
37	16	27	26	21	5	34	36
9	3	11	10	2	27	40	31
30	15	19	48	8	3	12	4
37	47	1	24	7	25	14	41

(4)

7	22	38	18	33	26	48	39
8	45	28	42	35	24	32	12
27	47	21	13	2	9	23	42
46	3	41	10	14	41	37	11
11	34	7	31	1	27	17	3
30	31	36	17	21	12	19	44
47	29	40	38	23	29	16	4
5	20	6	15	43	37	1	25

(5)

29	35	12	11	9	41	24	14
29	15	1	19	32	22	18	27
33	25	43	1	2	23	45	31
5	40	47	17	38	39	17	37
36	21	13	7	3	16	28	48
21	6	31	44	30	38	10	12
34	7	8	4	27	42	46	26
42	20	23	41	11	3	47	37

(6)

23	36	16	44	39	12	19	2
35	46	33	20	3	7	29	8
13	18	5	14	17	22	31	47
34	40	27	4	48	41	37	12
27	31	6	30	28	43	47	42
21	41	23	3	17	38	1	7
26	24	21	42	9	10	15	45
32	11	1	37	38	11	25	29

(7)

20	1	10	47	7	29	4	16
37	19	35	9	37	41	44	26
30	23	25	15	24	2	12	11
14	38	22	8	38	42	48	7
47	46	5	17	31	39	23	27
3	33	6	28	18	21	1	17
42	34	43	41	13	11	45	29
36	3	32	27	21	40	12	31

(8)

a la secuencia binaria $C_k \oplus C_{k+1}$ extendiendo la misma a una secuencia binaria de 64 bits, donde $\oplus$ es la siguiente operación binaria ($0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ y $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$).

- 2.1.2.- Denotar por seq1 al resultado conseguido en 2.1.1.
- 2.2.- Mientras que la cantidad de bits iguales a 1 en la secuencia binaria seq1 sea menor a la longitud de la secuencia binaria del mensaje, proseguir.
 - 2.2.1.- Si $k < 14$ entonces:
 - 2.2.1.1.- Hacer $k = k + 1$.
 - 2.2.1.2.- Concatenar seq1 con la secuencia binaria resultante de aplicar la correspondiente expansión mod(NumBits1, 8) de (1)-(8) a $C_k \oplus C_{k+1}$.
 - 2.2.1.3.- Tomar seq1 como el resultado conseguido en 2.2.1.2.
 - 2.2.2.- Si no se cumple la condición 2.2.1, entonces concatenar la subclave C_{15} con los dos bytes intermedios de la subclave C_{14} formando así una nueva clave de 64 bits y luego a partir de la misma generar 15 subclaves usando los pasos de 1.2 hasta 1.2.3.3.
 - 2.2.2.1.- Luego, hacer $k = 1$.

- 2.2.2.2.- Aplicar el paso 2.2.1.2.
- 2.2.2.3.- Tomar seq1 como el resultado conseguido en 2.2.2.2. Proseguir de esta manera hasta que se cumpla la condición 2.2.
- 2.3.- Extraer la sub-secuencia binaria de seq1 partiendo de su primer bit, cuya cantidad de bits iguales a 1 sea exactamente la longitud de la secuencia binaria del mensaje secreto.
- 3.- Hacer seq2 igual a la secuencia binaria resultante del paso 2.3. Si la longitud de la secuencia seq2 es menor ó igual que $3mn$ (siendo m y n las dimensiones de la imagen original), entonces proseguir de la siguiente manera.
 - 3.1.- Recorrer cada uno de los bytes de cada píxel de la imagen original e insertar en los correspondientes bits menos significativos, los bit de la secuencia binaria del mensaje secreto, siempre y cuando, el correspondiente bit de la secuencia seq2 sea igual a 1, este proceso se extiende hasta el último bit de la secuencia seq2. Es decir, la secuencia seq2 controla e indica la localización del bit menos significativo de cada byte de la imagen original, donde se insertará el bit de la secuencia binaria del mensaje secreto.

2.2. Proceso de extracción

El proceso de extracción se realiza del siguiente modo: el receptor debe conocer la clave compuesta por aquella mediante la cual se ocultó el mensaje secreto en la imagen original y la longitud de la secuencia binaria de dicho mensaje. Luego, se debe realizar el mismo proceso dado por los pasos del 1 hasta el 2.3, para así conseguir la secuencia binaria seq2 e inmediatamente, a partir de la misma, extraer el mensaje secreto oculto dentro del esteganograma. Para ello, se debe recorrer cada uno de los bytes de cada píxel del esteganograma hasta terminada la longitud de la secuencia binaria seq2 y en cada paso donde el bit de seq2 sea igual a 1, extraer el bit menos significativo del correspondiente byte, véase la figura 2.

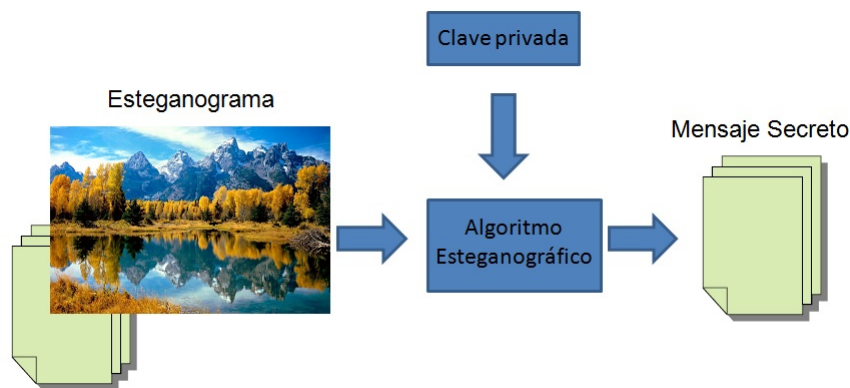


Figura 2. Proceso de extracción.

3. Evaluación y Resultados

En esta sección se presentan las evaluaciones y resultados del algoritmo esteganográfico propuesto.

La eficiencia en la protección de la información mediante la esteganografía, radica precisamente en el uso de un algoritmo adecuado que posibilite de forma correcta la inserción de

datos, donde uno de los principales factores a tener en cuenta es el nivel de imperceptibilidad, debido a que un sistema esteganográfico tiene que generar un esteganoograma suficientemente inocente, ya que no debe de levantarse ninguna sospecha. Por tanto, el grado de distorsión o imperceptibilidad de un esteganoograma respecto a la imagen original juega un papel fundamental.

Una medida de distorsión es la conocida PSNR (Relación Señal a Ruido Pico) en el esteganoograma con respecto a la imagen original. El PSNR es muy común en el proceso de una imagen, su utilidad reside en dar una relación del grado de supresión de ruido entre la imagen original y el esteganoograma, proveyendo de esta manera una medida de calidad. El PSNR está dado en unidades llamadas decibelios (dB) y se escribe de la siguiente forma

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{256^2}{\text{MSE}} \right),$$

donde MSE está dado por el error cuadrático medio

$$\text{MSE} = \frac{1}{3mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 \|I(i, j, k) - E(i, j, k)\|^2,$$

siendo I la imagen original y E el esteganoograma.

A continuación, se mostrarán algunos de los experimentos realizados a imágenes RGB de 24 bits, donde se puede observar a simple vista, que la imagen original y el esteganoograma no muestran diferencias significativas. Además, como se podrá notar, el nivel de imperceptibilidad de los esteganogramas generados a partir del algoritmo propuesto, mejora cuantitativamente respecto al conseguido a partir del método de los bits menos significativos; y esto es comprobable, a través de los correspondientes PSNR en cada uno de los experimentos, véase las figuras (3, 4, 5, 6, 7, 8).

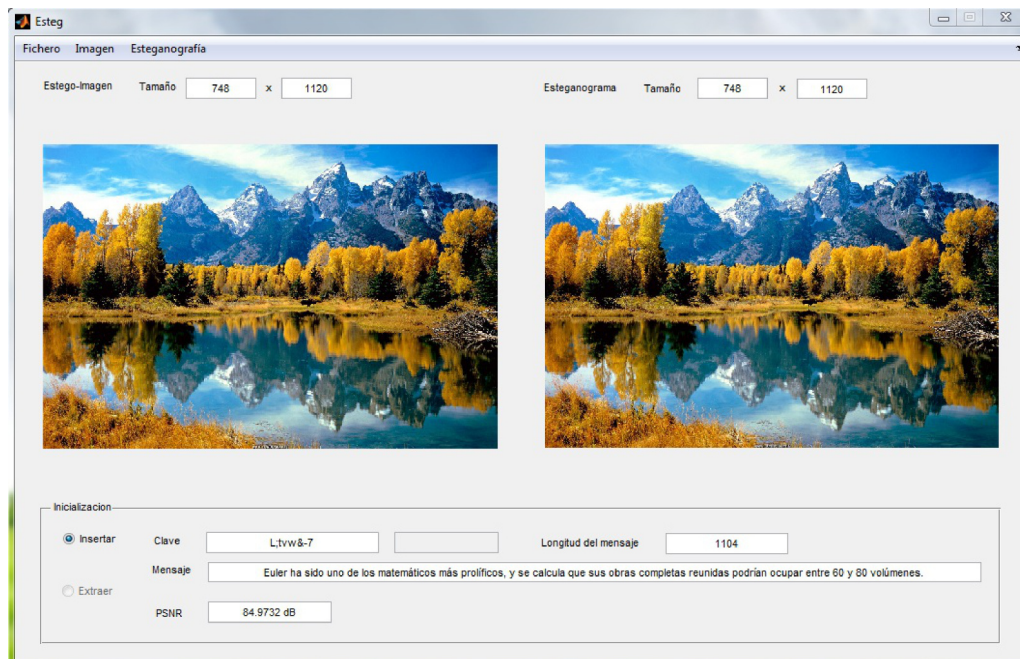


Figura 3. A la izquierda se muestra la imagen original mientras que a la derecha se muestra el esteganoograma para la clave privada $L; tvw8-7$.

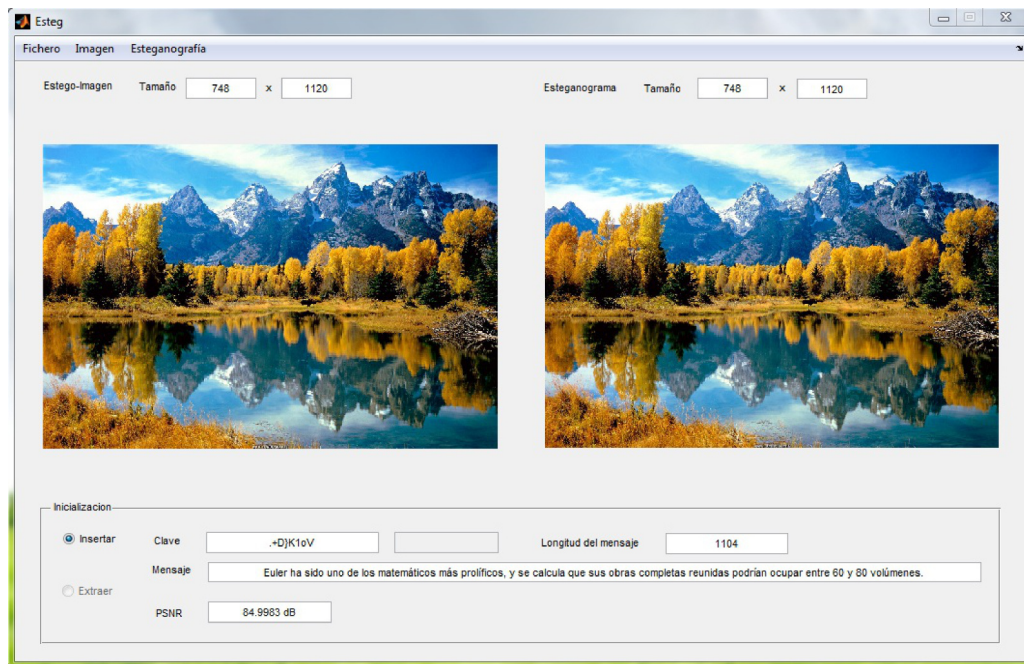


Figura 4. A la izquierda se muestra la imagen original mientras que a la derecha se muestra el esteganograma para la clave privada $.-D}K1oV$.

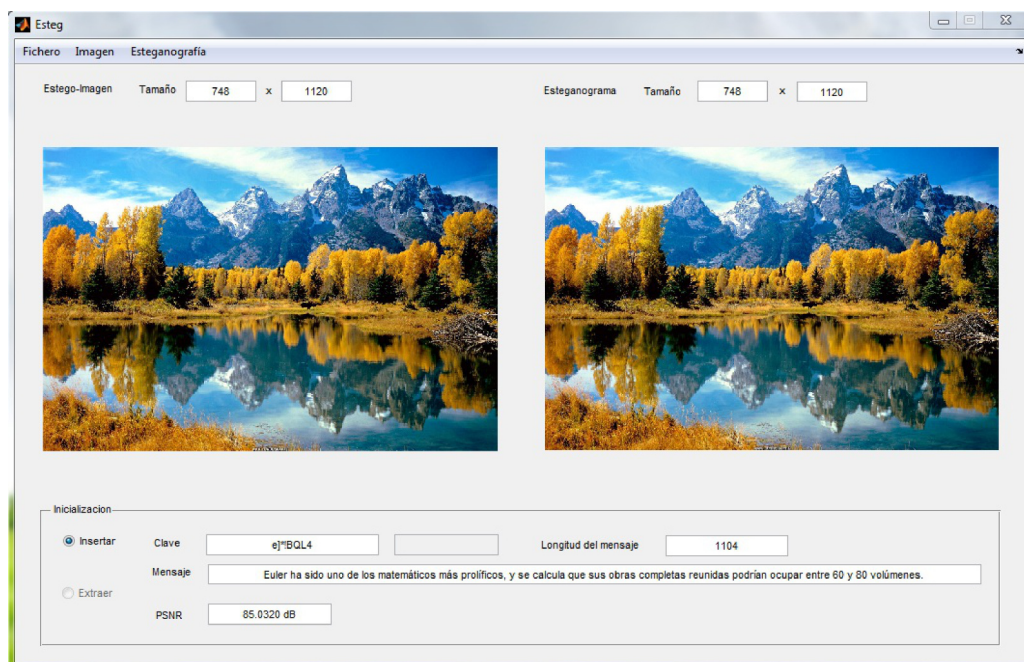


Figura 5. A la izquierda se muestra la imagen original mientras que a la derecha se muestra el esteganograma para la clave privada $e}*!BQL4$.

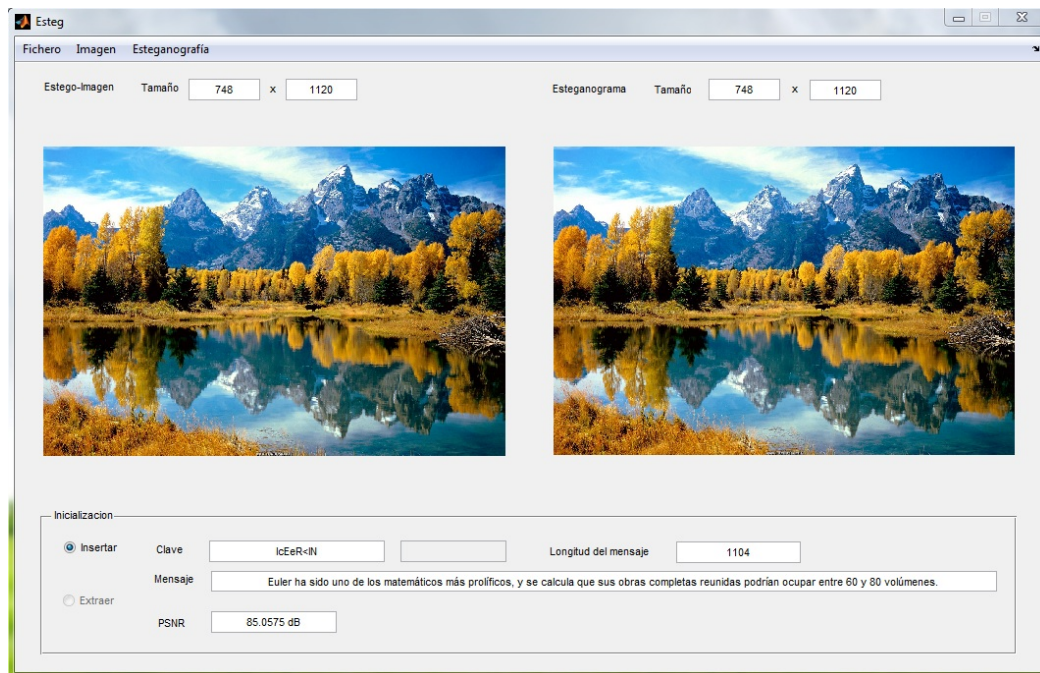


Figura 6. A la izquierda se muestra la imagen original mientras que a la derecha se muestra el esteganograma para la clave privada $IcEeR<IN$.

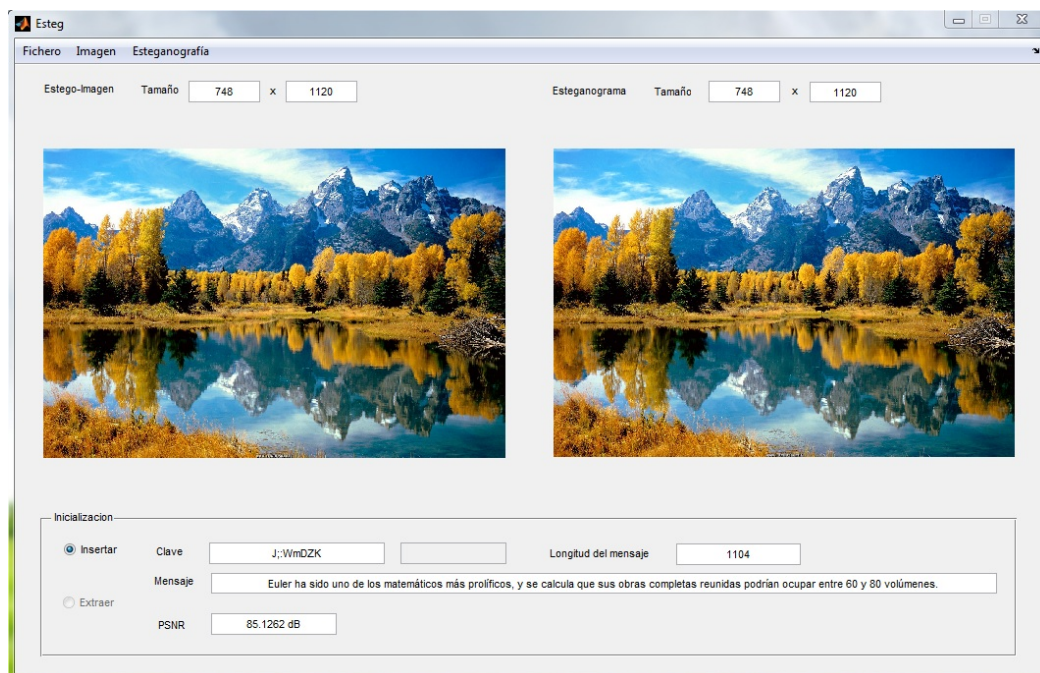


Figura 7. A la izquierda se muestra la imagen original mientras que a la derecha se muestra el esteganograma para la clave privada $J;:WmDZK$.

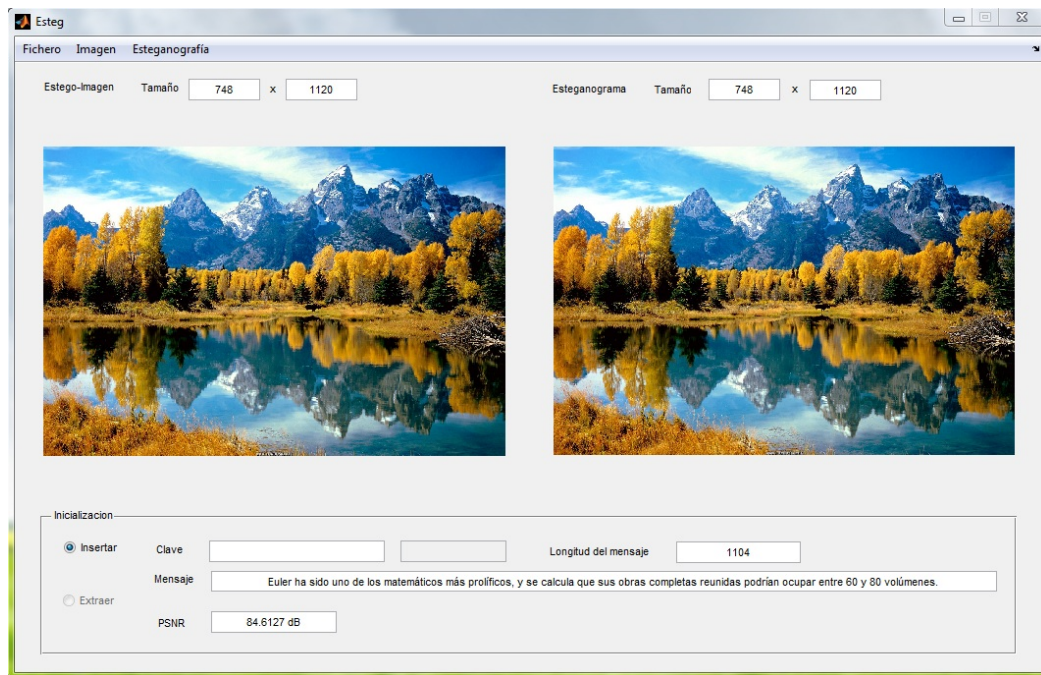


Figura 8. A la izquierda se muestra la imagen original mientras que a la derecha se muestra el esteganograma conseguido a partir del método de los bits menos significativos.

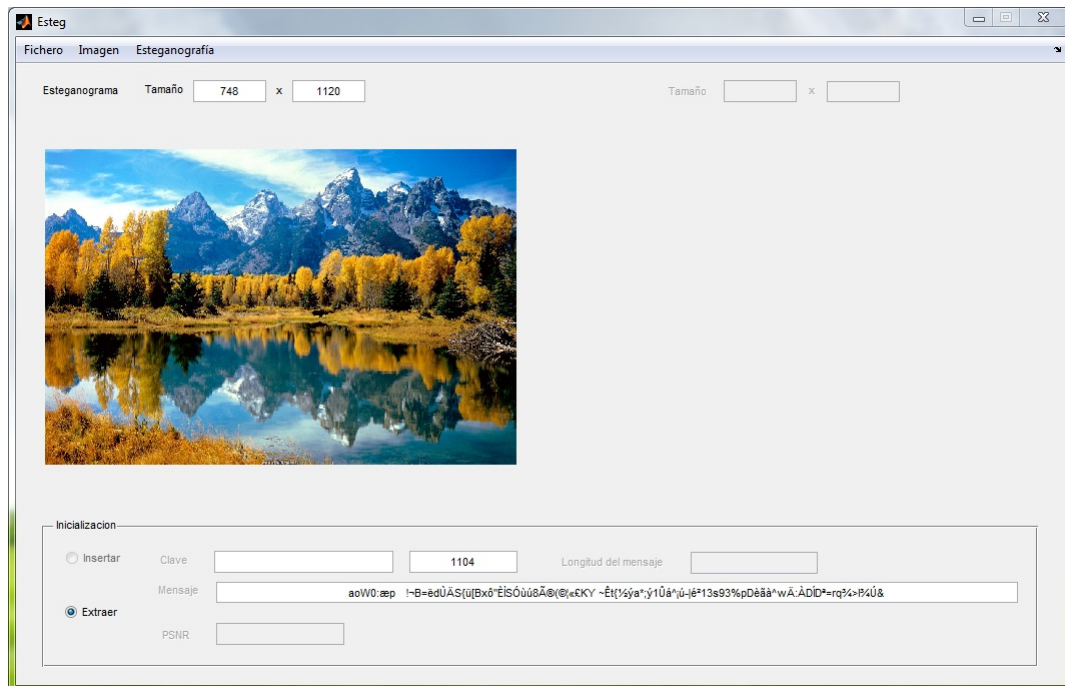


Figura 9. Resultado tras aplicarle a un esteganograma de clave privada el método de los bits menos significativos.

4. Conclusiones

El algoritmo propuesto, permite a través de la clave privada, generar una secuencia binaria pseudoaleatoria, indicando de este modo las posiciones de los píxeles de la imagen, donde

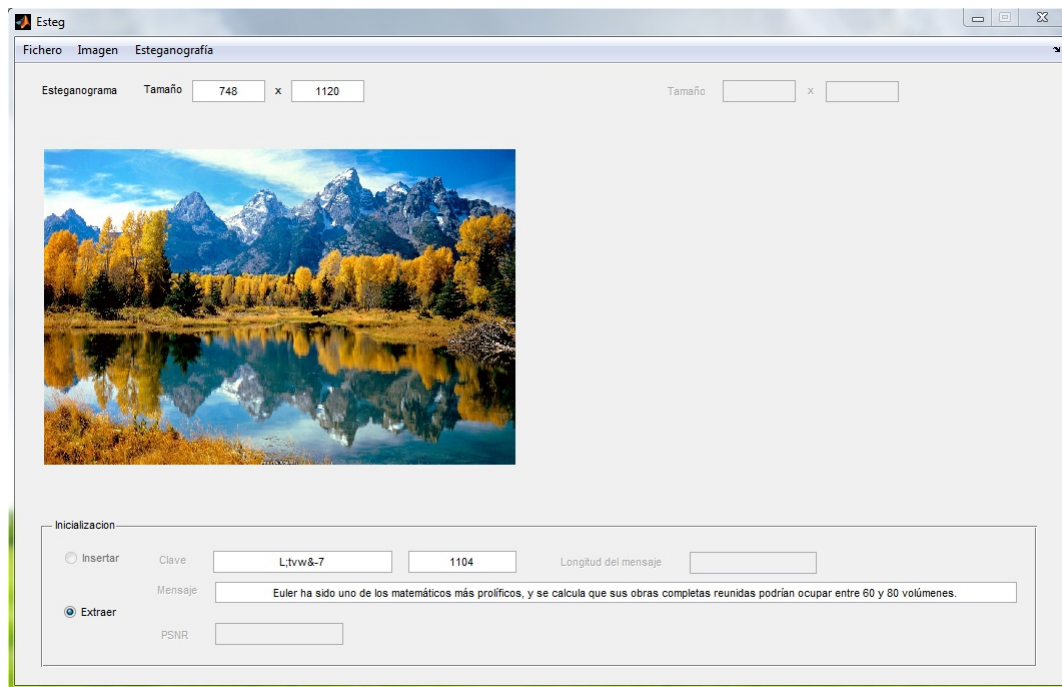


Figura 10. Resultado tras aplicarle al esteganograma de clave privada $L; tvw\&-7$, el algoritmo propuesto para dicha clave.

serán insertados los elementos de la secuencia binaria del mensaje secreto, posibilitando de esta manera, que no se aglomeren los cambios realizados en la imagen y por consiguiente, dando lugar a que la imagen original y el esteganograma no muestren diferencias notorias.

Nótese que, cada clave privada distribuye de manera distinta los bits de la secuencia binaria del mensaje secreto dentro de la imagen original, obteniéndose así diferentes esteganogramas, lo que constituye una ventaja clara respecto al método de los bits menos significativos, pues si se intentara extraer la información oculta a través de dicho método, el resultado sería un total fracaso, véase la figura 9, sólo se alcanzaría el resultado adecuado, si el receptor porta de la clave privada para poder extraer la información oculta, véase la figura 10. Por lo tanto, el algoritmo esteganográfico aquí propuesto es válido para imágenes RGB de 24 bits.

Referencias

- [1] ANDERSON, R. J. and PETITCOLAS, A. P., *On the limits of steganography*, IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 16, N° 4, pp. 474–481, May 1998.
- [2] PETITCOLAS, A. P., ANDERSON, R. J. and KUHN, M., *Information-Hiding: A Survey*, Proc. of the IEEE, Vol. 87, N° 7, pp. 1019–1022, July 1999.
- [3] ARTZ, D., *Digital Steganography: hiding data within data*, IEEE Internet Computing, Vol. 5, N° 3, pp. 75–80, 2001.
- [4] CHANDRAMOULI, R. and MEMON, N., *Analysis of LSB based image steganography techniques*, Proceedings of the International Conference on Image Processing, pp. 1019–1022, 2001.
- [5] CARVAJAL-GAMEZ, B. E., FUNES, G. and LOPEZ-BONILLA, J. L., *Esteganografía para Imágenes RGB: Factor de Escalamiento*, Journal of Vectorial Relativity, Vol. 4, N° 3, pp. 66–77, 2009.

- [6] CARVAJAL-GAMEZ, B. E. and LOPEZ-BONILLA, J. L., *Técnica Esteganográfica para ocultar un video dentro de otro utilizando la Transformada Wavelet Discreta*, Journal of Vectorial Relativity, Vol. 4, N° 2, pp. 54–61, 2009.
- [7] CHEDDAD, A., CONDELL, J., CURRAN, K. and MC KEVITT, P., *Digital Image Steganography: Survey and Analyses of Current Methods*, Signal Processing, Vol. 90, N° 3, pp. 727–752, 2010.
- [8] FIORI, D., PONTIN, R. and GOULARTE, R., *Esteganografia em Vídeos: Um Estudo sobre o Estado da Arte*, Instituto de Ciencias Matemáticas e de Computação, ISSN: 0103-2569, N° 292, 2007.
- [9] GABRIEL, A. and VALDES, J., *Esteganografía en Dispositivos Móviles*, III Congreso Colombiano de Computación, Medellín, pp. 23–25, 2008.
- [10] GONZALEZ, S. and MARTINEZ, C., *Las matemáticas de la seguridad*, ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura, CLXXXIII 725, ISSN: 0210-1963, pp. 419–425, 2007.
- [11] JOHNSON, F. and JAJODIA, S., *Exploring steganography: Seeing the unseen*, IEEE Computer Mag., pp. 26–34, February 1998.
- [12] JOACHIM, J. and BAUML, R., *A Communication Approach to Image Steganography*, Proceedings of SPIE, Vol. 4675, January 2002.
- [13] MCKEON, R., *Steganography using the Fourier Transform and Zero-Padding Aliasing Properties*, Member, IEEE, May 2006.
- [14] NEELAMANI, R., QUIROZ, R., FAN, Z., DASH, S. and BARANIUK, G., *JPEG Compression history estimation for color images*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 15, N° 6, pp. 1365–1378, 2006.
- [15] OREA-FLORES, I., ACEVEDO, M. and PLOPEZ-BONILLA, J. L., *Wavelet and Discrete Transform for Inserting Information into BMP Images*, Anziam Journal, Vol. 48, N° 1, pp. 23–35, 2006.
- [16] RADHAKRISNAN, R., KHARRAZI, M. and MEMON, N., *Data Masking: A New Approach for Steganography?*, Journal of VLSI Signal Processing, Vol. 41, pp. 293–303, DOI: 10.1007/s11265-005-4153-1, 2005.
- [17] SKORIC, B., *Steganography from weak cryptography*, arXiv:0804.0659v1 [cs.CR] 4, April 2008.
- [18] TORRES, S., NAKANO, M. and PEREZ, H., *An image steganography systems based on BPCS and IWT*, Wseas Trans. on Communications, Vol. 5, N° 6, pp. 814–820, 2006.
- [19] TAKAYUKI, I., KAZUMI, Y., HIDEKI, N. and MICHIHARU, N., *Performance improvement of JPEG2000 steganography using QIM*, Journal of Communication and Computer, Vol. 6, N° 1, pp. 1548–7709, 2009.
- [20] VELASCO, C., LOPEZ, J. and NAKANO, M., *Esteganografía en una imagen digital en el dominio DCT*, Científica, Vol. 11, N° 4, pp. 169–176, 2007.
- [21] WESTFELD, A., *A steganographic algorithm*, in Proceedings of the 4th International Workshop on Information Hiding (IH '01), Vol. 2137 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 289–302, April 2001.

Sobre los autores:

Nombre: Anier Soria Lorente

Correo electrónico: asorial@udg.co.cu

Institución: Universidad de Granma, Cuba.

Nombre: Rayner Manuel Sánchez Reyes

Correo electrónico: rsanchez@udg.co.cu

Institución: Universidad de Granma, Cuba.

Nombre: Andys Marcos Ramírez Aberasturis

Correo electrónico: andysramirezaberasturis@yahoo.es

Institución: Universidad Carlos III de Madrid, España.

Investigación

Posibilidades de resolución de problemas de ingeniería por el método de diferencias finitas

Possibilities of engineering problem solving by the method of finite differences

Rubén Galindo Aires

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 073–096, ISSN 2174-0410

Recepción: 29 Abr'13; Aceptación: 8 Jul'13

1 de octubre de 2013

Resumen

La obtención de la solución de determinados problemas de ingeniería implica la resolución de ecuaciones en derivadas parciales que tienen que ser evaluadas numéricamente. El método de resolución numérica más extendido es sin duda el método de los elementos finitos, que ha superado al método de las diferencias finitas principalmente por su sencillez conceptual y por las limitaciones de este último método para adaptarse a mallas irregulares; sin embargo, diversos autores han seguido desarrollando y aplicando el método de diferencias a todo tipo de problemas. En este artículo se presenta una aplicación numérica al cálculo estructural de una placa, que se resuelve por el método de las diferencias finitas y que permite obtener soluciones óptimas incluso para el problema de carga localizada, poniendo de manifiesto la idoneidad de aplicación de métodos de diferencias generalizados en su resolución y cuya formulación se presenta. En particular se resuelve 3 casos de aplicación: placa apoyada en sus cuatro lados bajo carga uniforme, placa apoyada en sus cuatro lados bajo carga puntual en el centro y placa empotrada en sus cuatro lados bajo carga uniforme.

Palabras Clave: Resolución numérica, Método de diferencias finitas, Diferencias finitas generalizadas, Malla irregular.

Abstract

Obtaining the solution of specific engineering problems involves solving partial differential equations that have to be evaluated numerically. The finite element method is certainly the numerical resolution method most widely, which has outperformed the finite difference method mainly for its conceptual simplicity and by the limitations of the latter method to adapt to irregular meshes, however, several authors have continued to develop and implement the method of differences to all kinds of problems. This article presents a numerical application of the structural problem to calculate plates, which is solved by the finite difference method and allows optimal solutions even for localized load problems, demonstrating the suitability of application of generalized difference methods and

presenting its formulation. In particular, three applications are resolved: plate with all four sides simply supported under uniform load, plate with all four sides simply supported under concentrated load at the center and plate with all four sides embedded under uniform load.

Keywords: Numerical resolution, Finite difference method, generalized finite differences, irregular mesh.

1. Introducción

La mecánica de medios continuos ha permitido el planteamiento de las ecuaciones que rigen fenómenos de muchas ramas de la ingeniería: hidráulica, estructuras, geotecnia, etc. La resolución de problemas de ingeniería, una vez planteadas las ecuaciones, se reducen en muchas ocasiones a su resolución numérica; es importante comprender que no es en general posible resolver mediante métodos exactos los sistemas de ecuaciones obtenidos y es preciso recurrir a técnicas numéricas. Incluso en los casos más elementales, en los que nos es posible obtener la solución mediante desarrollos en serie, la calidad numérica de estas soluciones no es mejor que las que se obtienen con un método aproximado, ya que el truncamiento de una serie puede llevar a errores de precisión significativos.

El método de las diferencias finitas como método de resolución de problemas planteados en ecuaciones en derivadas parciales ha ido perdiendo fuerza en aplicaciones numéricas frente a otros métodos de resolución, sobre todo el método de los elementos finitos. Sin embargo, son muchos los autores que han seguido confiando en el desarrollo del método de diferencias finitas, proponiendo diferentes soluciones para poder aplicar las diferencias finitas a cualquier tipo de dominio. Así, de las limitaciones del método clásico de diferencias finitas se proyecta el método de las diferencias finitas generalizadas, aplicable a cualquier dominio con distribución irregular de puntos.

En este trabajo se aplica el método de las diferencias finitas a varios problemas habituales de ingeniería, se indica su alcance, su comparación con el método de los elementos finitos y se expone la línea de mejora de los métodos de diferencia finitas clásicos a los de diferencias finitas generalizadas.

Con el propósito anterior se estudia el problema estructural de la placa de Kirchhoff en varios casos de carga y con diversas condiciones de contorno, comparando el resultado con el obtenido mediante el método de los elementos finitos obtenido a través del programa SAP 2000.

2. El método de las diferencias finitas

Las ecuaciones en derivadas parciales o los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales rigen muchos fenómenos de ingeniería según establecen los principios físicos y sus correspondientes desarrollos matemáticos.

Se topa con importantes dificultades, en la resolución de este tipo de ecuaciones y sus condiciones de contorno aún con coeficientes constantes, con lo que se recurre a la búsqueda de soluciones aproximadas. Entre los diversos métodos que permiten la obtención de este tipo de solución uno de los más clásicos es el denominado de diferencias finitas. Dicho método se

basa en discretizar de forma regular el dominio, estableciendo un conjunto finito de puntos interiores y de la frontera donde se va a calcular el valor de la función. Para hallar el valor aproximado de la función en dichos puntos llamados nodos, es necesario sustituir las derivadas parciales para cada punto por cocientes de diferencias entre los valores de la solución en diferentes puntos, obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. A las expresiones de transformación de cada operador diferencial en cocientes de diferencias, se le denomina fórmula en diferencias finitas.

Las fórmulas en diferencias clásicas centradas, para una función f donde se define como h y k los incrementos de las variables de dicha función x e y respectivamente, tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f(x, y+k) - f(x, y-k)}{2k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}\end{aligned}$$

Dichas ecuaciones se pueden generalizar para órdenes superiores, que sustituyendo en las ecuaciones diferenciales y de contorno, permiten obtener un sistema de ecuaciones algebraicas, con tantas ecuaciones como incógnitas, de igual número que nodos tenga el dominio. Al resolver el sistema se obtienen valores aproximados de la función en los puntos del dominio discretizado.

Este método de resolución tiene la gran ventaja de su planteamiento aunque tiene limitaciones. Por un lado la malla debe ser regular, ya que en caso contrario para cada malla se debería encontrar una fórmula en diferencias finitas; por otro lado, el número de nodos y la selección de dichos nodos en la malla para la obtención de las fórmulas en diferencias finitas, es fijo.

Al discretizar un dominio, surgen como más habituales el método de diferencias finitas clásico de cinco nodos y de nueve nodos. En ambos métodos la frontera debe ser una poligonal cerrada de lados contiguos perpendiculares, los puntos de estimación deben estar repartidos de forma regular y los nodos que rodean al nodo central debe ser 4 u 8 pero no arbitrario.

Para el método de diferencias finitas de cinco nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario), de manera que se elige una discretización del dominio de igual paso h en ambas variables y llamando f_i al valor de la función f a aproximar en el nodo i , se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1 - f_3}{2h} \\ \frac{f_2 - f_4}{2h} \\ \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{2h} \\ \frac{f_1 + f_4 - 2f_0}{2h} \\ \frac{f_1 + f_4 - 2f_0}{2h} \end{bmatrix}$$

Análogamente, para el método de diferencias finitas de nueve nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario) se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_1 + \frac{f_2}{20} - \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_5 - \frac{f_6}{20} + \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_3 + \frac{f_2}{20} + \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_7 - \frac{f_6}{20} - \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{5f_1}{6} + \frac{f_2}{12} - \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} + \frac{5f_5}{6} + \frac{f_6}{12} - \frac{f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{f_1}{6} + \frac{f_2}{12} + 5 \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} - \frac{f_5}{6} + \frac{f_6}{12} + \frac{5f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{4h^2} (f_2 - f_4 + f_6 - f_8) \end{bmatrix}$$

3. El método de las diferencias finitas generalizadas

El método de las diferencias finitas generalizadas [1] supone una evolución del método clásico de diferencias finitas, el cual permite resolver problemas donde la nube de puntos generada sea irregular. Se plantea el método para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, evidentemente su generalización es inmediata, al igual que hemos generalizado el método de diferencias finitas clásico.

Sea un problema gobernado por una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en el dominio bidimensional:

$$L_2[U] = f \quad \text{en } \Omega \quad (3.1)$$

con las condiciones de contorno:

$$L_1[U] = g \quad \text{en } \Gamma \quad (3.2)$$

donde la función U es al menos dos veces diferenciable en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con frontera Γ . L_2 es una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden, L_1 es una ecuación lineal diferencial de primer orden, mientras que f y g son dos funciones conocidas.

Se establecen un conjunto de nodos que se reparte en todo el dominio, de tal forma que a cada nodo del dominio se le asocia una estrella, es decir un conjunto de nodos de influencia alrededor de un nodo central.

El número y la posición de los nodos en cada estrella son factores decisivos que afectan a la aproximación mediante fórmulas en diferencias finitas. Se utilizará una nube de nodos lo más regular posible buscando un buen condicionamiento de las estrellas. El criterio de

selección de nodos empleado será el de los cuatro cuadrantes, es decir, el área alrededor del punto central se divide en 4 sectores correspondientes a los cuadrantes de un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el nodo central. En cada cuadrante se seleccionan los dos nodos más cercanos (se seleccionan dos nodos para tener un conjunto de nodos alrededor del central de 8 que parece ser un número óptimo [1]), si esto no fuera posible (por ejemplo en un contorno) se pueden añadir nodos para conseguir el número de nodos necesarios para la resolución de las ecuaciones en diferencias.

Por su parte las funciones de ponderación definen un dominio relativamente pequeño en el que su valor es distinto de cero, siendo nulo en el resto del dominio. Cada función de ponderación se asocia a un nodo, pudiéndose superponer con otros subdominios. Se usará la función de peso potencial $w(x, y)$ (las mejores funciones de ponderación son las exponenciales y las potenciales [1]) que se define a continuación:

$$w(x, y) = \frac{1}{(dist)^3}$$

donde $dist$ es la distancia del nodo central al nodo considerado de la estrella.

Llamando U_0 al valor de la función en el nodo central de la estrella de coordenadas (x_0, y_0) y U_i al valor de la función en el resto de los nodos de coordenadas (x_i, y_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, entonces el desarrollo en serie de Taylor es:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) + \dots$$

donde $h_i = x_i - x_0$; $k_i = y_i - y_0$.

Por tanto, despreciando los términos de orden superior al segundo, la aproximación u_i de U_i es:

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$$

La expresión anterior es válida para cualquier $i = 1, 2, \dots, N$ con lo que, sumando todas las expresiones que resultan para los diferentes valores de i se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N (u_i - u_0) = \sum_{i=1}^N \left(h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right)$$

Se define el funcional $B(u)$ como sigue:

$$B(u) = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right) w(h_i, k_i) \right]^2$$

donde $w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación.

A continuación minimizamos el funcional $B(u)$ con respecto a las derivadas parciales y así obtenemos un conjunto de cinco ecuaciones lineales con cinco incógnitas $\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$, cuya resolución proporciona expresiones explícitas de las incógnitas en términos del valor de las aproximaciones de segundo orden en todos los nodos de la estrella u_i , de los valores h_i y k_i , y de la función de ponderación w . Así, el sistema que se obtiene es:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] k_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{h_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{k_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i k_i w^2 = 0 \end{cases}$$

donde $w = w(h_i, k_i)$.

Expresándolo matricialmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{D}_u &= \mathbf{b} \\ \mathbf{D}_u &= \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \\ \mathbf{b} &= \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i w^2 \\ &\sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) k_i w^2 \\ &\sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{h_i^2}{2} w^2 \\ &\sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{k_i^2}{2} w^2 \\ &\sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i k_i w^2 \end{aligned} \right\} \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N h_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^2}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i w^2 \\ & \sum_{i=1}^N k_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i^2 w^2 \\ & & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i^2}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3 k_i}{2} w^2 \\ & & & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^3}{2} w^2 \\ & & & & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i^2 w^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para la resolución del sistema es evidente que se necesitan al menos cinco nodos (sin incluir el central).

Para la resolución del sistema se puede aplicar el método de Cholesky ya que la matriz A es simétrica. Se puede descomponer A como producto de una matriz triangular por su transpuesta QQ^T . Con lo que se puede escribir:

$$QQ^T D_u = b$$

Y ahora resolvemos en dos etapas:

$$Q^T D_u = Y \quad (3.3)$$

$$QY = b \quad (3.4)$$

Así, resolviendo el sistema (3.4) en orden descendente se obtienen los valores de Y , después a partir del sistema (3.3) se obtienen las fórmulas en diferencias siguientes:

$$\begin{cases} Y(k) = -u_0 \sum_{i=1}^5 M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j \left(\sum_{i=1}^p M_{ki} d_{ji} \right), & k = 1, \dots, 5 \\ D(k) = \frac{1}{q_{kk}} \left(Y(k) - \sum_{i=1}^{5-k} q_{(k+1)k} D(k+i) \right), & k = 1, \dots, 5 \end{cases} \quad (3.5)$$

donde:

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{q_{ij}} \sum_{k=j}^{i-1} q_{ik} M(kj) & \text{for } j < i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{1}{q_{ij}} & \text{for } j = i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ 0 & \text{for } j > i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

con δ_{ij} el delta de Kronecker, y:

$$c_i = \sum_{j=i}^N d_{ji}$$

$$d_{j1} = h_j w^2; \quad d_{j2} = k_j w^2; \quad d_{j3} = \frac{h_j^2}{2} w^2; \quad d_{j4} = \frac{k_j^2}{2} w^2; \quad d_{j5} = h_j k_j w^2$$

Incluyendo en la ecuación en derivadas parciales (3.1) y (3.2) los valores explícitos de las derivadas parciales expresados en (3.5) se obtiene la ecuación de la estrella, que es posible expresarla como:

$$u_0 = \sum_{i=1}^N m_i u_i + m_f f_0 \quad (3.6)$$

La expresión (3.6) es una ecuación lineal que relaciona el valor de la función en el nodo central de la estrella (u_0) con los valores de la función en el resto de los nodos de la estrella (u_i).

La formulación dada debe ser aplicada a cada uno de los nodos del dominio, obteniéndose un número de ecuaciones e incógnitas igual al número de nodos seleccionados para calcular el valor de la función. La resolución del sistema de ecuaciones lineales resuelve el problema.

Por tanto, el método de las diferencias finitas generalizadas puede ser aplicado a problemas con forma irregular de frontera y una distribución aleatoria de los nodos centrales

de las estrellas, de tal forma que cada nodo central está rodeado por un número de puntos que no tienen que ser necesariamente iguales para todos ellos.

4. Cálculo de placas

4.1. Planteamiento de las ecuaciones

Se considera una estructura continua plana tal que el espesor es muy pequeño en relación a las demás dimensiones de la estructura y que llamaremos placa.

Consideraremos acciones perpendiculares a su plano (p) y adoptamos el criterio de signos para los esfuerzos cortantes (q_x, q_y) y para los momentos (m_x, m_y, m_{xy}, m_{yx}) indicados en la figura 1.

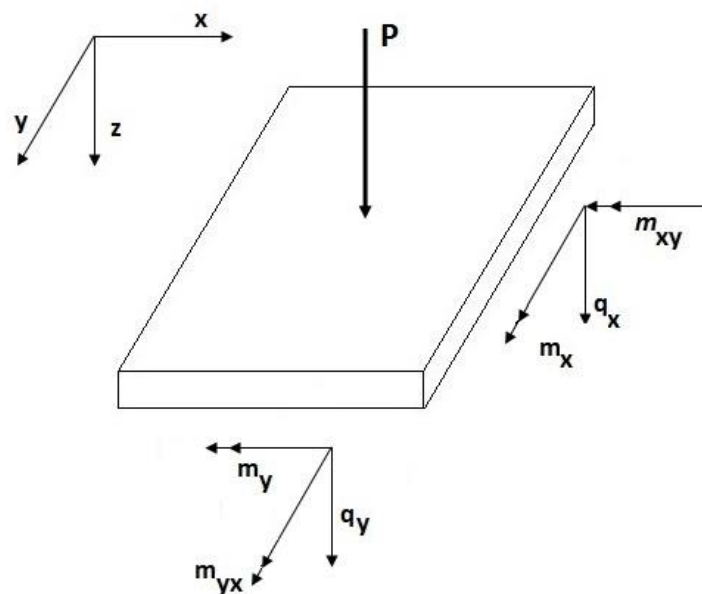


Figura 1: Criterio de signos.

Según el espesor de las placas se definen placas delgadas o gruesas. El cálculo es diferente en ambos casos. Si su espesor es inferior a $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{7}$ de la luz (según autores) se dice que la placa es delgada, en caso contrario la placa es gruesa. La teoría que permite el cálculo de las placas delgadas se llama de Kirchhoff [2,3]; por su parte para placas gruesas se utiliza la teoría de Mindlin [2,3].

Analizamos las placas bajo las siguientes hipótesis:

1. Placa delgada: espesor pequeño y se desprecia la deformación por cortante.
2. Los movimientos de la placa son pequeños respecto a las dimensiones de la placa (esto es preciso para que sea aplicable las condiciones de equilibrio a la estructura sin deformar).

3. Suponemos comportamiento del material isótropo, homogéneo y elastolineal (ley de Hooke).
4. Suponemos que los movimientos de cualquier punto del plano medio de la placa solo tiene movimiento vertical.
5. No existen tensiones ni deformaciones perpendiculares al plano medio de la placa. Suponemos, por tanto que las cargas se aplican en el plano medio.
6. Hipótesis de Kirchhoff: si tenemos una recta perpendicular al plano medio de la placa, al deformarse la placa sigue siendo una recta y sigue siendo perpendicular al plano medio (esto es equivalente a la ley de Navier-Bernoulli en vigas).

La resolución de placas se basa en el estudio realizado a partir del planteamiento de las ecuaciones intervinientes según las hipótesis anteriores:

- Se plantean las ecuaciones cinemáticas y de compatibilidad relacionándose movimientos y deformaciones ($d - \varepsilon$).
- Se plantean las ecuaciones constitutivas (en principio usamos la ley de Hooke) que expresan relaciones tensión –deformación ($\sigma - \varepsilon$).
- Se utilizan las ecuaciones de equilibrio que relacionan el equilibrio de la estructura o cualquier parte de ella. Relaciona cargas externas con tensiones ($p - \sigma$).

Así, utilizamos deformaciones en función de movimientos $\varepsilon = f(\sigma)$. Sustituyendo en $\sigma = g(\varepsilon)$ se expresa que $\sigma = h(d)$. Y sustituyendo en $p = j(\sigma)$ tenemos que:

$$p = k(d)$$

Es decir que las cargas externas (dato) es función de los movimientos, lo cual supone el planteamiento que se conoce como método de rigidez.

Del estado tensional de la placa es necesario obtener los esfuerzos, que se obtienen por simple integración en el espesor de la placa según las siguientes ecuaciones (figura 2):

$$m_x dy = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_x^z dy dz \rightarrow m_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_x^z dz$$

$$m_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_y^z dz$$

$$q_x dy = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{xz}^z dy dz \rightarrow q_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{xz}^z dz$$

$$q_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{yz}^z dz$$

$$m_{xy} dy = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{xy}^z dy dz \rightarrow m_{xy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{xy}^z dz$$

$$m_{yx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \tau_{yx}^z dz$$

Por la teoría de elasticidad $\tau_{xy}^z = \tau_{yx}^z$ y por tanto: $m_{xy} = m_{yx}$.

En todas las ecuaciones anteriores el superíndice de las tensiones indica la cota de referencia.

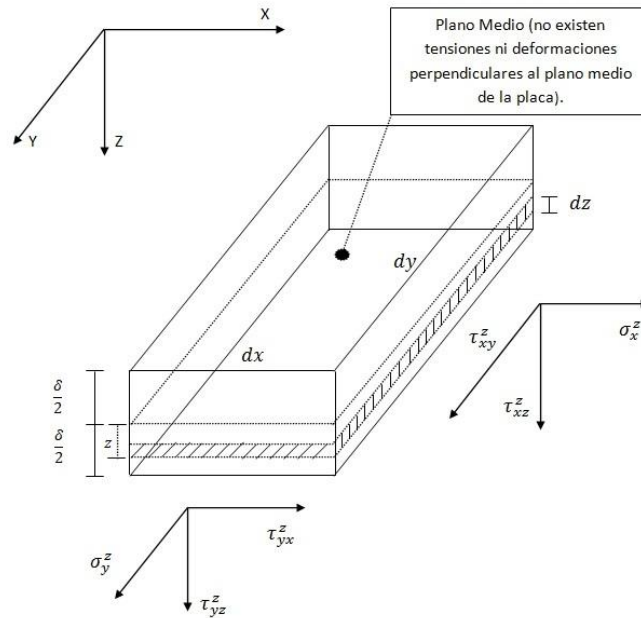


Figura 2: Integración de tensiones.

Las ecuaciones cinemáticas que relacionan movimientos con deformaciones en la hipótesis de trabajo de Kirchhoff se plantea en una sección por el plano vertical XZ (figura 3).

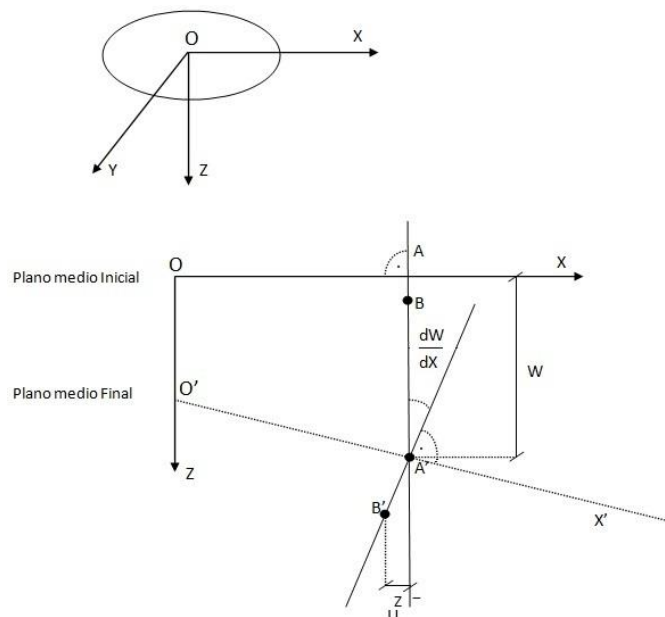


Figura 3: Relaciones cinemáticas.

El punto A de la figura 3 se mueve verticalmente a A' (desplazamiento w) ya que nuestro plano de referencia no tiene desplazamiento según y . Según la hipótesis de Kirchhoff, que AB sea perpendicular a OX implica que $A'B'$ sea perpendicular a $O'X'$ y por tanto se obtiene que el desplazamiento vertical u^z es:

$$u^z = -z \frac{dw}{dx}$$

Análogamente si tomo el plano vertical YZ se tiene que el desplazamiento vertical v^z :

$$v^z = -z \frac{dw}{dy}$$

Sustituyendo en las ecuaciones que expresan las definiciones de deformación según movimientos se obtiene que, en las direcciones indicadas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^z &= \frac{\partial u^z}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^z &= \frac{\partial v^z}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^z &= \frac{\partial u^z}{\partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

Suponiendo pequeños desplazamientos la curvatura χ se puede expresar según las siguientes igualdades:

$$\left. \begin{aligned}\chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned}\varepsilon_x^z &= -z \chi_x \\ \varepsilon_y^z &= -z \chi_y \\ \gamma_{xy}^z &= -2z \chi_{xy}\end{aligned} \right\}$$

Se constituyen así las ecuaciones cinemáticas.

Respecto a las ecuaciones constitutivas que expresan las relaciones tensiones deformaciones, se aplica directamente la ley de Hooke expresadas en la forma de Lamé:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x^z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^z + \nu \varepsilon_y^z) \\ \sigma_y^z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^z + \nu \varepsilon_x^z) \\ \tau_{xy}^z &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^z\end{aligned} \right\}$$

Siendo E el módulo de Young y ν el módulo de Poisson del medio.

Sustituyendo las ecuaciones cinemáticas en las constitutivas:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^z &= \frac{-Ez}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y) \\ \sigma_y^z &= \frac{-Ez}{1-\nu^2}(\chi_y + \nu\chi_x) \\ \tau_{xy}^z &= \frac{-Ez}{(1+\nu)}\chi_{xy} \end{aligned} \right\}$$

Por consiguiente, los esfuerzos son:

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z \sigma_x^z dz = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{Ez^2}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y) dz = \\ &= \frac{-E}{1-\nu^2}(\chi_x + \nu\chi_y) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z^2 dz = \frac{-E\delta^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_x + \nu\chi_y) = -D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ m_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ m_{xy} &= -D(1-\nu)\chi_{xy} \\ q_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \\ q_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right) \end{aligned}$$

A continuación planteamos las ecuaciones de equilibrio (figura 4).

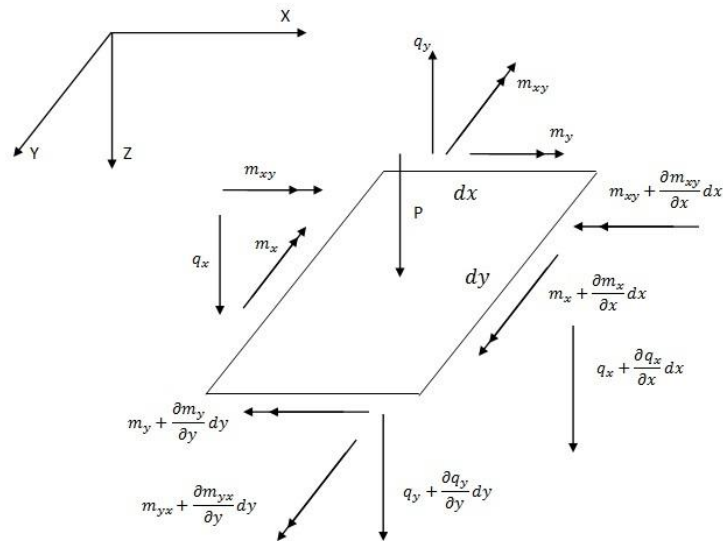


Figura 4: Planteamiento del equilibrio.

- Expresando los momentos según el eje y :

$$\begin{aligned} -m_x dy + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_{yx} dx + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - q_x dy \frac{dx}{2} - \\ - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Despreciando el diferencial de tercer orden y dividiendo por $dxdy$ se obtiene:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0$$

- Realizando el equilibrio de momentos según el eje x :

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0$$

- Si se hace el equilibrio de esfuerzos verticales se obtiene:

$$P dxdy - q_x dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy - q_y dx + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

Y dividiendo por $dxdy$ resulta:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + P = 0$$

A partir de los desarrollos anteriores que nos han permitido obtener los diferentes tipos de ecuaciones procedemos a sustituir las ecuaciones constitutivas en las de equilibrio:

$$-D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - q_x = 0$$

$$-D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - q_x = 0$$

$$q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\chi_x + \chi_y)$$

Análogamente se obtiene:

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\chi_x + \chi_y)$$

Y por último, sustituyendo estas expresiones en la ecuación de equilibrio vertical se obtiene:

$$-D \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - D \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + P = 0$$

$$\frac{P}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left[\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right] w$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \equiv \text{operador laplaciano}$$

$$\frac{P}{D} = \nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^4 w$$

Esta es la llamada ecuación de Lagrange que relaciona la carga uniformemente repartida en un elemento diferencial de la placa con el bilaplaciano de la deformada.

Y las condiciones de contorno con el esquema de malla anterior para el tipo de placa a resolver son:

$$w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 0$$

$$w_A = -w_3$$

$$w_B = -w_2$$

$$w_C = -w_3$$

$$w_D = -w_2$$

$$w_E = -w_8 = 0$$

$$w_F = -w_3$$

Los puntos A a F son los simétricos respecto del contorno de los puntos interiores, que se supone mantienen la pendiente de la recta perpendicular que une el punto interior con el contorno.

El cálculo de las derivadas para la estrella de 8 nudos arroja los siguientes resultados:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h} \left(\frac{2w_1}{5} + \frac{w_2}{20} - \frac{w_4}{20} - \frac{2w_5}{5} - \frac{w_6}{20} + \frac{w_8}{20} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h} \left(\frac{2w_3}{5} + \frac{w_2}{20} + \frac{w_4}{20} - \frac{2w_7}{5} - \frac{w_6}{20} - \frac{w_8}{20} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_0}{3} + \frac{5w_1}{6} + \frac{w_2}{12} - \frac{w_3}{6} + \frac{w_4}{12} + \frac{5w_5}{6} + \frac{w_6}{12} - \frac{w_7}{6} + \frac{w_8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_0}{3} - \frac{w_1}{6} + \frac{w_2}{12} + \frac{5w_3}{6} + \frac{w_4}{12} - \frac{w_5}{6} + \frac{w_6}{12} + \frac{5w_7}{6} + \frac{w_8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2} (w_2 - w_4 + w_6 - w_8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_{xx}^0}{3} + \frac{5w_{xx}^1}{6} + \frac{w_{xx}^2}{12} - \frac{w_{xx}^3}{6} + \frac{w_{xx}^4}{12} + \frac{5w_{xx}^5}{6} + \frac{w_{xx}^6}{12} - \frac{w_{xx}^7}{6} + \frac{w_{xx}^8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_{yy}^0}{3} - \frac{w_{yy}^1}{6} + \frac{w_{yy}^2}{12} + \frac{5w_{yy}^3}{6} + \frac{w_{yy}^4}{12} - \frac{w_{yy}^5}{6} + \frac{w_{yy}^6}{12} + \frac{5w_{yy}^7}{6} + \frac{w_{yy}^8}{12} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_{yy}^0}{3} + \frac{5w_{yy}^1}{6} + \frac{w_{yy}^2}{12} - \frac{w_{yy}^3}{6} + \frac{w_{yy}^4}{12} + \frac{5w_{yy}^5}{6} + \frac{w_{yy}^6}{12} - \frac{w_{yy}^7}{6} + \frac{w_{yy}^8}{12} \right)$$

$$w_{xx}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{5w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} - \frac{2w_3}{6} \right)$$

$$w_{xx}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} - \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{xx}^4 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^5 = w_{xx}^6 = w_{xx}^7 = w_{xx}^8 = 0$$

$$w_{yy}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{yy}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} + \frac{10w_3}{6} \right)$$

$$w_{yy}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} + \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{yy}^4 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_3}{12} \right)$$

$$w_{yy}^5 = w_{yy}^6 = w_{yy}^7 = w_{yy}^8 = 0$$

A continuación, aplicamos la ecuación de Lagrange en los nudos 1,2 y 3 mediante sustitución de las derivadas calculadas.

Nudo 1:

$$\nabla^2 w_1 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{420}{36} w_1 - \frac{576}{36} w_2 + \frac{64}{36} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (105w_1 - 144w_2 + 16w_3)$$

Nudo 2:

$$\nabla^2 w_2 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{-156}{36} w_1 + \frac{452}{36} w_2 - \frac{264}{36} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (-39w_1 + 113w_2 - 66w_3)$$

Nudo 3:

$$\nabla^2 w_3 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{-32}{36} w_1 - \frac{288}{36} w_2 + \frac{1028}{72} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (-8w_1 - 72w_2 + 128,5w_3)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left. \begin{aligned} 105w_1 - 144w_2 + 16w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -39w_1 + 113w_2 - 66w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -8w_1 - 72w_2 + 128,5w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \end{aligned} \right\}$$

Tras su resolución se obtiene:

$$0,275 \frac{P}{D} h^4 = 0,252w_1$$

$$w_1 = 1,09 \frac{P}{D} h^4 = 1,09 \frac{P}{D} 0,25^4 L^4 = 4,26 \times 10^{-3} \frac{P}{D} L^4$$

Sabemos que la placa de acero es de espesor 0,1 m, y por tanto:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times (0,1 \text{ m})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 18315 \text{ kNm}$$

Para una carga de 100 kN sobre una placa de 1 metro de lado:

$$w_1 = 2,32 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,0023 \text{ cm}$$

Comparando este resultado con un cálculo por elementos finitos con el programa SAP 2000 [4] se obtienen valores idénticos ($w_1 = 0,0022 \text{ cm}$) según muestra el gráfico de la figura 6.

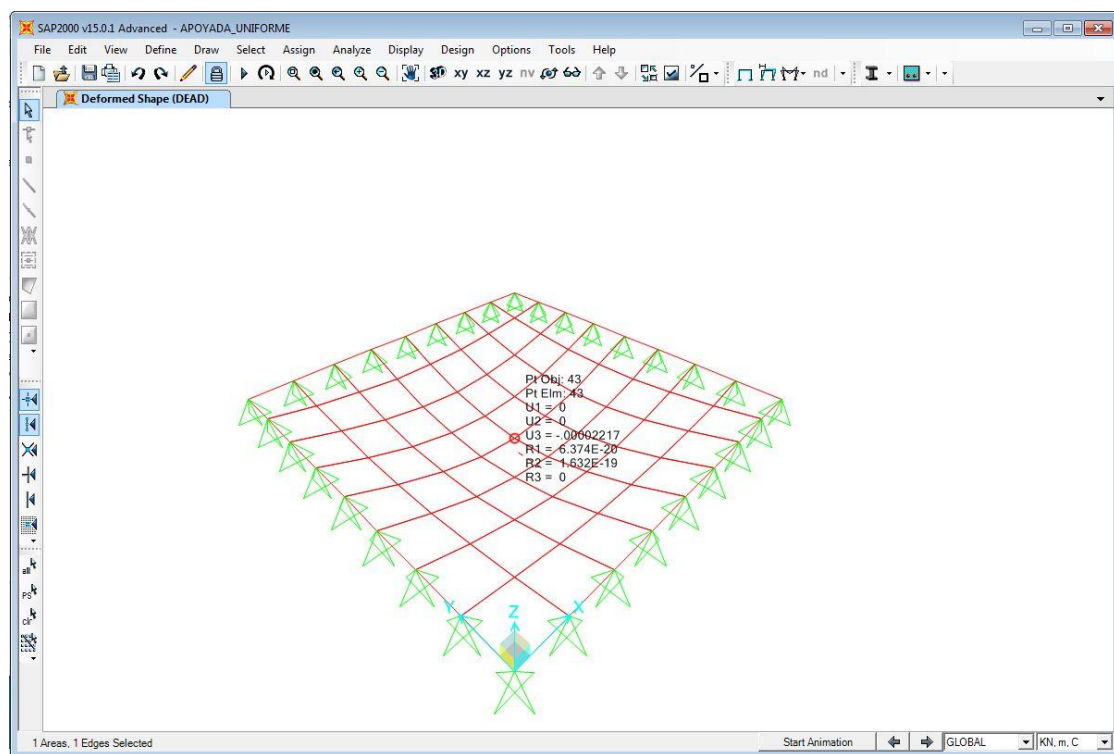


Figura 6: Modelo realizado con SAP 2000 para placa apoyada con carga uniforme.

4.3. Aplicación para la placa apoyada en sus cuatro lados con carga puntual en el centro

Respecto al apartado anterior en el que se resolvía la placa apoyada en sus cuatro vértices, el planteamiento es similar cambiando únicamente las condiciones de contorno que son:

$$w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 0$$

$$w_A = w_3$$

$$w_B = w_2$$

$$w_C = w_3$$

$$w_D = w_2$$

$$w_E = w_8 = 0$$

$$w_F = w_3$$

Esto equivale a imponer la condición de giro nulo en el contorno empotrado y aplicar el esquema centrado para las derivadas segundas de los nodos del contorno. Por tanto, se tiene que:

$$w_{xx}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{5w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} - \frac{2w_3}{6} \right)$$

$$w_{xx}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} - \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{xx}^4 = \frac{1}{3h^2} w_3$$

$$w_{xx}^5 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{10w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^6 = 0$$

$$w_{xx}^7 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{4w_3}{12} - \frac{2w_2}{6} \right)$$

$$w_{xx}^8 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{2w_2}{12} - \frac{2w_3}{6} \right)$$

$$w_{yy}^1 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-5w_1}{3} + \frac{8w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{yy}^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-w_1}{6} - \frac{18w_2}{12} + \frac{10w_3}{6} \right)$$

$$w_{yy}^3 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{w_1}{12} + \frac{4w_2}{6} - \frac{5w_3}{3} \right)$$

$$w_{yy}^4 = \frac{4}{12h^2} w_3$$

$$w_{yy}^5 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_2}{6} + \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^6 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{-2w_3}{6} + \frac{2w_2}{12} \right)$$

$$w_{yy}^7 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{10w_2}{6} - \frac{4w_3}{12} \right)$$

$$w_{xx}^8 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{10w_3}{6} + \frac{2w_3}{12} \right)$$

Aplicando la ecuación de Lagrange a los nudos interiores:

Nudo 1: (misma situación que para la placa apoyada)

$$\nabla^2 w_1 = \frac{1}{9h^4} (105w_1 - 144w_2 + 16w_3)$$

Nudo 2:

$$\nabla^2 w_2 = \frac{1}{h^4} \left(\frac{-156}{36} w_1 + \frac{488}{36} w_2 - \frac{232}{36} w_3 \right) = \frac{1}{9h^4} (-39w_1 + 122w_2 - 58w_3)$$

Nudo 3:

$$\nabla^2 w_3 = \frac{1}{9h^4} (-8w_1 - 64w_2 + 148w_3)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left. \begin{aligned} 105w_1 - 144w_2 + 16w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -39w_1 + 122w_2 - 58w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -8w_1 - 64w_2 + 148w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo se obtiene:

$$0,233 \frac{P}{D} h^4 = 0,42w_1$$

$$w_1 = 0,55 \frac{P}{D} h^4 = 0,55 \frac{P}{D} 0,25^4 L^4 = 2,15 \times 10^{-3} \frac{P}{D} L^4$$

Sabemos que la placa de acero es de espesor 0,1 m, y por tanto:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times (0,1 \text{ m})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 18315 \text{ kNm}$$

Para una carga de 100 kN sobre una placa de 1 metro de lado:

$$w_1 = 1,17 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0012 \text{ cm}$$

Comparando este resultado con un cálculo por elementos finitos con el programa SAP 2000 [4] se obtienen valores cercanos aunque con cierta desviación ($w_1 = 0,00072 \text{ cm}$), según se indica en la figura 7, seguramente inducido por las condiciones locales de empotramiento que conducen a una situación de carga localizada en esos apoyos (carga por momentos aplicados) que aconsejan un mallado más fino al menos en las zonas de apoyos.

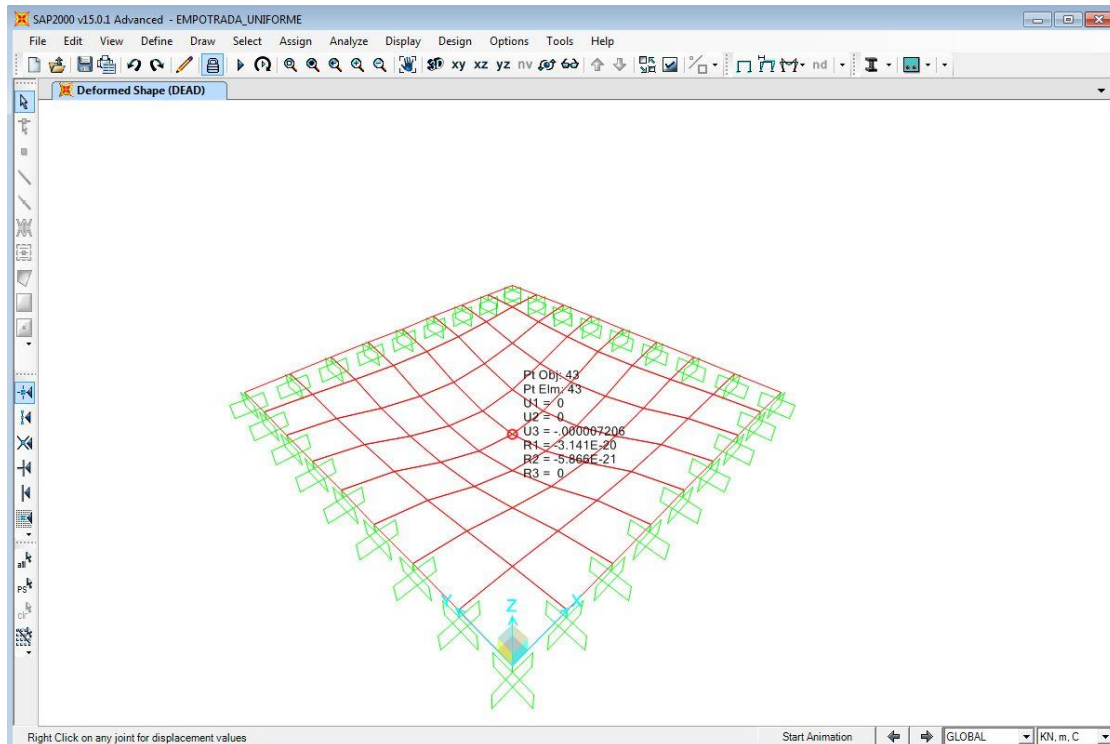


Figura 7: Modelo realizado con SAP 2000 para placa empotrada con carga uniforme.

4.4. Aplicación para la placa empotrada en sus cuatro lados con carga uniforme

El caso de carga puntual es el llevado al límite cuando el recinto en el que se aplica la carga uniforme se hace infinitesimal en teoría, muy pequeño en la práctica.

Evidentemente se puede aplicar tanto a placa empotrada como apoyada, o con cualquier otro tipo de condiciones de contorno. Además los principios para aplicar el cálculo numérico a carga puntual sobre una placa y dispuesta en cualquier punto interior de la placa son semejantes al de la carga en el centro, complicando únicamente su resolución automática al deshacerse de la simetría.

Como ya se ha comentado para la placa empotrada, en el caso de placa con carga puntual es a priori previsible la necesidad de una malla más fina o al menos refinar la malla en la zona de aplicación de la carga. Este hecho, como se comentará más adelante, complica la resolución numérica pero es posible superar las dificultades gracias a la evolución al método de las diferencias finitas generalizado.

La malla elegida marca la bondad de la aproximación, sobre todo considerando el carácter localizado de la carga puntual central, por tanto haremos a título ilustrativo la primera aproximación a la carga puntual para la malla ya propuesta en la figura 5. Así tenemos que la carga puntual se encuentra, para dicha discretización, repartida en los $0,5 \times 0,5 \text{ m}^2$ centrales, evidentemente la generalización a mallas más finas complica la resolución de las ecuaciones pero conceptualmente es igual.

Así, las ecuaciones se obtienen directamente del caso de la placa apoyada ya estudiada para el caso de carga uniforme. Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} 105w_1 - 144w_2 + 16w_3 &= 9 \frac{P}{D} h^4 \\ -39w_1 + 113w_2 - 66w_3 &= 9 \frac{P/2}{D} h^4 \\ -8w_1 - 72w_2 + 128,5w_3 &= 9 \frac{P/4}{D} h^4 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo se obtiene:

$$0,16 \frac{P}{D} h^4 = 0,252w_1$$

$$w_1 = 0,64 \frac{P}{D} h^4 = 0,64 \frac{P}{D} 0,25^4 L^4 = 2,5 \times 10^{-3} \frac{P}{D} L^4$$

Sabemos que la placa de acero es de espesor 0,1 m, y por tanto:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times (0,1 \text{ m})^3}{12(1 - 0,3^2)} = 18315 \text{ kNm}$$

Para una carga de 100 kN/m² sobre una placa de 1 metro de lado:

$$w_1 = 1,37 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0014 \text{ cm}$$

Comparando este resultado con un cálculo por elementos finitos con el programa SAP 2000 [4] para una carga puntual en el centro de la placa de 25 kN (100 kN/m² × 0,5 m × 0,5 m = 25 kN) se obtienen valores parecidos ($w_1 = 0,0016 \text{ cm}$) según muestra el gráfico de la figura 8.

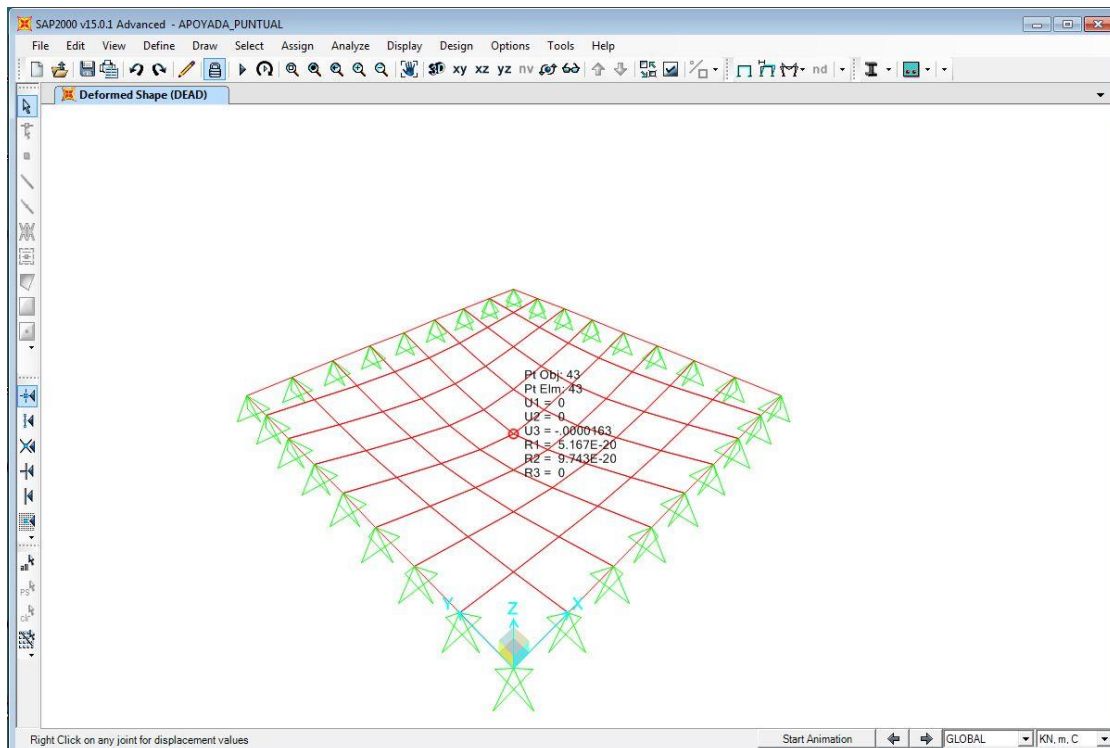


Figura 8: Modelo realizado con SAP 2000 para placa apoyada con carga puntual en el centro.

La forma de mejorar la precisión con una malla nodal más fina llevaría a un esquema que modelizaría igual las zonas donde el comportamiento del método es bueno como en la zona complicada en el entorno de la carga. Por ejemplo un esquema posible sería el mostrado en la figura 9.

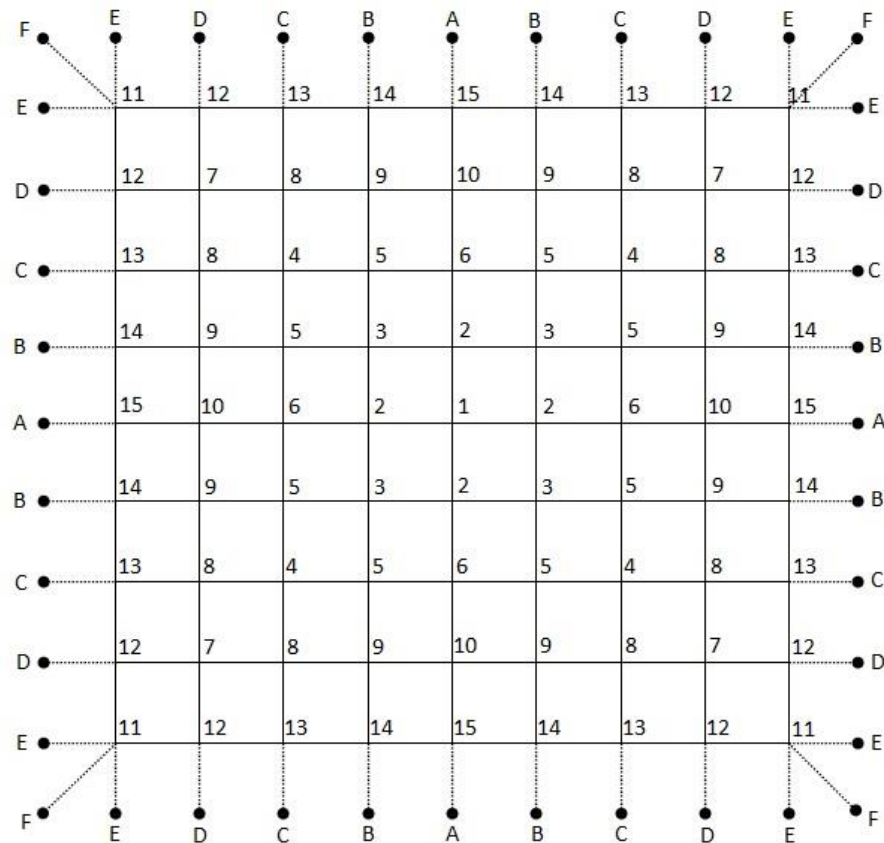


Figura 9: Malla nodal más fina según un esquema clásico regular.

Como hemos visto, si el dominio no es rectangular, las dificultades para incorporar las condiciones de contorno al sistema lineal se incrementan notablemente. De igual forma se producen complicaciones para construir esquemas en diferencias finitas sobre mallas no uniformes. En ambas situaciones se pueden utilizar ideas como la que exponemos a continuación: la aproximación en diferencias finitas definida por una estrella de 5 nodos es:

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij}$$

Pues bien, esta condición sobre los puntos en los que la estrella está contenida en el interior supone que en los puntos en los que al menos un nodo caiga fuera del dominio no regular definido es necesario modificar la forma de la ecuación según la distancia de los nodos de la estrella real que se puede formar. Así, se aproxima el valor de la función en los puntos P que define el dominio irregular por el polinomio de segundo orden en la variable que corresponda (por ejemplo x) alrededor del nodo $(i=N, j=M)$ como se expresa en las siguientes relaciones:

$$u(P) = u(N, M) + \alpha h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(\alpha h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Donde α representa la distancia de P a $(i=N, j=M)$ dividida por h , y:

$$u(N-1, M) = u(N, M) - h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Si se desprecian los términos de orden superior, se multiplica la segunda ecuación por α y se suman ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) = \frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2}h^2} + O(h)$$

A la vista de esta aproximación, se puede plantear la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$-\frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2}h^2} - \frac{U_{n,m+1} - 2U_{n,m} + U_{n,m-1}}{h^2}$$

Es de notar la caída en una unidad del orden de la aproximación, el orden de la aproximación de la derivada segunda es 1, mientras que si $\alpha = 1$, el orden sube a 2.

Cuando se compara la versión clásica del método de diferencias finitas en mallas regulares con el método de los elementos finitos, se comprueba que éste último es más efectivo en el tratamiento de las condiciones de contorno, especialmente en dominios irregulares y cuando se producen condensaciones locales de nodos. Si se pudiera usar una malla arbitraria de diferencias finitas se vencerían estas dificultades, manteniendo las ventajas del método de las diferencias finitas. Una evolución del método de las diferencias finitas ha dado lugar al desarrollo del método de las diferencias finitas generalizadas, el cual se puede aplicar sobre mallas irregulares de nodos según se indica en el apartado 3 y permite resolver las dificultades asociadas a los esquemas clásicos.

5. Conclusiones

El artículo pone de manifiesto las siguientes conclusiones:

1. Los resultados obtenidos mediante la simulación numérica por el método de las diferencias finitas clásicas son correctos al ser comparados con otros métodos que implementan algunos programas de cálculo (en particular se ha utilizado el SAP 2000) en el cálculo de elementos estructurales.
2. En el caso de cargas localizadas ya sea en el interior o contornos de elementos estructurales es necesario refinar el mallado en torno a las cargas concentradas.
3. Mediante el método de diferencias finitas generalizadas se podría resolver la aplicación de los problemas con geometrías más estrictas o necesidades locales de remallado. Se propone dicho método como línea de investigación aplicable al tipo de problemas expuestos. La resolución para el caso propuesto es metódica e inmediata.

4. Queda expuesta la posibilidad y necesidad de seguir usando los métodos de las diferencias finitas para la resolución numérica de ecuaciones que representan problemas de ingeniería donde tradicionalmente ha sido empleado el método de los elementos finitos. El uso de los esquemas de diferencias finitas permite un mejor análisis del problema matemático planteado, al entrar directamente en las ecuaciones matemáticas del problema, abordando con éxito los problemas bien estudiados de existencia, unicidad, convergencia, inestabilidad o bloqueo de la solución.

Referencias

- [1] BENITO, Juan José; UREÑA, Francisco; GAVETE, Luis, *The Generalized Finite Difference Method*, pp. 251-293, Applied Mathematical Modeling Research, 2007.
- [2] TIMOSHENKO, Stephen; GOODIER James Norman, *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill, New York, 1987.
- [3] TORROJA Eduardo, *Razón y ser de los tipos estructurales*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2004.
- [4] Manual SAP 2000, *Advanced 9.0.3 Structural Analysis Program*, Computer and Structures, Berkeley, 2004.

Sobre el autor:

Nombre: Rubén Galindo Aires

Correo Electrónico: ragalindoa@hotmail.com

Institución: Departamento de Ingeniería y Morfología del Terreno de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Juegos Matemáticos

Las matemáticas del cubo de Rubik

The mathematics of Rubik's cube

Ramón Esteban Romero

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 097–110, ISSN 2174-0410
Recepción: 29 Mar '13; Aceptación: 31 Jun '13

1 de octubre de 2013

Resumen

En este artículo mostramos cómo podemos utilizar el cubo de Rubik para presentar algunos conceptos básicos de la teoría de grupos y cómo podemos utilizar ésta para resolver el cubo de Rubik.

Palabras Clave: grupo, permutación, cubo de Rubik, conjugación, orden

Abstract

In this paper we show how we can use the Rubik cube to present some basic concepts of group theory and how we can use this to solve the Rubik cube.

Keywords: group, permutation, Rubik's cube, conjugation, order

1. Introducción

El cubo de Rubik es un rompecabezas mecánico inventado por el escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernő Rubik en 1974. Se trata de un cubo cuyas caras tienen cada una nueve pegatinas y que consta de un ingenioso dispositivo mecánico que permite que sus caras giren y las pegatinas cambien de posición. El problema usual de este rompecabezas consiste en, a partir de una posición en la que las caras muestran pegatinas de distintos colores, realizar una sucesión de movimientos del cubo conseguir que las seis caras del cubo muestren un único color.

Uno de los propósitos de este artículo es comentar algunos de los aspectos más básicos de las matemáticas del cubo de Rubik. Estas matemáticas son una parte de la llamada «teoría de grupos». Por otra parte, algunos conceptos básicos de la teoría de grupos se pueden entender de una manera sencilla con ayuda del cubo de Rubik. No



Figura 1. Ernő Rubik.

pretendemos que el lector sea capaz de resolver el cubo en un tiempo rápido. Existen muchos algoritmos que, con ayuda de mucha práctica, permiten esta tarea. Sin embargo, el lector podría utilizar algunos conocimientos básicos de la teoría de grupos para diseñar su propio algoritmo de resolución. También veremos por qué algunas configuraciones, como las correspondientes a intercambiar dos aristas o dos vértices, o torcer una arista, son imposibles. Además, contaremos cuántas configuraciones distintas puede tener el cubo de Rubik.

Esta presentación se ha llevado a cabo en una de las sesiones del programa ESTALMAT-Comunitat Valenciana (Programa de estímulo del talento matemático) dirigida a los alumnos veteranos, con edades comprendidas entre 14 y 16 años. También se ha desarrollado como sesión complementaria a una asignatura de teoría de grupos en la licenciatura de Matemáticas en la Universitat de València. La mayoría de las ideas proceden de [2].

2. Notación para el cubo de Rubik

La disposición de los colores en las caras del cubo puede variar de cubo en cubo. Por ello, es interesante disponer de una notación que no dependa de los colores que el fabricante haya querido utilizar en su cubo ni de la orientación, sino simplemente de su posición. En castellano nos referiremos a las caras mediante las iniciales de las siguientes palabras:

- | | | |
|-------------|-----------|----------|
| ■ Derecha | ■ Frontal | ■ Arriba |
| ■ Izquierda | ■ Trasera | ■ Bajo |

Elegimos estas palabras para que las iniciales sean todas diferentes dos a dos, a pesar de que alguna palabra pueda resultar algo extraña. Observemos que al girar una cara, la pegatina central de la cara mostrará siempre el mismo color. Por ello, identificamos cada cara mediante el color de su centro. Podemos usar ahora nuestras seis letras para designar las seis caras, así como varias piezas y posiciones. Por ejemplo, las cuatro piezas centrales de las aristas correspondientes a la cara A (en lo sucesivo, les diremos simplemente aristas), serán AD , AF , AI y AT , mientras que las cuatro piezas de los vértices correspondientes a la cara A (en lo sucesivo, simplemente vértices) serán ADF , AFI , AIT y ATD . Notemos que AD y DA son la misma pieza. Los colores de los vértices se ordenarán en el sentido de las manecillas del reloj. De este modo, ADF , DFA y FAD denotarán la misma pieza.

Usaremos también los nombres de las caras para referirnos a movimientos de un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj, como si estuviéramos mirando la cara desde enfrente de ella. Por ejemplo, D denotará el giro de un cuarto de vuelta en sentido horario de la cara de la derecha. El de media vuelta de la cara D , en sentido horario o antihorario, da lo mismo, lo denotaremos mediante D^2 , porque corresponde a hacer dos giros de un cuarto de vuelta en sentido horario. El giro de un cuarto de vuelta en sentido antihorario lo denotaremos mediante D^3 o D^{-1} . Por comodidad, algunos textos lo representan por D' .

Una secuencia de movimientos se escribe de izquierda a derecha. Por ejemplo, DA significa que primero se aplica D y luego A . El contexto nos permitirá distinguir si una secuencia de dos o tres letras corresponde a una secuencia de movimientos o a una pieza. Es posible usar diferentes tipografías para distinguirlos.

No resulta difícil ver que las secuencias de movimientos AD y DA dejan el cubo en distinta posición. Esto viene a corroborar que no siempre es cierto que *el orden de los factores no altera el producto*.

Los movimientos del cubo modifican la colocación de las $6 \cdot 9 = 54$ pegatinas del cubo. Como las pegatinas centrales no cambian de sitio, nos basta con considerar $6 \cdot 8 = 48$ pegatinas.

Esta modificación de la situación de las pegatinas es una *permutación*, una manera de reordenar las 48 pegatinas.

3. Conceptos básicos de teoría de grupos

Antes de empezar a estudiar las permutaciones que se pueden dar en el cubo, analizaremos los conceptos básicos de grupos de permutaciones con ayuda de un ejemplo más sencillo, el de las simetrías del cuadrado. El contenido de esta sección será conocido por los lectores que hayan estudiado la teoría básica de grupos de permutaciones.

3.1. Simetrías del cuadrado

Lo primero que vamos a hacer es estudiar las simetrías del cuadrado, esto es, los movimientos del cuadrado como cuerpo rígido que lo devuelven a su lugar original, aunque quizás en distinta posición. Es posible que alguna simetría exija levantar el cuadrado del plano del papel y darle la vuelta fuera del plano.

La figura 2 representa un giro de un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj del cuadrado, que denotaremos por R (de rotación). La figura 3 corresponde a una simetría respecto de un eje vertical que pasa por el centro del cuadrado, que denotaremos por V (de simetría vertical).

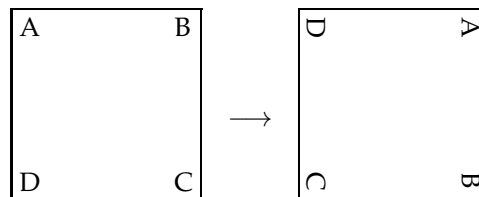


Figura 2. Rotación del cuadrado

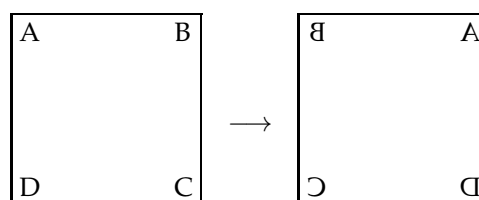


Figura 3. Simetría del cuadrado

Hay dos maneras distintas de entender la permutación de las letras A, B, C y D del cuadrado. Podemos considerar que la acción es «se desplaza a» o «se sustituye por». También podemos considerar que la permutación actúa sobre las siglas o símbolos, independientemente de su posición, o que actúa sobre el contenido de las posiciones, independientemente del símbolo que ocupe actualmente esta posición. Estas distinciones serán importantes cuando multipliquemos permutaciones. Podemos representar las permutaciones anteriores con ambos criterios como se ve en la figura 4.

Obviamente podríamos dejar R como $[B, A, D, C]$, eliminando las flechas y la fila superior. Notemos que la forma «se desplaza a» de una permutación es la *inversa* de la forma «se sustituye por», y podría obtenerse invirtiendo las flechas de la representación: por ejemplo, al in-

	«se desplaza a»				«se sustituye por»			
	A	B	C	D	A	B	C	D
$R =$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	B	C	D	A	D	A	B	C
	A	B	C	D	A	B	C	D
$V =$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	B	A	D	C	B	A	D	C

Figura 4. Representación de dos permutaciones con dos criterios

Tabla 1. Simetrías del cuadrado

	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
Id	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
R	R	R^2	R^3	Id	D_1	D_2	H	V
R^2	R^2	R^3	Id	R	H	V	D_2	D_1
R^3	R^3	Id	R	R^2	D_2	D_1	V	H
V	V	D_2	H	D_1	Id	R^2	R^3	R
H	H	D_1	V	D_2	R^2	Id	R	R^3
D_1	D_1	V	D_2	H	R	R^3	Id	R^2
D_2	D_2	H	D_1	V	R^3	R	R^2	Id

vertir las flechas de R tenemos

A	B	C	D
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
B	C	D	A

o sea,

B	C	D	A
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
A	B	C	D

que escrito en orden sería

A	B	C	D
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
D	A	B	C

Nosotros usaremos la forma «se desplaza a» para referirnos a las permutaciones. El resultado de aplicar primero R y luego V se llama *producto* de R y V . Lo representaremos mediante RV . Notemos que en muchos libros este producto aparecería como VR o $V \circ R$, pero creemos que la notación RV es más conveniente para nuestros propósitos, ya que los movimientos se leen de izquierda a derecha en el orden en que actúan. Por ejemplo,

$$RV = \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & D & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & D & C & B \end{array} = \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & D & C & B \end{array}$$

Hay un «movimiento» destacado, que consiste en no hacer nada. La representaremos como Id (de *identidad*). Evidentemente, multiplicar por Id es como no hacer nada: es como multiplicar por 1 en números.

Es sencillo comprobar que los movimientos del cuadrado son Id, R , R^2 , R^3 , V , H (reflexión respecto de un eje horizontal que pase por el centro), D_1 (reflexión respecto de una diagonal que pase por los vértices A y C en la posición original) y D_2 (reflexión respecto de una diagonal que pase por los vértices B y D en la posición original). En la figura 5 aparecen representados todos los movimientos del cuadrado. La tabla de multiplicar (primer factor a la izquierda, segundo arriba) es la dada en la tabla 1. También es fácil comprobar que $R^4 = V^2 = H^2 = D_1^2 = D_2^2 = \text{Id}$.

Al seguir al revés el proceso realizado para obtener una permutación P , nos queda la per-

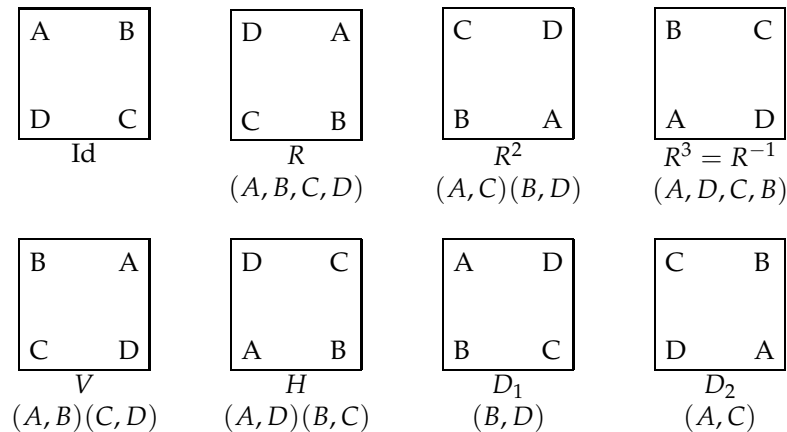


Figura 5. Las simetrías del cuadrado y su representación cíclica

mutación *inversa* P^{-1} de la dada. Observa que $PP^{-1} = \text{Id}$ y que $P^{-1}P = \text{Id}$. Como la operación de realizar sucesiones de movimientos es asociativa, tiene elemento neutro Id y cada elemento P tiene elemento simétrico P^{-1} , el conjunto de los movimientos del cuadrado forma un *grupo*.

3.2. Notación de ciclos

Ahora vamos a ver una notación que es muy interesante para describir permutaciones. Dada una permutación P , el resultado de aplicar sucesivamente P nos dará lugar a $P, P^2, P^3, P^4, \dots$. En lo sucesivo supondremos que *tenemos una cantidad finita de símbolos que permutar*, como pasa en el cuadrado o en el cubo de Rubik. Consideremos uno de los símbolos, por ejemplo, S . Tiene que haber algún momento en el que al aplicar las potencias sucesivas de P a S , digamos $P(S), P(S)^2, P(S)^3, \dots$, tengamos alguna repetición por el principio de las casillas o del palomar. Por ejemplo, supongamos que P^m y P^n envían S al mismo símbolo T y que $m < n$. Entonces consideramos la inversa de P y aplicamos $(P^{-1})^m$, el resultado viene a ser el mismo que si aplicamos sobre S la permutación Id y si aplicamos sobre S la permutación P^{n-m} . En otras palabras: P^{n-m} hace que S se desplace a S . De este modo hemos encontrado que hay una potencia positiva de P que envía S a S .

Podemos quedarnos con la más pequeña de estas potencias positivas, digamos t , de manera que $P^t(S) = S$. Representamos esta situación entre paréntesis:

$$(S, P(S), P^2(S), \dots, P^{t-1}(S))$$

y notamos que a partir de ahí empieza a repetirse toda la secuencia. A esta expresión la llamamos *ciclo*. También vemos que da lo mismo el primer elemento que consideremos en cada ciclo: el ciclo (A, B, C, D) es igual que el ciclo (B, C, D, A) .

Supongamos que en el ciclo anterior no aparecen todos los símbolos. Consideramos un símbolo distinto como principio de otro ciclo. Continuamos hasta agotar todos los símbolos. Por ejemplo, para V obtenemos dos 2-ciclos:

$$V = (A, B)(C, D).$$

En el caso de R , obtenemos

$$R = (A, B, C, D).$$

Para $RV = D_1$, obtenemos

$$D_1 = (A)(B, D)(C).$$

Es habitual no escribir los ciclos de longitud 1. Por lo tanto, D_1 se puede expresar como

$$D_1 = (B, D)$$

y entendemos que A y C quedan fijos por la acción de D_1 .

Observamos que la notación de ciclos describe perfectamente cada permutación, ya que así indicamos adónde se desplaza cada símbolo. La figura 6 es una posible representación gráfica de las expresiones cíclicas de las permutaciones R , H y D_1 .

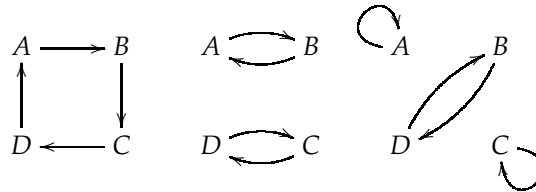


Figura 6. Representaciones cíclicas de R , H y D_1

La figura 5 muestra también, la representación cíclica de los movimientos del cuadrado debajo de cada uno de ellos.

3.3. Permutaciones pares e impares

Las permutaciones de la forma (a, b) se llaman *trasposiciones*. Se puede comprobar que, en general,

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdots (a_1, a_n). \quad (1)$$

La descomposición de una permutación como producto de trasposiciones no es única:

$$(1, 2)(1, 3) = (4, 5)(3, 6)(1, 2)(1, 6)(4, 5)(3, 6) = (1, 2, 3).$$

A pesar de esto, lo que sí que se tiene es que en todas las descomposiciones de una permutación dada como producto de trasposiciones, el número de trasposiciones será siempre par o siempre impar. No daremos la demostración de este resultado, que se puede encontrar en textos básicos de teoría de grupos o en [3]. Esto motiva la introducción del siguiente concepto:

Definición 1. Decimos que una permutación σ es *par* si puede expresarse como producto de un número par de trasposiciones, y que es *impar* si puede expresarse como producto de un número impar de trasposiciones.

Por ejemplo, la permutación $\text{Id} = (1, 2)(1, 2)$ es par. La permutación

$$(1, 2, 3) = (1, 2)(1, 3)$$

también es par, mientras que las permutaciones $(1, 2)$ y $(1, 2, 3, 4) = (1, 2)(1, 3)(1, 4)$ son impares.

Es inmediato comprobar:

Teorema 2. El producto de dos permutaciones pares es par. El producto de dos permutaciones impares es par. El producto de una permutación par y de una impar, o de una impar y otra par, es una permutación impar.

Teorema 3. La inversa de una permutación par es par, y la inversa de una permutación impar es impar.

También se tiene que un ciclo de longitud n es par si n es impar, e impar si n es par, por la fórmula (1). La paridad de las permutaciones es un concepto básico para entender el cubo de Rubik.

4. El cubo de Rubik

4.1. Representación de permutaciones del cubo

Ya comentamos que las permutaciones del cubo de Rubik se podían entender como permutaciones de las 48 pegatinas. Por tanto, una manera de representar permutaciones del cubo es ponerlos como permutaciones de las pegatinas y usar la notación de ciclos que presentamos antes. En principio, es posible identificar las 48 pegatinas y expresar cada movimiento como una permutación de 48 elementos. Sin embargo, las pegatinas de los vértices siempre van a ir a vértices y las de las aristas van a aristas. En términos de teoría de grupos de permutaciones, las pegatinas de las aristas forman una *órbita* bajo la acción del grupo del cubo de Rubik, y las pegatinas de los vértices forman otra órbita. También hay que tener en cuenta que las tres pegatinas de los vértices no se van a separar nunca, y lo mismo se puede decir de las dos pegatinas de las aristas. Esto se puede interpretar en lenguaje de grupos de permutaciones diciendo que el conjunto de las pegatinas de la misma pieza forman un *bloque* para la acción del cubo de Rubik sobre el conjunto de las pegatinas de los vértices o de las aristas. Este hecho nos hace que podamos simplificar la notación como producto de ciclos en el caso de movimientos del cubo de Rubik de manera que se refleje la estructura de bloques. Veamos un ejemplo. El movimiento de la cara frontal (F) puede representarse como

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

Entendemos que la pieza FA pasa a la FD (la cara frontal pasa a la cara frontal y la de arriba a la derecha...), la FD a la FB ... y que con los vértices, la ADF pasa a la DBF , la DBF a la BIF ...

La permutación correspondiente a torcer el vértice ADF en el sentido de las agujas del reloj sería en esta notación (ADF, DFA, FAD) . Para recalcar que se trata de la torsión de una pieza, la representaremos mediante $(ADF)_+$. Para representar (ADF, FAD, DFA) escribiremos $(ADF)_-$. Podemos también usar esta notación para aristas: $(AF)_+$ representa la torsión de la arista AF : (AF, FA) . Para permutaciones en las que interviene más de una pieza, pero en algún paso del proceso se tuerce una de las piezas, se puede usar también esta notación:

$$(ADF, DBF, DFA, BFD, FAD, FDB) = (ADF, DBF)_+ \\ (AF, BF, FA, FB) = (AF, BF)_+$$

Llamaremos a estos ciclos *ciclos con torsión*.

Como

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

y

$$D = (FD, AD, TD, BD)(ADF, TDA, BDT, FDB),$$

la composición de los movimientos F y D se representa como

$$\begin{aligned} FD &= (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)(FD, AD, TD, BD)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\ &= (FA, FD, FB, FI)(FD, AD, TD, BD)(ADF, DBF, BIF, IAF)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\ &= (FA, AD, TD, BD, FD, FB, FI)(ADF)_+(DBF, BIF, IAF, TDA, BDT)_-. \end{aligned} \quad (2)$$

4.2. Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik

Observemos que, en lo que respecta al movimiento de piezas, cada movimiento básico se corresponde con un producto de un 4-ciclo de vértices y un 4-ciclo de aristas. De esta manera, cada movimiento básico es un producto de una permutación impar de vértices y una permutación impar de aristas, es decir, una permutación par de piezas del cubo. Como el producto de permutaciones pares es siempre par, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4. *Cada uno de los movimientos del cubo induce una permutación par en el conjunto de las piezas del cubo.*

Aquellos que conozcan algoritmos para resolver el cubo de Rubik, es posible que conozcan métodos para intercambiar dos pares de vértices o dos pares de aristas, pero creen que es imposible intercambiar solo dos vértices o solo dos aristas. Esto es así porque el intercambio de dos vértices es una permutación impar del conjunto de las piezas del cubo, y esto contradice el resultado anterior.

Consideremos las ocho piezas de vértices. Fijemos una orientación, la que queremos, para cada una de estas piezas. Por ejemplo,

$$\{ADF, ATD, AIT, AFI, BFD, BDT, BTI, BIF\} \quad (3)$$

Analicemos ahora cómo se transforman estas piezas de vértices mediante movimientos de uno de los movimientos básicos. El movimiento de la cara de arriba (A) traslada estas piezas en

$$\{AFI, AIT, ATD, ADF, BFD, BDT, BTI, BIF\}$$

y todas las piezas quedan en la misma orientación. Consideremos ahora el movimiento de la cara frontal (F). Este movimiento transforma las ocho piezas de (3) en

$$\{DBF, ATD, AIT, DFA, IFB, BDT, BTI, IAF\}$$

Notemos que la pieza AFI se tuerce a IAF (sentido antihorario), ADF se tuerce a DFA (sentido horario), BFD se tuerce a DBF (sentido antihorario) y BIF se tuerce a IFB (sentido horario). Si representamos el no girar como 0, el giro en sentido horario como 1 y el giro en sentido antihorario como 2 (dos giros en sentido horario), la suma de estos giros nos da un múltiplo de 3. La suma de las torsiones de todas las piezas es múltiplo de 3, o, en otras palabras, la suma es congruente con 0 módulo 3. Esto nos permite también expresar -1 en vez de 2. Con los otros movimientos básicos ocurre lo mismo. Por tanto:

Teorema 5. *Cada movimiento básico del cubo induce una torsión total en el conjunto de los vértices del cubo que es múltiplo de 3. Por tanto, cada movimiento del cubo induce una torsión total en el conjunto de los vértices del cubo que es múltiplo de 3.*

Con las piezas de las aristas podemos razonar de manera análoga, pero aquí el módulo es 2. Se obtiene:

Teorema 6. *Cada movimiento básico del cubo induce una torsión total en el conjunto de las aristas del cubo que es múltiplo de 2. Por tanto, cada movimiento del cubo induce una torsión total en el conjunto de las aristas del cubo que es múltiplo de 2.*

Estos teoremas nos permiten demostrar que no es posible obtener una combinación de movimientos del cubo que nos permita torcer un vértice o una arista. Tampoco es posible torcer dos vértices en el mismo sentido. Sin embargo, estos argumentos no permiten descartar la posibilidad de torcer dos aristas o torcer dos vértices en sentido contrario, o torcer tres vértices en el mismo sentido. De hecho, estas últimas combinaciones se pueden obtener usando movimientos del cubo, pero eso lo veremos más adelante.

4.3. Algunos movimientos interesantes

Consideremos dos caras consecutivas del cubo, por ejemplo, las caras F y D . Se tiene que la repetición tres veces de media vuelta de la cara F y media vuelta de la cara D nos da

$$P_1(F, D) = (F^2 D^2)^3 = (AF, BF)(AD, BD). \quad (4)$$

Vemos que el este movimiento intercambia los pares de aristas (AF, BF) y (AD, BD) . Si quisiéramos intercambiar $(FI, FD)(AF, BF)$, observamos que si hacemos los movimientos $AB^{-1}F$ tenemos el cubo en la situación del procedimiento que acabamos de presentar. Aplicamos este procedimiento y deshacemos los movimientos iniciales. Concluimos que

$$A^{-1}BF(F^2D^2)^3F^{-1}B^{-1}A = (FI, FD)(AF, BF).$$

Decimos que este movimiento es *un conjugado* de $(F^2D^2)^3$. La conjugación tiene un papel muy importante en teoría de grupos. En principio nos permite intercambiar dos pares de aristas cualesquiera siempre que seamos capaces de colocarlas en una posición en la que se pueda aplicar el procedimiento conocido anterior.

El 3-ciclo $(1, 2, 3)$ puede expresarse en la forma $(1, 2)(1, 3)$. Si hacemos intervenir otros dos elementos, podemos expresar

$$(1, 2, 3) = (1, 2)(4, 5)(1, 3)(4, 5).$$

Por tanto, si deseamos obtener un 3-ciclo de aristas, basta con hacer una descomposición de este tipo y mediante conjugados adecuados será posible realizar un 3-ciclo de aristas. Cualquier otra permutación par de las aristas será posible mediante conjugados adecuados (si bien puede ser laborioso este proceso). Esto nos lleva a ver que toda permutación par se puede obtener mediante producto de conjugados de procedimientos del tipo $(F^2D^2)^3$. Por lo tanto:

Teorema 7. *Es posible obtener cualquier permutación par de piezas de aristas mediante movimientos del cubo.*

Veamos ahora cómo podemos cambiar la orientación de dos aristas con estos procedimientos. Por ejemplo, el siguiente conjugado del movimiento (4) nos permite obtener la permutación $(AF, FB)(AD, BD)$:

$$B^2FDAD^{-1}B^2(F^2D^2)^3B^2DA^{-1}D^{-1}F^{-1}B^2 = (AF, FB)(AD, BD).$$

Si la multiplicamos por $(F^2D^2)^3$, obtenemos

$$B^2FDAD^{-1}B^2(F^2D^2)^3B^2DA^{-1}D^{-1}F^{-1}B^2(F^2D^2)^3 = (AF)_+(FB)_+.$$

De este modo, con conjugados adecuados de este procedimiento es posible obtener todas las torsiones de un par de aristas cualesquiera.

Para trabajar con vértices, utilizaremos un movimiento muy conocido llamado *conmutador*:

$$P_2(F, D) = FDF^{-1}D^{-1} = (ADF, AFI)_+(DBF, DTB)_-(AF, DF, DB).$$

Más interesantes son el cuadrado y el cubo de este procedimiento:

$$P_3(F, D) = (P_2(F, D))^2 = (ADF)_+(AFI)_+(DBF)_-(TBD)_-(AF, DB, DF)$$

$$P_4(F, D) = (P_2(F, D))^3 = (ADF, FIA)(BDT, DBF).$$

En teoría de grupos, los conmutadores desempeñan un papel fundamental, porque nos dan una idea de cuánto se aleja el grupo de ser abeliano. El conmutador de dos movimientos es la identidad si, y solo si, ambos movimientos conmutan.

Los conjugados de movimientos de tipo P_4 nos permiten obtener todas las permutaciones pares de los vértices. Si la permutación de los vértices fuera impar, moveríamos un cuarto de vuelta una cara, con lo que la permutación de vértices sería par. Entonces podríamos colocar los vértices en sus posiciones, siguiendo pasos parecidos a los que usábamos con las aristas. Con

conjugados de movimientos de tipo P_3 podemos orientar los vértices (aunque descoloquemos las aristas). Por ejemplo, si quisiéramos obtener $(ADF)_+(AIT)_-$ (con quizás algún movimiento de aristas), aplicaríamos

$$P_3(F, D)A(P_3(F, D))^{-1}A^{-1}.$$

El mismo tipo de argumentos que usábamos con las aristas nos permiten convencernos de que es posible torcer cualquier par de vértices del cubo en orientaciones distintas, o cualesquier tres vértices del cubo en el mismo sentido, aunque para ello se intercambien aristas de sitio. También se puede ver que es posible obtener una sucesión de movimientos del cubo que tuerza dos vértices en distinta orientación y deje fijas las aristas, al igual que tres vértices en la misma orientación.

4.4. Métodos de resolución del cubo de Rubik

Los procesos anteriores nos permiten resolver el cubo de Rubik de la siguiente manera:

1. Si los vértices forman una permutación impar, efectuamos el movimiento A .
2. Colocamos los vértices en su sitio aplicando combinaciones de conjugados de movimientos de tipo P_4 .
3. Orientamos los vértices aplicando combinaciones de conjugados de movimientos de tipo P_3 .
4. Colocamos las aristas (que ahora deben formar una permutación par) y las orientamos con conjugados de movimientos de tipo P_1 .

Con este proceso vemos que es posible resolver el cubo de Rubik, aunque el proceso puede ser muy laborioso y las combinaciones sean difíciles de obtener.

Los métodos de resolución del cubo de Rubik se basan en tener una colección de movimientos que permitan dejar fijas algunas posiciones que ya tengamos construidas. Por ejemplo, en el algoritmo que acabamos de describir, buscamos primero métodos que orienten los vértices sin cambiarlos de sitio (basados en P_3) y después métodos que coloquen las aristas sin mover los vértices (basados en P_1). Otro algoritmo muy conocido empieza por:

1. colocar las aristas de una cara (por ejemplo, A),
2. colocar los vértices de esa cara sin mover sus aristas,
3. colocar las aristas de la parte central (paralela a la cara), sin alterar la cara ya hecha,
4. orientar las aristas de la cara opuesta B sin mover las piezas de A ni la sección central,
5. colocar las aristas de B de manera que formen una permutación par si es necesario mediante un giro de B ,
6. colocar en su sitio las aristas de B sin alterar las piezas de A ni la sección central,
7. colocar los vértices de B sin alterar los demás vértices ni las aristas y, finalmente,
8. orientar los vértices de B sin mover las demás caras.

También se basa en tener una serie de combinaciones de movimientos que permitan hacer cada paso respetando todo lo realizado antes. Hemos visto que es posible construir estos movimientos a partir de P_1 y P_2 .

Los métodos que utilizan los expertos en resolución del cubo se basan en una gran colección de movimientos cuya estructura de ciclos sea conocida y relativamente sencilla, pero siguen el esquema de ir usando métodos que vayan completando cada vez una parte mayor del cubo... aunque no veamos piezas colocadas en su sitio. Cuanto más amplia sea esta colección, será posible hacerlo con menos movimientos. En el lenguaje de la teoría de grupos, consideramos una cadena de subgrupos

$$1 = H_n \leq H_{n-1} \leq H_{n-2} \leq \cdots \leq H_2 \leq H_1 = G,$$

donde G es el grupo del cubo de Rubik, de manera que para cada i el subgrupo H_i consta de movimientos que respetan (estabilizan) una configuración de piezas C_i y en el paso i se usan movimientos de H_i .

4.5. Número de movimientos del cubo de Rubik

Una vez hemos visto qué tipos de permutaciones se pueden obtener con el cubo de Rubik, podemos proceder a contar cuántas configuraciones distintas puede adoptar. Ya sabemos que es posible colocar los vértices y las aristas en cualquier posición, siempre que la permutación total de vértices y de aristas sea par. Como se tiene que la mitad de las permutaciones son pares y la otra mitad son impares (para ver esto, es suficiente ver que si multiplicamos por una trasposición, las permutaciones pares se transforman en impares y las impares en pares, con lo que hay el mismo número de permutaciones pares que de impares), esto nos da un total de

$$\frac{12! \cdot 8!}{2}.$$

Para cada permutación de las piezas, podemos orientar los vértices de manera que la torsión total sea múltiplo de 3 y las aristas de manera que la torsión total sea múltiplo de 2. Por tanto, los vértices pueden torcerse de

$$\frac{3^8}{3}$$

maneras, mientras que las aristas pueden hacerlo de

$$\frac{2^{12}}{2}$$

maneras válidas. Esto nos da un total de

$$\frac{12! \cdot 8!}{2} \cdot \frac{3^8}{3} \cdot \frac{2^{12}}{2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

posiciones distintas del cubo que se pueden obtener a partir de la configuración inicial con movimientos legales del cubo.

Para hacernos una idea de la magnitud de este número, si estimamos en unos 20 mil millones de años la edad del universo desde el «Big Bang», la cantidad de configuraciones del cubo de Rubik es unas 68 veces la edad del universo expresada en segundos. John Paulos indicaba en [1] que *Ideal Toys Company* anunciaba en la publicidad del cubo de Rubik que había más de tres mil millones de combinaciones posibles. A continuación Paulos decía que dar ese número era algo comparable a decir que *MacDonald's* anunciara orgullosa que había vendido más de 120 hamburguesas.

Si contamos el número de formas de armar el cubo si lo desmontamos, ahí no tenemos que fijarnos en que las permutaciones totales sean pares, o las piezas tengan que estar torcidas de una determinada manera. Esto nos lleva a un total de disposiciones igual a

$$12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000 = 2^{29} \cdot 3^{15} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11,$$

que es 12 veces la anterior cantidad. Esto vendría a decirnos que si desmontamos el cubo y lo volvemos a montar, en promedio solo en una de cada 12 veces que lo hagamos será posible montar el cubo en su posición inicial.

Los lectores con conocimientos más profundos de la teoría de grupos podrán observar que este último grupo, el que corresponde a las permutaciones que se pueden obtener al desmontar y montar el cubo de Rubik, es isomorfo a un producto directo del producto orlado $C_3 \wr \Sigma_8$, correspondiente a las maneras de colocar los vértices, por el producto orlado $C_2 \wr \Sigma_{12}$, donde C_n es el grupo cíclico de n elementos y Σ_n es el grupo simétrico de grado n formado por todas las permutaciones de n elementos. El grupo del cubo de Rubik es un subgrupo de índice 12 de este grupo.

4.6. Repeticiones de movimientos y órdenes de elementos

Al repetir una combinación de movimientos del cubo de Rubik varias veces, siempre habrá un momento en que lleguemos a la posición inicial. El argumento es parecido al que usábamos cuando presentábamos la estructura de ciclos: como el número de configuraciones posibles es finito, al iterar un movimiento tiene que haber un momento en el que se repita una configuración y, como ese movimiento tiene inverso, resultará que una potencia de ese movimiento será la identidad. Por ejemplo, con el movimiento básico A es fácil ver que A^4 es la identidad, y que el menor natural n que hace que A^n nos dé la identidad es precisamente 4. Decimos que A tiene orden 4.

Moviendo el cubo vemos que $M = A^2 D^2$ tiene orden 6. Nos basta con observar que M^3 es el procedimiento $P_2(A, D)$ y que este último procedimiento tiene orden 2. El movimiento FD tiene orden 105. Hay movimientos de orden 1 260, el mayor posible, como

$$DF^2 T^{-1} A T^{-1} = (BFD, FBI, IAF)_{-} (ADF, TIB, BDT, ATD, TAI)_{+} \cdot (FA, FB, IA, TD, BD, FI, FD)_{+} (IT, AD)_{+} (AT, BT). \quad (5)$$

Es fácil ver que un ciclo tiene orden igual a su longitud. Por ejemplo, $(1, 2, 3, 4)$ tiene orden 4. Si tenemos una permutación dada como producto de ciclos disjuntos, el orden de esta permutación será el mínimo común múltiplo de los órdenes de los ciclos, es decir, el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos. Por ejemplo, el orden de $(1, 2, 3)(4, 5)(6, 7, 8, 9)$ es $\text{mcm}(3, 2, 4) = 12$. Pero esto solo vale si los ciclos son disjuntos.

Para el cubo de Rubik sucede lo mismo. Únicamente hay que tener en cuenta que la longitud de los ciclos con torsión de vértices es el triple de lo que aparece en la notación abreviada, y la longitud de los ciclos con torsión de aristas es el doble de la que se ve en la notación abreviada. Por ejemplo, para el movimiento FD , que se descompone según la fórmula (2) como un 7-ciclo de aristas, un 1-ciclo con torsión de vértices (longitud 3), y un 5-ciclo de vértices, el orden será $\text{mcm}(7, 3, 5) = 105$. Para el movimiento $DF^2 T^{-1} A T^{-1}$, cuya descomposición según la fórmula (5) como un 3-ciclo con torsión de vértices (longitud 9), un 5-ciclo con torsión de vértices (longitud 15), un 7-ciclo con torsión de aristas (longitud 14), un 2-ciclo con torsión de aristas (longitud 4) y un 2-ciclo de aristas, el orden será $\text{mcm}(9, 15, 14, 4, 2) = 1\,260$.

Por último, dos movimientos conjugados tienen el mismo orden. Esto se debe al siguiente hecho:

$$(x \cdot g \cdot x^{-1})^n = x \cdot g^n \cdot x^{-1}.$$

4.7. Una variación del cubo de Rubik original

Se venden algunos cubos de Rubik en los que las pegatinas no solo tienen color, sino que también tienen una figura que debe ir orientada. Al colocar las piezas en su posición inicial, se

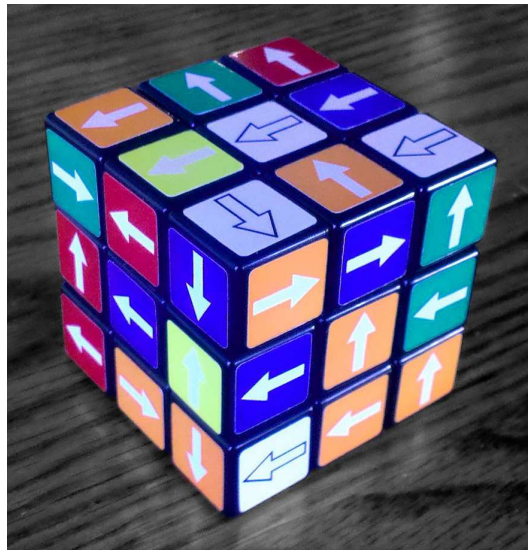


Figura 7. Variación del cubo de Rubik.

obtiene que todas las pegatinas están bien orientadas, excepto quizás las del centro. Cada uno de los movimientos básicos corresponde a un giro de un cuarto de vuelta del centro de la cara. Una permutación par de vértices (o de aristas) corresponderá a un número par de cuartos de vuelta del cubo. Por tanto:

Teorema 8. *El número total de cuartos de vuelta de los centros en movimientos legales del cubo orientado es de la misma paridad que la permutación de vértices (o de aristas).*

En particular, si colocamos los vértices y las aristas en su sitio, el número total de cuartos de vuelta que han girado los centros es par. Por ejemplo, el movimiento $(FD)^{105}$ gira el centro de la cara F $1/4$ de vuelta y la cara D $1/4$ de vuelta. Deja todas las otras caras fijas. El movimiento $(F^2D)^{30}$ gira el centro de la cara D media vuelta y deja los demás centros fijos. Este tipo de movimientos nos permitirá orientar los centros de las caras si el número total de cuartos de vuelta que ha girado es par.

El mismo tipo de técnicas permitiría estudiar otros pasatiempos, como otros cubos y poliedros de Rubik. El encontrar suficientes secuencias de movimientos con una estructura de ciclos sencilla es útil para obtener algoritmos de resolución.

Conclusión

Hemos visto cómo el cubo de Rubik permite introducir de una manera natural nociones de la teoría de grupos de permutaciones, como el concepto de conjugación y el de orden. Aspectos puramente físicos relacionados con la rigidez de las piezas del cubo de Rubik se manifiestan en el grupo de permutaciones del grupo mediante las órbitas de las pegatinas de los vértices y de las aristas y los bloques asociados a cada pieza. Aspectos de paridad de permutaciones y de congruencias módulo 2 o módulo 3 muestran la imposibilidad de ciertas configuraciones del cubo. La estructura de ciclos de la permutación asociada a cada movimiento es útil para resolver el cubo de Rubik una vez se hayan obtenido movimientos que lleven asociada una estructura de ciclos sencilla. Con ello, vemos que el cubo de Rubik permite ilustrar de una manera natural algunos conceptos de la teoría de grupos, y cómo se pueden usar nociones básicas de teoría de grupos para resolver el cubo de Rubik.

Agradecimiento

El autor agradece la financiación del proyecto MTM2010-19938-C03-01 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias

- [1] PAULOS, J. A., *Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences*. Hill and Wang, New York, 1988.
- [2] SINGMASTER, D., *Notas sobre el cubo de Rubik*. Altalena, Madrid, 1981.
- [3] WIKIPEDIA, *Parity of a permutation*, http://en.wikipedia.org/wiki/Parity_of_a_permutation. Visitado el 8 de marzo de 2013.

Sobre el autor:

Nombre: Ramón Esteban Romero

Correo electrónico: resteban@mat.upv.es

Institución: Departament de Matemàtica Aplicada/Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València, Camí de Vera, s/n, 46022 València.

Dirección actual: Departament d'Àlgebra, Universitat de València, Dr. Moliner, 50, 46100 Burjassot, València.

Críticas

Los Secretos del Infinito. 150 Respuestas al Enigma

The Infinity Secrets. 150 Answers to The Enigma

Mariano Soler Dorda

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 111-114, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Jun'13; Aceptación: 31 Ago'13

1 de octubre de 2013

Resumen

Se presenta en este artículo una reseña de este libro, que revela 150 secretos universales escondidos bajo el infinito. El autor trata de mostrar el conocimiento que tenemos de este concepto a través del tratamiento dispar que ha tenido históricamente en disciplinas tan dispares como la vinculación del infinito con el espacio, la religión, la energía, las espirales, el pensamiento, la probabilidad, la geometría o el cálculo.

Palabras Clave: Infinito, espacio, religión, energía, espirales, pensamiento, probabilidad, geometría, cálculo.

Abstract

This article presents a review of this book, that reveals 150 universal secrets hidden behind the infinity. The author tries to show historically our knowledge about this concept through quite different disciplines as the link between the infinity and the space, the religion, the energy, the spirals, the thought, the probability, the geometry or the calculus.

Keywords: Infinity, space, religion, energy, spirals, thought, probability, geometry, calculus.

1. Ficha Técnica

Título: Los Secretos del Infinito. 150 Respuestas al Enigma.

Autor: Antonio Lamúa Olivar

Nº Páginas: 320

Editorial: Editorial LOFT Publications, S.L.

ISBN: 978-84-15227-29-8

Año de Publicación: 2012

Encuadernación: Rústica

Materia: Ciencia, tecnología, arte, filosofía.

2. El Libro

Todos sabemos que el infinito es una entequeia, una cosa sin sentido en sí misma, pero que ayuda a nuestras mentes limitadas a trabajar con cosas que escapan a estos límites. El título no hace honor al contenido. “Los Secretos del Infinito”. No tiene secretos, es una idea, es una ayuda que nos permite vencer las limitaciones de nuestro cerebro. “150 Respuestas al Enigma”. No responde, dado que no hay respuesta posible. Fuera de estas consideraciones es un libro que merece la pena leer. Trata de ciertos aspectos reales que “se parecen al infinito”. Algunas son cosas de todos los días, y otras más especializadas, que se acercan a ese concepto, que permiten pensar en lo no pensable, viéndolo desde situaciones reales que se aproximan a ello. No se plantean diferencias entre ese “ocho tumbado”, que aparece en la portada y los números “transfinitos”, los que representan el número de elementos que tienen los conjuntos llamados “conjuntos infinitos” y que se caracterizan por poderse poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de sí mismo.

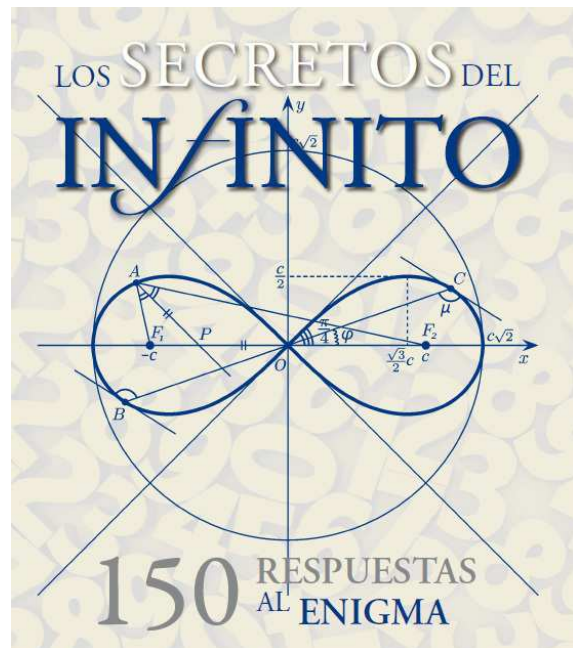


Figura 1. Portada de libro¹

Contempla el problema desde los puntos de vista de varias disciplinas:

- Ciencia en general, en que aparece desde la visión de Einstein de los universos paralelos hasta el ADN, pasando por el telescopio Hubble y por la teoría del caos.
- Matemáticas, que se inicia, ¡cómo no! con el Cálculo Infinitesimal de Leibniz, Cantor, los Fractales de Mandelbrot, el problema de la división por cero y los teoremas de incompletitud de Gödel.
- Tecnología, con el colisionador de hadrones, la nanotecnología y el impresionante material conocido como grafeno. Arte, con las escaleras infinitas del Vaticano, el Grito de Edward Munch, el nudo de Salomón o las redes infinitas de Yayoi Kusama.
- Filosofía, desde Anaximandro hasta Schopenhauer, pasando por Kant, Hegel, Pascal y Descartes, por supuesto. Simbología, con el nudo infinito tibetano, el karma y el ave Fénix.

Todo ello está presentado con breves artículos, unos más acertados que otros desde mi punto de vista, pero cuya lectura no sólo no cansa sino que es entretenida. Está acompañado de magníficas ilustraciones de cada tema que, en mi opinión es lo más destacado del libro. Leerlo y no quedaréis defraudados.

¹ <http://www.ilusbooks.es/proximos-titulos/secretos-del-infinito-detail>

Sobre el autor:

Nombre: Mariano Soler Dorda

Correo electrónico: m.soler@upm.es

Institución: Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil. Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, España.

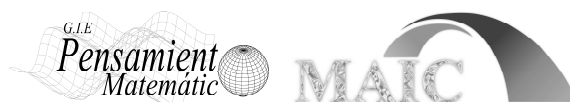
Entrevista

Juan Medina: creador de lasmatematicas.es

Juan Medina: creator of lasmatematicas.es

Equipo Editorial

Revista de Investigación



Volumen III, Número 2, pp. 115–118, ISSN 2174-0410

Recepción: 2 Ago'13; Aceptación: 20 Sep'13

1 de octubre de 2013

Resumen

En esta ocasión charlamos con Juan Medina, profesor de matemáticas de la Universidad de Cartagena (España) y creador de lasmatematicas.es, un portal que presenta más de 3.000 vídeos de autoayuda para estudiantes de todos los niveles. Su web se ha convertido de este modo en un lugar de referencia para todos aquellos interesados en “mejorar” sus matemáticas.

Palabras Clave: docencia online, autoayuda.

Abstract

This time we chat with Juan Medina, mathematics lecturer at Cartagena University (Spain), and creator of lasmatematicas.es, a website that presents more than 3.000 self-help videos for students of every level. His web has become in this way a reference one for those interested in “improving” their mathematics.

Keywords: online teaching, self-help.

1. Entrevista

- Hola Juan. En primer lugar queríamos agradecerte la deferencia que has tenido para con nuestra revista. Todos aquellos que hemos seguido tu trayectoria conocemos bastante acerca de tu trabajo, pero ¿cuál ha sido tu trayectoria hasta ser profesor?, desde un punto de vista profesional ¿quién y cómo es el Juan cotidiano?, ¿qué haces en tu día a día en la universidad?

Es un placer que compañeros de profesión se fijen en mi trabajo y les agrade, muchas gracias a vosotros. Mi trayectoria ha sido la habitual de todos aquellos que acabamos nuestros estudios a mediados de los años 90 y la nota nos daba para hacer carrera en la Universidad, beca de colaboración, beca FPI, breve estancia en la Universidad de Birmingham. Como en otras universidades, en la Universidad de Valencia



Juan Medina

no salían plazas y mi carrera docente se presentaba larga e incierta, así que a los dos años de beca “eché los papeles” para una plaza de ayudante en la Universidad Politécnica de Cartagena, de nueva creación a partir del campus de Cartagena de la Universidad de Murcia, logré la plaza y así hasta ahora. Estoy muy contento de estar en Cartagena, si hubiera seguido en Valencia no hubiera llevado a cabo este proyecto, estaría centrado en otros temas, y a mí me apasiona enseñar matemáticas. Como todo profesor, tengo mis clases, y desde que empecé con los vídeos a finales de 2005, poco a poco este proyecto ha ido ocupando más tiempo y comiendo todo el terreno a mi labor investigadora, por otra parte, también van surgiendo otros proyectos que hacen que pases de ser profesor “a tiempo completo” a profesor “a día completo”, colaboraciones, viajes, etcétera. Todo ello intento compaginarlo con mi vida familiar, mi mujer estudio la carrera conmigo y sabe como soy, tengo mucha suerte.

- Todos los que nos dedicamos a la apasionante aunque últimamente maltratada profesión de la enseñanza, siempre hemos soñado con que nuestro trabajo supusiera en cierto modo un referente dentro de la comunidad de la enseñanza-aprendizaje. En nuestra opinión tú lo has conseguido. Pero cuéntanos, ¿de qué manera tiene uno la brillante idea de aprovechar todos los recursos cotidianos que existen en nuestro entorno gracias a la red e idear el “monstruo” que tú has tenido el coraje de transformar en realidad? Nos referimos por supuesto a lasmatematicas.es.

Nunca he considerado que esto sea fruto de una idea, desde que empecé a dar clases en Cartagena vi obvio que esto iba a ser “la bomba”, no porque lo hiciera yo, sino el hecho de que cualquier profesor traspasara las paredes del aula, no me refiero a enseñar con un libro o unos apuntes, a emular lo que haces en el aula mediante vídeos y que todas las personas, independientemente de su situación geográfica o social pudiera acceder al conocimiento ... Internet es la clave. Una vez supe cómo hacerlo, no he podido parar, grabo de forma compulsiva.

- ¿Cuál es el secreto para conseguir montar un portal con casi 3.000 videos explicativos de problemas matemáticos, más de 63.000 suscriptores en el canal de Youtube, o una comunidad de más de 102.000 miembros en Facebook?

En su momento fue pionero, no existía ni la Khan Academy, el boca a boca ayudaba muchísimo, la gente te entiende, te recomienda, es la novedad. Ahora costaría mucho más para mí o cualquier otro colega, de hecho muchos alumnos prefieren otro tipo de material, la razón es muy clara, el alumno busca ayuda para aprobar, no para aprender, ¿Para qué le sirve que mis vídeos tengan el doble de información si con la receta de otro, donde no van a saber qué es nada, van a aprobar? ¿Qué les importa que un límite se calcule en un punto de acumulación?

- Muchos de nosotros somos unos auténticos enamorados de las TIC's, y en menor o mayor medida intentamos integrarlas en nuestras clases diarias. En tu caso cuéntanos ¿qué herramientas utilizas?

Son herramientas muy sencillas, pero tardé años en dar con ellas, la ayuda de algunos fue clave. Utilizo un Tablet PC, no las tablets de ahora, un Tablet PC es un ordenador portátil con la pantalla táctil, donde un puntero con forma de lápiz funciona como el ratón al pasarlo por la pantalla. Así, usando un procesador de texto “a mano alzada”, esto es, un programa que te permite generar documentos que contienen tu escritura (utilizo OneNote, que es parte de Microsoft Office) y un programa para captura en vídeo de todo lo que haces en pantalla y lo que dices por el micrófono (utilizo Hypercam, que es gratuito, otra opción es Camtasia, que es de pago), generamos nuestros vídeos.

- Nosotros profesores, la mayoría de las veces nos hemos dedicado a esto de la enseñanza por diversos motivos, admiración por aquel profesor que nos descubría los secretos que escondían los números, aquel amigo con el que estudiábamos, jugábamos y aprendíamos juntos ... En tu caso Juan, primero, ¿cuál fue el detonante para que eligieras a las matemáticas en tu formación universitaria?, y segundo, ¿por qué profesor?

Lo tenía claro desde muy pequeño, cuando cogía los libros de mi padre para aprender matemáticas, hacer problemas, y enseñarles a mis amigos, es lo que siempre he querido hacer.

- *Hablemos sobre investigación. ¿Cuál es el campo en que se centran tus actividades investigadoras?*

Soy algebrista, he trabajado en Teoría de Grupos, aunque desde que empecé con mi proyecto, que nunca he considerado investigación sino transferencia de conocimiento, lo he dejado aparcado.

- *Dentro del campo de la investigación, si tuvieras la capacidad de mejorar el sistema, ¿cómo lo harías?*

Creo que todos compartimos la idea de que la investigación está muy poco valorada, ya sea económicamente o también en el reconocimiento. En España tenemos personas en la élite en investigación matemática, hecho que incluso sus alumnos desconocen. Por otra parte, existen infinidad de temas, suele ocurrir que en congresos los únicos que conocen sobre lo que se hablan son los propios ponentes, y cada uno piensa que su tema es el mejor ... Por otra parte, como en cualquier ámbito en la vida, existe mucha "Ingeniería", hay verdaderos expertos en aumentar el número de publicaciones olvidando la calidad de éstas o el aporte verdadero que suponen. Bueno, no me voy a meter en ello que no soy el más indicado para hacerlo.

Es vital una evaluación adecuada de los aportes realizados y una mayor reconocimiento.

- *Muchos de nosotros estamos más que preocupados por la pobre preparación con la que muchos de nuestros alumnos acceden a la universidad. Nos gustaría que nos dieras tu opinión acerca de este hecho y cuál es tu experiencia con tus estudiantes.*

Es una de las razones principales por las que empecé con lasmatematicas.es, al igual que todos los que damos clase en el primer curso de la Universidad, o repasaba o al llegar al examen me encontraba con fallos en las derivadas, integrales, límites, ... Creo que en España tenemos excelentes profesores de matemáticas en Secundaria, pero los alumnos saben que con hacer los ejercicios van a aprobar, y no saben matemáticas. De todas formas, lo mismo ocurre con nuestros alumnos en la Universidad. Así, creo que hay que ser exigentes para comprobar que efectivamente entienden lo que hacen, para ello, yo intento evaluarlos continuamente, y siempre, cuando hago los problemas, razonar hasta el último detalle. De todas formas, conmigo también aprueban muchos sabiendo poco ...

- *Tú mismo estas preparando pequeños cursos a distancia en tu portal. ¿Qué opinas de la telenseñanza? ¿Crees que en España estamos preparados para montar en una universidad pública algo parecido a lo que están haciendo en el MIT o portales como Coursera?*

Como un buen profesor en un aula no hay nada. El tempo de la exposición dependiendo de las circunstancias, el repetir con otras palabras, la espontaneidad que a veces hace que surjan genialidades que incluso a ti te sorprenden ... Sin embargo, si los mejores graban sus exposiciones y cursos, ¿para qué escucharnos a nosotros? El futuro es toda una incógnita. Como indicáis, yo tengo un curso, Matemáticas Básicas, de hecho participo en la plataforma referente en español, Miriadax.net. En la primera edición en el primer semestre de este año se han ofertado 58 cursos, y los datos han sido buenísimos, más de 200 mil inscritos. Ahora empezará una nueva edición y ahora ofertaré, además de "Matemáticas Básicas", nuevos cursos básicos sobre probabilidad y estadística descriptiva, creo que son cursos muy necesarios ya que la probabilidad en secundaria se explica lo justo.

- *¿Cómo crees que debemos mirar a Bolonia, con esperanza o resignación?*

Veo mucha voluntad por parte de muchos profesores, la forma de dar las clases está cambiando, sin embargo hace falta una fuerte inversión y no está llegando ...

- *En estos tiempos "complicados" que nos toca vivir, se habla cada vez más de la necesidad de cambiar nuestra universidad en particular y el sistema educativo en general. ¿Consideras que estamos construyendo un modelo "a la americana"?*

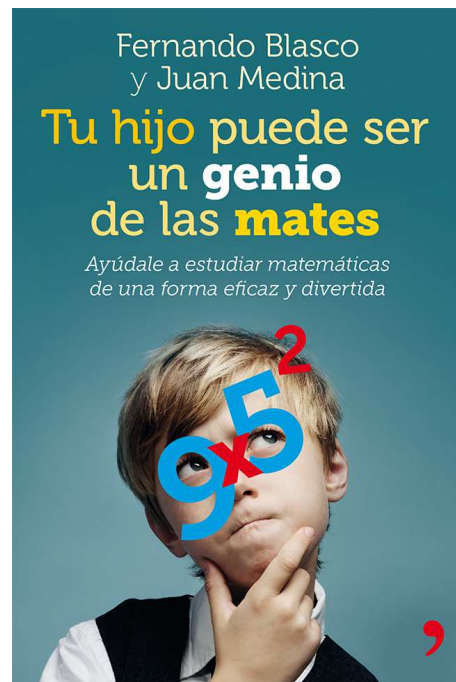
Están naciendo muchas universidades privadas, mucha competencia, sin embargo muchas de ellas basan su estrategia en una mayor facilidad para aprobar, es un desastre. No ocurre como en las mejores universidades privadas americanas, donde se fichan a los mejores profesores,

y los mejores alumnos estudian gratis (junto con los que tienen más dinero). Por otra parte, también debería existir esta competitividad entre las universidades públicas, pero no a costa de bajar el listón. Creo que más que cambiar el sistema educativo, lo que hay que lograr es que nuestros alumnos, que se forman como fruto de su esfuerzo y a costa de todos nuestros impuestos, no tengan que marcharse y otros países se aprovechen de personas tan cualificadas.

- Hablemos sobre tus próximos proyectos pedagógicos. Últimamente hemos visto en tu portal vídeos incluso en la lengua de Shakespeare. Cuéntanos más sobre los nuevos retos en los que estás inmerso y qué proyectos tienes pensado para el futuro más próximo.

En primer lugar, tengo clarísimo que no existen distintas matemáticas dependiendo del nivel educativo, y la causa por la que a muchos se les dan mal las matemáticas viene de edades tempranas, no se acostumbraron a pensar desde entonces. Me apetece hacer algo al respecto, de hecho este año he publicado un libro junto con Fernando Blasco, sobre matemáticas de primaria, para que padres ayuden a sus hijos con las mates. Ha sido una gran experiencia, he aprendido mucho de Fernando, en cuanto a la cuestión comercial y el mundo de las editoriales, mejor no hablar. Por otra parte, el tema de traducir mis vídeos es algo que me interesa, que la lengua no sea un impedimento, el portugués es una prioridad, tengo más de 200 traducidos al inglés ... El tema de los Cursos Masivos también me interesa mucho, en definitiva, voy a estar bastante ocupado.

De nuevo os agradezco vuestra atención.



Portada de "Tu hijo puede ser un genio de las mates"

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.



Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

