Juegos Matemáticos

Un juego competitivo basado en un problema matemático

A competitive game based in a mathematical problem

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen III, Número 1, pp. 189–194, ISSN 2174-0410
Recepción: 28 Feb'13; Aceptación: 20 Mar'13

1 de abril de 2013

Resumen

En este artículo se presenta un problema propuesto en la competición matemática IMC como ejemplo de reto matemático combinado con un juego competitivo entre dos agentes.

Palabras Clave: Olimpiada matemática, teoría de Juegos, estrategias ganadoras.

Abstract

In this paper a proposed problem for the mathematical competition IMC is presented. This problem can be seen as a mathematical challenge but also as an example of a two player game.

Keywords: Mathematic competition, game theory, winning strategies.

1. Introducción

Los juegos matemáticos suelen ser retos que se proponen para que cada persona demuestre su pericia resolviéndolos de forma individual. Pero también se puede considerar como un juego matemático aquél en el que una persona tiene que derrotar a otra utilizando sus conocimientos matemáticos y su capacidad deductiva, en lo que sería un juego competitivo.

En este artículo se presenta un ejemplo de este segundo tipo de juego, que se propuso precisamente en otro tipo de competición: una olimpiada internacional de matemáticas, que puede ser considerada como una mezcla de los dos tipos de juegos planteados anteriormente: cada participante se enfrenta de forma individual con los problemas que se le proponen, pero compite a su vez con los otros participantes por medio de un ranking según la puntuación que obtenga en dichos problemas.

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2 se hace una breve introducción a la teoría de juegos (ver [1] y [2] para más información), en la sección 3 se introduce la competición matemática IMC, de la que se tomó el juego, y en la sección 4 se da el enunciado de dicho juego y su solución.

2. La teoría de juegos

La teoría de juegos estudia los procesos que se dan cuando dos ó más agentes compiten entre sí buscando maximizar su ganancia ó derrotar a los otros jugadores. Analiza entonces las estrategias de cada jugador para ganar y las situaciones de estabilidad, como las posiciones de equilibrio de Nash.

En definitiva, la teoría de juegos tiene como finalidad el modelar matemáticamente el proceso de decidir, la estrategia en la toma de decisiones.

Existen diferentes clasificaciones de los tipos de juegos que estudia esta disciplina. Algunas de ellas son:

- Juegos no cooperativos y cooperativos.

En los juegos no cooperativos, los jugadores compiten individualmente buscando

optimizar su beneficio, en los cooperativos los jugadores establecen alianzas buscando optimizar el bien común.

En el caso de la competición política, que se puede interpretar como un juego en el que los

agentes buscan la máxima ganancia en votos, se puede decir que los partidos políticos cooperan por medio de coaliciones.

- Juegos simultáneos y secuenciales.

En los juegos simultáneos, los jugadores hacen sus movimientos a la vez. En los juegos secuenciales, uno de los jugadores mueve primero y el otro después respondiendo a la acción del primer jugador, y así sucesivamente. El concepto de estabilidad que se estudia en este tipo de juegos es el equilibrio de Stackelberg.

Un ejemplo "deportivo" de juego simultáneo sería el fútbol, donde los equipos actúan a la vez en el campo de juego, peleando por una bola. Ejemplos de juegos secuenciales podría ser el tenis ó el ajedrez, donde un jugador inicia el juego, el otro responde, el primero sigue, y así hasta el final.

Aunque en estos dos juegos el empezar da ventaja, ya que se lleva la iniciativa, no en todos los juegos secuenciales tiene ventaja el que empieza: a veces es más provechoso actuar en segundo lugar, ya que tienes información sobre el movimiento del otro jugador, lo que te puede servir para preparar tu estrategia.

El juego que se presenta en este artículo es un ejemplo de juego secuencial en que tiene ventaja el segundo jugador. De hecho, éste tiene siempre una estrategia ganadora, independientemente de las acciones que tome el primer jugador. Antes de verlo, introduzcamos la competición matemática en que se propuso.

3. La Olimpiada matemática IMC

La IMC (International Mathematics Competition) es un concurso matemático a nivel universitario en el que participan estudiantes de todo el mundo. En el año 2012 se celebró la 19 edición, que congregó a unas 200 instituciones universitarias de 44 países.

Esta 19 edición tuvo lugar en Blagoevgrad (Bulgaria), sede más habitual de las anteriores ediciones. En todo caso, la competición siempre se lleva a cabo en algún país de Europa del Este, siendo los estudiantes de esta zona los habituales dominadores de la competición.

Aunque los estudiantes representan a sus Universidades compiten de manera individual, por medio de dos exámenes de cinco horas y cinco problemas cada uno que tienen lugar los dos primeros días de competición.

Los problemas suelen estar relacionados con temas de Álgebra, Análisis y Combinatoria, aunque en esta edición por primera vez se plantearon problemas que tenían que ver con la Teoría de Juegos: El tercero del primer día (nivel intermedio) y el primero del segundo día (nivel "bajo"), que es el que analizamos en la siguiente sección.

4. El juego y su solución

4.1. Enunciado del problema

El enunciado del primer problema del examen del segundo día es el siguiente.

Considera un polinomio $f(x) = x^{2012} + a_{2011} x^{2011} + \ldots + a_1 x + a_0$

Albert Einstein y Homer Simpson juegan el siguiente juego: Por turnos eligen uno de los coeficientes $a_{2011}, \ldots, a_0$ y le asignan un número real, no pudiendo repetir coeficientes.

Empieza el juego Albert y el juego termina cuando se ha asignado valores a todos los coeficientes.

El objetivo de Homer es hacer que $f(x)$ sea divisible por un polinomio $m(x)$ dado, y el de Albert evitarlo.

a) ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora si $m(x) = x - 2012$?

b) ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora si $m(x) = x^2 + 1$?

Vamos a ver que en los dos casos Homer tiene una estrategia ganadora. Por tanto, si Homer deduce esa estrategia (ó si alguien se la apunta) y la sigue ganará a Albert Einstein, haga lo que haga éste, a pesar de sus diferentes inteligencias.

Antes de ver estas estrategias, comentemos que es una broma habitual en este tipo de competiciones matemáticas el introducir el año en curso como dato. Esto hace que el dato sea lo suficientemente grande para que no se pueda resolver el problema por el método de ensayo-error, pero hay que notar que en este caso el problema sería esencialmente el mismo si el grado del polinomio fuera un número genérico *n*, con *n* par.

4.2. Solución al problema

Vemos la solución de los dos apartados:

a) En este caso, al ser *m* un polinomio de grado 1, dividirá a *f* si 2012, la raíz de *m*, es raíz también de aquel polinomio. Entonces da igual lo que hagan en los primeros movimientos, lo que tiene que hacer Homer para cerrar el juego es elegir el coeficiente que queda, supongamos sin pérdida de generalidad que es a_0, para que se cumpla que 2012 es raíz de *f*, es decir, que $f(2012)=0$. Para ello tiene que resolver una ecuación de primer grado en a_0, lo que determina el valor que tiene que jugar. Hay que notar que Homer termina el juego en los dos apartados, al ser el número de coeficientes par y empezar a jugar Albert.

b) Este caso es más difícil, al ser *m* un polinomio de grado 2, de raíces no reales $\pm i$, siendo *i* la unidad imaginaria. También se cumplirá que *m* divide a *f* si *i* es raíz de *f*.

La dificultad estriba en que al evaluar $f(i)$ da un número no real, por lo que Homer debe procurar que se anulen sus partes real e imaginaria.

Una estrategia a seguir entonces es la siguiente: elegir siempre un coeficiente de distinta paridad a la del coeficiente elegido por Albert hasta su penúltimo movimiento. Es decir, si Albert elige un coeficiente de índice par, Homer ha de elegir uno de índice impar. Así se asegura que cuando vaya a hacer su penúltimo movimiento, queda algún coeficiente par (que, al sustituir *x* por *i*, va a estar en la parte real) y alguno impar (que estará en la parte imaginaria). Si, por ejemplo, Albert ha elegido uno con índice par en su penúltima jugada, quedarán un coeficiente par, digamos que a_0 y dos impares disponibles para Homer en su penúltimo movimiento, por lo que tendrá que elegir a_0 para anular la parte real de $f(i)$ en ese penúltimo movimiento, resolviendo una ecuación de primer grado como en el apartado a. Entonces no importa la última elección de Albert, ya que Homer tendrá que elegir el coeficiente impar que queda, supongamos que a_1, para anular la parte imaginaria de $f(i)$ y ganar la partida.

Observemos finalmente que la estrategia ganadora que se presenta en la solución oficial al apartado b (ver [3]), es curiosamente la opuesta a la planteada aquí: elegir siempre un coeficiente de la misma paridad que el elegido por Albert. Aunque las dos ganan, hay que decir que la elegida en este artículo es más general, ya que vale para cualquier polinomio *f* de grado par, mientras que la estrategia dada en la solución oficial sólo vale para polinomios cuyo grado es múltiplo de cuatro.

Referencias

[1] VON NEUMANN, John, MORGENSTERN, Oskar. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, New Jersey, 2004.

[2] ROEMER, John. *Political Competition*, Harvard University Press, Boston, 2001.

[3] *Página web de la IMC*, http://www.imc-math.org.uk/

Sobre el autor:
Nombre: Javier Rodrigo Hitos
Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es
Institución: Universidad Pontificia Comillas, Madrid, España.