Revista de Investigación. Edición Digital. ISSN 2174-0410

Número 1. Octubre 2011

G.I.E

Pensamient Matemátic

EXPERIENCIAS DOCENTES

GYMKHANA MATEMÁTICA PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS POR LA CIUDAD UNIVERSITARIA DE MADRID

VISUALIZACIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS MEDIANTE EL USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA GEOGEBRA

ESTRATEGIA DIDÁCTICA LÚDICA BASADA EN EL COMPUTADOR PARA ENSEÑANZA DE POLINOMIOS EN SEGUNDO AÑO DE EDUCACIÓN BÁSICA

INVESTIGACIÓN

CAUSALITY IN SCIENCE

MECÁNICA DE CONTACTO DE CUERPOS DEFORMABLES. INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

ENTREVISTA A:

MARIANO SOLER DORDA, CATEDRÁTICO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA APLICADAS A LA INGENIERÍA CIVIL DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

GÉNESIS Y DESARROLLO DEL CÁLCULO FRACCIONAL

LAS ESCUELAS JÓNICA Y PITAGÓRICA

EL ÁLGEBRA DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

HAMILTON Y EL DESCUBRIMIENTO DE LOS CUATERNIONES

ABEL Y LA IMPOSIBILIDAD DE RESOLVER LA "QUÍNTICA" POR RADICALES

RIEMANN Y LOS NÚMEROS PRIMOS

CUENTOS MATEMÁTICOS

EL CLUB DE LA SRA. MATEMÁTICA

FRACCIONES BONITAS

Y ADEMÁS:

JUEGOS MATEMÁTICOS Y CRÍTICAS

Experiencias Docentes
Gymkhana Matemática para estudiantes universitarios por la Ciudad Universitaria de Madrid

Mª Dolores López González
Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación
G.I.E Pensamient Matemátic
ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo recoge la experiencia del Grupo de Innovación Educativa (GIE) "Pensamiento Matemático" de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) en la realización de una Gymkhana Matemática por el campus de Moncloa en la Ciudad Universitaria de Madrid que tuvo lugar el 30 de septiembre de 2011.

Palabras Clave: Gymkhana Matemática, Competiciones de estudiantes, Matemática recreativa.

1. Introducción

Gran número de estudiantes que no están motivados hacia las matemáticas, pueden sin embargo verse atraídos por los jeroglíficos, los juegos o los acertijos matemáticos. Desde el Grupo de Innovación Educativa de la UPM "Pensamiento Matemático" cuya página Web es:
http://www.caminos.upm.es/Matematicas/WEBGIE, se ha pretendido ofrecer una actividad divertida y dinámica relacionada con las matemáticas que contribuya a incrementar el interés de los estudiantes de todas las universidades de España, pero principalmente de los alumnos de los primeros cursos universitarios, hacia las matemáticas y los conceptos técnicos, además de fomentar mejor ambiente de trabajo y cooperación.

El trabajo que aquí se presenta se centra en la descripción de la Gymkhana Matemática que se realizó el 30 de septiembre de 2011 por los diversos centros y zonas comunes del campus de Moncloa de la Ciudad Universitaria (Madrid). Estaba dirigida a todos los alumnos matriculados en cualquier curso de cualquier universidad española.

Los miembros del GIE estamos convencidos de que existen acciones complementarias a las clases tradicionales que pueden cubrir determinados objetivos. Al plantearnos acciones como la que aquí se presenta, los objetivos principales que perseguimos son, entre otros:

1. Tratar de hacer perder el temor a las Matemáticas al alumnado, haciéndoles ver que éstas no constituyen algo aislado del mundo en el que vivimos y que pueden llegar a ser hasta divertidas.
2. Utilizar los conceptos matemáticos para hacer que los participantes se cuestionen, experimenten, estimen, exploren, hagan conjeturas y sugieran explicaciones para diversas cuestiones.
3. Desarrollar la capacidad de pensar y elaborar estrategias basadas en el razonamiento lógico-matemático.
4. Fomentar entre el alumnado el gusto por las Matemáticas.
5. Contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.
6. Apoyar y fomentar el trabajo en equipo entre los alumnos universitarios.

La competición que realizamos, titulada "Concurso Encuentra Matemáticas 2011 de la UPM: Gymkhana Matemática", ha sido la 2ª Edición del Concurso Encuentra Matemáticas de la UPM que forma parte de la convocatoria del concurso de ideas para la realización de competiciones dirigida a estudiantes universitarios de grado y postgrado de la Universidad Politécnica de Madrid. La página Web de la competición es:
http://www.caminos.upm.es/concursoem2011.

2. Planteamiento de la gymkhana

La Gymkhana matemática es una prueba por equipos (entre 2 y 4 participantes) en la que los alumnos deben encontrar ciertos lugares del campus de Moncloa de la Ciudad Universitaria de Madrid y, a la vez, resolver ejercicios de matemáticas relacionados con dichos lugares.

Se citó a los participantes a las 9 de la mañana del día 30 de septiembre de 2011 en la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la UPM. Allí se les explicaron las instrucciones y las normas de la competición.

Instrucciones y normas que se entregaron a los alumnos

a) Documentación entregada a cada equipo:

Una bolsa con:

- Plano del campus de Moncloa de la Ciudad Universitaria
- Cuaderno para realizar operaciones
- Un bolígrafo
- Botella de agua
- Tentempié
- Enunciados de los problemas de camino
- Una hoja de respuestas para los problemas de camino por equipo
- Una cinta métrica por equipo

b) ¿En qué consiste la competición?

Existen dos tipos de pruebas a resolver:

1. Problemas de gymkhana
Cada equipo tendrá que resolver 7 problemas matemáticos propuestos para lo cual deberá desplazarse a diferentes lugares del campus de la ciudad universitaria de Moncloa.
La evaluación de estos ejercicios tendrá en cuenta tanto el resultado como el tiempo empleado en la resolución. Ver evaluación de la gymkhana.

2. Problemas de camino
Cada equipo tendrá también que resolver los 10 problemas que forman los denominados "problemas de camino". Dicha resolución se realizará durante los desplazamientos desde un lugar del campus a otro o en las paradas que cada equipo decida realizar.
La evaluación de estos ejercicios se hará sólo en base al resultado final. Ver evaluación de la gymkhana.

c) Desarrollo de la competición

La competición comienza a las 10 horas del 30 de septiembre de 2011.

- A cada equipo se le hará entrega de su primer destino en la Escuela de Caminos, Canales y Puertos, debe dirigirse a dicho punto de inicio.
- Al llegar a su punto de inicio debe presentarse en la mesa de control correspondiente donde se le hará entrega del enunciado del primer problema y se le tomará nota de la hora de comienzo de esa primera prueba. En esa misma mesa el grupo entregará la resolución del primer problema y se le tomará nota de la hora de entrega. En ese momento se le proporciona su siguiente destino.
- El grupo se dirigirá al segundo punto y debe presentarse en la mesa de control correspondiente donde se le hará entrega del enunciado del segundo problema y se le tomará nota de la hora de comienzo de esa prueba. En esa misma mesa el grupo entregará la resolución del problema y se le tomará nota de la hora de entrega. En ese momento se le proporciona su siguiente destino.

- Se continuará realizando el recorrido siguiendo las pautas descritas anteriormente.

- Al finalizar el recorrido con las 7 pruebas, cada equipo debe dirigirse a la sala verde de la Escuela de Caminos, Canales y Puertos donde se identificará y hará entrega de los problemas de camino.

c) Evaluación de la prueba

1. Problemas de gymkhana
   Cada problema se evaluará: Planteamiento y solución correcta, 10 puntos. Planteamiento correcto y solución incorrecta, 5 puntos. En otro caso, 0 puntos.
   De entre los equipos que han obtenido 10 puntos en un problema, se bonifica con 5 puntos al que ha utilizado el menor tiempo en su resolución, 3 al segundo y 1 al tercero.

2. Problemas de camino
   Cada problema se evalúa con 2 puntos si la solución es correcta, 0 en otro caso.

e) Clasificación final

La clasificación final de los equipos se hará según el total de los puntos obtenidos por los mismos.

El equipo con la mayor puntuación recibirá el primer premio y el segundo clasificado el segundo premio.

f) Normas

Queda totalmente prohibido:

- Llevar móvil durante la prueba.

- Recabar ayuda de alguna persona ajena al equipo.

- Utilizar transporte de cualquier tipo. La prueba debe realizarse a pie.

- Cruzar por sitios indebidos.

- Deteriorar el mobiliario público.

Cualquier actuación irregular por parte de un equipo puede suponer su descalificación.

La hora de llegada a la Escuela de Caminos deberá ser como mucho las 14,15. El equipo que a esa hora no se haya presentado será descalificado.

g) Entrega de premios

La entrega de premios se hará en la Sala Verde de la Escuela de Caminos a las 18,30 horas del día 30 de septiembre.

Desde las 14,15 (hora máxima de finalización de la gymkhana) hasta la entrega de premios se realizarán las siguientes actividades a las que todos los participantes están invitados:

- 14,45: Comida en la cafetería de la Escuela de Caminos.
- 16,15: Proyección de la película “La habitación de Fermat” en la sala Verde de la Escuela de Caminos.

3. Los problemas de la gymkhana

En esta sección se muestran los problemas que se propusieron a los participantes de la gymkhana matemática, con sus soluciones. Debían enfrentarse a dos tipos de problemas, como se indicó en la sección anterior: los problemas de gymkhana y los de camino.

3.1. Problemas de gymkhana en los puntos bases

Los problemas que debieron resolver los estudiantes en las siete paradas que hicieron fueron los siguientes:

1.- Mira en las fachadas de las facultades de ciencias. Descubrirás que una es prima, otra es el doble de la mala suerte y otra es un cuadrado perfecto. Pon la 2ª cifra del cuadrado perfecto en el centro de la cuadrícula y completa un cuadrado mágico:

Nota: Un cuadrado mágico es la disposición de una serie de números enteros en un cuadrado o matriz de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea la misma, la constante mágica. Usualmente los números empleados para rellenar las casillas son consecutivos, de 1 a n^2, siendo n el número de columnas y filas del cuadrado mágico. Así, en un cuadrado mágico de 3×3 debemos acomodar todos los números del 1 al 9.

Solución:

Facultad de Ciencias Químicas....26 letras= $2 \cdot 13$

Facultad de Ciencias Físicas....25 letras= 5^2

Facultad de Ciencias Matemáticas....29 letras (primo)

Hay que poner la segunda cifra del cuadrado perfecto, es decir 5, en el centro del cuadrado (única opción para poder completar el cuadrado mágico). Una solución es:

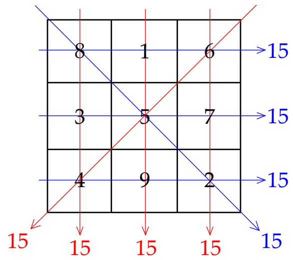


Figura 1. Solución del cuadrado mágico 3×3

2.- En 1927 se planteó la construcción de un barrio universitario, la llamada desde entonces “Ciudad Universitaria”, en la zona de Moncloa, en terrenos cedidos por el rey Alfonso XIII para tal fin, conocidos antiguamente como «Los descampados» o los «Altos de la Moncloa». Entre la Escuela de Caminos y la Facultad de Biología (en el paraninfo de la Universidad Complutense) encontrarás a este rey subido a un pedestal de esta forma que aparece en la imagen.

Determina el volumen de la figura que resulta de extraer al paralelepípedo rectangular exterior el interior.

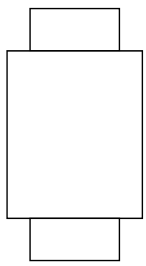


Figura 2. Pedestal de la estatua del rey Alfonso XIII

Solución:

Tomando las medidas queda que las dimensiones del paralelepípedo exterior son $150, 117, 117$ y las del interior son $150, 100, 100$ (sólo considerando hasta la altura del paralelepípedo del que se extrae), luego el volumen del primer paralelepípedo es $150 \times 117 \times 117$ (área de la base $\times$ altura), y el del segundo $100 \times 100 \times 150$, por lo que el volumen pedido es: $150 \times 117 \times 117 - 100 \times 100 \times 150 = 150(117^2 - 100^2) = 553350\ \text{cm}^3$.

3.- Si te encontraras enfermo ¿a qué facultad te dirigirías? Cerca de allí encontrarás el monumento de Los Portadores de la Antorcha de la escultora estadounidense Anna Hyatt Huntington. La escultura fue fundida en aluminio en 1954. Un año después la autora decidió donar la obra a la Villa de Madrid. El monumento fue inaugurado el 15 de mayo de 1955 en su emplazamiento actual.

El pedestal, a modo de plataforma cilíndrica, es de piedra.

En dicho pedestal figuran tres inscripciones, una en inglés y dos en español.

Calcular el mínimo número de placas de la inscripción en inglés que serían necesarias para recubrir la superficie lateral del pedestal cilíndrico.

Figura 3. Monumento de Los Portadores de la Antorcha

Solución:

Primero hay que determinar el área de la superficie lateral del cilindro.

Para ello:

- Medir la longitud de la circunferencia a través de la medida por ejemplo de un cuarto de la misma o del lado de una placa de las que lo recubre y multiplicar por el número de placas:

Hay 12 placas de lado 118, por lo que la longitud de la circunferencia es $12 \times 118 = 1416$

- Medir la altura del pedestal: 115

Así la superficie lateral del cilindro es $1416 \times 115 = 162840$

Luego hay que determinar el área de la placa de la inscripción en inglés. Para ello medimos los lados (base y altura): 153, 82 y el área es $153 \times 82 = 12546$

Por último hallamos el mínimo n tal que $n\times$(área de la placa)$\geq$ área de la superficie cilindro, resolviendo esta inecuación en n y dando el mínimo natural que la cumple: $n \times 12546 > 162840$, por lo que $n = 13$.

4.- Dirígete al metro y busca su logotipo. Como no queremos que nadie se accidente y tenga que visitar forzosamente la facultad de medicina, entra en el vestíbulo donde encontrarás logotipos a tu alcance. Fíjate en aquél cuyo rombo exterior tenga la diagonal mayor de longitud igual a 50 cm. Utiliza este logotipo para contestar a las siguientes preguntas:

Figura 4. Logotipo del metro de Madrid

a) Determina la razón entre el área del rectángulo incluido en el rombo exterior y el área de dicho rombo.

b) El rectángulo del apartado anterior no es el de mayor área que puedas incluir en el rombo. A este respecto os pedimos determinar las dimensiones del rectángulo inscrito en el rombo exterior que tenga área máxima.

Solución:

a) Encontrar el logotipo adecuado midiendo la diagonal del rombo exterior en el vestíbulo del metro de Ciudad Universitaria.

- Medir las diagonales D y d del rombo para calcular su área (50 y 30): $A_1 = \frac{D \cdot d}{2}$, es decir $A_1 = 750$.
- Medir los lados del rectángulo azul L y l para calcular su área (24 y 10). Con ello $A_2 = L \cdot l$, es decir $A_2 = 240$.
- Hallar $\frac{A2}{A1} = 0,32$.

b) Planteamos el problema de maximización. Para ello es adecuado tomar un sistema de referencia centrado en el centro del rectángulo con lo que midiendo distancias se tienen las coordenadas de los vértices del rombo:

(-25,0), (25,0), (0,15), (0, -15).

Esto determina las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados. Los vértices del rectángulo inscrito buscado deben verificar estas ecuaciones lo que los determina en función de un parámetro. Con los vértices del rectángulo se determina el área del mismo y se maximiza en función de ese parámetro.

Punto en la recta que une los vértices: (x, y) tal que $y = \frac{3}{5}(25 - x)$.

El área de ese rectángulo es $2x \cdot 2y$, es decir $\frac{12}{5}(25x - x^2)$.

Derivamos la expresión, igualamos a cero y solucionamos:

$x = 12,5$ con lo que $y = 7,5$

Las dimensiones buscadas son un rectángulo de lados de longitud 25 y 15.

5.- Tu destino es una Escuela Técnica Superior cuyo nombre tiene un número de letras que es un cuadrado perfecto. Dicho nombre comienza con la primera letra del abecedario y la otra única vocal que contiene es una cónica de características especiales.

Entra en el hall principal de esta escuela y mira al techo, encontrarás un anillo dividido en sectores y limitado por dos circunferencias que supondremos de radios 3 y 5 metros. Determinar el área de uno de los sectores anteriormente citados

Solución:

Deben ir a AGRONOMOS.

Tiene 9 letras (32). Comienza por A y la otra vocal es la O (cónica elipse de excentricidad nula o semiejes iguales).

El número de sectores es 16.

El área del anillo es la resta de las áreas de los círculos que lo forman: 16π.

El área de cada sector es π.

6.- Entre la Escuela de Caminos y el metro está la facultad "mejor informada". En ella encontrarás una cuadrícula rectangular en una de sus fachadas.

Figura 5. Fachada con la cuadrícula

Sitúa el origen de coordenadas de un sistema cartesiano que tiene por ejes los bordes de la cristalera en el extremo inferior izquierdo de la cuadrícula. La unidad de medida será cada uno de los elementos que forman las ventanas (partes en que está dividido el ventanal).

En este sistema de referencia encuentra la ecuación implícita de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta que une el extremo inferior derecho con el superior izquierdo de este panel.

Solución:

El destino es la facultad de ciencias de la información.

Contando el número de divisiones de la cuadrícula, debe determinarse la recta que pasa por los puntos $(40, 0)$ y $(0, 7)$.

Así la ecuación de la recta que une el extremo inferior derecho con el superior izquierdo de este panel es $7x + 40y = 280$.

La recta pedida es por tanto: $40x - 7y = 0$.

7.- Al lado de la facultad más biológica, están las escuelas más ecológicas del campus, dirígete a la que es una escuela superior. En su hall encontrarás unas secciones de árboles. Busca la que tiene dos números que son primos relativos, es decir, su máximo común divisor es 1.

Llamamos a al número formado por las dos últimas cifras del menor de los dos y b al número formado por las dos últimas cifras del mayor.

Se proponen encontrar los dos números enteros x e y con menor valor absoluto tales que:

$$ax + by = 4$$

Solución:

La escuela es Montes. En el hall se encuentra una sección de árbol con las medidas 122 y 135 (números primos relativos).

La ecuación a resolver es entonces $22x + 35y = 4$.

Despejando tenemos que $x = \dfrac{4-35y}{22}$, como debe ser un número entero, $4 - 35y$ debe ser par, es decir $y = 2k$ con k entero.

Sustituyendo este valor de y y simplificando: $x = \dfrac{2-35k}{11}$. Dando valores a k, se obtiene para $k = 1$: $x = -3$ e $y = 2$, que es la solución entera cuyas componentes tienen menor valor absoluto.

Nota: Este problema puede resolverse de forma más rigurosa usando el Algoritmo de Euclides y el Teorema de Bezout.

3.2. Problemas de camino

Los problemas que se propusieron a los concursantes para que resolvieran en los desplazamientos entre las distintas paradas son los siguientes:

1.- Con tres números

Es posible conseguir 6 con tres unos, tres doses, tres treses, tres cuatros, tres cincos, tres seises, tres sietes, tres ochos y tres nueves utilizando operaciones diversas. Hazlo de cuatro formas distintas.

Solución:

$(1+1+1)! = 6$

$2+2+2 = 6$

$3 \cdot 3 - 3 = 6$

$4^{1/2} + 4^{1/2} + 4^{1/2} = 6$

$\dfrac{5}{5} + 5 = 6$

$6+6-6 = 6$

$7 - \dfrac{7}{7} = 6$

$8^{1/3} + 8^{1/3} + 8^{1/3} = 6$

$9^{1/2} + 9^{1/2} + 9^{1/2} = 6$

(Basta con que den cuatro de estas nueve formas)

ISSN 2174-0410

2.- El astuto jardinero

Hace muchos, muchos siglos atrás, una reina muy extravagante encargó a su jardinero que plantara 12 árboles en 6 filas de 4 árboles cada una, de lo contrario haría cortar su cabeza. El jardinero quedó asombrado por un instante, pero luego dijo que lo haría con rapidez y facilidad.

¿Cómo hizo el astuto jardinero para salvar su preciada vida?

Solución:

Tres posibles soluciones son:

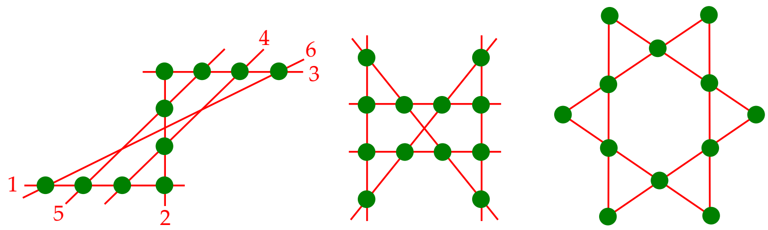


Figura 6. Posiciones de los árboles

3.- El oro del jeque

Un jeque tiene que transportar 100 lingotes de oro de 1 kilogramo de peso cada uno. Para ello tiene 10 camellos y 1 vigilante para cada camello. Cada uno de estos camellos transporta 10 lingotes. Al final del viaje el confidente del jeque le dice que uno de los vigilantes le ha robado 1 gramo de oro por lingote de los 10 lingotes que ese vigilante transportaba, pero no sabe de qué vigilante se trata. ¿Cómo puede adivinar el jeque qué vigilante le ha robado, sabiendo que sólo dispone de una báscula con la cual puede realizar una única pesada?

Nota: es una báscula y no una balanza. O sea, mide el peso exacto de lo que se coloca sobre ella.

Solución:

Se toma un lingote del primer camello, dos lingotes del segundo, tres del tercero y así hasta el último camello. Se pesan todos juntos en la balanza y si falta 1 gramo, sabemos con certeza que el ladrón es el vigilante del primer camello (ya que sólo pusimos uno de sus lingotes), si faltan 2 gramos el ladrón es el vigilante del segundo camello, si faltan 3 es el vigilante del tercer camello y así sucesivamente.

4.- El abuelo y el nieto

Lo que voy a contar sucedió en 1932. Tenía yo entonces tantos años como expresan las dos últimas cifras del año de mi nacimiento. Al poner en conocimiento de mi abuelo esta coincidencia, me dejó pasmado al contestarme que con su edad ocurría lo mismo.

Me pareció imposible.

Pues es completamente posible. Mi abuelo me lo demostró. ¿Cuántos años teníamos cada uno de nosotros?

Solución:

El nieto, evidentemente, ha nacido en el siglo XX. Las dos primeras cifras del año de su nacimiento, por consiguiente, son 19; ése es el número de las centenas. El número expresado por las cifras restantes, sumado con él mismo, debe dar como resultado 32. Es decir, que este número es 16: el año de nacimiento del nieto es 1916, y en 1932 tenía 16 años.

El abuelo nació, claro está, en el siglo XIX; Las dos primeras cifras del año de su nacimiento son 18. El número duplicado, expresado por las restantes cifras, debe sumar 132. Es decir, que su valor es igual a la mitad de este número, o sea, a 66. El abuelo nació en 1866 y en 1932 tenía 66 años.

De este modo, el nieto y el abuelo tenían en 1932, tantos años como expresan las dos últimas cifras de los años de su nacimiento.

5.- Los billetes de ferrocarril

Soy cajera en una estación de ferrocarril y despacho billetes.

No sospecháis el número tan grande de billetes que debe manejar la cajera de una estación. Es indispensable que los pasajeros puedan adquirir billetes desde la indicada estación hasta cualquiera otra del mismo ferrocarril y, además, en ambas direcciones. Presto mis servicios en una línea que consta de 25 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes pensáis que ha preparado la empresa para abastecer las cajas de todas las estaciones?

Solución:

En cada una de las 25 estaciones, los pasajeros pueden pedir billete para cualquier estación, es decir, para los 24 puntos diferentes.

Esto indica que el número de billetes diferentes que hay que preparar es de $25 \cdot 24 = 600$.

Si los pasajeros desean adquirir billetes no solamente de "ida", sino también de vuelta, es decir, de ida y vuelta, el número de billetes diferentes aumenta el doble, o sea, se necesitarán 1200.

6.- Con cuatro unidades

¿Cuál es el número mayor que se puede escribir con cuatro unos?

Solución:

A esta pregunta se responde con frecuencia: 1111. Sin embargo, puede formarse un número mucho mayor: once elevado a la undécima potencia. Si tienes paciencia para llevar hasta el fin esta operación podrás convencerte de que este número es superior a 280000 millones. Por consiguiente, supera a 1111 en 250 millones de veces.

7.- El ladrillito

Un ladrillo de los usados en la construcción pesa 4 kilogramos. ¿Cuánto pesaría un ladrillito de juguete hecho del mismo material y cuyas dimensiones sean todas cuatro veces menores?

Solución:

Decir que el ladrillito de juguete pesa 1 kilogramo es una gran equivocación. El ladrillito no es sólo cuatro veces más corto que el ladrillo de verdad, sino que es también cuatro veces más estrecho y cuatro veces más bajo, por lo tanto, su volumen y peso son: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ veces menores. Por tanto, la respuesta correcta es: $4000 : 64 = 62,5$ gramos.

8.- El problema de los trozos de papel:

Cortamos una hoja de papel en cuatro trozos. Seguidamente tomamos uno, dos, tres o los cuatro (a nuestra elección) y nuevamente los partimos cada uno en cuatro trozos. Proseguimos así las veces que queramos, partiendo siempre en cuatro trozos algunos o todos los resultantes de particiones anteriores.

¿Será posible, de esta forma, obtener 43 trozos? ¿Y 59?

Solución:

Cada vez que partimos un pedazo de papel, incrementamos el número total de trozos en 3 unidades.

Como habíamos partido de una sola unidad (la hoja de papel), el número resultante será siempre un múltiplo de 3 más uno. Para comprobar si un número cumple con esta condición, bastará con dividirlo entre tres y observar si el resto es 1. El 43 sí cumple, pero no 59. Por tanto será posible obtener 43 trozos, pero no 59.

9.- Problema de las mechas:

Hemos perdido nuestro cronómetro y sólo disponemos de un par de mechas absolutamente distintas e irregulares en lo que se refiere a composición, longitud y velocidad de combustión; es decir, que arden de una manera absolutamente irregular. También disponemos de una caja de cerillas para prender fuego a nuestras mechas. Se sabe a ciencia cierta que cada una de las dos mechas arde exactamente una hora.

En estas circunstancias, nos piden que cronometremos 45 minutos. ¿Cómo podríamos hacerlo?.

Solución:

Encender una de ellas por los dos extremos y la otra por uno. Cuando la primera mecha se consuma (obviamente a los 30 minutos), se enciende el segundo extremo de la segunda. De ella quedan 30 minutos, pero encendida por los dos extremos sólo durará 15. En total, $30 + 15 = 45$ minutos.

10.- Trayectorias

Considera un sistema de referencia cartesiano. Se pide el número de trayectorias escalonadas del punto hasta el si en cada paso sólo se puede ir una unidad a la derecha ó una hacia arriba.

Solución:

Si llamamos "D" a un paso a la derecha y "A" a un paso hacia arriba, cada trayectoria es una ordenación de 5 D's y 3 A's (por ejemplo ADADDDDA). Entonces el número de trayectorias es el número de permutaciones de 8 elementos de los cuales 5 son de una clase y 3 de otra, es decir:

$$PR_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

4. Conclusiones

Toda acción destinada a la divulgación, motivación y acercamiento a las matemáticas que pueda complementar el aprendizaje de esa ciencia, debe ser bienvenida por parte de los docentes. La experiencia que nosotros hemos extraído de la realización de esta Gymkhana ha sido del todo positiva y la recomendamos a todos los niveles de enseñanza.

Hay que destacar, la implicación desde un principio de los alumnos en la elaboración de la prueba, se ha contado con varios de ellos para el desarrollo de la misma (para ayudar como asistentes en los puntos de control).

El objetivo primordial que giraba en torno a utilizar la "Matemática Recreativa" para fomentar el ingenio personal y el trabajo en equipo, la investigación autónoma de estrategias, la puesta en práctica de los conocimientos matemáticos y el acercamiento de los estudiantes a dichos conceptos, se ha alcanzado totalmente.

Esperamos que nuestra experiencia pueda servir a otros profesionales para realizar acciones útiles para sus estudiantes.

5. Reportaje Gráfico

Algunas imágenes de la prueba

Más imágenes de la prueba

Referencias

[1] Aula de Pensamiento Matemático
http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico

[2] COLECTIVO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS "REY HEREDIA". Gymkhana matemática por Córdoba, Consejería de Educación y Ciencia, Córdoba, 2000.

[3] Concurso Encuentra matemáticas 2010 de la UPM:
http://www.caminos.upm.es/matematicas/concursoem2010/

[4] Concurso Encuentra matemáticas 2011 de la UPM:
http://www.caminos.upm.es/concursoem2011

[5] GIE Pensamiento Matemático
http://www.caminos.upm.es/Matematicas/WEBGIE

Sobre los autores:

Nombre: María Dolores López González
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Javier Rodrigo Hitos
Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Pontificia Comillas, España.

Experiencias Docentes
Visualización de Lugares Geométricos mediante el uso de Software de Geometría Dinámica Geogebra

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

La utilización de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, llamadas comúnmente TIC's, son en la actualidad un apoyo fundamental en nuestra labor como docentes. Este artículo está orientado tanto a docentes como a alumnos de últimos años de bachillerato y primeros años de carreras de ciencias e ingenierías. La finalidad fundamental es integrar el uso del software de geometría dinámica Geogebra con la resolución de casos prácticos para la obtención de algunos lugares geométricos famosos.

Palabras Clave: Geogebra, lugares geométricos, software de geometría dinámica.

1. Introducción

¿Qué es Geogebra?. Geogebra es un software matemático interactivo para la educación en colegios y universidades. El proyecto nació en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo, y su creador Markus Hohenwarter lo continua en la actualidad en la Universidad de Atlantic, en Florida.

Markus Hohenwarter

Una de las principales características de Geogebra, es que está escrito en Java y por tanto su uso está disponible en múltiples plataformas. Esta característica le confiere un carácter universal e independiente de los sistemas operativos (libres o no) sobre los que corre.

Es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo (y por eso puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas). Se puede decir que Geogebra integra en una única herramienta lo que sus homónimos comerciales (léase Derive y Cabri fundamentalmente) aportan de forma separada.

Su categoría más cercana es "software de geometría dinámica" (del inglés: DAS).

Con Geogebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas... etc, mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la Barra de Entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A.

Geogebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

2. Geogebra vs. "Otros"

A lo largo de los últimos años se ha producido un crecimiento casi exponencial de la aparición en el mercado de diferentes softwares matemáticos especializados, cada uno por supuesto con sus seguidores incondicionales y sus detractores. Son multitudes las razones por las que entre todos estos softwares Geogebra destaca, y a continuación vamos a nombrar algunas de ellas.

1. Geogebra es un software escrito con código libre, gratuito con licencia GNU/GPL. Existen en el mercado otros programas de idénticas prestaciones o incluso más limitadas pero cuyo coste es elevado, como por ejemplo Cabri, Derive o Mathematica. Aquel que desee utilizar Geogebra no tiene que pagar ninguna licencia de uso ni utilizar ningún software patentado, puesto que su uso es libre y gratuito, Lo único que debe hacer es descargarlo de su página oficial[1], e instalarlo en su ordenador.

2. Geogegra es un software de geometría dinámica, esto es, permite construcciones de geometría elemental, donde los elementos se construyen y se definen por propiedades cualitativas no mediante ecuaciones y geometría analítica, aunque ésta esté detrás, en el funcionamiento interno del programa.

3. Geogebra integra perfectamente a través de su interfaz, tanto el trabajo desde una perspectiva puramente geométrica en la ventana gráfica, como desde una perspectiva totalmente analítica en la ventana algebraica, de este modo cada uno puede trabajar en una ventana u otra interactuando

[1] http://www.geogebra.org

con ambas y pasándose de una a otra en cada momento. Este hecho nos permite trabajar con nuestros alumnos de modo mucho más profundo y facilitar el desarrollo de nuevas estrategias cognitivas y por lo tanto facilitar en gran medida los procesos de enseñanza-aprendizaje.

4. Sus rutinas analíticas permiten su uso como instrumento para el estudio de un programa clásico de representación gráfica y de tratamiento de puntos notables: corte con los ejes, extremos, función derivada, integral, etc. Es de muy fácil manejo a pesar de su potencial. El aprendizaje es muy intuitivo y se realiza al hilo de su utilización en contextos de aprendizaje, lo que no requiere ni sesiones especiales de manejo del programa ni elaboración de apuntes sofisticados.

5. Permite introducir coordenadas y ecuaciones de forma directa. Permite manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.

6. Tiene implementado rutinas de animación de funciones y de localización de máximos, mínimos, puntos de inflexión, función derivada, integral definida, recta tangente en un punto. También cabe la posibilidad de crear construcciones geométricas fundamentales con regla y compás, para estudios de triángulos y polígonos en general, construcción de cónicas, etc.

7. Permite exportar los trabajos a páginas web para interactuar dinámicamente de manera online. Además Geogebra permite trabajar bien en local es decir instalando la aplicación en el ordenador, como de forma online, sin ser necesario que el usuario deba instalar la aplicación en ningún ordenador, en este caso sólo es necesario una conexión a internet.

8. Para aquellos que trabajen en LaTeX (como un servidor), el programa nos ofrece la posibilidad de exportar código *PSTricks*[2] que permite construir gráficos de carácter vectorial y compilarlos en LaTeX.

9. La comunidad tanto de desarrolladores como de usuarios de Geogebra es amplísima, además de tratarse de una comunidad muy proactiva. Por ello es relativamente sencillo conseguir multitud de trabajos ya realizados por miembros de dicha comunidad e implementarlos con nuestros resultados.

Todas estas características hacen que en la actualidad Geogebra sea un software ampliamente utilizado por la comunidad pedagógica con una tremenda aceptación tanto por parte de los docentes como por los alumnos debido a la facilidad de aprendizaje en su manejo, y por la agradable naturalidad y sencillez con la que se puede trabajar en su interfaz.

Pero para ser justos, hemos de nombrar también los que desde nuestro punto de vista deben ser consideradas las carencias de Geogebra en la actualidad, que por otra parte constituyen los principales esfuerzos en los que la comunidad de desarrolladores está trabajando.

[2] http://tug.org/PSTricks/main.cgi/

1. Aunque existe una versión Beta en 3D[3], el trabajo en tres dimensiones es muy limitado.

2. El tratamiento analítico de curvas algebraicas de orden mayor que dos, no es tan intuitivo como ocurre por ejemplo con las cónicas. Por ello se debe recurrir a otro tipo de construcciones para obtener los resultados de las mismas en pantalla.

Esta última desventaja es precisamente la finalidad principal de la elaboración de éste artículo, puesto que nos da pie tanto a la presentación de las características fundamentales de Geogebra como de su utilización pedagógica para la construcción de algunos lugares geométricos que dan lugar a ciertas curvas algebraicas históricas.

3. Presentación del Software

Por supuesto, ni que decir tiene que no es la finalidad de este artículo servir de tutorial o manual de utilización de Geogebra, por lo que recomendamos al lector que indague por la red con el fin de utilizar uno que se ajuste a sus necesidades, por ejemplo el Manual Oficial de Geogebra en español que puede ser descargado en la página oficial del mismo.

Sin embargo, sí que haremos una presentación tanto de la interfaz general del software como de alguna herramienta que utilizaremos posteriormente a la hora de obtener las gráficas de ciertos lugares geométricos.

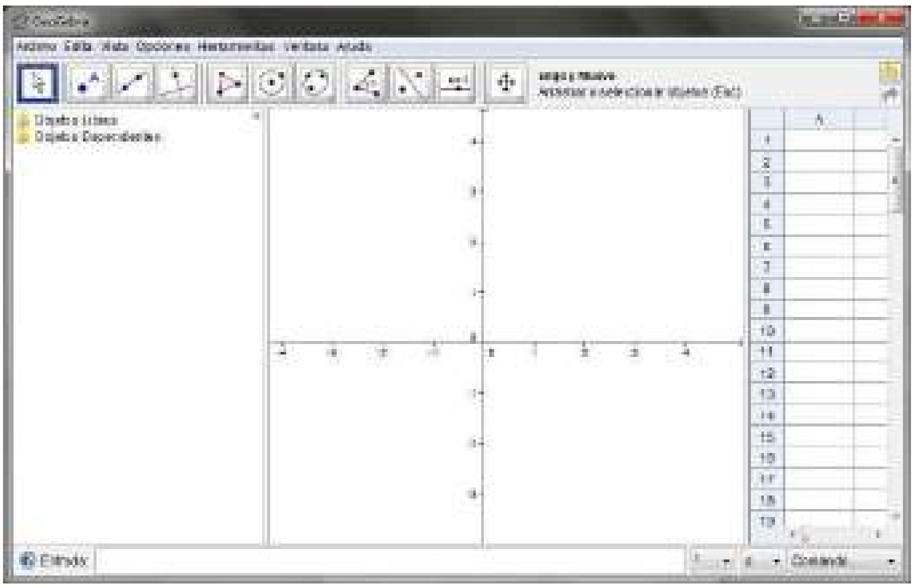


Figura 1. Interfaz General de Geogebra

[3] http://www.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebra3D

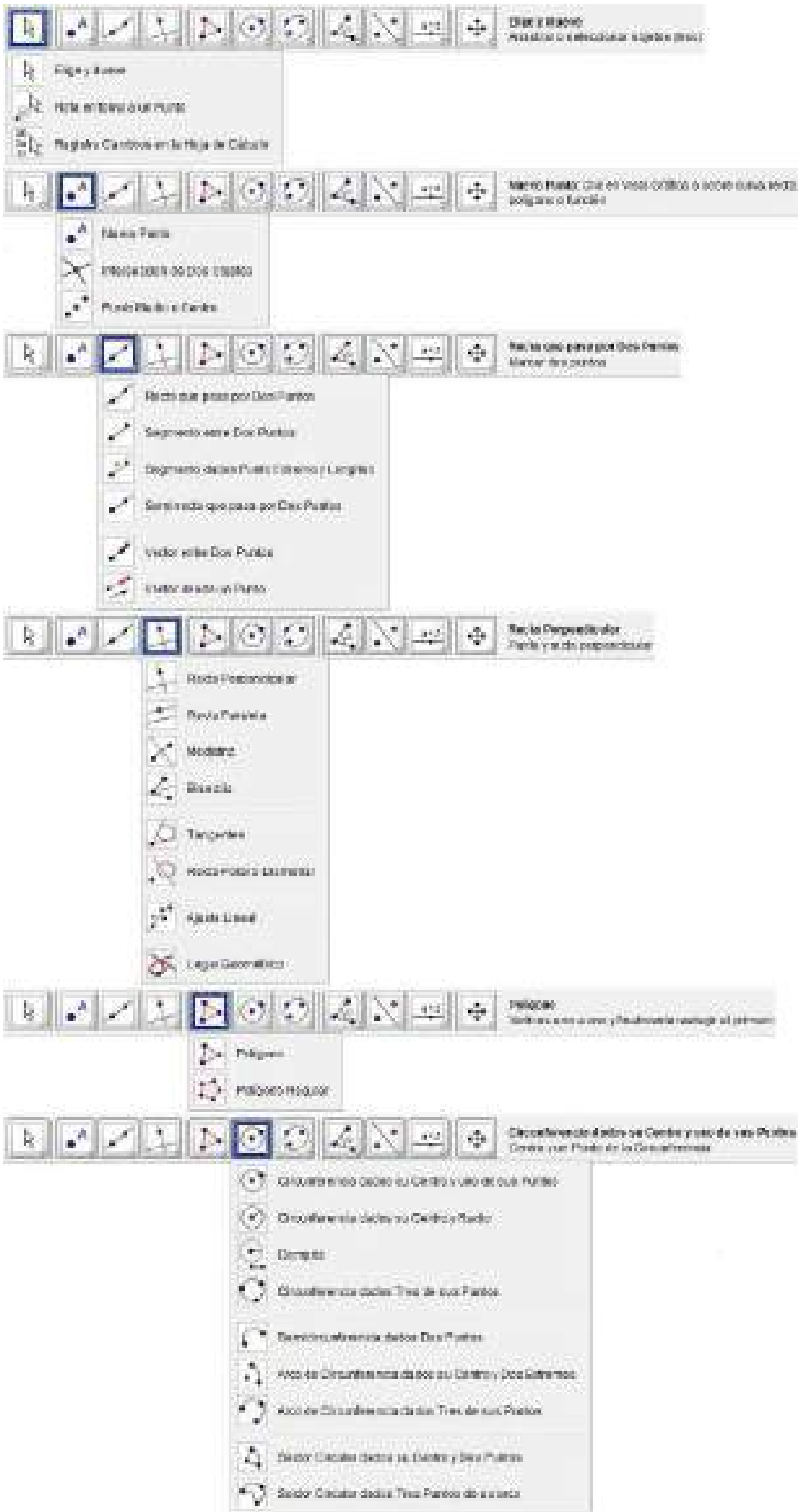


Figura 2. Herramientas Geogebra (I)

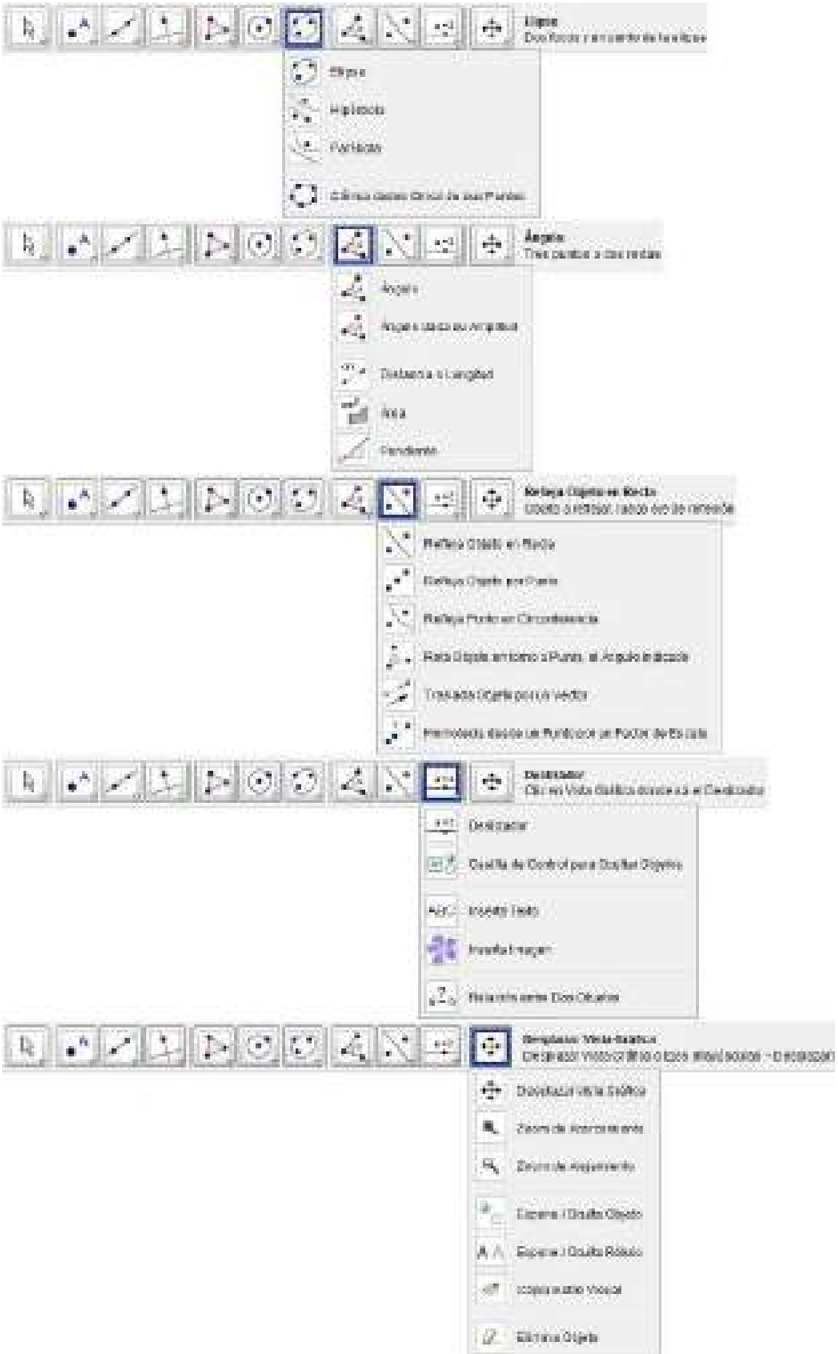
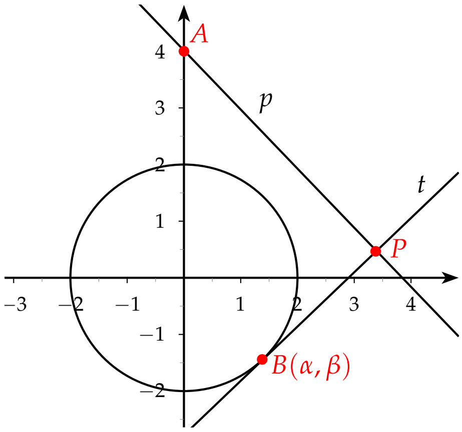


Figura 3. Herramientas Geogebra (II)

4. Lugar Geométrico (I)

4.1. Enunciado

Se considera la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico descrito por el punto P, pie de las perpendiculares trazadas desde el punto $A(0, 4)$ a las tangentes a dicha circunferencia.



4.2. Resolución Analítica

El punto $B(\alpha, \beta)$, por pertenecer a la circunferencia, cumplirá su ecuación, y por lo tanto:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{4 - \alpha^2}$$

Para obtener la tangente a la circunferencia en el punto B y por lo tanto su pendiente, derivamos su expresión analítica:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow (y')_{(\alpha,\beta)} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

por lo tanto la expresión analítica de la tangente una vez obtenida la pendiente en el punto B será:

$$t \equiv y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) \Rightarrow \beta y - \beta^2 = -\alpha x + \alpha^2$$

Cualquier recta perpendicular a la recta t tangente a la circunferencia tendrá como pendiente:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Como queremos la perpendicular a la tangente a la circunferencia en B que pasa por el punto A, su expresión resultará:

$$p \equiv y - 4 = \frac{\beta}{\alpha}x \Rightarrow \beta x - \alpha(y - 4) = 0$$

Por lo tanto tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$

$$\beta y - \beta^2 = -\alpha x + \alpha^2$$

$$\beta x - \alpha(y - 4) = 0$$

Previamente operando en la segunda expresión e introduciendo la primera en ella podemos obtener:

$$\beta y - \beta^2 = -\alpha x + \alpha^2 \Rightarrow \alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \alpha x + \beta y = 4$$

Por lo tanto tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (α, β):

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 4 \\ \alpha(y-4) - \beta x = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos:

$$\beta = \alpha\,\frac{y-4}{x} \Rightarrow \alpha x + \alpha\,\frac{(y-4)y}{x} = 4 \Rightarrow \alpha(x^2+y^2-4y) = 4x$$

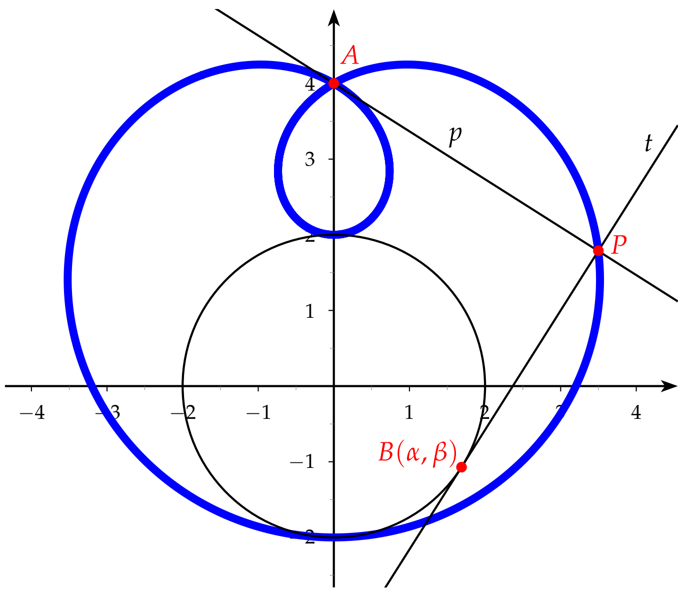
$$\alpha = \frac{4x}{x^2+y^2-4y}$$

$$\beta = \frac{4(y-4)}{x^2+y^2-4y}$$

Introduciendo los valores de α y β en la ecuación $\alpha^2+\beta^2=4$ obtenemos la expresión analítica del lugar geométrico solicitado, que resulta:

$$4x^2+4y^2 = (x^2+y^2-4y)^2$$

La siguiente figura representa gráficamente el lugar geométrico que describe el punto P.



4.3. Visualización con Geogebra

1. Dibujamos en la ventana gráfica una circunferencia centrada en el origen y de radio 2, así como el punto $A(0,4)$.

2. Colocamos sobre la circunferencia un punto genérico B a fin de que le podamos mover, y sobre este punto hacemos pasar la recta tangente t a la circunferencia que pasa por él.

3. Desde el punto A hacemos trazar la perpendicular p a dicha tangente t, y donde intersecten colocamos un punto P.

4. Activamos el rastro del punto P clicando con el botón derecho sobre dicho punto.

5. Clicamos sobre la herramienta Elección y hacemos que el punto B se mueva sobre la circunferencia. De este modo, el punto P se irá punteando el lugar geométrico que buscamos.

6. Si hacemos visible la hoja de cálculo en el Menú Vista, podemos obtener las coordenadas (x, y) de los puntos del lugar geométrico que marca el punto P con el rastreo activado.

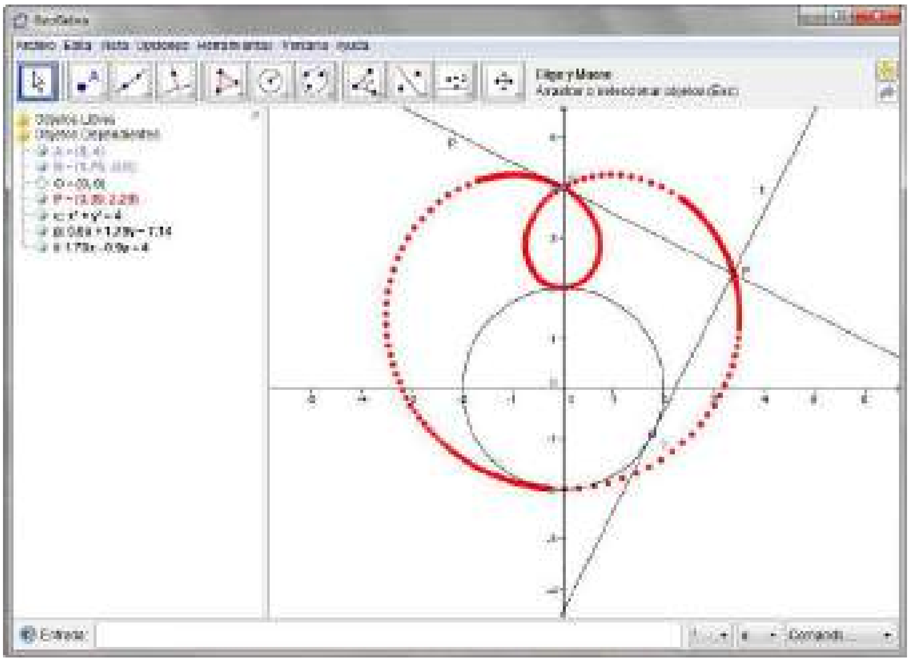


Figura 4. Generación del Lugar Geométrico I con Geogebra

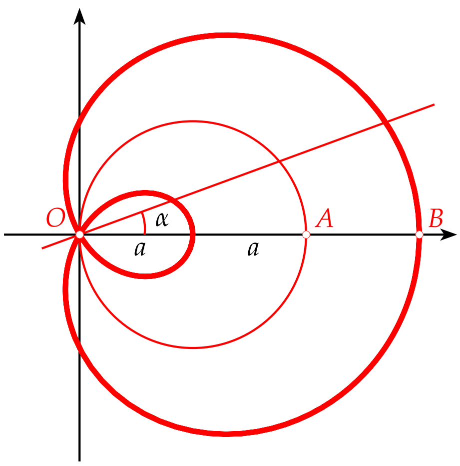
Como alternativa al punto 6, cabe la posibilidad de visualizar el lugar haciendo uso precisamente de la herramienta *Lugar Geométrico*, en el que en primer lugar se pincha con el ratón el punto del lugar geométrico deseado, y en segundo lugar el punto que vamos a mover. Luego si pinchamos con esta herramienta primero el punto P y luego el punto B nos arroja en pantalla el resultado del lugar geométrico solicitado, pero esta vez de forma continua en lugar de “por puntos”. Recomendamos utilizar esta segunda alternativa después de la primera puesto que no es tan constructiva desde un punto pedagógico, ya que simplemente presenta al alumno el resultado final.

En el caso de curvas algebraicas el gran inconveniente de Geogebra es que no nos da una expresión implícita de las mismas, y si introdujéramos una expresión de este tipo en la ventana algebraica nos arrojaría un error. Este punto es uno de los “objetivos de mejora” en el que los desarrolladores se encuentran trabajando actualmente para hacer el software tan competitivo como otros programas comerciales.

4.4. Un poco de historia

El lugar geométrico en cuestión es el LIMAÇON (O CARACOL) DE PASCAL, descubierto por el padre de Blaise Pascal, Étienne Pascal (1588-1651) y denominada así por el francés, Gilles-Personne Roverbal, en 1650 cuando hizo uso de esta curva para utilizarlo como ejemplo de sus métodos de dibujo de tangentes, en definitiva para el estudio de la diferenciación. La curva en cuestión ya había sido estudiada por Alberto Durero (1471-1528) a quien se le debe verdaderamente su descubrimiento, mucho antes de que Pascal centrara su atención en ella, y 125 años antes de la denominación de Roverbal. Durero propuso un método de dibujo del caracol, aunque no lo denominó limaçon, sino *arácnida* o *araña* en su obra *Vnderweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt* (Númeberg, 1525). Estudiada también por Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874), en *Nouveaux mémories de l'Académie de Bruxelles*.

El nombre de limaçon proviene del término en latín *limax* (caracol). Étienne Pascal mantuvo correspondecia con Mersenne, en cuya casa se celebraban reuniones con las matemáticas como tema fundamental de las mismas, y a las que acudían geómetras[4] famosos, entre ellos Roverbal, quien utilizó este foro para darle el nombre con el que la conocemos actualmente.



Ecuación cartesiana: $(x^2 + y^2 - 2ax) = b^2(x^2 + y^2)$ con $2a = OA$, $b = AB$.

[4] En el s.XVII los términos geometría y matemáticas eran sinónimos.

Ecuación polar: $\rho = b + 2a\cos\alpha$, con a y b distintos de 0.

Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x = 2a\cos^2 t + b\cos t \\ y = 2a\cos t \operatorname{sen} t + b \operatorname{sen} t \end{array}\right.$

o bien: $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{(1-t^2)(b+2a+(b-2a)t^2)}{(1+t^2)^2} \\ \\ y = \dfrac{2t(b+2a+(b-2a)t^2)}{(1+t^2)^2} \end{array}\right.$

Se trata de una curva cuártica limitada, cerrada y continua, salvo cuando $b > 2a$, en cuyo caso el centro es un punto aislado. El eje de las $x(y=0)$ es un eje de simetría y cuando $b = 2a$ el centro es un punto singular cuspidal y el eje de las $x(y=0)$ es tangente en él. Si $b < 2a$, el centro es un nodo y las rectas

$$y = \pm\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{b}x$$

son tangentes en el nodo. El limaçon de Pascal es la concoide de un círculo con relación a uno de sus puntos O, siendo el círculo de diámetro OA con $A(2a, 0)$. Y la cisoide de dos círculos cuando uno pasa por el centro del otro con respecto a ese centro.

Cuando $b = 2a$ entonces el caracol se convierte en una cardioide y si $b = a$ entonces es un trisectriz. Si bien esta trisectriz no es la de MacLaurin.

Si $b \geq 0$ (el caso que dibujamos aquí con $a = b = 1$) entonces el área de la vuelta interna es

$$a^2\left(\pi - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

y el área entre las vueltas es $a^2(\pi + 3\sqrt{3})$

El limaçon de Pascal, también llamado concoide[5] del círculo, es una bicircular racional y, como todas estas curvas, es la podaria de un punto P respecto de una circunferencia de radio a, si P se encuentra fuera de la circunferencia. También se puede considerar la inversa de una cónica con respecto a uno de sus focos.

[5] Sea C una curva arbitraria y O un punto exterior a ella. Sea M un punto de la curva C por el que trazamos un radio. Desde M trazamos un segmento de longitud k en ambas direcciones de la curva. El conjunto de puntos P y P' de los extremos de los segmentos generados por los puntos base de la curva C y el polo O forman la concoide. Es decir, cuando M describe la curva C, el lugar geométrico de los puntos P alineados con O y M, tales que $MP = k$, se denomina concoide de C en relación a O y k.

Si los segmentos se trazan desde el punto M con rectas que pasan a través del punto con un ángulo constante α con el radio OM, entonces el conjunto de puntos del segmento se llama concoide oblicua. Si el ángulo constante es igual a $\frac{\alpha}{2}$, entonces la curva es una ortoconcoide. Si las ecuaciones de la curva de partida C son: $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right.$ entonces las ecuaciones paramétricas de la concoide con base C y polo $O(a, b)$ son

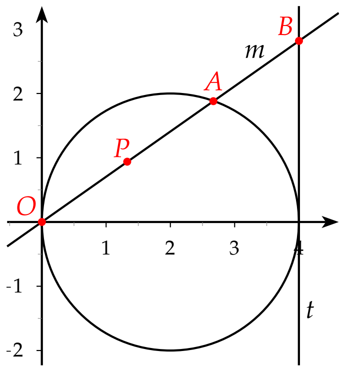
$$\left\{\begin{array}{l} X = x(t) \pm \frac{x(t)-a}{\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2}}\, l \\ \\ Y = x(t) \pm \frac{y(t)-b}{\sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2}}\, l \end{array}\right.$$

El caracol es una curva analagmática[6]. Es también la catacáustica[7] de un círculo cuando el rayo de luz viene de un punto a finito (no cero), lejano a la circunferencia, propiedad que fue demostrada por Thomas de St. Laurent en 1826. Son casos particulares de óvalos de Descartes, es decir, es un óvalo de Descartes de foco doble. La evoluta del limaçon es la cáustica por reflexión del círculo.

5. Lugar Geométrico (II)

5.1. Enunciado

Se considera la circunferencia de expresión $(x-2)^2+y^2=4$. Se traza la recta tangente t a dicha circunferencia por el extremo diametralmente opuesto al origen de coordenadas. Trazamos por el origen una recta cualquiera m. Hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que la distancia desde el origen de coordenadas a P sea igual que la distancia de la intersección de la recta m cualquiera con la circunferencia (Punto A) al punto B.



5.2. Resolución Analítica

Utilizamos coordenadas polares de tal forma que si consideramos θ como el ángulo medido desde el eje de abcisas hasta la recta genérica $y=mx$, entonces

[6] Se trata de una curva que es invariante con respecto a la inversión, es decir, que su inversa es la misma curva. Esta propiedad fue estudiada en primer lugar por el inspector general de minas francés Théodore Florentin Moutard (1827-1901) en 1864.

[7] La cáustica es un método de obtención de una nueva curva. basándose en otra curva dada y un punto (origen de los rayos). Dada una curva C y un punto fijo S (origen de los rayos), la *catacáustica*, o cáustica por reflexión, es la envolvente de los rayos de luz que provienen de S y son reflejados sobre la curva. Y la *diacáustica*, o cáustica por refracción, es la envolvente de los rayos refractados. Los rayos de luz pueden ser paralelos si el punto S está en el infinito.

Sea γ una curva definida por la ecuación $y=y(x)$ y un haz de rayos que siguen la dirección del vector $\overline{v}=(a,b)$; las ecuaciones de la cáustica vienen dadas por las expresiones:

$$X = x - \frac{(b-ay'(x))^2}{2y''(x)}\, y'(x) - \frac{(b-ay'(x))(a+by'(x))}{2y''(x)}$$

$$Y = y(x) - \frac{(b-ay'(x))^2}{2y''(x)} - \frac{(b-ay'(x))(a+by'(x))}{2y''(x)}\, y'(x)$$

Cuando los rayos de luz reflejan una curva, entonces la envolvente de los rayos reflejados es una cáustica por reflexión o una *catacáustica*. Cuando la luz es refractada por una curva, entonces la envolvente de los rayos refractados son una cáustica por refracción o un *diacáustica*. Es decir, una cáustica es una envolvente de los rayos procedentes de un punto que atraviesan un medio óptico cualquiera, o bien se reflejan en una superficie.

Una cáustica no siempre genera una curva. Por ejemplo, los rayos reflejados desde el foco de una parábola no se intersecan y por tanto su envolvente no forma ninguna curva.

La cáustica de una curva C con los rayos paralelos en una dirección, genera una curva que es también diacáustica de la curva C con rayos paralelos en dirección opuesta.

ISSN 2174-0410

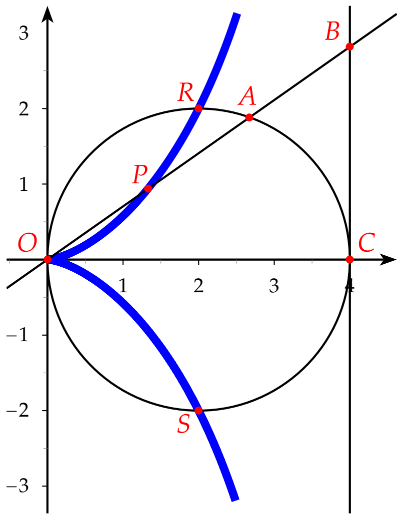
resulta que el punto A tiene de coordenadas $\rho_A = 4\cos\theta$. Del mismo modo $\rho_B = \frac{4}{\cos\theta}$. Por lo tanto la distancia entre los puntos A y B (que es la misma que del punto origen de coordenadas O al punto P del lugar geométrico solicitado), será:

$$\delta_{AB} = \frac{4}{\cos\theta} - 4\cos\theta = 4\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) = 4\,\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = 4\tan\theta\operatorname{sen}\theta$$

La expresión de la curva solicitada en coordenadas polares resulta entonces:

$$\rho = 4\tan\theta\operatorname{sen}\theta$$

La siguiente figura representa gráficamente el lugar geométrico que describe el punto P.



5.3. Visualización con Geogebra

1. Con la herramienta círculo con centro y radio, pinchar en la ventana gráfica de geogebra en el punto $(2, 0)$ y radio 2, así dibujamos la circunferencia dada. La otra posibilidad es introducir la expresión de la circunferencia en la barra de entrada de la ventana algebraica.

2. Dibujar una recta que pase por el origen de coordenadas y un punto genérico de la circunferencia (Punto A).

3. Dibujar la recta tangente a la circunferencia en el punto $(4, 0)$, o bien introducir en la barra de entrada la expresión de esta recta $(x = 4)$.

4. Colocar un punto en la intersección de la recta genérica que pasa por el origen con la recta $x = 4$ (Punto B).

5. Con la herramienta compás medimos la distancia que hay del punto A al B y llevamos esa distancia al origen de coordenadas. Donde intersecte con la recta genérica colocamos el punto P lugar geométrico solicitado.

6. Activamos el rastro en el punto P, de tal modo que moviendo el el punto A (con la herramienta selección), el punto P va dejando el rastro y dibujando el lugar geométrico pedido.

7. Como alternativa a este último punto, podemos hacer uso de la herramienta *Lugar Geométrico*, pinchando primero sobre el punto P que es el encargado de trazar el lugar solicitado, y después sobre el punto A (el B también es válido), de este modo obtendremos un trazado continuo en lugar de por puntos del lugar geométrico en cuestión.

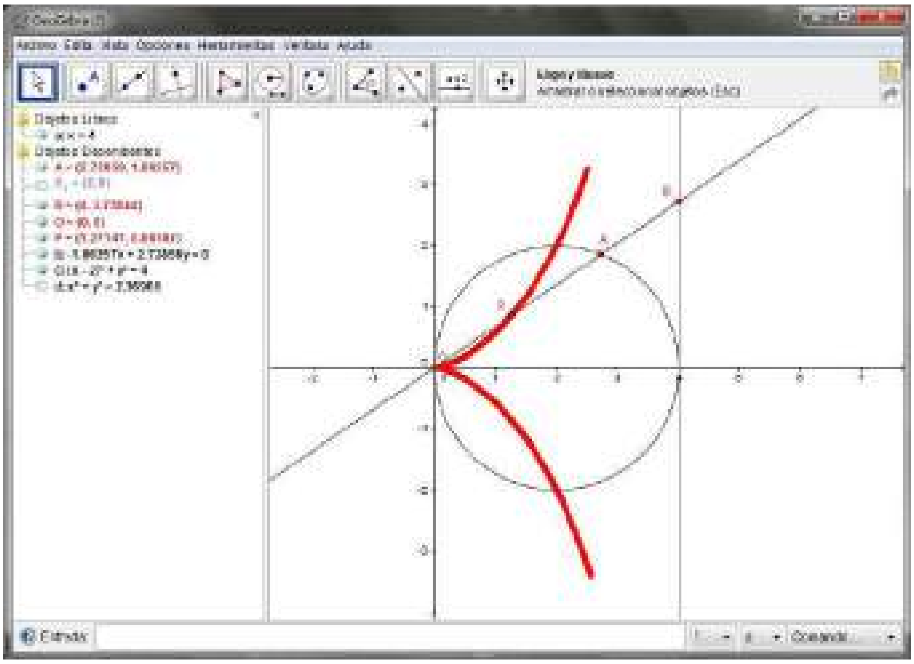


Figura 5. Generación del Lugar Geométrico II con Geogebra

5.4. Un poco de historia

El lugar geométrico en cuestión es la CISOIDE DE DIOCLES. Diocles (240-180 a.C.) fue contemporáneo de Nicómedes (280-210 a.C). Llevó a cabo su estudio con el fin de resolver el problema "délico" de hallar la longitud del lado de un cubo cuyo volumen fuera dos veces el de un cubo dado (la duplicación del cubo)[8]. Diocles también estudió el problema de Arquímedes de cortar una esfera por un plano de manera que los volúmenes de las dos partes tengan una proporción dada. La atribución de la cisoide de Diocles puede comprobarse en los comentarios de Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C), en su libro *La esfera y el cilindro*. En ellos Arquímedes afirma que la cisoide fue creada por Diocles y a él se atribuye.

[8] El problema de la duplicación del cubo, junto con el de la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo son considerados los tres problema clásicos griegos de la época heroica, denominada así, puesto que las únicas herramientas usadas para su resolución eran tan sólo el compás y la regla.

Ecuación cartesiana: $x(x^2+y^2)=2ay^2$, con $a>0$. O bien $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$.

Ecuación polar: $\rho = 2a\tan\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$, o bien $\rho = 2a(\sec\theta-\cos\theta)$, siendo a el radio de la circunferencia y θ el ángulo del eje que gira con respecto al eje positivo de las x.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$

O bien $\begin{cases} x=\dfrac{2a}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2a}{t(1+t^2)} \end{cases}$

La cisoide de Diocles es la ruleta generada por el vértice de una parábola rodando sobre una parábola igual. Es una cúbica unicursal continua e ilimitada con un eje de simetría y un punto de retroceso. La recta $x=2a$ es una asíntota vertical y el eje $y=0$ es un eje de simetría. El centro de coordenadas es un vértice, o punto cuspidal, y el eje de las x es una tangente en dicho punto. El área entre la curva y su asíntota es $3\pi a^2$. Dentro de las curvas cisoides es un caso particular de cisoide oblicua.

Si los puntos R y S están en la cisoide de manera que BS subtiende un ángulo recto a O entonces el lugar geométrico de intersección de las tangentes a B y S queda en el círculo con diámetro $\left(\frac{a}{2},0\right)$, $(2a,0)$.

La curva podaria de la cisoide, cuando el punto de la podaria está en el eje más allá de la asíntota, a distancia cuatro veces del vértice de la asíntota, es una cardioide. Por el contrario, la podaria de una parábola con relación a su vértice es una cisoide de Diocles.

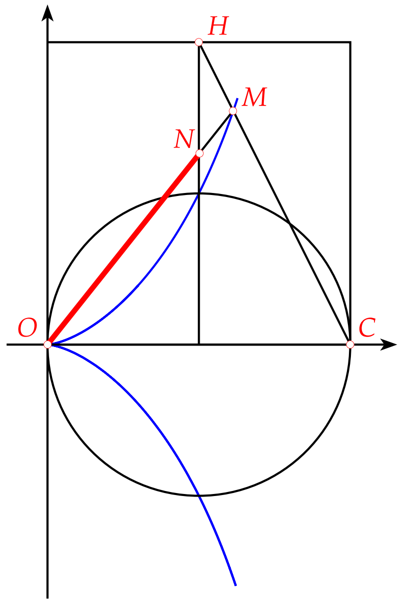
Si se toma como centro de inversión el vértice de la cisoide, la cisoide se invierte en una parábola.

La cáustica de la cisoide cuando se toma el punto radiante como $(8a,0)$ es una cardiode.

El nombre aparece por primera vez en un trabajo de Gémino (10 a.C - 60). Pierre de Fermat (1601-1665) y Gilles Personne de Roberval (1602-1675) construyeron la tangente para su generación en 1634. Hygens (1629-1695) y John Wallis (1616-1703) encontraron, en 1659, que el área entre la curva y su asíntota era igual a $3\pi a^2$.

Isaac Newton (1642-1727) desarrolló un método de dibujo para la cisoide de Diocles, usando dos segmentos de longitud igual a ángulos rectos. Si se mueven de manera que una línea siempre pase por un punto fijo y el extremo del otro segmento se deslice a lo largo de una línea recta, entonces los puntos medios del deslizamiento del segmento de la línea deslizada trazan una cisoide de Diocles.

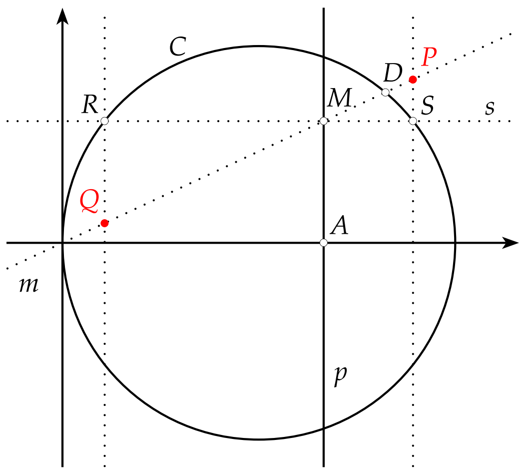
Esta curva, cuyo significado del término es *forma de hiedra*, fue ideada por Diocles aproximadamente en el año 180 a.C. Permite calcular $\sqrt[3]{2}$ tal y como muestra la siguiente figura. Se construye un cuadrado de lado igual al diámetro de la circunferencia. En el lado superior se busca el punto medio del mismo H. Se une mediante una recta el punto H con el punto C, que intersecta a la cisoide en el punto M. Trazando una vertical por H y una línea que une O y M, se obtiene otro punto de intersección N. El segmento ON es la raíz cúbica de 2.



6. Lugar Geométrico (III)

6.1. Enunciado

Se considera la circunferencia C de expresión $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$. Se traza la recta p perpendicular al eje de abcisas por el punto A genérico de coordenadas $(b, 0)$. Se traza una recta genérica m que pasa por el origen de coordenadas, y que corta a la recta p en el punto M. Por el punto M hacemos pasar una recta s paralela al eje de abcisas que corta a la circunferencia C en R y S. Por R y S trazamos sendas rectas paralelas a p que cortan a la recta m en los puntos P y Q. Hallar el lugar geométrico descrito por los puntos P y Q.



6.2. Resolución Analítica

El punto M tendrá de coordenadas (b, mb). Introducimos el valor de la ordenada de M en la expresión de C para obtener la siguiente expresión:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+m^2b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{1}$$

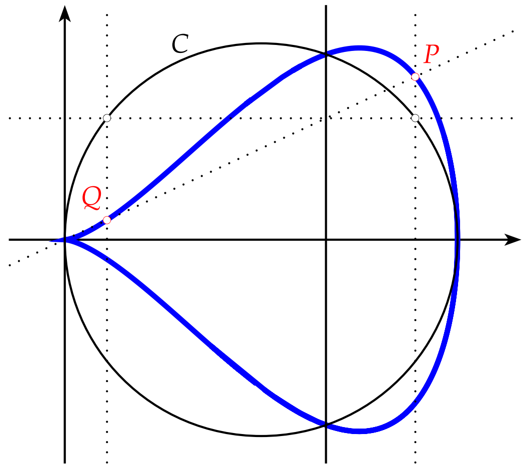
Como $m=\dfrac{y}{x}$ sustituimos este valor en la expresión (1).

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{y^2}{x^2}\,b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Resolviendo en la expresión (2) obtenemos el lugar geométrico solicitado

$$b^2y^2=x^3(a-x)$$

La siguiente figura representa gráficamente el lugar geométrico que describen los puntos P y Q.



6.3. Visualización con Geogebra

1. Dibujamos la circunferencia C genérica eligiendo la herramientas de circunferencia dado centro y un punto de la misma (por ejemplo).
2. Eligiendo la herramienta de recta que pasa por dos puntos, dibujamos la recta genérica que pasa por el origen m y un punto al azar D de la circunferencia C.
3. Dibujamos una recta vertical genérica p introduciendo su expresión en la barra de entrada ($x=b$, siendo b un número real positivo).
4. Por el punto de intersección de m con p trazamos el punto M y la recta horizontal s, para ello en herramientas elegimos la recta paralela que pasa por un punto.

5. Por los puntos de intersección de s y la circunferencia C, dibujamos los puntos R y S y las rectas verticales, mediante la herramienta recta paralela a otra (p) que pasa por un punto.

6. En los puntos de intersección de las rectas verticales con la recta genérica m colocamos nuestros puntos P y Q y activamos en ellos el rastro. Para ello hacemos clic en ellos con el botón derecho y desplegando el menú de diálogo elegimos la opción Activar Rastro.

7. Elegimos la herramienta Seleccionar y movemos el punto D de este modo al moverse los puntos P y Q representan el lugar geométrico buscado.

8. Como alternativa a este último punto podemos hacer uso de la herramienta *Lugar Geométrico*. Una vez elegida esta pinchamos primero sobre el punto P y luego el D para visualizar la primera parte del lugar geométrico solicitada de forma continua. Y después con la misma herramienta pinchamos sobre el punto Q primero y a continuación el punto R y visualizamos de este modo el lugar geométrico completo.

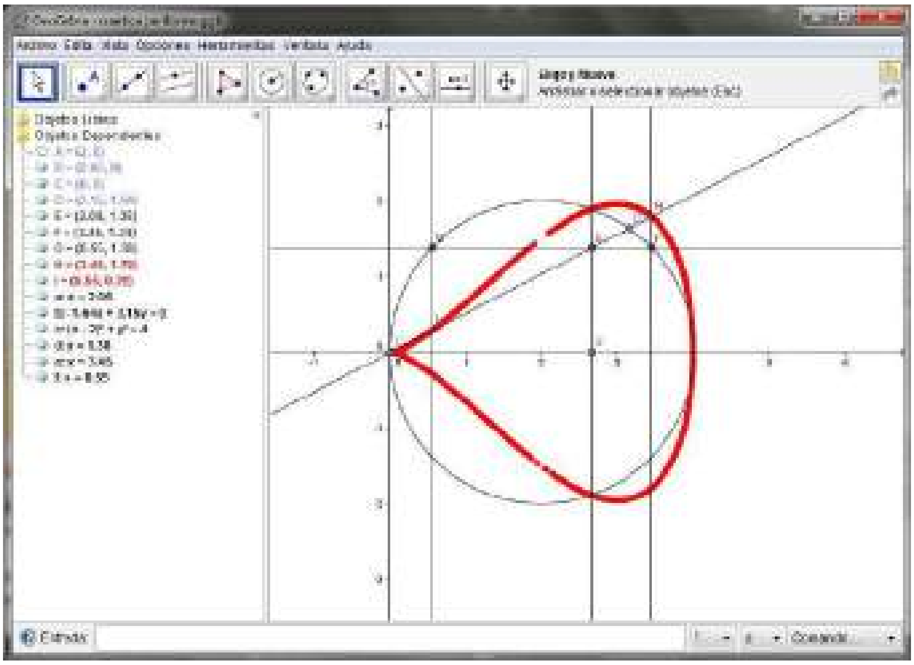


Figura 5. Generación del Lugar Geométrico III con Geogebra

6.4. Un poco de historia

El lugar geométrico en cuestión es la CUÁRTICA PIRIFORME. Esta curva fue estudiada por Gohierre de Longchamps (1842-1906) en 1886, entre otras vurvas que fueron nombradas después de él. Anteriormente había sido estudiada por John Wallis (1616-1703) en 1685 y por Pierre Ossian Bonnet (1819-1892) en 1844.

Ecuación cartesiana: $b^2y^2 = x^3(a - x)$, con $a > 0$, $b > 0$.

O bien: $y = \pm\dfrac{x}{b}\sqrt{ax - x^3}$

Ecuaciones paramétricas cartesianas: $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\[2ex] y = \dfrac{a^2\cos^3 t \,\mathrm{sen}\, t}{b} \end{cases}$

Curva algebraica plana de cuarto orden, es una cuártica racional. Es una curva limitada, cerrada y continua, en la que el eje de abcisas $(y = 0)$ es un eje de simetría. El centro de coordenadas es un punto singular cuspidal de primer género y la recta $y = 0$ es tangente en él. Los puntos $\left(\dfrac{3}{4}a, \pm\dfrac{a^2}{16b}3\sqrt{3}\right)$ son los puntos colocados a la máxima distancia del eje de abcisas.

El área que engloba la curva es igual a $\dfrac{\pi a^3}{8b}$.

La curva también es conocida como *gota de agua*. Cuando $a = b$ se trata de un caso particular de cuártica piriforme conocida como *cuártica de Bonnet*.

La cuártica piriforme tiene también por ecuación cartesiana

$$y^2(x-r)^2 - 2r^3y + r^4 = 0 \quad \text{con } r > 0$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\begin{cases} x = r(1 + \cos t) \\[2ex] y = \dfrac{r}{1 + \mathrm{sen}\, t} \end{cases}$$

La recta $x = r$ es, en este caso, un eje de simetría y una asíntota vertical. Es una curva ilimitada y continua. Si la cuártica piriforme toma la fórmula anterior, resulta la misma curva que la *apiena*.

7. Conclusiones

La exposición de los lugares geométricos presentados en este artículo, pueden constituir un ejemplo tipo de cómo preparar de un modo mucho más eficiente y fundamentalmente de un modo geométrico la presentación de ciertas curvas históricas. Para ello Geogebra facilitará las herramientas necesarias tanto para la exposición pedagógica de los docentes como para la preparación y el estudio de los alumnos.

Geogebra es un software potente, versátil, dinámico que se puede adaptar perfectamente a las necesidades específicas de cada usuario. Además es un programa muy intuitivo en su utilización lo que se traduce en un aprendizaje cómodo y muy ágil.

Referencias

[1] ÁLVAREZ PÉREZ, José Manuel. *Curvas en la historia. Tomo 1*, pp. 117–121, 160–162, Nívola Libros y Ediciones, Tres Cantos, Madrid, 2006.

[2] ÁLVAREZ PÉREZ, José Manuel. *Curvas en la historia. Tomo 2*, pp. 69–72, 212, 233–234, Nívola Libros y Ediciones, Tres Cantos, Madrid, 2006.

[3] GEOGEBRA. *Página Oficial del Software Geogebra* http://www.geogebra.org

[4] PSTRICKS. *Página Oficial Macros PSTricks para LaTeX* http://tug.org/PSTricks/main.cgi/

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Experiencias Docentes
Estrategia Didáctica Lúdica basada en el Computador para Enseñanza de Polinomios en Segundo Año de Educación Básica

María Celeste Urbano

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

El computador como herramienta de cálculo en la aplicación de las técnicas de análisis numérico para encontrar posibles soluciones al uso de recursos computarizados. El objetivo de la presente investigación fue desarrollar estrategias didácticas basadas en el uso del computador para la enseñanza de los polinomios en el segundo año de Educación Básica.

Palabras Clave: Estrategia didáctica lúdica, computador, polinomios, Educación Básica.

1. Problemática

El sistema de enseñanza y de aprendizaje requiere de un nuevo modelo interactivo entre sus actores, en los cuales los sujetos no se transformen en objetos susceptibles de manipulación, sino que puedan desenvolverse como personas libres, críticas, reflexivas, constructoras de sus conocimientos y con un alto sentido de su compromiso con su propio desarrollo. (Torres, 2004).

Frente a las concepciones tradicionalistas que le asignan a la escuela una primacía absoluta en la educación y la considera el lugar donde se agota el acto educativo, han surgido cuestionamientos. En este sentido, Mora (2007), sostiene que "las prácticas pedagógicas deben ser repensadas en presencia de la realidad cambiante, pues la escuela, el docente y el saber pedagógico sufren una de las crisis más significativas" (Mora, 2007, p.23). En otras palabras, el autor refleja el dinamismo que debe caracterizar las prácticas de la enseñanza para su adecuación a la realidad existente.

Dentro de este contexto, se aprecia de acuerdo a Rodrigo y Arnay (2006) "la construcción del saber libresco divorciado de la cotidianidad y la poca disposición del docente para adaptarse a los cambios y a la renovación de las prácticas de la enseñanza" (s/n), conlleva a determinar que lo enseñado en la escuela debe ser dinámico y adecuarse a la realidad; como es una realidad el uso cotidiano de computadores y tecnología de telefonía celular por parte de la población, especialmente los jóvenes.

Por otra parte Morles (2001) había advertido en forma general "que la escuela que no enseña a vivir a nada enseña y no puede enseñar a vivir quien no parte de la vida real y de sus condiciones, sino de teorías y nociones abstractas" (p.19). Al ubicar el planteamiento del autor precitado en el contexto de la Venezuela del siglo XXI, ob.cit. (2001) resalta que "la escuela venezolana no debe ser otra cosa que la preparación para la vida venezolana. Enseñar a vivir en Venezuela, enseñar a vivir con Venezuela, enseñar a vivir para Venezuela" (p. 20); esto significa que la enseñanza no puede estar desvinculada de la realidad.

Sin embargo, es evidente de que el uso del computador en el proceso de enseñanza - aprendizaje, no se ha materializado en la medida de su alta presencia en todas las dimensiones de la vida.

Se debe resaltar que el computador en la enseñanza de la Matemática particularmente, se utilizó en sus inicios como herramienta de cálculo y en la aplicación de las técnicas de análisis numérico pero, posteriormente, en el intento de encontrar posibles soluciones a los ya bien conocidos problemas en la enseñanza de la Matemática, se utilizó en la creación de materiales de enseñanza computarizados. La presencia del computador es cada vez más evidente en la vida cotidiana y desde luego en la escuela.

Sin embargo, el uso del computador por los estudiantes en muchas instituciones educativas, como herramienta de enseñanza – aprendizaje de la Matemática, no está contribuyendo adecuada ni significativamente a la formación de ciudadanos y ciudadanas capaces de transformar el contexto en el cual viven y pertenecen. Vale decir entonces, que los estudiantes deben ser incorporados a este proceso de creación e innovación para que construyan su propio conocimiento en lugar de la práctica común de los docentes de insistir, dirigir y estimular una actuación pasiva, memorística y conformista de los alumnos y alumnas al promocionar el saber y los conocimientos acabados que otros generan, siendo todo esto inadecuado en la formación integral de los mismos, y poco pertinente con el futuro del país.

Toda esta pasividad que ocurre en el proceso de enseñanza – aprendizaje se presenta, a pesar de lo que señala De Guzmán (2000), referente a que los estudiantes presentan un bajo rendimiento en las Matemáticas y entre las causas que lo originan está que el sistema priva a la inmensa mayoría de quienes se están formando para enseñar, de la posibilidad de un aprendizaje pausado, sereno, con gozo, así como también de las inmensas riquezas que el quehacer matemático encierra para la formación del pensamiento, de su valoración adecuada a través de la comunicación de su utilidad y su ubicuidad en la vida cotidiana.

En el marco de esta situación, se encuentra la Matemática, particularmente la enseñanza de los polinomios. Al respecto, se denomina polinomio a la suma de varios monomios (llamados términos del polinomio). Existen diferentes tipos de polinomio, monomio (un término), binomio (dos términos), trinomio (tres términos) y en general, polinomio. (wikipedia.org, 2010).

Un polinomio es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \text{ siendo } a_n, a_{n-1} \ldots a_1, a_o$$

números, llamados coeficientes.

En otras palabras, un polinomio es una expresión hecha con constantes, variables y exponentes, que están combinados usando sumas, restas y multiplicaciones, pero no divisiones; donde los exponentes sólo pueden ser 0, 1, 2, 3, ... y no puede tener un número infinito de términos. (Disfruta las Matemáticas, 2010).

En cuanto a su utilidad, cabe señalar que un polinomio de la forma $x^5+5x^2+3x+18$ puede dar origen a una función polinómica (que se define como toda aquella función que está formada por polinomios), $y = f(x) = x^5+5x^2+3x+18$ que al ser graficada describe la trayectoria que pueden seguir ciertos objetos en su movimiento, ya que representa una curva; otras funciones polinómicas podrían ser muy útiles para describir el vuelo que usan las abeja o el de un avión, por ejemplo.

Las funciones polinómicas son las funciones $f: x \rightarrow P(x)$ donde $P(x)$ es un polinomio en x, $\forall x \in \Re$.

Según el grado del polinomio las funciones polinómicas pueden clasificarse en:

GRADO	NOMBRE	EXPRESIÓN
0	Función constante	y = a
1	Función lineal	y = ax + b Binomio de primer grado
2	Función cuadrática	$y = ax^2 + bx + c$ Trinomio de segundo grado
3	Función cúbica	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Cuatrinomio de tercer grado

Tabla 1. Funciones Polínomicas

De allí pues, que una aplicación importante de los polinomios y de las funciones polinómicas está en hacer pronósticos, tal como se puede pronosticar la trayectoria del movimiento de ciertos objetos. Por ejemplo: suponiendo que se tiene una empresa dedicada a la exportación de algún producto. Se tiene un registro de ventas anuales (en unidades), por ejemplo hasta este año (2010), se quiere conocer aproximadamente cuanto se venderá en el 2015. Es así como utilizando los datos registrado se puede aproximar un polinomio (para lo que se utiliza el método de las diferencias de Newton, entre otros), para luego mediante valor numérico encontrar cuáles serán las ventas en el futuro. Igual, para el pronóstico del clima se utiliza un polinomio en el cual hay muchas variables (presión, temperatura, masas de aire, entre otras). En fin, no se desea expresar que los polinomios constituyan una herramienta mágica, sin embargo, permiten estimar valores que conforman información para tomar una decisión final, además como parte de las Matemáticas son muy utilizados en las ramas exactas como en la ingeniería, contabilidad, física, y otras.

No obstante a la importancia y utilidad de los polinomios, aunada al bajo rendimiento académico y al alto índice de aplazados que se generan en esa área de conocimiento de las Matemáticas en el Segundo Año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza", se siguen usando estrategias de aprendizaje convencionales que no motivan al estudiante ni se adaptan al uso que ellos hacen de las nuevas tecnologías.

En otras palabras, no se usan estrategias creativas para aumentar la posibilidad en los estudiantes de aprender más, ni se usan medios que ayuden a desarrollar las habilidades que deben formarse en los educandos con la ayuda de todos los factores que intervienen en el proceso de aprendizaje. Al respecto, Rodríguez (2004), señala que: "La creatividad es la capacidad del ser humano que conlleva a solucionar problemas usando enfoques novedosos, juega un papel importante en las Matemáticas, por ser un hecho pedagógico, implica utilizar términos afines que deben ser definidos para evitar confusiones". (p.32). En este sentido, en el liceo objeto de este estudio no se pone en práctica suficiente creatividad en el proceso enseñanza – aprendizaje de los polinomios, tampoco las estrategias didácticas se adaptan al uso cotidiano que actualmente hacen los alumnos del computador y de las últimas tecnologías de teléfonos celulares.

Por consiguiente, los docentes no están actualizados en estrategias creativas de aprendizaje, que contribuyan a la solución de los diferentes problemas que se presenten en el quehacer educativo, dado que diseñan sus clases con claro énfasis en la palabra y en actividades lógico—matemáticas, desconociendo que no todos los alumnos tienen la capacidad de entenderles a través de estas estrategias.

No obstante, se considera que la acción pedagógica está determinada por las estrategias que implementen los docentes (Torres, 2004). Ahora bien, en observaciones preliminares realizadas por la autora, se nota que los docentes de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza" hacen poca o ninguna aplicación de estrategias didácticas, distintas a las tradicionales que motiven el aprendizaje significativo en los polinomios en el Segundo Año de Educación Básica Media (Rodríguez, 2004), restándole una gama de posibilidades de aprendizaje al alumno.

En efecto, al computador no se le han dado los diversos usos en la enseñanza o asesoría académica de la Matemática, a los fines de enriquecer el proceso de aprendizaje. A pesar de que según (Alemán, 1998) el computador en la enseñanza de la Matemática tiene uso como los siguientes:

- El computador como pizarrón electrónico, su objetivo principal es escribir, dibujar y calcular con el fin de mostrar e ilustrar conceptos;

- El computador como tutor, una de las modalidades más utilizadas en Matemática en virtud de que ayudan a solucionar algunos problemas educativos;

- Para ejercitación práctica, según (Galvis,1986), esta modalidad permite reforzar las dos fases finales del proceso de instrucción: aplicación y retroinformación, utilizando la técnica de repetición;

- En la simulación, apoyan el aprendizaje por descubrimiento, en Matemática son utilizados con gran frecuencia para propiciar el establecimiento de reglas y demostración de proposiciones y teoremas;

- Juegos educativos, son programas desarrollados para la enseñanza de la Matemática que adoptan formas de juego, con lo cual resultan más atractivos e interesantes para los alumnos; se suelen utilizar con objetivos pedagógicos bien determinados, generalmente, para crear o aumentar habilidades específicas;

- Lenguaje de programación (BASIC, Lenguaje C, LOGO) para el aprendizaje de concepto, para auxiliar al estudiante en el proceso de construcción del conocimiento dentro de la exploración del desarrollo cognitivo.

- Como apoyo en la administración de la docencia, herramienta de apoyo al docente en el planeamiento, organización y control de las clases, permitiéndole de esta forma economizar tiempo y esfuerzo en las tareas rutinarias tornando su trabajo en una tarea más eficiente (Clunie 1992).

De todas estas aplicaciones del computador en la enseñanza de la Matemática, la opción de programas para juegos educativos, pudiesen ser atractiva e interesante para crear o aumentar algunas habilidades a los alumnos, sin embargo, no es utilizada en el liceo objeto de este estudio a pesar del uso generalizado del computador por parte de los jóvenes estudiantes.

Es de hacer notar que de acuerdo a (Ruthven, 1992) el computador es una herramienta cognitiva no sólo para establecer modos de pensar sino que también será capaz de apoyar el desarrollo cognitivo y el cambio por parte del estudiante. Pues una de las principales virtudes de la introducción del computador al seno de una clase es que se devuelve la responsabilidad a los estudiantes para que desempeñen una parte mas activa desarrollando y evaluando ideas Matemáticas.

En vista de la situación planteada se hace perentorio diseñar estrategias basadas en el computador para la enseñanza de los polinomios, dirigidas a los docentes que permitan no sólo una enseñanza correcta sino que la misma se adecue de un modo coherente a las principales exigencias cognoscitivas de los alumnos y alumnas. Asimismo, las actividades lúdicas permiten el desarrollo integral del educando, para que éste actúe con naturalidad y afiance sus potencialidades físicas, motoras y psíquicas y aumente su interés hacia otras ramas del saber.

En torno a lo antes expuesto esta investigación se formula las siguientes interrogantes: ¿Cuáles son las estrategias aplicadas en la enseñanza de los polinomios utilizadas por los docentes del segundo año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza"? ¿Cuál es la estrategia didáctica lúdica basada en el uso del computador a utilizarse para la enseñanza de polinomios en el segundo año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza". ¿Qué características debe tener el uso del computador en el marco de la enseñanza de la Matemática?

2. Objetivos

El objetivo general consistió en desarrollar una estrategia didáctica lúdica basada en el uso del computador para la enseñanza de polinomios en el segundo año de educación básica de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza".

3. Objetivos Específicos

Los objetivos específicos se centraron en describir las estrategias aplicadas en la enseñanza de los polinomios a los alumnos del segundo año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza"; caracterizar el uso del computador en el marco de la enseñanza de la Matemática y finalmente diseñar una estrategia didáctica lúdica basada en el uso del computador a utilizarse para la enseñanza de polinomios en el segundo año de Educación Básica Media.

4. Antecedentes que sustentaron el Estudio

La educación engloba diversidad de criterios que la hacen imprescindible dentro de cualquier contexto educativo. Desde este escenario, los docentes como actores fundamentales del proceso educativo logran que los educandos se involucren y participen en el mismo.

En este contexto, se destacan Carrizales (2001) quien realizó una investigación descriptiva correlacional de campo, relativa a los Procesos Cognitivos como Metodología aplicada al Área de Matemática de la tercera Etapa de Educación Básica en el Distrito Capital. La población estuvo conformada por 636 alumnos y alumnas y la muestra quedó conformada por 191 alumnos y alumnas a los cuales aplicó una estrategia diseñada de acuerdo al enfoque de aprendizaje significativo según Ausubel y otra de acuerdo a los principios y fundamentos de la instrucción programada, con la finalidad de captar si los procesos cognitivos son aplicados a los docentes y a los alumnos, y si éstos asimilan cada uno de los factores inherentes a las operaciones Matemáticas.

Entre las conclusiones emanadas del estudio están en que cuando se aplicó la estrategia del planteamiento ausbeliano, la capacidad de los alumnos para producir respuestas a problemas planteados aumentó notablemente más que con la instrucción programada. Desde este escenario de acciones el investigador recomendó: (a) Los docentes deben utilizar estrategias metodológicas para que los alumnos desarrollen sus procesos cognitivos, es decir aumentar su capacidad de iniciativa y de razonamiento; (b) Suministrarle a los educandos estrategias y técnicas que lo ayuden a aumentar su capacidad para resolver problemas.

Por su parte Campos (2002), en un estudio de campo sobre las necesidades profesionales de los docentes en la aplicación de estrategias instructivas en el área de Matemáticas en la Segunda Etapa de Educación Básica en la ciudad de Mérida, la población estuvo conformada por 230 docentes y la muestra quedó conformada por 69 sujetos, para la cual llevó a efecto la aplicación de un instrumento de detección de las necesidades del docente.

Se evidenció que un porcentaje significativo (80%) presentan diferencias en la conducción de objetivos y el uso de estrategias metodológicas. Sobre la base de estos resultados, el investigador recomienda que los docentes deben adiestrarse en el campo de las estrategias ya que estas sirven para que los alumnos respondan con su creatividad a sus necesidades más urgentes, como es el dominio de operaciones concretas a través de la lógica y el razonamiento, específicamente en el área de Matemática, donde el dominio de herramientas se hace necesario para educar a los educandos y educandas.

Así mismo Garcés (2004), realizó una investigación de tipo descriptivo-evaluativo titulada Juegos Didácticos como Estrategia Metodológica para la enseñanza de la Matemática en la Tercera Etapa de la Educación Básica en los Liceos de Baruta, Estado Miranda. La población estuvo conformada por 216 docentes del Área y la muestra quedó conformada por 43 sujetos. Donde analizó el compromiso que tienen los docentes del área de Matemáticas en cuanto al uso de estrategias metodológicas relacionado con el juego didáctico, ya que estos estimulan la creatividad en los alumnos, encontrando que los docentes no están preparados para aplicar metodologías e innovaciones ya que carecen de iniciativa para su aplicación.

Por estas razones recomendó el autor, a) Que el docente debe tener definido en forma clara la actitud ante el juego, reflexionar sobre su aplicación y seleccionar los juegos más apropiados a fin de fortalecer en los educandos su desarrollo integral; b) No centrarse en los aprendizajes memorísticos, sino utilizar el desarrollo de estrategias cognoscitivas que permitan avivar la memoria; y c) La aplicación de estrategias metodológicas como el juego didáctico, se les están dando herramientas útiles a los alumnos con el propósito de encaminarlos a una práctica pedagógica que dinamice los procesos mentales (Describir, analizar, inferir) para que construyan sus propios aprendizajes y su forma crítica de verlos.

Fajardo (2004), en investigación realizada en la Primera Etapa de Educación Básica titulada Los Juegos como Estrategias, estímulos y recreación en el proceso de aprendizaje; destaca las siguientes conclusiones: a) Los juegos son el medio más eficaz para desarrollar habilidades y destrezas en los niños, sacar a flote su creatividad, espontaneidad y adquirir conocimientos a través de su interacción directa con los elementos que conforman el ambiente; b) El docente que motiva las actividades diarias como empleo de juegos acordes a la edad, interés y necesidades de los educandos, estará contribuyendo al desarrollo de sus capacidades: físicas, mentales, intelectuales, afectivas, emocionales, sociales y por ende a su desarrollo intelectual ; c) Por otro lado, el juego como estrategia para la enseñanza de la Matemática, permite por una parte, incorporar a los niños menos preparados e introvertidos a la participación activa, a la vez que estimula su superación valiéndose del elemento competitivo, por la otra se ofrece el mayor campo para el intercambio de opiniones y de aclaración de conceptos, y finalmente, se robustecen las relaciones interpersonales de solidaridad y amistad dentro del ambiente de agrado que produce el juego

Todas estas investigaciones, presentadas como antecedentes, se consideran de gran utilidad por el aporte teórico y referencias bibliográficas que han servido de apoyo en los conocimientos acerca del proceso de cognición que pone de manifiesto la necesidad de suministrar estrategias de aprendizaje y enseñanza a los estudiantes de Matemáticas, específicamente que conozcan la capacidad que todos poseen para el manejo de los recursos cognitivos, ser revertidos en el desempeño intelectual.

5. Justificación e Importancia

Tomando en cuenta que la educación es la base fundamental para el desarrollo de un país, en todos sus niveles y estructuras debe estar orientada hacia la búsqueda de la excelencia, perfección, calidad y solidez, teniendo como premisa que el éxito de la misma radica en la efectividad de todos los componentes así como de las personas que la dirigen.

En el momento actual de la educación, reclama un docente capaz de desempeñarse como integrador de la práctica pedagógica en el aula, es decir, conocedor de la disciplina que administra, las estrategias, técnicas y recursos que hacen posible un proceso de enseñanza y de aprendizaje participativo y significativo, como también la realidad educativa, económica, social y política del entorno en el cual se desenvuelve.

En este sentido, la Matemática es un área de conocimiento indispensable en nuestra sociedad. En su forma más sencilla la Matemática está presente en todo el quehacer cotidiano y en forma más compleja constituye el fundamento de todos los avances científicos y tecnológicos.

En consecuencia, se debe favorecer su proceso de enseñanza, y en especial de los polinomios en el segundo año de Educación Básica, enriqueciendo sus estrategias didácticas a los fines de facilitar el logro de los objetivos propuestos. En tales estrategias didácticas el uso del computador tendría una gran importancia en virtud de que hoy día es evidente su presencia en todos los aspectos de la vida. Incorporando, de esta manera, nuevos esquemas de enseñanza como aprender-aprender, aprender para la vida y aprender con alegría y felicidad y al ser aplicadas implican modificaciones a la organización y gestión educativa de la enseñanza de los polinomios en el segundo año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza".

Por lo antes expuesto, esta investigación es importante en virtud de que contribuirá a mejorar el bajo rendimiento académico, menguar el alto índice de aplazados, existente en el segundo año de Educación Básica de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza", específicamente en la asignatura de Matemática, además de aportar orientaciones, información y sugerencias sobre algunas técnicas de enseñanza como una manera distinta de planificar y desarrollar esta actividad en el aula.

De igual manera, la investigación se considera relevante debido a que los resultados de la misma, pueden servir de referencias para la realización de estudios posteriores sobre innovaciones en la práctica educativa a través de la transversalidad y del enfoque global del aprendizaje en función de una mejor calidad de los servicios educativos.

Desde la perspectiva teórica, este estudio contribuye a establecer y describir una estructura de relaciones entre los diferentes agentes y situaciones que definen variables fundamentales acerca de estrategias de enseñanza de la Matemática mediante el uso del computador.

Desde el punto de vista metodológico, este trabajo sugiere la utilización o aplicación de un método y de una técnica para establecer estrategias de uso del computador para elaborar juegos lúdicos para la enseñanza de los polinomios, adicionalmente sirve de aporte en otras investigaciones que aborden problemas similares.

Desde el punto de vista práctico, esta investigación contribuirá a la solución de problemas de bajo rendimiento académico y alto índice de aplazados, en Matemática, específicamente en el tema de los polinomios.

Finalmente, se pretende que los resultados del presente trabajo signifiquen un aporte a una compleja realidad cuya caracterización generan indicios, elementos de juicio, evaluaciones parciales y nuevas interrogantes sobre estrategia didáctica basada en el computador para la enseñanza de Matemáticas.

6. Aportes Teóricos

A1 hacer referencia a las dificultades que existen en el aprendizaje de los Polinomios; es que cuando el escolar tiene que resolver problemas, no puede por sí solo determinar qué operación u operaciones tiene que aplicar y se preguntan: ¿Se multiplica?, ¿se divide?; otra cuestión negativa de la enseñanza de la Matemática es que su aprendizaje resulta muy difícil y los alumnos se sienten incapaces de dominar los contenidos de la asignatura y en consecuencia asumen una posición negativa hacia su aprendizaje.

Esta situación, se debe en esencia a que en cada contenido que se imparte es posible distinguir aspectos o procesos operatorios que tienen una secuencia lógica y que es necesario aislarlos para que se pueda efectuar con ellos un aprendizaje de calidad.

Actualmente en cada uno de estos procesos, consultados en la literatura internacional especializada, se les llama dificultades y a la sistematización de las mismas, graduación de dificultades, la práctica ha demostrado que cuando en la enseñanza se considera cada nivel de dificultad sistematizado, el aprendizaje de los contenidos matemáticos se facilita de modo considerable. Cada dificultad debe aprenderse por separado y practicarse en ejercicios de términos para lograr la fijación de la acción formada y sólo después se aplica dicha acción a la solución de ejercicios con mayores complejidades como son: la solución de tablas, ecuaciones, ejercicios con textos y problemas, entre otros; solo entonces se presenta la dificultad que le sucede en la sistemática concebida y se trata utilizando un procedimiento análogo. Así los escolares van aprendiendo paulatinamente los procedimientos operatorios con pasos firmes y seguros, que les hacen sentirse capaces y confiados, que en consecuencia, los conducen a una actitud favorable hacia el aprendizaje de la Matemática.

En cuanto a la metodología tradicional para la enseñanza de los polinomios se considera que ha sido mediante el apoyo de una pizarra, explicación verbal y ejercicios resueltos manualmente frente a grupo; mientras que la adopción de otras herramientas en el aula, como proyector de acetatos, equipos eléctricos y electrónicos, ya sean calculadoras, computadores u otros, han sido consideradas como formas no tradicionales o alternativas.

Esta forma de enseñar Matemáticas requiere de profesores mejor preparados y capacitados pues, además del dominio del tema y del conocimiento del material didáctico proporcionado, exige también dominio y conocimiento de los medios o herramientas de comunicación y apoyo, sean éstos programas o equipo.

Reflexionando sobre la bondad del método de enseñar, se tiene que con una enseñanza activa de las Matemáticas a través de una estrategia didáctica lúdica basada en el uso del computador para la enseñanza de polinomios, se pueden lograr desarrollar considerablemente las formas algorítmicas y heurísticas del pensamiento.

A pesar de los esfuerzos que se han realizado a nivel internacional, en las últimas décadas, para mejorar la situación que se afronta y de una mejoría alcanzada, aún persisten insuficiencias en la enseñanza de la Matemática en las que se destacan el uso irracional del tiempo, como consecuencia fundamental de la utilización de métodos inadecuados; dificultades en cuestiones de índole metodológica e insuficiente utilización de la nueva tecnología.

Para erradicar estas insuficiencias se debe lograr el perfeccionamiento de la Didáctica de la Matemática; para lo cual es necesario facilitar a los docentes que imparten esta asignatura y que tanta importancia tiene en los planes de estudio y en todas las esferas de la vida más información y herramientas sobre el uso adecuado de los métodos productivos pero considerando siempre que la génesis de estos métodos están los métodos heurísticos. Cada docente al preparar cada clase de Matemática que va a impartir debe plantearse esta interrogante: ¿Cómo lograr la aplicación de los métodos problemáticos en la clase de modo que pueda impregnarse el desarrollo del pensamiento creador en el estudiante?

Con una estrategia didáctica lúdica basada en el uso del computador para la enseñanza de polinomios se logra en el escolar el conocimiento del campo de aplicación que tiene la Matemática en todas las esferas de la vida, lo que puede constituir una fuerte motivación para su aprendizaje.

7. Diseño de la Estrategia Lúdica

En esta etapa de la investigación se diseñó una estrategia para enseñar los polinomios en el Segundo Año de Educación Básica mediante el juego lúdico

ISSN 2174-0410

basada en el uso del computador. La estrategia usada con el alumnado fue un juego de suma de polinomios en el Programa Power Point,, el cual permitió la autocorrección del alumno. Como se muestra en las imágenes siguientes, el alumno escogió la respuesta y el juego le indicó si es correcta (y le permitió avanzar al siguiente ejercicio) o incorrecta (y lo devolvió al ejercicio a que lo intente nuevamente).

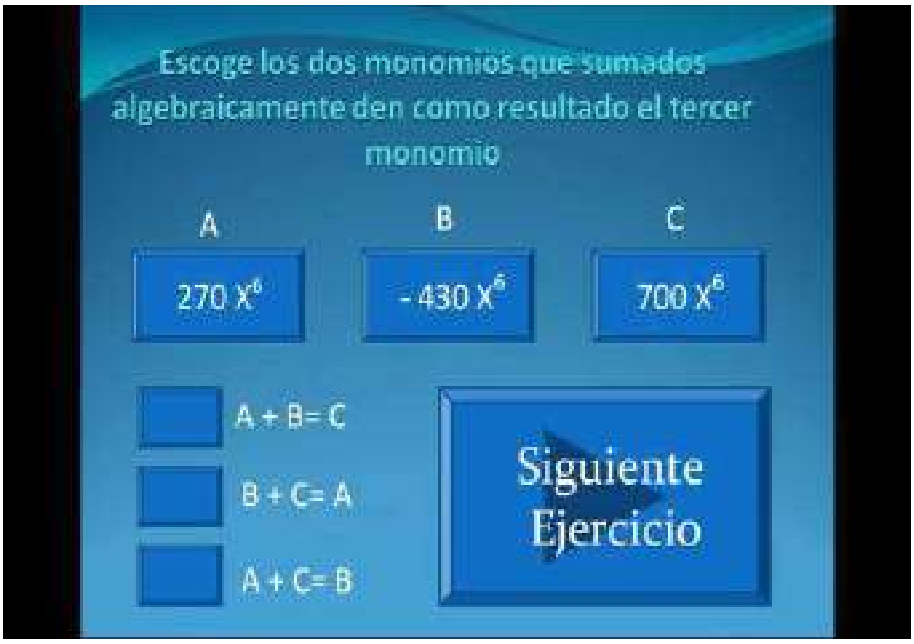


Figura 1 Ejercicio del juego de Power Point

Figura 2 Respuesta correcta de ejercicio del juego de Power Point

Figura 3 Respuesta incorrecta de ejercicio del juego de Power Point

De esta manera, al desarrollar las actividades esto permitió en el momento de su ejecución enmendar los errores cometidos por los alumnos e iniciar nuevamente las fases hasta lograr el objetivo. Estas actividades se iniciaron con agrado hacia el estudio de los polinomios, estimulando de esta manera su aprendizaje, lo cual le da seguridad y a la vez se familiariza con los ejercicios, y lo desprende de los temores a la Matemática. Esto permitió la discusión en clase logrando la interrelación entre los alumnos.

Los alumnos y alumnas realizaron sus actividades independientemente del docente, utilizando la estrategia propuesta. Con lo anterior se presenta que propició el entusiasmo propio de una actividad lúdica estimulando el aprendizaje de los polinomios y dándole seguridad y confianza. Dentro de las estrategias, se realizan las siguientes:

a) Se aplico a los alumnos una prueba diagnóstica para observar cual es su nivel de conocimientos previos necesarios para aprender polinomios.

b) Una vez utilizada la estrategia didáctica para enseñar los polinomios, se aplicó una prueba final para evaluar su aprendizaje.

8. Fase de Implementación de la Estrategia

En la que se puso en práctica las estrategias, técnicas y actividades diseñadas a los alumnos en Segundo Año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza". En este sentido, se eligieron dos secciones (A y B) de segundo año de educación básica comprendida entre 13 y 14 años. Se aplico a los alumnos (as) una prueba diagnóstica oral para observar cual es su nivel de conocimientos previos necesarios para aprender polinomios.

En la sección A se utilizó como estrategia didáctica para la enseñanza de polinomios, una clase con material físico (marcadores, cartulina, tijeras, etc.) para explicar los polinomios. Inmediatamente utilizaron el material didáctico en Power Point que era similar al material en físico (cuya ventaja es que el material en Power Point le permitió una autocorrección al alumno, pudiéndolo utilizar solo sin supervisión del profesor). En la siguiente clase se hizo la prueba final. En la sección B se utilizó como estrategia didáctica para la enseñanza de polinomios, una clase magistral. En la siguiente clase se hizo la prueba final.

Una vez aplicadas las estrategias lúdicas a los alumnos mediante el uso del computador con su respectiva evaluación, se logro recibir un *feeback* de los mismos, y permitió tomar decisiones, en cuanto a su presentación y difusión para su uso a nivel nacional e internacional mediante la publicación de los resultados en páginas web, en revistas técnicas y ponencias o poster en congresos.

El presente trabajo demuestra que dentro del marco de la enseñanza y el aprendizaje específicamente en el área de las Matemáticas, las nuevas tecnologías representan una opción, en virtud de que mediante sus instrumentos se pueden mostrar, de forma dinámica, conceptos que son muy difíciles de enseñar de la forma tradicional. En este sentido, el National Council of Teachers of Mathematics en 1998 señala que las actividades que permiten la tecnología tales como visualizar, representar y formular relaciones Matemáticas aparecen como centrales en el currículum matemático (citado en Santos et al, 1999).

Esto da una idea de la importancia que representa la utilización de la tecnología en la enseñanza–aprendizaje de las Matemáticas, pues cuando se usan diferentes representaciones de un objeto matemático se puede lograr que se transforme en algo concreto para el estudiante en lugar de algo inalcanzable para él.

9. Resultados

En la prueba aplicada a los alumnos de la Sección "A" de Segundo Año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza", se observó que todos los alumnos aumentaron su rendimiento después de la clase con el juego Power Point. En general el porcentaje de alumnos aprobados aumento de 68% a un 84% y de los alumnos aplazados disminuyó.

Luego de aplicar el juego en Power Point de 32 % a 16 %. También aumentó la media aritmética, mediana, mínimo y moda. La máxima nota fue la misma en las pruebas diagnostica y final, siendo veinte puntos (20 puntos).La desviación típica en cambio disminuyó. Esto se debe a que el contenido evaluado en la prueba diagnóstica eran conocimientos previos de años anteriores y necesitaban para poder aprender polinomios, y al ver el contenido nuevo de polinomios en una clase divertida con un juego Power Point les resultó muy motivadora, de tal manera que al hacer la prueba final los estudiantes acrecentaron sus calificaciones.

Con respecto a la Sección "B" se observó que el porcentaje de estudiantes aprobados disminuyó de 63% a 53% de los alumnos aplazados aumentó después de aplicar la clase magistral de 37 % a 47%. También disminuyó la media aritmética, mediana, máximo, mínimo y moda. La desviación típica en cambio aumentó. Esto se debe a que el contenido evaluado en la prueba diagnóstica eran conocimientos que ellos ya habían visto en años anteriores y necesitaban para poder aprender polinomios, y al ver el contenido nuevo de polinomios en una clase magistral que les resultaba poco atractiva, al hacer la prueba final los estudiantes obtuvieron bajo rendimiento en sus calificaciones.

10. Conclusiones sobre la Unidad de Observación Diagnóstica.

Una vez analizados los resultados obtenidos al aplicar una prueba diagnóstica de conocimientos previos para aprender polinomios a los estudiantes de Segundo Año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza", podemos concluir:

– Algunos estudiantes confunden la aplicación de la ley de los signos en multiplicación de conjunto Z y la aplican en adición.

– Algunos alumnos no manejan la suma y resta de fracciones con diferente denominador, para lo cual necesitan manejar el mínimo común múltiplo.

– Es necesario buscar nuevas estrategias de enseñanza para que los estudiantes se sientan más motivados.

– Es importante permitir a los estudiantes que hagan matemática, más allá de algunas destrezas de cálculo.

11.- Desempeño del grupo durante la Experiencia Didáctica

Al analizar los resultados la aplicación de juego de Power Point de polinomios se puede concluir lo siguiente:

– Al grupo se le hizo sencillo la manipulación del juego en Power Point.

– El grupo mantiene el interés por el tema con el uso del juego en el aprendizaje de los polinomios y preguntan si se pueden utilizar con otros contenidos de Matemáticas.

– Los ejemplos planteados en clase, permitieron al grupo sentirse motivados, generando interés en la resolución de los problemas y creando una atmósfera de participación.

– A través de las reflexiones y conclusiones a las que llegan los estudiantes durante el desarrollo del tema, se evidencia un manejo sobre los términos estudiados, inducidos por el razonamiento de los problemas planteados.

Con respecto al **Desempeño del grupo durante la clase magistral se tiene que:**

– Al grupo se le hizo aburrida la clase magistral.

- El grupo pierde el interés por el tema de los polinomios.

El Desempeño del grupo durante la prueba final (grupo clase magistral)

Al analizar los resultados del programa de estrategias didácticas que manifiesta el grupo a través de las asignaciones realizadas, podemos concluir:

- Todos los alumnos disminuyeron sus notas en la prueba final.
- El porcentaje de alumnos aprobados disminuyó de 63% a 53% y de alumnos aplazados aumentó después de aplicar la clase magistral de 37 % a 47 %.

El desempeño del grupo durante la prueba final al analizar los resultados del programa de estrategias didácticas que manifiesta el grupo a través de las asignaciones realizadas, se concluya que:

- Todos los alumnos aumentaron sus notas en la prueba final.
- El porcentaje de alumnos aprobados aumentó de 68 % a 84 % y de alumnos aplazados disminuyo después de aplicar el juego en Power Point de 32 % a 16 %.

12. Conclusiones Generales

Las conclusiones que se presentan a continuación, solo son producto del análisis de las unidades de la observación definidas en la presente investigación, pueden servir para marcar una tendencia, mas no así para ser generalizados a todo un colectivo que va mas allá de la delimitación de la presente investigación. A continuación se exponen las siguientes conclusiones generales:

1.- La enseñanza de los polinomios es un contenido que permite desarrollar un razonamiento matemático que es necesario para los objetivos posteriores.

2.- El uso del Power Point para la enseñanza de los polinomios es una herramienta que permite afianzar el aprendizaje de los alumnos de una manera divertida.

3.- Las clases magistrales necesitan estrategias didácticas de calidad para adaptarse a las necesidades del alumnado en su aprendizaje significativo.

En la presente investigación se fijó como propósito contribuir con la enseñanza de la Matemática. Atendiendo a tales fines, se centró la atención en el tema de las los polinomios usando como apoyo la computadora mediante un juego diseñado en Power Point, materia que forma parte del programa de estudio para el Segundo Año de Educación Básica Media de la Escuela Básica Distrital "Ramón Pompilio Oropeza". La investigación estuvo enfocada, en el diseño de un juego con la ayuda de Power Point, mediante la relación fundamental entre la Matemática y la realidad.

Referencias

1. CAMPOS. L. (2002). *Estrategias instruccionales en el área de Matemáticas en la II Etapa de Educación Básica*. Tesis de Grado no publicada. Universidad de los Andes. Mérida.

2. CARRIZALES, J. (2001). *Procesos Cognitivos como metodología aplicada al área de Matemáticas de la III Etapa de Educación Básica en Dtto. Capital.* Tesis de Grado no publicada para optar al título de magíster en la enseñanza de la Matemática. UPEL. Caracas.

3. CLUNIE, G. (1992). *Informática. Educación y Sociedad*. Panamá. Poligráfica S.A.

4. DE GUZMÁN, P. (2000). *Las Matemáticas y el Rendimiento Escolar*. Caracas: Editorial Santillana.

5. Disfruta las Matemáticas (2010) *Polinomios*. Disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/polinomio.html.

6. FAJARDO, F. (2004). *Los juegos como estrategia, estímulos y recreación en el proceso de aprendizaje*. (Tesis de Grado no publicada para optar al título de magíster en la enseñanza de la Matemática. UPEL. Caracas).

7. GALVIS, A. (1978). *Ingeniería de Software Educativo*. Universidad de Santa Fé. Bogotá. Colombia.

8. GARCÉS, G. (2004). *Juegos didácticos como estrategia metodológica para la enseñanza de la Matemáticas en los liceos de Baruta, Estado Miranda.* Tesis de Grado no publicada para optar al título de magíster en la enseñanza de la Matemática. UPEL. Caracas.

9. GOBIERNO VASCO. (1999). *Funciones Polinómicas* Disponible online en: http://www.hiru.com/matematicas/funciones-polinomicas.

10. HERNÁNDEZ, FERNÁNDEZ y BAPTISTA. (2006). *Metodología de la investigación*. p. 205. México: Mc Graw Hill Interamericana.

11. MORA, D. (2003). *Aspectos pedagógicos y didácticos sobre el método de proyectos. Un modelo para su aplicación en educación matemática.* En: Mora, D. *Tópicos en educación matemática*. p. 23. Caracas: Ediciones Universidad Central de Venezuela.

12. MORA, L. (2007). *La Praxis Educativa*. Revista de Psicología Universidad de Chile. Nº 001.

13. MORLES V. (2001). *Escuela y Cotidianidad*. Publicaciones EUS- Escuela de Educación. UCV. p 19, 20.

14. RUTHVEN, K. (1992). *Personal Technology and Classroom Change: A British* Perspective. En T. J. Fey (Ed.). Calculator in mathematics education: 1992 yearbook (pp. 91-100). Reston, VA: NCTM.

15. RAMÍREZ, T. (1999) *Cómo hacer un proyecto de investigación*. 2da. Edición. Caracas: Carthel C.A.

16. RODRIGO P. y ARNAY L. (2006). *La educación Venezolana; Paradigma de Cambios*. Ediciones la Biblioteca UCV.

17. RODRÍGUEZ, L. (2004). *La Enseñanza de la Matemática*. p. 32. Caracas: Editorial Santillana.

18. SANTOS, B. (1999). *Validación y exploración de métodos de solución a problemas de Educación Matemática*. Vol. II, No.2.

19. SOBRECONCEPTOS (2009). *Concepto de Polinomio*. Disponible online en: http://sobreconceptos.com/polinomio.

20. TAMAYO y TAMAYO, M. (2007). *Investigación científica*. p. 46. 4ta. Edición. Editorial Limusa.

21. TORRES, F. (2004). *La Escuela Moderna* Vs. La Escuela Tradicional. México: Edit. Paidos.

Sobre la autora:

Nombre: María Celeste Urbano
Correo Electrónico: prof.matematicas@hotmail.com
Institución: Universidad Simón Bolívar de Caracas, Venezuela.

Historias de Matemáticas
Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo muestra una evolución histórica del Cálculo Fraccional, desde su nacimiento meramente teórico e intuitivo a finales del siglo XVII, pasando por los formalistas del siglo XIX donde se produjo una carrera vertiginosa por establecer y definir una teoría consistente de forma definitiva, hasta la actualidad, dando cuenta de los avances científicos logrados por distintas disciplinas debido a su aplicación durante el siglo XX.

Palabras Clave: Cálculo Fraccional, derivada, integral, orden fraccional, operador generalizado.

1. Nacimiento y primeros intentos por definirlo

Gottfried Leibniz

Marqués de L'Hôpital

En cuanto al nacimiento del Cálculo Fraccional, todos los historiadores matemáticos están de acuerdo en la datación de la fecha y la forma en la que se produjo. Este hecho tuvo lugar tras una publicación de Leibniz en donde introducía la notación del Cálculo Diferencial, en particular de la expresión conocida hoy día como $\frac{d^n y}{dx^n}$ que hace referencia a la derivada de orden n de la función y, con $n \in \mathbb{N}$. ¿Pero tenía sentido hacer extensible los valores de n al conjunto de los números racionales, irracionales, o complejos en dicha expresión?.

La primera persona de la que se tiene certeza que se planteó este problema fue Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital, que el 30 de Septiembre de 1695 escribiría una carta a Gottfried Wilhelm Leibniz argumentando una cuestión con respecto a la notación para la n-ésima derivada de la función:

> *"¿Qué sucedería si n fuera $\frac{1}{2}$?"*

a lo que Leibniz replicó:

> *"Usted puede ver por eso, señor que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad como $d^{1/2}xy$ o $d^{1:2}xy$. Aunque las series infinitas y geométricas son relaciones distantes, las series infinitas admiten sólo el uso de exponentes que son enteros, no hace, todavía, el uso de exponentes fraccionarios... esto conduciría a una paradoja, de la que algún día se extraerán consecuencias útiles."*

En 1697, el mismo Leibniz, hacía referencia al producto infinito de Wallis para π[1] afirmando que podría haber hecho uso del Cálculo Diferencial para obtener el mismo resultado, utilizando la notación $d^{1/2}$ para expresar una derivada de orden $\frac{1}{2}$.

En 1730, Leonhard P. Euler hizo referencia a interpolaciones entre órdenes enteros de una derivada, y escribiría:

> *"Cuando n es un entero positivo, y si p está en función de x, el radio $d^n p$ a dx^n puede siempre ser expresada algebraicamente, para $n = 2$ y $p = x^3$ es $6x$ a 1. Ahora se pregunta: ¿qué tipo de radio puede hacerse entonces si n es una fracción?. La dificultad puede ser fácilmente entendida en este caso. Si n es un entero positivo d^n puede ser encontrada con derivación continuada. De tal manera, sin embargo no es evidente si n es una fracción. Pero con la ayuda de la interpolación uno puede expedir el asunto".*

En 1812, Pierre-Simon Laplace definió una derivada fraccional, pero la primera discusión de una derivada de este tipo apareció en 1819 en dos páginas de las 700 que constituyen el texto de Cálculo de Sylvestre François Lacroix, quien aparentemente consideró este tema como un mero ejercicio matemático.

Lacroix partió de $y = x^m$ con $m \in \mathbb{N}^+$, y calculó la n-ésima derivada:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \quad m \geq n$$

usando Γ[2], el símbolo de Legendre para factorial generalizado (función gamma), obteniendo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}$$

[1] En 1655 el matemático inglés John Wallis expresaba π como un producto infinito denominado actualmente *Producto de Wallis*:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

[2] Adrien-Marie Legendre ideó la notación de la Función Gamma, denotada como $\Gamma(z)$, como extensión del concepto de factorial para los números complejos. Si la parte real del número complejo

y reemplazando n por $\frac{1}{2}$, y m por cualquier real positivo a, de la manera tradicional en la que los formalistas clásicos de este periodo lo hacían, Lacroix obtuvo:

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}x^{a-\frac{1}{2}}$$

que expresa la $\frac{1}{2}$ derivada de $y = x^a$. También expresó este último resultado para $y = x$:

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1!x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

El resultado obtenido por Lacroix, en la manera típica de los formalistas de esa época, es el mismo mostrado hoy en día por la definición de una derivada de orden arbitrario de Riemann-Liouville. El método de Lacroix no ofrece ninguna pista para la aplicación de una derivada de orden arbitrario.

En 1822, Jean-Baptiste Joseph Fourier sería el siguiente en hacer mención a las derivadas fraccionales, pero de la misma forma que hicieron anteriormente Euler, Laplace y Lacroix, no aportó ninguna aplicación. De este modo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha)dp$$

Ahora:

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos p(x-\alpha) = p^n \cos\left(p(x-\alpha) + \frac{1}{2}n\pi\right)$$

para n entero. Reemplazando n por ν (siendo ν cualquier número arbitrario), se obtiene la generalización:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^\nu \cos\left(p(x-\alpha) + \frac{1}{2}\nu\pi\right)dp$$

La primera aplicación surgió de la mano del matemático noruego Niels Henrik Abel, en 1823, cuando aplicó el Cálculo Fraccional en la solución de una integral que surgió en la formulación del problema de la tautócrona. Este problema llamado a veces el problema de la isocrona, que no debe ser confundido con el problema de la braquistocrona[3], consiste en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento alguno, llegue al final de su recorrido en un tiempo que es

z es positiva, entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

converge absolutamente, esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo, exceptuando a los enteros negativos y al cero. Si n es un entero positivo, entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

lo que nos muestra una relación de esta función con el factorial. De hecho, la función Gamma generaliza el factorial para cualquier valor complejo de n.

[3] El problema de la braquistocrona, es un problema de cálculo de variaciones, que consiste en encontrar la forma de la curva de tal modo que un objeto realice su trayecto en el menor tiempo posible. Este problema empezó siendo estudiado por Galileo Galilei, y formulado en 1696 por Johann Bernoulli, quien estableció que la forma de la curva era similar al de una cicloide invertida.

independiente del lugar en que comience el movimiento, es decir dos objetos situados en la curva, uno situado a más altura que el otro, recorren la curva en el mismo tiempo. Si el tiempo de caída es una constante conocida, la ecuación integral de Abel tenía la forma

$$k = \int_0^x (x-t)^{1/2} f(t)\, dt \tag{1}$$

Abel estudió de forma más general la ecuaciones integrales con núcleos de la forma $(x-t)^{\alpha}$. La integral (1) es un caso particular de una integral definida que define la integración fraccional de orden $\frac{1}{2}$, excepto por el factor multiplicador $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$. En las ecuaciones integrales como la (1), la función f del integrando es desconocida y tiene que ser determinada. Abel escribió la parte de derecha de la igualdad de (1) como

Niels Henrik Abel[4]

$$\sqrt{\pi}\, \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\, f(x)$$

Entonces operó en ambos lados de la ecuación con $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ para obtener

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\, k = \sqrt{\pi} f(x) \tag{2}$$

ya que estos operadores fraccionales (en condiciones idóneas para f) tienen la propiedad de que $D^{1/2} D^{-1/2} f = D^0 f = f$. Por lo tanto cuando la derivada fraccional de orden $\frac{1}{2}$ de la constante k en (2) se computa, entonces se determina $f(x)$. Este resultado se trata de un gran logro alcanzado por Abel para el posterior desarrollo del Cálculo Fraccional. Es importante poner de manifiesto que no siempre la derivada fraccional de una constante tiene que ser siempre igual a cero, hecho que creó una pequeña controversia en aquella época entre la comunidad matemática.

A buen seguro, tanto la "elegancia" de la solución de Abel al problema de la isocrona, como la fórmula integral de Fourier, llamaron la atención de Joseph Liouville, a quien con seguridad le debemos históricamente la primera definición formal lógica del concepto de derivada fraccional, desarrollado en la publicación de sus tres largas memorias en 1832 y alguna más en 1855.

Joseph Liouville

El punto de partida de Liouville fue un resultado conocido para derivadas de orden entero positivo, que extendió en forma natural para órdenes arbitrarios:

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m e^{ax}$$

[4] Este es el único retrato de Abel que se hizo en vida. Se trata de un grabado realizado por Johan Gørbitz en otoño de 1826 durante su estancia en París. © Matematisk Institutt, Universidad de Oslo.

haciéndola extensible para $\nu > 0$:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

desarrolló $f(x)$ como expresión de la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad Re(a_n) > 0$$

y manejó la ν-ésima derivada de $f(x)$ como:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^\nu e^{a_n x}$$

conocida esta última expresión como *Primera fórmula de Liouville para la derivación fraccional*, que generaliza de un modo natural la derivada arbitraria de orden ν, siendo ν un número cualquier racional, irracional e incluso complejo.

Esta *Primera fórmula de Liouville para la derivación fraccional*, tiene la principal desventaja de que ν está restringida por la convergencia de la serie.

Liouville, obtuvo una segunda definición para la derivada fraccional, haciendo uso de un segundo método aplicado a funciones de la forma x^{-a} con $x > 0$, $a > 0$, del siguiente modo:

$$\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du$$

aplicó en cambio $xu = t$ obteniendo

$$\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du = \frac{1}{x^a}\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(a)}{x^a}$$

de donde

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du$$

y tomando la ν-ésima derivada en ambos miembros de la anterior igualdad

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}x^{-a} = \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du\right) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(e^{-xu}\right)\,du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}(-1)^\nu u^\nu e^{-xu}\,du = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a+\nu-1}e^{-xu}\,du =$$

$$= \frac{(-1)^\nu\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)x^{a+\nu}}$$

que le llevó a la siguiente expresión

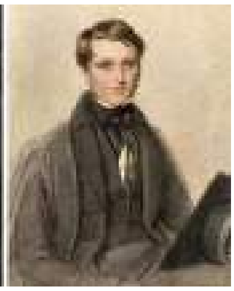
$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}x^{-a} = \frac{(-1)^\nu\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\nu}$$

conocida como la *Segunda fórmula de Liouville para la derivación fraccional*.

El término $(-1)^{\nu}$ de esta segunda definición, sugiere la necesidad de incluir número complejos, y de hecho Liouville consideró estos valores, aplicando con éxito el Cálculo Fraccional en problemas de Teoría del Potencial, e incluso trató de resolver ecuaciones diferenciales mediante el uso de esta herramienta.

Entre 1835 y 1850 algunos investigadores como George Peacock, tomando partido por Lacroix, cuya definición era útil para las funciones de la forma x^a con $a > 0$, o Philip Kelland, tomando partido por Liouville, cuya definición era útil para las funciones de la forma x^{-a} con $a > 0$, fundamentaron ciertas controversias respecto a las definiciones de derivada fraccional argumentadas de forma independiente por uno y otro. Sin embargo otros como Augustus de Morgan consideraron que ni una ni otra corriente tenían por qué entrar en conflicto, ya que ambas formas de considerar las derivadas fraccionales podían ser parte de una definición mucho más general.

George Peacock



Philip Kelland

En 1850, William Center observó que la discrepancia entre ambas corrientes se centraba fundamentalmente en el concepto de derivada fraccional de una constante. De acuerdo con la versión de Peacock-Lacroix, la derivada fraccional de una constante da un resultado distinto de cero, a menos que la constante sea precisamente cero, mientras que en la versión de Kelland-Liouville, la derivada fraccional de una constante da como resultado cero, puesto que $\Gamma(0) = \infty$, y por lo tanto $\frac{1}{\Gamma(0)}$ puede considerarse cero. Center encontró la derivada fraccional de la unidad de orden $\frac{1}{2}$, así:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

Pero Center no coincidía con Liouville en su segunda definición, citándole textualmente:

> *"La pregunta se reduce a qué es $\frac{d^{\nu}x^0}{dx^{\nu}}$. Para cuando esto sea determinado nosotros determinaremos al mismo tiempo cual es el sistema correcto."*

Bernhard Riemann

En 1847, durante sus días de estudiante, Bernhard Riemann desarrolló una teoría de operaciones fraccionales, que fue publicada de forma póstuma en *Gesammelte Werke* en 1892. Riemann usó una generalización de una serie de Taylor para deducir su fórmula para integración de orden arbitrario

$$\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_c^x (x-t)^{\nu-1}f(t)\,dt + \psi(x)$$

expresión esta última sobre la que Arthur Cayley comentó en 1880 que la función complementaria $\psi(x)$ es

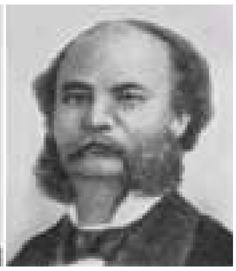
ISSN 2174-0410

de naturaleza indeterminada pues contiene una infinidad de constantes arbitrarias.

La cuestión de la existencia de una función complementaria, causó una enorme confusión. Liouville tuvo un error cuando en su interpretación de la valoración de la función complementaria. No consideró el caso especial para $x = 0$, lo cual le condujo a una contradicción. Peacock tuvo dos errores en su argumentación del cálculo fraccional. Estos dos errores le llevaron a una mala aplicación de lo que él denominaba principio de permanencia de formas equivalentes. Aunque este principio es indicado, Peacock asume su validez para todos los operadores simbólicos. Consideró la existencia de una función complementaria y desarrolló una extensión para $D^{-m}x$, siendo m un entero positivo. Se equivocó al considerar ingenuamente que podría reemplazar formalmente m por una fracción. Peacock cometió un segundo error similar cuando desarrolló la extensión para la derivada de orden entero $D^m(ax+b)^n$ y entonces buscó extender su resultado al caso general.

En 1869 Nikolay Yakovlevich Sonin trabajó inicialmente en la definición llamada Riemann-Liouville, en un escrito llamado *"En la diferenciación con índice arbitrario"*, empezando con la fórmula integral de Cauchy. Alekséi Vasílievich Létnikov escribió cuatro escritos referentes al tema los cuales tituló *"Una explicación de los principales conceptos de la teoría de diferenciación de índices arbitrarios"* en los cuales dio una extensión de los escritos de Sonin, estableciendo que la n-ésima derivada de la fórmula integral de Cauchy está dada por

Nikolay Yakovlevich Sonin



Alekséi Vasílievich Létnikov

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

No se plantea conflicto alguno generalizando $n!$ a valores arbitrarios desde $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$, pero sí para cuando n no es entero, aunque este hecho no fue incluido en los trabajos de Sonin y Létnikov.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XIX no habían podido precisar una definición apropiada al no analizar en el plano complejo las consecuencias de sus definiciones.

2. Primera definición formal

Fue el matemático Matthieu Paul Hermann Laurent quien en 1884 publicó sus escritos de la teoría de generalización de operadores de logro contribuyendo de manera clara en el cálculo de derivadas de orden arbitrario. Su teoría, analizada en el plano complejo, fue la primera en ser aceptable para el gusto de los matemáticos modernos.

De acuerdo con la notación utilizada en 1936 por el matemático Harold T. Davis en su obra*Teoría de Operadores Lineales*,

$$_{c}D_{x}^{-\nu}f(x), \;\; \nu \geq 0$$

denota la integral de orden ν de la función $f(x)$ a lo largo del eje real, y c y x son límites de integración.

$$_{c}D_{x}^{\nu}f(x), \;\; \nu \geq 0$$

significa diferenciación de orden ν para $f(x)$.

Harold T. Davis

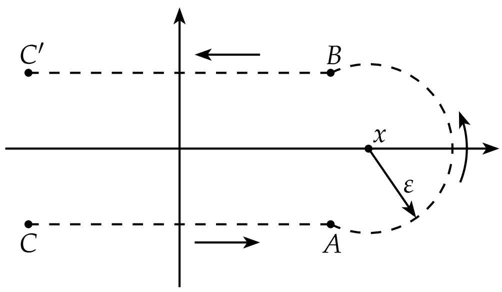
A finales del siglo XIX, los matemáticos dedicados al tema necesitaban encarecidamente encontrar una definición apropiada de orden arbitrario y formalizar una teoría que consistía en que para toda función $f(z)$ de variable compleja de una clase suficientemente amplia y a cualquier número ν, irracional, fraccional o complejo, la función $_{c}D_{z}^{\nu}f(z) = g(z)$ debería definirse de modo que satisficiera lo siguiente:

1. Si $f(z)$ es analítica, la derivada $_{c}D_{z}^{\nu}f(z)$ es analítica en ν y z.
2. La operación $_{c}D_{x}^{\nu}f(x)$ produce el mismo resultado que la diferenciación ordinaria cuando ν es entero positivo.
   Si $\nu = -n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $_{c}D_{x}^{-n}f(x)$ produce el mismo resultado que integrar ordinariamente n veces la función $f(x)$ y $_{c}D_{x}^{-n}f(x)$ debe anularse con sus $n-1$ derivadas en $x = c$.
3. La operación de orden cero no altera la función $_{c}D_{x}^{0}f(x) = f(x)$.
4. Los operadores fraccionales deber ser lineales.
5. La ley de índices debe cumplirse $_{c}D_{x}^{-u}\;{}_{c}D_{x}^{-\nu}f(x) = {}_{c}D_{x}^{-u-\nu}f(x)$.

Como se mencionó anteriormente, Laurent obtuvo la primera definición que satisfizo estas propiedades. Publicó un artículo en 1884 considerado como definitivo para los fundamentos del Cálculo Fraccional. Para ello partió de la fórmula de Cauchy para funciones complejas analíticas:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

donde $\mathbb{C}$ representa el contorno de integración en el plano complejo, ahora denominado *Lazo de Laurent*, que se muestra en la siguiente figura:



La generalización de $n!$ no presenta problemas ya que $\nu! = \Gamma(\nu+1)$; además expresando la integral en forma exponencial y haciendo los cambios $\zeta = t$ y $z = x$, se obtiene:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t)\, dt$$

en la parte AB del lazo tenemos que $t = x + \varepsilon e^{i\theta}$, de donde

$$\int_A^B e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-\nu-1)\ln\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)} f(x+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\ln\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)^{(-\nu-1)}} \varepsilon\, i\, e^{i\theta} f\left(x+\varepsilon e^{i\theta}\right)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varepsilon e^{i\theta}\right)^{(-\nu-1)} \varepsilon\, i\, e^{i\theta} f\left(x+\varepsilon e^{i\theta}\right)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-\nu} e^{i\theta} e^{-i\nu\theta}\, i\, f\left(x+\varepsilon e^{i\theta}\right)\, d\theta$$

Si consideramos $\nu < 0$, entonces la integral anterior converge cuando $\varepsilon \to 0$. En la parte CA del lazo, $\ln(\zeta - x) = \ln(x-t) - i\pi$ y en la parte BC' del mismo, $\ln(\zeta - x) = \ln(x-t) + i\pi$, de donde

$$\int_{\mathbb{C}} e^{(-\nu-1)\ln(\zeta-x)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_C^A e^{(-\nu-1)(\ln(x-t)-i\pi)} f(t)\, dt$$

Al tomar $\nu < 0$, y límite cuando $\varepsilon \to 0$, la integral en la parte AB del lazo se anula y obviamente $A \to x$, $B \to x$ y $C \to C'$, por lo que

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \left[e^{(\nu+1)i\pi} \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - e^{-(\nu+1)i\pi} \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt \right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} \left[\frac{e^{i\pi(\nu+1)} - e^{-i\pi(\nu+1)}}{2i} \right] \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} \operatorname{sen}(\nu+1)\pi \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} (-\operatorname{sen}\pi\nu) \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt$$

De acuerdo con la fórmula de reflexión de la función Γ,

$$\operatorname{sen}(\pi\nu) = \frac{\pi}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}$$

lo que nos lleva a

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)\pi}{\pi\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)} \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt$$

Por último, realizando el cambio de notación para emplear $\nu > 0$ en lugar de $\nu < 0$, obtenemos la definición de integración de orden arbitrario obtenida por Laurent, que con la notación establecida por H. T. Davis resulta

$${}_{C}D_{x}^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{C}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt$$

Esta última expresión se denomina también como *Fórmula de Riemann-Liouville* ya que si $C = 0$ o $C = -\infty$, obtenemos las expresiones definidas por Riemann y Liouville respectivamente, aunque para el caso de Riemann esta última expresión no considera la función complementaria $\psi(x)$ que éste consideró en su expresión.

Esta fórmula de Riemann-Liouville para integración fraccional, no se puede utilizar directamente para diferenciación de orden arbitrario, aunque mediante un pequeño cambio se puede encontrar una expresión adecuada.

Sea $\nu = m - p$, con m el mínimo entero mayor o igual que ν y $0 \leq p < 1$; entonces para la diferenciación de orden arbitrario:

$${}_{C}D_{x}^{-\nu} f(x) = {}_{C}D_{x}^{m-p} f(x) = {}_{C}D_{x}^{m}\, {}_{C}D_{x}^{-p} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[{}_{C}D_{x}^{-p} f(x) \right] =$$

$$= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_{C}^{x} (x-t)^{p-1} f(t)\, dt \right]$$

donde el supuesto ${}_{C}D_{x}^{m-p} = {}_{C}D_{x}^{m}\, {}_{C}D_{x}^{-p}$ se puede justificar de la manera descrita a continuación.

Sea

$$\phi(\nu, x) = {}_{0}D_{x}^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt$$

es convergente para $\nu > 0$

$$\psi(\nu, x) = {}_{0}D_{x}^{m}\, {}_{0}D_{x}^{-p} f(x)$$

donde $-\nu = m - p$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$

Cuando $\nu > 0$ se puede escoger $m = 0$, entonces $\nu = p$, $\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$ y se puede deducir:

$$\phi(\nu, x) = \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{0}^{x} (x, t)^{\nu-1} f(t)\, dt \right] dx$$

y haciendo uso de la fórmula de Dirichlet

$$\phi(\nu, x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\nu} f(t)\, dt$$

que es convergente para $\nu > -1$, y resulta que para $m = 1$, entonces

$$\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$$

ISSN 2174-0410

y este proceso continúa hasta que $\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$ para $m = n$ y $\nu > -n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Luego ϕ es analítica en R_1 donde $\nu > 0$ y ψ es analítica en R_2 para $\nu > -n$; como $\phi = \psi$ en $R_1 \bigcap R_2$ con un punto límite en el semiplano derecho, entonces ψ es continuación analítica de ϕ; esto se justifica al expresar

$$ {}_cD_x^m \, {}_cD_x^{-p} = {}_cD_x^{m-p} $$

En 1892, Oliver Heaviside ponía de manifiesto la importancia de la utilización de los operadores generalizados para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Heaviside no se caracterizó por ser un científico de gran rigor, sus aportaciones tenían un carácter eminentemente práctico, por lo que sus métodos resultaban útiles a disciplinas aplicadas como la ingeniería. En su publicación *Heaviside operational calculus* (*Cálculo Operacional de Heaviside*), denota al operador diferenciación por la letra p, y lo considera como si fuera una constante en la solución de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la ecuación del calor en una dimensión es

$$ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \, \frac{\partial u}{\partial t} $$

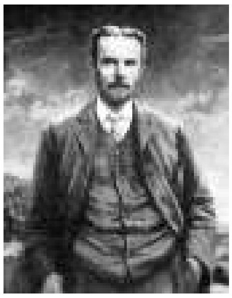
donde a^2 es una constante y u la temperatura. Si consideramos $\dfrac{\partial}{\partial t} = p$, entonces la ecuación diferencial se expresa

$$ D^2 u = a^2 p $$

cuya solución expresada en función de este operador simbólico resulta

$$ u(x,t) = Ae^{xap^{1/2}} + Be^{-xap^{1/2}} $$

que es exactamente lo que se obtendría si se resolviera la ecuación $D^2 u = a^2 p$ considerando p como una constante.



Oliver Heaviside

Heaviside contribuyó en gran medida a al desarrollo acelarado de la teoría de operadores generalizados en la recta final del siglo XIX. Obtuvo resultados satisfactorios desarrollando la exponencial en potencias de $p^{1/2}$, donde

$$ p^{1/2} = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} = D^{1/2} $$

Heaviside llevo a cabo un uso frecuente del operador $p^{1/2}$ en la teoría de circuitos eléctricos. Interpretó que $p^{1/2} \to 1$, esto es, $D^{1/2}(1)$, se convierte en $(\pi t)^{-1/2}$. Como $f(t) = 1$ es una función de clase Riemann, se ve claramente que el operador de Heaviside debe ser interpretado en el contexto del operador de Riemann ${}_0D_x^{\nu}$[5]. Sus resultados fueron correctos, aunque fue incapaz de justificar sus procedimientos, hecho que sucedería años más tarde (en 1919) de la mano de Thomas John l'Anson Bromwich.

[5] En el moderno Cálculo Operacional, $pF(p)$ es reemplazado por $F(s)$, donde s es la transformada variable de Laplace. Por lo tanto, $p^{1/2}$ es reemplazado por $s^{1/2}$, y la transformada de Laplace inversa de $s^{1/2}$ resulta $(\pi t)^{-1/2}$, que es $D^{1/2}(1)$.

ISSN 2174-0410

3. Aplicaciones en el siglo XX

Con la llegada del siglo XX y de los desarrollos tanto del análisis matemático como de la teoría de funciones, surgieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionarias. Muchos fueron los que colaboraron en el desarrollo del cálculo fraccional, entre ellos M. Al-Bassam, Harold T. Davis, Arthur Erdélyi, Godfrey Harold Hardy, Hermann Kober, John Edensor Littlewood, Eric R. Love, T. Osler, Marcel Riesz, S. Samko, Ian Naismith Sneddon, Hermann Weyl o Antoni Zygmund.

En 1917, Hermann Weyl definió una integral fraccionaria adecuada a funciones periódicas:

$$ {}_xW_\infty^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^\infty (t-x)^{p-1} f(t)\, dt, \;\; \text{con } Re(p) > 0 $$

.

Tras varios intentos por definir de otra manera derivadas fraccionales de orden arbitrario (Anton Karl Grünwald en 1867, Emil Leon Post en 1930), surgió la representación directa de $x_0 D_x^\nu f(x)$ como límite:

$$ x_0 D_x^\mu f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{x-x_0}{n}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\nu}{k} f\left(x - k\, \tfrac{x-x_0}{n}\right) $$

conocida como íntegro-derivada, pues es una generalización común de derivadas e integrales iteradas en el caso de valores enteros de ν.

Marcel Riesz

Otra de las ideas es que la integral de Riemann-Liouville es una función holomorfa de orden ν. Sobre esta base, Marcel Riesz y algunos seguidores trabajaron entre 1933 y 1949 desarrollando el método llamado *"Continuación Analítica de la Integral de Riemann-Liouville"*. Este proceso, en la teoría de la diferenciación fraccional, se aplica también a funciones de varias variables, sobre todo en espacios euclídeos y espacios métricos de dimensión grande y se usa en Física Nuclear (*Potenciales de Riesz*). En 1936, Marcel Riesz consideró la integral fraccionaria de múltiples variables como un operador de tipo potencial. Uno de estos potenciales ha sido formalmente definido como la potencia $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ del Laplaciano.

Arthur Erdélyi

Hermann Kober

Entre 1940 y 1941, Arthur Erdélyi y Hermann Kober trabajaron sobre la generalización de las integrales de Riemann-Liouville y Weyl, quedando este tema "aletargado" hasta prácticamente 1960, cuando Miklós Mikolás estudió el caso de derivadas e integrales fraccionales de orden complejo para funciones Lebesgue-integrales, basándose para ello en el concepto de Weyl.

ISSN 2174-0410

Resultados de las investigaciones de Magnus Gösta Mittag-Leffler y Marcel Riesz en el campo de funciones, permitieron entre otras cosas, una completa caracterización del dominio de existencia de la derivada fraccional, íntimamente relacionado con la teoría de Funciones Zeta de Hurwitz.

Por otro lado, el académico español Darío Maravall con una serie de publicaciones que aparecieron a partir del año 1959, muchas acerca de la ingeniería de las oscilaciones, fue el primero en España en mencionar unas particulares oscilaciones fraccionarias asociadas a ecuaciones diferenciales no enteras.


Darío Maravall


Michele Caputo

En 1969, el físico matemático italiano Michele Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más numerosos problemas aplicados que se estaban estudiando. Caputo definió la derivada fraccional

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(u)}{(x-u)^{\alpha-n+1}}\, du$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 < \alpha < n$.

En el año 1974, tuvo lugar en la Universidad de New Haven, en Connecticut, la primera conferencia internacional sobre el Cálculo Fraccionario, organizada por Bertram Ross, a la que asistieron 94 matemáticos y se presentaron 26 artículos al respecto, que sirvió de estímulo a numerosas publicaciones posteriores. La segunda conferencia tuvo lugar en 1984 en la Universidad de Strathclyde, en Escocia, codirigida por Adam McBride y Garry Roach. La tercera, dirigida por Katsuyuki Nishimoto, tuvo lugar en 1989 en la Universidad de Nihon, en Tokyo. La última, codirigida por Peter Rusev, Ivan Dimovski y Virginia Kiryakova, tuvo lugar en 1996 en Varna, Bulgaria.

Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la ciencia o de la ingeniería que no considere conceptos del Cálculo Fraccionario. Desde 1975 hasta la actualidad se han publicado más de 600 artículos relacionados con el tema, lo que sin duda pone de manifiesto su actual vigor.

Desde el punto de vista de la matemática, es fascinante ver como el campo de las generalizaciones "fraccionarias" es lugar de encuentro de varias disciplinas, entre otras, la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones íntegro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico.

De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de la viscoelasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos como, por ejemplo, el de la teoría de circuitos, de la biología o de la física de la atmósfera. Asimismo, entre los economistas se va consolidando el empleo de conceptos de Cálculo

ISSN 2174-0410

Fraccionario. Ya en 1996, en el *Journal of Econometrics* apareció un número especial en el que se recogía una serie de artículos sobre el tema denominado "Fractional Differencing and Long Memory Processes".

Entre las variadas cuestiones abiertas sobre el Cálculo Fraccional, ocupa un lugar prominente la de determinar si es posible encontrar una interpretación geométrica para la derivada fraccionaria. Una posible solución a este problema ha sido propuesta por el matemático eslovaco Igor Podlubny en un reciente artículo titulado "Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation" *(Interpretación Geométrica y Física de la Integración y Diferenciación Fraccional)* en el que la interpretación física y geométrica de estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos, un tiempo cósmico y un tiempo individual, y viene estrechamente relacionada con la teoría de la relatividad.

Igor Podlubny

Referencias

[1] CAPUTO, Michele. *Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations*, Revista *Annals of Geophysics*, Vol. 46, Nº 2, Abril, 2003

[2] LOVERRO, Adam. *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*, Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mećanica, Universidad de Notre Dame, EE.UU, 2004.

[3] MILLER, Kenneth S., y ROSS, Bertram. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, pp. 1–16, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[4] PIERANTOZZI, Teresa. *Estudio de Generalizaciones Fraccionarias de las Ecuaciones Estándar de Difusión y de Ondas*, Departamento de Matemática Aplicada, UCM, Madrid, 2006.

[5] PODLUBNY, Igor. *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation*, Revista *Fractional Calculus & Apllied Analysis*, Vol. 5, Nº 4, 2002.

[6] RODRÍGUEZ PERDOMO, Diego Felipe. *Cálculo Fraccional: Un enfoque a la Teoría de Riemann-Liouville*, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Colombia, 2008.

[7] THE ABEL PRIZE WEBSITE. *Página completa dedicada a la figura de Abel*, http://www.abelprisen.no/en/abel/

[8] VALENCIA ARVIZU, Luis Feliciano. *Una Teoría de Integración Fraccional para Funciones Generalizadas*, Tesis Licenciatura Matemáticas Escuela de Altos Estudios. Universidad de Sonora, México, 1981.

[9] WIKIPEDIA,
Bernhard Riemann, http://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann
Cálculo Fraccional, http://es.wikipedia.org/wiki/Cálculo_fraccional
Función Gamma, http://es.wikipedia.org/wiki/Función_gamma
Gottfried Leibniz, http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz
John Wallis, http://es.wikipedia.org/wiki/John_Wallis
Joseph Liouville, http://es.wikipedia.org/wiki/Liouville
Marqués de L'Hôpital, http://es.wikipedia.org/wiki/L'hopital
Oliver Heaviside, http://es.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside
Producto de Wallis, http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_de_wallis

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas
Las Escuelas Jónica y Pitagórica

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo pretende dar una visión general de las que hoy día son consideradas las dos primeras escuelas matemáticas griegas modernas. Se hace un repaso de ambas escuelas, la Escuela Jónica personificada en Tales de Mileto y la Escuela Pitagórica personificada en Pitágoras de Samos. Ambos personajes fueron un referente para otros filósofos y matemáticos posteriores.

Palabras Clave: Escuela Jónica, Escuela Pitagórica, Tales de Mileto, Escuela de Mileto, Pitágoras de Samos, pitagóricos, Aritmética, Geometría, Números.

1. Introducción

Podemos considerar que con la aparición de las Escuelas Jónica y Pitagórica, se dejó atrás la historia matemática antigua y comenzó la era científica moderna. Desafortunadamente la mayoría del legado de ambas escuelas no ha sobrevivido al tiempo y es escaso el material que ha llegado a nuestros días. Afortunadamente hacia el 450 a.C. tenemos constancia de los primeros comentarios históricos que realizó el historiador Proclo acerca de los *Elementos de Euclides*, que estaba familiarizado con la obra de Eudemo de Rodas, discípulo éste a su vez de Aristóteles.

También podemos encontrar extractos de la obra *Doctrina (o Teoría) de las Matemáticas* de Gémino de Rodas sobre el año 50 a.C. conservados a través de autores como Proclo, Eutocio, Al Nayrizi y otros. En él, divide a las matemáticas en dos partes: *Mental* y *Observable*, o en términos actuales *Pura* y *Aplicada*, donde se realiza una comparativa de los métodos de demostración usados por los primeros geómetras griegos con los métodos actuales.

También han llegado a nuestros días las biografías de algunos de los matemáticos más relevantes de esa época, así como de la vida y obra de otros más modestos.

2. La Escuela Jónica

2.1. Tales de Mileto

Tales de Mileto

Es considerado por muchos (por ejemplo Aristóteles) el fundador de la primera escuela de matemáticas y filosofía griegas y uno de los Siete Sabios de Grecia. Nació en torno al año 640 a.C.[1] en la ciudad jónica de Mileto, una antigua ciudad en la costa occidental de Asia Menor (en lo que actualmente es la provincia de Aydin en Turquía), cerca de la desembocadura del río Menderes.

Durante la primera etapa de su vida, Tales se dedicó parcialmente al comercio y a asuntos de carácter público. Y a juzgar por las anécdotas sobre su persona que han sobrevivido hasta nuestros días, se destacó por su astucia en los negocios. Se cuenta que una vez transportando una mercancía de sal sobre unas mulas, uno de los animales aprendió a sumergir parte de su carga al cruzar el cauce de un río, ya que de este modo la misma se aligeraba debido a que la sal se disolvía con el agua. Los encargados de la mula estaban muy molestos al perder sus preciados cargamentos de sal y consideraron que el animal ya no servía para el trabajo, por lo que decidieron sacrificarlo. Tales intervino para tratar de dar una explicación del comportamiento de la mula, por lo que la observó cuidadosamente sumergiéndose en el río un par de ocasiones y propuso una solución para que la mula siguiera siendo útil y no echara a perder más los cargamentos de sal. En lugar de cargar a la mula con los usuales sacos de sal, Tales la cargó de esponjas. Así, cada vez que la mula se sumergía en el río queriendo aligerar su carga, las esponjas absorbían el agua y su carga se hacía más pesada. De esta forma, después de varios días de repetir la lección de las esponjas, la mula aprendió a no sumergirse más en el río. De este modo, gracias al ingenio de Tales, la mula siguió siendo útil y conservó su vida.

Siendo aún comerciante, Tales visitó la Gran Pirámide de Egipto. En aquella visita uno de los allí presentes formuló la pregunta de cuál era la altura de la misma. Ninguno de los egipcios que allí estaban pudieron dar respuesta ya que la pirámide era muy alta y si se soltaba una cuerda desde la punta hasta el suelo, esta acción no mediría la altura. Pero Tales ante tal reto geométrico se puso manos a la obra para resolver este problema. Primero midió la longitud de la sombra de la pirámide, luego la longitud de su propia sombra y, como ya conocía su estatura, hizo algunos cálculos y sorprendió a los egipcios con la medida de la altura de la pirámide. Los egipcios desconocían el Teorema que

[1] Algunas fuentes consideran la fecha de 624 a.C. como el año de su nacimiento.

ISSN 2174-0410

Tales estaba usando: si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes. Este resultado corresponde a una de las versiones del llamado *Teorema de Tales*.

Durante su periodo en Egipto, Tales estudió Astronomía y Geometría. Regresó a Mileto para abandonar su profesión como comerciante y su vida pública, centrándose única y exclusivamente en el estudio de la filosofía y la ciencia (disciplinas que en las Escuelas Jónica, Pitagórica y quizás Ateniense estaban íntimamente interconectadas), donde vivió hasta su muerte alrededor del 550 a.C.

Desgraciadamente no nos podemos hacer una idea exacta de su labor docente. Según Proclo, sus enseñanzas consistían en un número de proposiciones aisladas que no seguían ninguna secuencia lógica, pero cuyas demostraciones eran deducidas, por lo tanto los teoremas no eran meras afirmaciones resultado de la inducción de un gran número de casos especiales, como probablemente era la manera de actuar de los geómetras egipcios. Este carácter deductivo es precisamente su principal sello de distinción. Proclo declaraba en el *Sumario de Eudemo*[2]

> *"...primero fue a Egipto y después introdujo este estudio en Grecia. Descubrió muchas de las proposiciones por sí mismo e instruyó a sus seguidores en los principios que subyacen en muchas otras, siendo un método de ataque más general en algunos casos, más empírico en otros."*

Podemos atribuirle con razonable probabilidad ciertas proposiciones relacionadas con la geometría de los ángulos, las rectas, y las superficies que las determinan, transformando la geometría al cambiar el enfoque de la misma desde un punto de vista empírico a un punto de vista deductivo.

En su *Comentario*[3] y citando a Eudemo, Proclo afirma que Tales estableció cuatro teoremas:

1. *"El círculo se bisecta por su diámetro."*
2. *"Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales."* (Euc. I, 5). Proclo parece dar a entender que esta afirmación fue demostrada considerando otro triángulo isósceles idéntico, dándole la vuelta y superponiéndolo al primero, una especie de demostración empírica.
3. *"Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersectan, son iguales."* (Euc. I, 15). Tales podía haber considerado ésto como obvio, para Proclo fue Euclides el primero que dio una demostración correcta de esta afirmación.
4. *"Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son congruentes."* (Euc. VI,

[2] Eudemo de Rodas discípulo de Aristóteles que disputó con Teofrasto el puesto de director del Liceo. En el año 320 a.C. hace referencia a Tales en su *Historia de las Matemáticas*. Este documento, que fue una historia completa de la geometría griega que cubría el período anterior a 335 a.C., se perdió y antes de que esto ocurriera, llegó a existir un resumen del mismo que posteriormente desapareció también.

[3] En el *Sumario de Eudemo* escrito por Proclo en el siglo V a.C., aparece un resumen con un *Comentario* sobre el Libro I de *Los Elementos de Euclides*.

4, o Euc. VI, 2). Diógenes Laertes, junto con Plinio y Plutarco apuntan que Tales hizo uso de esta propiedad cuando estaba en Egipto para encontrar la altura de la Gran Pirámide. Parece ser que el teorema era desconocido para los egipcios.

Algunos de estos resultados debían ser conocidos desde bastante antes; de algunos, solamente se dice que fueron enunciados por él; lo importante aquí es la creencia de que Tales usaba razonamientos lógicos para hacer ver que eran ciertos y no lo hacía por medio de la intuición, la experimentación y la comprobación repetida, como en esas épocas se había hecho. Lo hiciera Tales o no, lo que sí es cierto es que los Pitagóricos desarrollaban la matemática de una manera deductiva. Hay un quinto teorema que tradicionalmente se incorpora a la lista anterior y que dice:

5. *"El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto."* (Euc. III, 31)

Actualmente se piensa que este teorema pudo tener su verdadero origen en Babilonia y posteriormente ser introducido por Tales en Grecia. Esta afirmación es considerada como uno de los mayores logros geométricos de Tales. Parece ser que pudo llegar a esta conclusión observando que las diagonales de un rectángulo son iguales, se bisecan, y que además éste siempre puede ser inscrito en una circunferencia. Por lo tanto aplicando el teorema 2, descubrió que la suma de ángulos, de un triángulo rectángulo es igual a dos ángulos rectos.

Parece improbable que Tales supiera trazar la perpendicular a una recta desde un punto, pero si así fuera, es posible que fuera consciente del siguiente teorema, como muchos investigadores modernos sugieren:

6. *"La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos."*

Pero también es posible demostrar el teorema 5, conociendo el 6. Tenemos aquí un caso de equivalencias de dos resultados. Si conocemos 5, podemos probar 6. Si sabemos 6, podemos probar 5. Si Tales demostró 5, ¿cómo lo hizo?, ¿habría usado 6?. Hay referencias de Eudemo a través de Proclo, que indican que 6 no sólo fue demostrado por los Pitagóricos, sino que incluso fue descubierto por ellos. Y por tanto se cree que Tales quizá demostró 5, a partir del conocimiento de 6, pero que no daba una demostración general; sólo aceptándolo como cierto a través de demostraciones de orden particular y de carácter más experimental e intuitivo, que las que ya aparecen en *Los Elementos de Euclides*.

Con respecto a los triángulos equiláteros y rectángulos, sabemos a través de Eudemo de Rodas, que los primeros geómetras demostraron la propiedad general de forma independiente para tres familias de triángulos. El área en torno a un punto puede ser completada mediante la unión de seis triángulos equiláteros, por lo tanto la proposición es verdadera para un triángulo equilátero. Nuevamente, tomados dos triángulos rectángulos cualesquiera, éstos pueden yuxtaponerse para formar un rectángulo, la suma de aquellos ángulos resulta cuatro ángulos rectos; por lo tanto la proposición es verdadera para un triángulo rectángulo. Por último cualquier triángulo puede dividirse en la suma de

ISSN 2174-0410

dos triángulos rectángulos trazando una perpendicular desde al ángulo mayor al lado opuesto a éste, y nuevamente se cumple la veracidad de la proposición.

Tales gozó de una gran fama entre sus contemporáneos como astrónomo y geómetra. Fue un enamorado de la astronomía, sobre la que escribió varios tratados. Una anécdota cuenta que durante un paseo nocturno, observaba con tal intensidad las estrellas que no se percató de que en el camino había una zanja y cayó en ella, a lo que una mujer mayor que pasaba por allí le espetó, *"¿Cómo puedes hablar sobre lo que ocurre en el cielo, cuando ni siquiera puedes ver lo que hay bajo tus pies?"* - anécdota comentada a menudo para ilustrar el carácter distraído de los filósofos.

Tales, detalle de sello griego (1994)

Sin entrar en demasiados detalles astronómicos, algunas historias cuentan también que Tales consideraba en su enseñanza que un año contenía sobre 365 días, y no doce meses de treinta días cada uno. Se cuenta que sus predecesores intercalaban ocasionalmente un mes para mantener a las estaciones sin desfase, así debieron darse cuenta de que el año contenía de media más de 360 días. Hay razones para considerar que Tales creía que la tierra era un cuerpo con forma de disco que flotaba en el agua. Tales conocía muy bien los métodos astronómicos babilónicos, por lo que según el historiador Herodoto, pudo haber sido capaz de predecir un eclipse de sol en el año 585 a.C, que impidió la guerra entre los pueblos *medo* y *lidio* en Asia Menor. Se cuenta que, cuando los ejércitos de ambos pueblos vieron el eclipse, atemorizados, lo interpretaron como un mal presagio e inmediatamente firmaron la paz. No se sabe si Tales en verdad predijo o no el eclipse, lo impresionante de la historia es que efectivamente el eclipse ocurrió el 28 de mayo del año 585 a.C[4], siendo éste uno de los primeros eventos históricos del cual se sabe la fecha exacta. Sus predicciones le proporcionaron un extraordinario prestigio como profesor y le reservaron un lugar entre los Siete Sabios de Grecia.

Tales murió en el año 547 a.C a la edad de 90 años. Según cuentan algunas fuentes, le gustaba asistir a eventos deportivos de toda clase, y ya anciano asistió como público a una competición gimnástica. Parece ser que aquel día

[4] Sobre este fenómeno, Herodoto de Halicarnaso (485-420 a.C.) escribió en *Historias*, I, 74:

"Tuvo lugar una guerra entre los lidios y los medos durante cinco años, en los que muchas veces los medos vencieron a los lidios y muchas los lidios a los medos. Dentro de ella incluso llevaron a cabo una batalla de noche: a ellos, que proseguían en condiciones de igualdad la guerra, en el sexto año, iniciado el combate, les aconteció que, trabada la batalla, el día de repente se hizo noche. Tales de Mileto había predicho a los jonios que sucedería esta mutación del día, habiendo propuesto como término el año ese en el que ciertamente tuvo lugar el cambio. Y los lidios y los medos, cuando vieron que se hacía de noche en lugar de día, pusieron fin a la batalla y de manera especial se apresuraron también ambos a que se hiciera la paz entre ellos. Y quienes los reconciliaron fueron estos: Siénesis, cilicio, y Labineto, babilonio. Estos fueron los que se esforzaron por que se produjera la alianza entre ellos, e hicieron un intercambio matrimonial: en efecto, decidieron que Alyattes entregara a su hija Aryenis a Astiages, el hijo de Ciaxares; pues sin un lazo fuerte unos tratados firmes no pueden mantenerse. Y, en cuanto a los pactos, hacen esos pueblos lo que los helenos y, además de esto, una vez que se cortan los brazos a nivel de la piel, chupan mutuamente la sangre."

el calor era insoportable y la muchedumbre se agolpaba para colocarse en un sitio óptimo para ver el evento. El anciano Tales no lo pudo soportar y murió de asfixia aplastado por el público.

No podemos cerrar esta pequeña biografía sobre Tales sin mostrar uno de sus resultados más conocido, que no es otro que el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

2.2. El Teorema de Tales

El Teorema de Tales es una consecuencia importante de los Axiomas de incidencia, ordenación y métricos del plano[5]. Su importancia estriba en que es la base para definir las razones trigonométricas. Se basa en la idea de las proyecciones oblicuas. Para su enunciado y demostración necesitamos presentar previamente un resultado sobre proyecciones oblicuas.

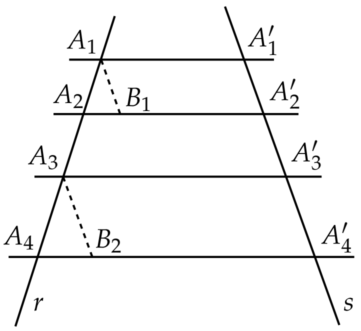
Teorema sobre proyecciones oblicuas.

> *"Sean dos rectas r y s y una dirección δ a la cual no pertenecen r y s. Si $A_1, A_2, A_3, A_4 \in r$ cumpliendo que $d(A_1, A_2) = d(A_3, A_4)$ y formamos $A'_i = P_{\delta,s}(A_i)$ las proyecciones de dichos puntos paralelamente a δ sobre la recta s entonces $d(A'_1, A'_2) = d(A'_3, A'_4)$."*

Demostración. Distinguiremos dos casos en la demostración:

- r y s son paralelas.
  Entonces $A_1A_2A'_2A'_1$ forman un paralelogramo y entonces de este modo $d(A_1, A_2) = d(A'_1, A'_2)$. Análogamente $d(A_3, A_4) = d(A'_3, A'_4)$ y así se obtiene la igualdad.

- r y s no son paralelas.



Entonces la paralela a s desde A_1 corta $A_2A'_2$ en B_1 y la paralela a s desde A_3 corta a $A_4A'_4$ en B_2. Los triángulos $\triangle A_1A_2B_1$ y $\triangle A_3A_4B_2$ son iguales por tener un lado igual y los ángulos adyacentes comprendidos entre paralelas con lo que $d(A_1, B_1) = d(A_3, B_2)$. Pero ahora $A_1B_1A'_2A'_1$ y $A_3B_2A'_4A'_3$ son paralelogramos y razonando igual que antes se obtiene la identidad.

[5] Cabe destacar que los axiomas de geometría que hoy día se utilizan no son los originales que aparecen en *Los Elementos de Euclides*, sino unos más sofisticados que el matemático David Hilbert publicó en 1899 en su famosa obra *Los Fundamentos de la Geometría* y que trata la axiomatización y el tratamiento formal riguroso y desde una perspectiva moderna, de la geometría euclídea. La diferencia fundamental de estos Axiomas con los de Euclides estriba en que Hilbert no define los conceptos de punto y recta sino que estos se suponen existentes.

ISSN 2174-0410

La idea de este Teorema es que la igualdad de longitudes se mantiene mediante proyecciones oblicuas. Teniendo en cuenta esta propiedad se puede enunciar entonces el Teorema de Tales.

Teorema de Tales.

"Sean dos rectas r y s y una dirección δ a la cual no pertenecen r y s. Tomamos tres puntos distintos A, B, $C \in r$ y llamamos A', B', C' a sus proyecciones paralelamente a δ sobre la recta s. Entonces se tiene que:

$$\frac{d(A,B)}{d(B,C)} = \frac{d(A',B')}{d(B',C')}\text{''}$$

Demostración. Distinguiremos dos casos en la demostración:

- $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$.

  En este caso dividimos el segmento $[A,B]$ en n partes iguales de longitud l, $[A,A_1],\ldots,[A_{n-1},B]$ y el segmento $[B,C]$ en m partes iguales de longitud l, $[B,B_1],\ldots,[B_{m-1},C]$. Calculamos ahora las proyecciones de los puntos de división sobre la recta s y los denotamos por $A'_1,\ldots,A'_{n-1},B'_1,\ldots,B'_{m-1}$. Por el Teorema sobre proyecciones oblicuas se tiene que los segmentos que definen estos puntos tienen la misma longitud, l', y de aquí se obtiene la igualdad pedida.

- $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} =\notin \mathbb{Q}$.

  Supongamos que $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} \neq \dfrac{d(A',B')}{d(B',C')}$ con lo cual existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

  $$\left|\frac{d(A,B)}{d(B,C)} - \frac{d(A',B')}{d(B',C')}\right| > \frac{1}{m}$$

  Como $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} \notin \mathbb{Q}$ se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo que:

  $$\frac{n}{m} < \frac{d(A,B)}{d(B,C)} < \frac{n+1}{m}$$

  y además existirán $A_1, A_2 \in r$ cumpliendo que $A \in [A_1, A_2]$ y

  $$\frac{n}{m} = \frac{d(A_1,B)}{d(B,C)}; \qquad \frac{n+1}{m} = \frac{d(A_2,B)}{d(B,C)}$$

  Si denotamos por A'_1, A'_2 a las proyecciones de A_1, A_2 sobre la recta s, por el caso anterior se tiene que

  $$\frac{n}{m} = \frac{d(A'_1,B')}{d(B',C')}; \qquad \frac{n+1}{m} = \frac{d(A'_2,B)}{d(B',C')}$$

ISSN 2174-0410

y aplicando el Axioma IIb[6] de orden, obtenemos que $A' \in [A'_1, A'_2]$ con lo que

$$\frac{n}{m} < \frac{d(A',B')}{d(B',C')} < \frac{n+1}{m}$$

de donde se deduce que

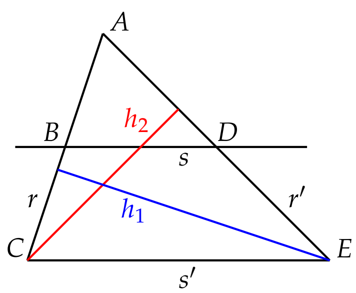
$$\left|\frac{d(A,B)}{d(B,C)} - \frac{d(A',B')}{d(B',C')}\right| < \frac{1}{m}$$

Lo que resulta absurdo o contradictorio, por lo que se debe cumplir la igualdad

$$\frac{d(A,B)}{d(B,C)} = \frac{d(A',B')}{d(B',C')}$$

Una versión reducida de este Teorema se utiliza para establecer relaciones de semejanza en triángulos, tal y como muestra la siguiente demostración del mismo.

Demostración. Sean dos rectas cualesquiera r y r' que se cortan en un punto A, y que son cortadas a su vez por dos rectas paralelas s y s' en los puntos B, C, D y E, según muestra la figura. Los triángulos $\triangle CDE$ y $\triangle CBE$ tienen el mismo área, ya que ambos tienen la misma base y altura. Por lo tanto el área del triángulo $\triangle ABE$ es igual al área del triángulo $\triangle ACD$. Se cumple entonces:



$$\text{Área } ABE = AB \cdot \frac{h_1}{2} = AD \cdot \frac{h_2}{2} = \text{Área } ACD \qquad (1)$$

$$\text{Área } BCE = BC \cdot \frac{h_1}{2} = DE \cdot \frac{h_2}{2} = \text{Área } DCE \qquad (2)$$

y dividiendo (1) entre (2) resulta:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

2.3. Anaximandro de Mileto

Anaximandro nació en el año 611 a.C. y murió en el 545 a.C., sucediendo a Tales como principal representante de la Escuela de Mileto. Según Suidas, escribió un tratado de geometría, donde prestó especial interés por las propiedades de las esferas, y las ideas filosóficas de la concepción del espacio infinito y el tiempo. Se le atribuye la escritura de un único libro sobre la naturaleza, pero su palabra llega a la actualidad mediante comentarios doxográficos de otros autores. Construyó mapas terrestres y cartas celestes.

[6] *"Sean dos rectas paralelas $R||S$ y dos pares de puntos r, r' pertenecientes a la recta R y s, s' pertenecientes a S. Si T es una recta paralela a R y S que corta a la recta $[r,s]$, entonces también corta a la recta $[r',s']$"*. Este axioma permite trasladar las nociones de orden de una recta a otra.

Se le atribuye la introducción del uso del *gnomon* o *estilo* en Grecia, y la medición de los solsticios y equinoccios, trabajos para determinar la distancia y tamaño de las estrellas y la afirmación de que la Tierra es cilíndrica y ocupa el centro del Universo. El *gnomon* o *estilo* se define como el objeto alargado que arroja sombra, independientemente del ángulo que forme con el cuadrante; estará inclinado respecto al plano horizontal con un ángulo igual a la latitud del lugar donde se sitúe el reloj de sol, y varía según los distintos tipos de relojes (ecuatoriales, declinantes, etc.) En el hemisferio norte, el caso más sencillo, la arista que proyecta la sombra está orientada hacia el norte, quedando paralela al eje de rotación de la Tierra.

Anaximandro detalle de "La Escuela de Atenas" de Rafael Sanzio (1512-1514)

2.4. El "ocaso" de la Escuela Jónica

Entre los principales discípulos de Tales cabe destacar a Anaximandro y Anaxímenes, que estudiaron fundamentalmente astronomía y filosofía física, o Anaxágoras (discípulo de Anaxímenes), Mamerco y Mandriato (de estos dos últimos poco se conoce).

De *Anaxágoras de Clazomene* (500-428 a.C.) se sabe que fue el último filósofo de la Escuela Jónica, aunque se dedicó a estudiar también problemas de matemática. Nació en Clazomene (en la actual Turquía) y se trasladó a Atenas (hacia 483 a.C.), debido a la destrucción y reubicación de Clazomene tras el fracaso de la revuelta jónica contra el dominio de Persia. Fue el primer pensador extranjero en establecerse en Atenas. Entre sus alumnos se encontraban el estadista griego Pericles, Arquelao, Protágoras de Abdera, Tucídides, el dramaturgo griego Eurípides, y se dice que también Demócrito y Sócrates, y fue conocedor de las doctrinas de Anaxímenes, Parménides, Zenón y Empédocles. Anaxágoras representaba la motivación típica griega, el deseo de conocer. Plutarco cuenta que Anaxágoras fue encarcelado en Atenas por impiedad, al afirmar que el sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo, tan grande por lo menos como el Peloponeso, y que la luna no era más que una tierra deshabitada que recibía y reflejaba la luz del sol. Este último razonamiento muestra sin duda alguna el espíritu de investigación racional heredado de la antigua tradición jónica fundada por Tales. Mientras se encontraba en prisión, se ocupó del problema de la cuadratura del círculo[7], sin embargo no dio solución alguna al

Anaxágoras, detalle de fresco de Eduard Lebiedzki en la Universidad de Atenas (1888)

[7] La primera referencia histórica que se tiene de este problema apareció en la obra *Pájaros* del poeta Aristófanes, en el año 414 a.C.

ISSN 2174-0410

problema. Es la primera vez que se tiene constancia del estudio de este famoso problema que se encargaría de fascinar a los matemáticos más de 2000 años. Tras este suceso, marchó exiliado a Jonia y se estableció en Lámpsaco (una colonia de Mileto), donde, según dicen, se dejó morir de hambre.

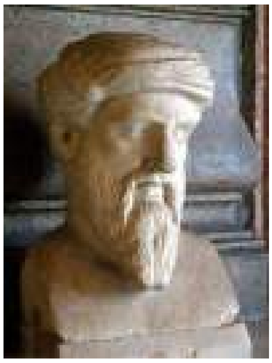
Poco más puede comentarse sobre los sucesores de Tales. La escuela continuó en plena actividad aproximadamente hasta el año 400 a.C., debido a que multitud de sus miembros centraron su interés fundamentalmente hacia temas filosóficos en detrimento de asuntos matemáticos. Se sabe muy poco acerca de los matemáticos que formaron esta escuela, pero según parece eran fervientes devotos de la astronomía. Los Jónicos ejercieron una gran influencia en el desarrollo ulterior de las matemáticas, que llegaron a su apogeo con los Pitagóricos, quienes no sólo desarrollaron en gran medida la geometría, sino que sentarían las bases de la ciencia de los números, o lo que actualmente se denomina Teoría de Números. Si Tales fue el primero que centró su atención en la geometría, citando a Eudemo, Proclo comenta:

> *"Pitágoras, que vino después de él (Tales), transformó esta ciencia en una forma de enseñanza liberal, examinando sus principios desde el comienzo y demostrando los teoremas de una manera inmaterial e intelectual. Así descubrió la teoría de proporciones y la construcción de las figuras cósmicas."*

3. La Escuela Pitagórica

3.1. Pitágoras de Samos

Pitágoras nació en Samos, una de las islas del Dodecaneso próxima a Mileto, sobre el 569 a.C., donde su padre Mnesarco, un rico comerciante fenicio, parece ser que joyero de profesión, obtuvo la ciudadanía por los servicios prestados a sus habitantes durante la época de carestía que Samos había padecido años antes. Acompañado de su mujer griega Pitia, Mnesarco viajaba frecuentemente por motivos comerciales y llegaron a Tiro[8] sobre el 569 a.C., donde nació Pitágoras.



Pitágoras de Samos

Se sabe que a la edad de 18 años, participó en los juegos olímpicos y ganó todas las competiciones del pugilato. Al parecer, a esa edad, Pitágoras abandonó secretamente Samos rumbo a la isla de Lesbos donde su tío le recibió con gran hospitalidad. La razón de este abandono fue debido a que no podía soportar por más tiempo la brutalidad de su gobernante Polícrates *"El Tirano"*, conocido tanto por su astucia como por su crueldad que había consolidado su poder a través de un golpe de estado. En Lesbos, Pitágoras recibió durante dos años una extraordinaria enseñanza del maestro filósofo griego presocrático Ferécides de Siria, de Tales de Mileto (que ya contaba en el año

[8] Ciudad situada al sur del Líbano, a 21 kilómetros de Israel. Se llama hoy Sur (o Sour)

549 a.C., con noventa años de edad), y de Anaximandro de Mileto, con quienes estudió fundamentalmente astronomía, física y matemáticas.

De Tales se sabe que tomó prestados varios de los resultados obtenidos por su maestro, como el año solar egipcio; Pitágoras sabía como predecir eclipses solares y lunares, y determinar la altura de una pirámide a partir de la sombra arrojada por ésta. De Anaximandro se sabe que Pitágoras aprendió como determinar la altitud solar.

Tales recomendó al joven aprendiz que se dirigiera a Tebas, en Egipto, donde podría satisfacer su sed de conocimiento. Previamente Pitágoras se pasó un año preparándose para este viaje en el colegio sacerdotal fenicio de Sidón. Tras ese año de preparación, llegó a Egipto en el 547 a.C.

Tras un tiempo de preparación en Tebas se dirigió a Menfis donde pasó 21 años. Durante estos años dedicados enteramente al estudio, Pitágoras absorbió todos los conocimientos posibles, llegando a finalizar sus estudios con los más altos honores en la escuela sacerdotal.

En el 526 a.C. el rey egipcio Amasis murió; al siguiente año durante el reinado de Psammenit, hijo de Amasis, el rey persa Kambis invadió Egipto y descargó toda su furia contra la escuela sacerdotal en particular. Una gran cantidad de sus miembros fueron hechos presos, entre ellos el propio Pitágoras, y llevados a Babilonia, el centro comercial del mundo conocido, en el Asia Menor. Pero este aparentemente desafortunado acontecimiento sirvió a Pitágoras para entrar en contacto con diferentes culturas como los Bactrianos (pobladores de Bactria, hoy Afganistán), Chinos, Indios o Judíos, y adquirir gran cantidad de los conocimientos de estos, durante 12 años.

Pitágoras fue liberado y regresó a su ciudad natal con la edad de 56 años. Tras una breve estancia en la isla de Delos, donde se encontró con su maestro Ferécides aún vivo, pasó allí un año con el propósito de familiarizarse de nuevo con la religión, la ciencia y las costumbres sociales de entonces.

Ya en Samos comenzó a impartir clases sin mucho éxito, lo que le obligó a emigrar a Sicilia con su madre y con un único discípulo Eratocles. De allí fueron a Tarento, de donde se mudaron a Crotona, una colonia dórica del sur de Italia, en una época bastante turbulenta, debido a continuas revueltas sociales, como la insurrección que estalló en la ciudad vecina de Síbari. En Crotona llevó a cabo con gran éxito la apertura de varias escuelas, a las que asistía público muy entusiasta, ciudadanos de todos los estratos sociales, pero sobre todo de las clases más privilegiadas, e incluso mujeres rompiendo la ley que establecía la prohibición de que pudieran asistir a reuniones en público.

Pitágoras detalle de "La Escuela de Atenas" de Rafael Sanzio (1512-1514)

La orden pitagórica se regía por un estricto código de conducta pero era igualitaria e incluía a varias mujeres. Entre el público femenino ha de destacarse a Teano, la joven y bella hija de Milón, hombre rico y famoso puesto que había ganado doce veces los juegos olímpicos. Milón estaba interesado en la filosofía y las matemáticas, y

ISSN 2174-0410

cedió parte de su casa a Pitágoras con el fin de que crease su propia escuela. Pitágoras se casó con Teano a pesar de la disparidad de sus edades. Teano escribió una biografía de su marido, pero desafortunadamente se perdió y no tenemos constancia alguna de esta obra.

Cuando la escuela pitagórica se encontraba en su mayor esplendor, Hipaso, quien había sido expulsado de la orden por revelar algunos de los conocimientos de la misma, y que lideraba el partido democrático de Crotona que representaba una corriente en contra de la ortodoxia y los valores conservadores que caracterizaban la orden pitagórica, llevó a cabo acusaciones infundadas contra sus antiguos compañeros. La escuela fue disuelta, y las propiedades de la orden fueron confiscadas y Pitágoras mandado al exilio.

Pitágoras vivió en Tarento, pero también allí el partido democrático se alzó con el poder, y Pitágoras fue expulsado a Metaponto donde alargó su pobre existencia y murió hacia el 500 a.C. Allí se produjo una revuelta liderada por miembros del recién llegado al poder partido democrático. Estos rodearon la casa donde se reunían los pitagóricos, taparon las salidas y le prendieron fuego. Muchos de los discípulos murieron. Los supervivientes huyeron y este triste hecho sirvió para que algunos de ellos como Filolao de Tarento les fuera encargada la tarea de divulgar los conocimientos de la hermandad, constituyendo entre otros el germen de la Academia de Platón.

Pitágoras de José Ribera "el Españoleto" (1640)

3.2. Los Pitagóricos

Pitágoras diferenció a aquellos que asistían a sus enseñanzas en dos clases, los que podríamos clasificar como principiantes, llamados *acusmáticos* (auditores) a los que sólo se les trasmitían los resultados y cuyos temas principales de estudio eran la ética, la inmortalidad del alma y la transmigración de la misma o mentempsicosis, y los *matemáticos* (conocedores) a los que se les trasmitían los resultados y las demostraciones. El hecho de que tan pocos datos acerca de la vida y obra de Pitágoras hayan llegado hasta nosotros, se debe fundamentalmente a la pérdida de documentos sobre él que se ha producido a lo largo de la historia, porque aunque se sabe que se escribieron varias biografías, incluida una del propio Aristóteles, todas ellas se perdieron. Además a este hecho se le une la dificultad que tenemos para identificar claramente la figura de Pitágoras, ya que la orden fundada por él tenía un carácter fundamentalmente comunal y secreto; tanto los conocimientos como las propiedades eran mantenidos en un régimen de comunidad, y por lo tanto no se podía atribuir un descubrimiento a ningún miembro en concreto de la escuela. Todos los miembros mantenían las mismas creencias políticas conservadoras y filosóficas, compartían los mismos propósitos, con un código de conducta muy estricto, y tenían el compromiso de no revelar los secretos de la escuela bajo pena de muerte; a los miembros de la secta se les imponía un estricto régimen vegetariano, parece ser porque los pitagóricos aceptaban la doctrina de la metempsicosis o de la transmigración de las almas, con el resultado de que no debería ser sacrificado ningún animal ante el temor de que pudiera ser la nueva morada del alma de un amigo muerto; entre otros tabús de la escuela estaba la prohibición de comer judías (o quizás más exactamente, lentejas); su disciplina era severa, y su modo de vida estaba gobernado por el autocontrol, la abstinencia, la pureza y la obediencia. Esta estricta disciplina y el secretismo de su organización le otorgaron a la secta de los pitagóricos una supremacía, que hizo que otras clases privilegiadas se sintieran amenazadas; y finalmente, instigados por los rivales políticos de Pitágoras, la mayoría de sus seguidores fueron asesinados.

Aunque la influencia de los Pitagóricos sobre la política fue destruida con el asesinato de la mayoría de sus miembros, parece que los pocos que quedaron se reagruparon en torno a una sociedad filosófica y matemática, considerando Tarento como su centro de operaciones y continuaron aún con sus actividades durante más de cien años.

Probablemente la característica más notable de la orden pitagórica era su enorme dedicación al estudio de la filosofía y las matemáticas, hasta el punto de asumir a estas como base moral para la dirección de su vida. Parece ser que las propias palabras "filosofía" (o "amor a la sabiduría") y "matemáticas" (o "aquello que se aprende") fueron términos acuñados por el propio Pitágoras para describir actividades intelectuales.

Pitágoras no publicó libro alguno; es asumido que todo el conocimiento y los logros a los que llegó esta escuela fueron desarrollados de forma común por los integrantes de la sociedad y vetados al mundo exterior. Era tal la devoción que los pitagóricos sentían por sus principios que casi rozaban el fundamentalismo religioso. Como ejemplo de este hecho, parece ser que en torno al año 470 a.C., Hipaso de Metaponto, miembro de la orden, rompió el voto de silencio que los pitagóricos habían impuesto a sus miembros, revelando al mundo parte de los conocimientos de la orden, como la existencia del dodecaedro[9] como uno de los sólidos regulares enunciado por Pitágoras, o los llamados *inconmesurables* (irracionales). Este hecho hizo que fuera expulsado de manera inmediata y que los pitagóricos erigieran metafóricamente una tumba con su nombre, mostrando así que para ellos, él estaba muerto. La sociedad pitagórica fue perdiendo adeptos y los estrictos compromisos fueron abandonados gradualmente, y los logros y sus doctrinas fueron plasmados en libros. El primer libro (que se conozca) que recoge parte de la naturaleza de los conocimientos pitagóricos se escribió por Filolao de Crotona en torno al año 370 a.C., y se dice que Platón mantuvo en su poder una copia del mismo. Podemos decir sin lugar a equívocos que durante la primera mitad del siglo V a.C., los Pitagóricos fueron la punta de lanza en cuanto avances científicos con respecto a sus contemporáneos, pero al final todos sus descubrimientos, y sus conocimientos fueron revelados al mundo, lo que hizo que Atenas adquiriera el privilegio de erigirse como el centro de la nueva actividad intelectual.

Aunque es imposible separar de forma precisa a quien correspondió cada uno de los logros intelectuales de los Pitagóricos debido fundamentalmente al carácter comunitario e impermeable de la orden, sabemos según Proclo que fue Pitágoras quien le dio a la geometría un carácter deductivo riguroso que se ha

[9] En el Libro XIII de *Los Elementos de Euclides* aparece un comentario que dice que los pitagóricos sólo conocían tres de los poliedros regulares: el tetraedro, el cubo y el dodecaedro.

ISSN 2174-0410

mantenido hasta nuestros días y ha servido de cimiento de una enseñanza liberal. Por esta razón debemos considerar que Pitágoras fue el primer matemático capaz de elaborar un pensamiento deductivo presentando las principales proposiciones de una disciplina con un orden lógico. De acuerdo a Aristóxeno de Tarento, la gloria de la escuela pitagórica reside en el hecho de que fueron capaces de elevar a la aritmética por encima de las necesidades de los mercaderes.

Los Pitagóricos dividieron las matemáticas en cuatro grandes ramas, los números absolutos o aritmética, números aplicados o música, estática o geometría y dinámica o astronomía. Este *"cuadrivium"* fue considerado durante mucho tiempo la base de sus doctrinas de una enseñanza liberal.

3.3. La Aritmética Pitagórica

A diferencia de lo que ocurría en otras culturas, en Grecia la palabra *número* se usaba sólo para los números enteros positivos. En Egipto el dominio numérico incluía los números naturales y las fracciones unitarias, y entre los babilonios había incluido el campo de todas las fracciones racionales. En Grecia, las fracciones no eran consideradas un ente propio, sino una razón o relación entre dos números enteros, y así la matemática griega de los primeros tiempos, se aproximaba en cuanto a su concepción más a la matemática "moderna" de hoy, que a la aritmética tradicional.

Los Pitagóricos otorgaron a los números un papel fundamental, hasta el punto de que su lema era *"Todo es número"*. Se les debe la distinción entre la *aritmética* como ciencia o teoría de números y la *logística* como arte o práctica de cálculo, separando netamente los números abstractos, esencia de las cosas, de las cantidades concretas, que el hombre maneja en sus transacciones comerciales y en los menesteres ordinarios de la vida. Llevaron a cabo una clasificación de los números en vista de sus propiedades aritméticas, en pares e impares, perfectos, amigos, primos, etc. Según Aristóxeno:

> *"Pitágoras honró a la Aritmética más que ningún otro. Hizo grandes avances en ella, sacándola de los cálculos prácticos de los comerciantes y tratando todas las cosas como números."*

La definición de *números pares e impares* aparecen en las Proposiciones 6 y 7 del Libro VII de *Los Elementos de Euclides*. Los números pares e impares se subdividen en cuatro clases (Proposiciones 8 a 10 del Libro VII de *Los Elementos de Euclides*):

1. Parmente par (*Paritèr par*): cuando su mitad es también par (son de la forma $2^n \cdot [2k+1]$, $n > 1$).
2. Impartemente par (*Imparitèr par*): cuando su mitad es impar (son de la forma $2 \cdot [2k+1]$, $k > 1$).
3. Parmente impar (*Paritèr impar*): cuando al ser dividido por un número impar da uno par (son de la forma $2^n \cdot [2k+1]$, $n \geq 1$).

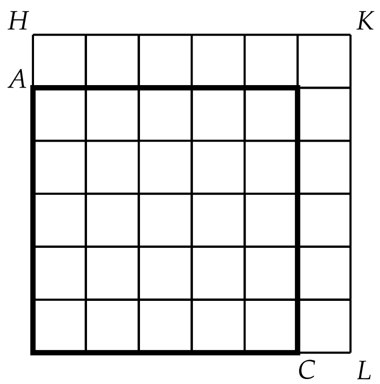
4. Imparmente impar (*Imparitèr impar*): cuando no tiene más que divisores impares.

Los conceptos *"es divisor de"* y *"es múltipo de"* aparecen en el Libro VII de *Los Elementos de Euclides*, Proposiciones 3 y 5 respectivamente.

La definición de *"números primos"* y *"números compuestos"* aparecen en el Libro VII de *Los Elementos de Euclides*, Proposiciones 11 y 13 respectivamente.

Un *número lineal*, es el que no tiene divisores (es decir, los primos). Un *número plano*, es el producto de dos números que son sus lados (*Euclides*, D.VII.16). Un *número sólido* es el producto de tres números que son sus lados (*Euclides*, D.VII.17). Un *número cuadrado* es el producto de un número por sí mismo (*Euclides*, D.VII.18). Un *número cúbico* es el producto de un número por sí mismo dos veces (*Euclides*, D.VII.19). Un *número deficiente* es un número que es menor que la suma de sus partes alícuotas[10]. Un *número abundante* es un número que es mayor que la suma de sus partes alícuotas. Un *número perfecto* es un número que es igual que la suma de sus partes alícuotas. Los *números amigos* son números en los cuales cada uno es igual a la suma de los divisores del otro.

Parece ser que Pitágoras comenzaba su enseñanza de aritmética clasificando a los números en pares e impares, estos últimos denominados *gnomones*. Un número impar (de la forma $2n+1$) era resultado de la diferencia dos números cuadrados $(n+1)^2$ y n^2; y la suma de los gnomones desde 1 a $2n+1$ resulta ser un *número cuadrado*, cuya raíz cuadrada se denominó *lado*. El producto de dos números se denominó *plano*, y si un producto no tenía una raíz cuadrada exacta se le denominaba *oblongo*. El producto de tres números se le denominó *número sólido*, y si los tres números eran iguales se le llamó *cubo*. Se puede observar la fuerte interconexión con la geometría. En la figura siguiente se considera que n es igual a 5, el gnomón AKC (que contiene 11 pequeños cuadrados) colocado alrededor del cuadrado AC (que contiene 5^2 pequeños cuadrados) hace un cuadrado HL (que contiene 6^2 pequeños cuadrados). Es posible que varios de los teoremas de números de matemáticos griegos fueran descubiertos y demostrados mediante un método análogo: el ábaco puede ser utilizado en muchas de estas demostraciones.

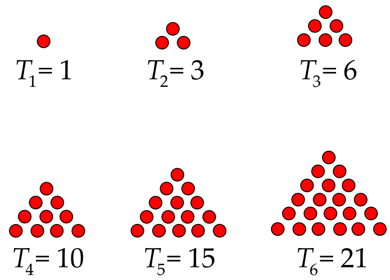


Los números de la forma $(2n^2+2n+1)$, $(2n^2+2n)$, y $(2n+1)$ poseían una

[10] proporcionales.

importancia especial ya que representaban la hipotenusa y dos lados (o catetos) de un triángulo rectángulo: Cantor consideró que Pitágoras conocía este hecho antes incluso de que Euclides descubriera la proposición geométrica de la Proposición 47 del Libro I de *Los Elementos de Euclides*. Una expresión más general para tales números es $(m^2 + n^2)$, $2mn$, y $(m^2 - n^2)$, o sus múltiplos, que resultan ser terna solución de la ecuación[11] pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$. Debe observarse que el resultado obtenido por Pitágoras puede ser deducido de estas expresiones asumiendo que $m = n + 1$; más tarde Arquitas de Tarento y Platón dieron reglas equivalentes a tomar $n = 1$; Diofanto conocía las expresiones generales.

A Pitágoras se le conoce también por los *números triangulares*. Los números figurados o de mayor orden fueron introducidos por miembros posteriores de la sociedad pitagórica. Un número triangular es aquel que puede recomponerse en la forma de un triángulo equilátero (por convención, el primer número triangular es el 1). De este modo el segundo número triangular es el 3, el tercero el 6, el cuarto corresponde al



Números Triangulares

[11] Se llama *terna pitagórica* a toda terna de números (x, y, z) que satisface la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$; si además, $mcd(x, y, z) = 1$, es decir son primos entre sí, dicha terna se denomina *primitiva*.

Proposición. Las soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, con $x, y, z > 0$, x par, $mcd(x, y, z) = 1$ son $x = 2st$, $y = s^2 - t^2$, $z = s^2 + t^2$, donde $s > t$, s y t tienen distinta paridad y $mcd(s, t) = 1$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva; entonces x e y tienen distinta paridad pues

- Si $x = 2p$, $y = 2q$, resulta
$$z^2 = 4p^2 + 4q^2 = (2s')^2$$
luego $mcd(x, y, z) \neq 1$.
- Si $x = 2p + 1$, $y = 2q + 1$, resulta
$$z^2 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4s' + 2$$
lo cual no es posible porque todo cuadrado es de la forma $4k$ o $4k + 1$.

Por consiguiente, supongamos x par e y impar, en consecuencia, z es impar. De aquí $z - y$ y $z + y$ son pares, esto es, $z - y = 2p$ y $z + y = 2q$. Así
$$x^2 = z^2 - y^2 = 4pq \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = pq$$

Además, $mcd(p, q) = 1$; de lo contrario, existe $d \neq 1$ tal que $d|p$ y $d|q$ (d es divisor de p y q), lo que conlleva que $d|(q - p) = y$, $d|(p + q) = z$, y también $d|x^2$. Por otro lado, o bien d es primo, luego $d|x$ y esto no es posible ya que $mcd(x, y, z) = 1$, o bien d contiene un factor primo, lo que conduce a la misma conclusión.

En definitiva, pq es un cuadrado y $mcd(p, q) = 1$, luego necesariamente $p = t^2$ y $q = s^2$; por consiguiente, resulta $x = 2st$, $y = q - p = s^2 - t^2$, $z = q + p = s^2 + t^2$.

Además $mcd(s, t) = 1$, ya que $mcd(p, q) = 1$; $s > t$, según se deduce de $z = 2q > 2p = y$; s y t tienen distinta paridad, pues de lo contrario sería par y también x, lo que no es posible.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, en las condiciones dadas, se verifica
$$z^2 = (s^2 + t^2)^2 = s^4 + t^4 + 2s^2t^2 + (s^2 - t^2)^2 = x^2 + y^2$$

Además, la terna pitagórica es primitiva, ya que $mcd(x, y, z) = d = 1$; de lo contrario, si d contiene un factor primo p, entonces $p|z$, siendo z impar, $p \neq 2$.

Por lo tanto, $p|(z + y) = 2s^2$ y $p|(z - y) = 2t^2$ y como $p \neq 2$, entonces $p|t^2$ y $p|s^2$, y al ser p primo, también $p|t$ y $p|s$ lo que contradice el hecho de que $mcd(s, t) = 1$.

10....Si observamos en la figura de la derecha, la fila más inferior contiene n elementos, y cada una de las filas superiores tienen un elemento menos a medida que vamos subiendo de fila. De este modo los números triangulares resultarán ser la suma de la serie

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

y por lo tanto tendrán la expresión general de la forma:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Con respecto a los números triangulares existe un teorema que dice que la suma de un numero triangular y su inmediatamente anterior es un cuadrado perfecto, o haciendo uso de la terminología pitagórica es un número cuadrado. La demostración es sencilla. Dados

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

sumando:

$$T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \;\; q.e.d$$

La suma de dos números triangulares iguales nos da un *número oblongo*[12];

$$T_n + T_n = 2T_n = 2\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 2T_n = n(n+1)$$

Por lo tanto el número triangular correspondiente a 4 es 10. Sobre este hecho existe una anécdota que comenta que en cierta ocasión un mercader le preguntó a Pitágoras qué le podía enseñar. Pitágoras le replicó *"Te enseñaré a contar"* y el mercader le contestó *"Ya sé contar"*; Pitágoras le preguntó *"¿Cómo cuentas?"*, y el mercader le respondió *"Uno, dos, tres, cuatro"* entonces Pitágoras le interrumpió y le dijo *"Para. Lo que consideras cuatro es diez, un triángulo perfecto, y uno de nuestros símbolos"*.

También se atribuye a los pitagóricos el conocimiento de las tres medias: aritmética, geométrica y armónica. Esta última designación es una reminiscencia pitagórica que ha llegado hasta nuestros días, proviene de que las razones que caracterizan la octava, la quinta y la cuarta musicales pueden formarse con la terna 6, 8, 12 que constituye una terna en progresión armónica. Si consideramos que c y h son las medias aritmética y armónica de los números a y b respectivamente, entonces:

$$c - a = b - c$$

$$\frac{(h-a)}{a} = \frac{(b-h)}{b} \Rightarrow c = \frac{1}{2}(a+b)\,;\;\; h = \frac{2ab}{(a+b)}$$

[12] Resultan de la suma de una sucesión de números pares de la forma $2+4+6+8+\ldots+2n = n(n+1)$, cada uno de los cuales es el doble de un número triangular.

Por otra parte, se atribuye a los pitagóricos la llamada *proporción musical* que parece ser que pudiera haber sido introducida desde Babilonia por Pitágoras, que expresa

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$$

es decir que la media geométrica de dos números es la media geométrica de sus medias aritmética y armónica. Parece ser que Pitágoras quedó impresionado al descubrir ciertas relaciones numéricas que ocurrían en fenómenos naturales. De hecho se le atribuye por ejemplo el haberse dado cuenta por primera vez de que si las longitudes de las cuerdas vibrantes se pueden expresar como razones de números enteros sencillos, tales como la de dos a tres (para la quinta) o como la de tres a cuatro (para la cuarta), entonces los tonos producidos serán armoniosos. Dicho de otro modo, si una cuerda emite la nota C al ser tañida, entonces una cuerda análoga de longitud doble emitirá la nota C una octava más baja, y los tonos entre estas dos notas los emitirán cuerdas cuyas longitudes vengan dadas por razones intermedias: 16:9 para la D, 8:5 para la E, 3:2 para la F, 4:3 para la G, 6:5 para la A y 16:15 para la B, en orden ascendente.

Parece ser también que Pitágoras consideró que las distancias de los planetas a la tierra se encontraban en progresión musical, y que los cuerpos celestes y su movimiento por el espacio producían sonidos armónicos, de ahí la célebre frase *"la armonía de las esferas"*. Todas estas conclusiones parece que le sugirieron que una explicación al orden y la armonía del universo debía ser encontrada en los números, de ahí que los Pitagóricos les dieran tal importancia.

Tras la muerte de Pitágoras varios miembros de la sociedad pitagórica se encargaron de continuar con sus enseñanzas, entre ellos Epicarmo de Metaponto, y más tarde Filolao de Crotona, Arquipo y Lysis. Un siglo después de la muerte de Pitágoras, Arquitas de Tarento tomó el testigo como principal líder de la sociedad pitagórica.

3.4. El Teorema de Pitágoras y la Ecuación Pitagórica

Es reconocido que varias culturas antiguas como los babilonios ya conocían el "Teorema de Pitágoras", que aplicaron a multitud de problemas de carácter práctico, y tenían conocimiento de las "Ternas Pitagóricas", es decir, la solución en números enteros de la llamada "Ecuación Pitagórica" $x^2 + y^2 = z^2$, y que ya habían utilizado por ejemplo los egipcios para resolver el problema que suponía volver a replantear las parcelas de los agricultores después de las crecidas del Nilo[13].

Parece ser que el "Teorema de Pitágoras" y su interpretación geométrica tal y como actualmente lo conocemos no fue desarrollado por ningún miembro de la orden. Sin embargo, la aplicación y demostración del teorema y su recíproco, aparecen en el Libro I de *Los Elementos de Euclides* (Proposiciones 47 y 48). En

[13] 1500 años antes a la época de Pitágoras, los egipcios ya sabían que si con una cuerda hacían 3, 4, y 5 nudos equidistantes unos de otros, formaban un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 e hipotenusa 5, lo que les era tremendamente útil a la hora de realizar sus replanteos topográficos y reparcelar los terrenos que habían sido inundados tras las crecidas del Nilo.

cuanto a la ecuación pitagórica se atribuye a la escuela la solución particular:

$$x = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)$$

$$y = n$$

$$z = \tfrac{1}{2}(n^2 + 1)$$

con n impar, solución que probablemente dedujeron de la propiedad conocida de que todo número impar es diferencia de dos números cuadrados, de manera que si, a su vez, ese impar es un cuadrado, queda satisfecha la ecuación. Posteriormente otros autores obtuvieron otros métodos para resolver con "números"[14] la ecuación pitagórica.

1. *Método de Platón*. Sea m cualquier número par divisible por 4; entonces m, $\frac{m^2}{4} - 1$, y $\frac{m^2}{4} + 1$ son las tres soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$m^2 + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 = m^2 + \frac{m^4}{16} - \frac{m^2}{2} + 1 = \frac{m^4}{16} + \frac{m^2}{2} + 1 = \left(\frac{m^2}{4} + 1\right)^2$$

2. *Método de Euclides*. Sean x e y dos números pares o impares cualesquiera, tales que x e y no tienen factores comunes mayores que 2, y xy es un cuadrado. Entonces $\sqrt{xy}$, $\frac{x-y}{2}$, y $\frac{x+y}{2}$ son las soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$(\sqrt{xy})^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

3. *Método de Maseres* (1721-1824). Sean m y n dos números pares o impares cualesquiera, tales que $m > n$, y $\frac{m^2+n^2}{2n}$ sea un número entero. Entonces m^2, $\frac{m^2-n^2}{2n}$ y $\frac{m^2+n^2}{2n}$ son las soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$m^2 + \frac{m^2-n^2}{2n} = \frac{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2 + n^2 + n^4}{4n^2} = \left(\frac{m^2+n^2}{2n}\right)^2$$

4. *Método de Dickson*. Sean m y n dos números primos entre sí cualesquiera, uno par y otro impar, $m > n$ y $2mn$ es un cuadrado. Entonces $m + \sqrt{2mn}$, $n + \sqrt{2mn}$, y $m + n + \sqrt{2mn}$ son las soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$(m + \sqrt{2mn})^2 + (n + \sqrt{2mn})^2 + m^2 + n^2 + 4mn + 2m\sqrt{2mn} + 2n\sqrt{2mn} =$$
$$= (m + n + \sqrt{2mn})^2$$

[14] Los griegos utilizaban este término para referirse a los números enteros positivos. Puede considerarse a *Diofanto de Alejandría* (s.III d.C.) como el principal impulsor de la resolución de ecuaciones en números enteros, que constituyen una de las principales semillas de lo que hoy conocemos como *Teoría de Números*.

3.5. Filolao y Arquitas de Tarento

Tras la masacre de Metaponto, algunos de los refugiados supervivientes como Filolao de Tarento fueron los encargados de divulgar la doctrinas pitagóricas a otras regiones del mundo griego. A Filolao se le atribuye el haber escrito la primera exposición del pitagorismo, para lo cual, al igual que otros, había conseguido el permiso para tal fin, con el objetivo de que la orden pudiera recuperar parte de los bienes que habían perdido durante la última masacre. Según parece esta obra fue la primera que sirvió para que Platón adquiriera parte de los conocimientos sobre la escuela pitagórica. Filolao compartió parte del misticismo numérico que era tan característico de la hermandad, y de esta obra suya se derivó en gran parte la tradición mística relativa a la *tetractis*[15], así como el conocimiento de la cosmología pitagórica. Más tarde Ecfanto e Hicetas fueron los pitagóricos encargados de alterar el esquema cósmico filolaico, abandonando el fuego central y la contratierra, y explicando el día y la noche situando a la tierra en rotación en el centro del universo.

Arquitas nació en Tarento en la Magna Grecia, hoy Italia, entre los años 435 y 410 a.C. Hijo de Hestieo, según Aristógenes, o de Mneságoras, según Diógenes Laercio. Condujo una reforma política en Tarento de forma que ésta llegó a ser la ciudad más rica y poblada de la Magna Grecia. A través de la construcción de memoriales, templos y otros edificios le dio lustre a la ciudad. Ayudó a dar nuevos impulsos al comercio al buscar asociaciones con Istria, Grecia y África. Fue uno de los ciudadanos de Tarento más influyentes, llegando a ser elegido gobernador de la ciudad más de siete años (indicativo de su prestigio social ya que la ley prohibía la reelección más de una vez).


Arquitas de Tarento

Alumno de la escuela de Filolao de Crotona, fue amigo de Platón, al que conoció durante el primer viaje que éste realizó al sur de Italia y a Sicilia en 388/7 a. C., tras la muerte de Sócrates. En su Carta Séptima, Platón asegura que Arquitas trató de rescatarlo en sus dificultades con Dionisio II de Siracusa, mediante una carta de recomendación y enviando un barco a Sicilia en 361 a. C.. Para algunos autores fue el maestro pitagórico de Platón.

Arquitas creía firmemente en la eficacia del número; parece ser que durante sus días de gobernante de la ciudad que le había concedido poderes autocráticos, llevó a cabo una labor justa y mesurada, ya que consideraba la razón como una fuerza dirigida al mejoramiento social. Se cuenta de él que a pesar de ser un firme gobernante, era bondadoso y amante de los niños, para los que parece ser que inventó incluso un juguete denominado *carraca de Arquitas*, y probablemente una paloma mecánica hecha de madera, para diversión de estos.

Continuando con la más pura tradición pitagórica, Arquitas situó la aritmética por encima de la geometría, pero su entusiasmo por lo números tenía ya menos de la componente religiosa y mística que caracterizaban a los seguidores de Filolao.

[15] hacía referencia a la escala armónica musical.

ISSN 2174-0410

Entre sus discípulos se encuentran varios de los líderes de la Escuela de Atenas. Enseñó matemáticas a Eudoxo de Cnido, que sería a su vez maestro de Menecmo. Fue uno de los primeros que, tras Pitágoras, trabajó en el conocimiento conjunto de la aritmética, que estudiaba los números en reposo, la geometría, que estudiaba las magnitudes en reposo, la astronomía, que estudiaba las magnitudes en movimiento, y la música, que estudiaba los números en movimiento, las cuatro disciplinas que constituían el *cuadrivium*, junto con la gramática, retórica y dialéctica o *trivium*, acotando las matemáticas a disciplinas técnicas, con la cuales se cree inventó la polea, el tornillo y una especie de mecanismo articulado con alas con el que, aunque sin éxito, intentó volar. Influenció a Euclides. Inventó varios artilugios mecánicos para la construcción de curvas y resolución de problemas. También se interesó por la astronomía, presentando en sus enseñanzas a la tierra como una esfera dando una vuelta en torno a su eje de rotación cada veinticuatro horas y con los cuerpos celestes moviéndose a su alrededor.

Arquitas escribió sobre las aplicaciones de las medias aritmética, geométrica y subcontraria a la música, y probablemente fue él o Filolao el responsable de cambiar el nombre de esta última por la de *media armónica*; entre sus afirmaciones en este contexto estaba la observación de que entre dos números enteros que estén en la razón $n : (n+1)$ no puede haber ningún entero que sea su media geométrica. Arquitas prestó mucha más atención que sus predecesores a la música, considerando que esta materia debería jugar en la educación un papel más importante que el de la literatura.

Fue la primera persona en lograr una buena aproximación al problema de la *duplicación del cubo*, uno de los tres problemas clásicos más famosos junto a la *trisección del ángulo* y la *cuadratura del círculo*. Su construcción si duda resulta aún hoy día cuanto menos sorprendente, puesto que utilizó una solución tridimensional. La construcción dada por Arquitas es similar a la siguiente:

1. Por un diámetro OA de la base de un cilindro circular recto trazamos un semicírculo por un plano perpendicular a la base del cilindro.

2. Rotamos este plano que contiene el semicírculo en torno a la generatriz que pasa por O, entonces la superficie trazada por el semicírculo intersecta el cilindro en una curva.

3. Esta curva será cortada por un cono recto cuyo eje es OA y semiángulo cónico 60°, con vértice en P, tal que la proyección de OP sobre la base del cilindro será proporcional al radio del cilindro, e igual a la relación entre el lado del cubo buscado y el lado del cubo original.

La demostración de Arquitas se trata por lo tanto de una demostración geométrica llevada a cabo con éxito de manera sintética, sin ayuda de coordenadas. Parece ser que Arquitas tuvo conocimiento de los resultados de las Proposiciones 18, 35 del Libro III, y 19 del Libro XI de *Los Elementos de Euclides*. Para mostrar analíticamente que la construcción es correcta, tomemos OA como el eje x, y la generatriz que pasa por O como eje z, entonces, haciendo uso de las coordenadas polares generales, si a es el radio del cilindro, tenemos que la superficie que describe el semicírculo se expresa:

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta$$

el cilindro tendrá la expresión:

$$r \operatorname{sen} \theta = 2a \cos \phi$$

y el cono:

$$\operatorname{sen} \theta \cos \phi = \frac{1}{2}$$

Estas tres superficies se cortan en un punto de tal modo que

$$\operatorname{sen}^3 \theta = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, si ρ es la proyección de OP sobre la base del cilindro, entonces se cumple que:

$$\rho^3 = (r \operatorname{sen} \theta)^3 = 2a^3$$

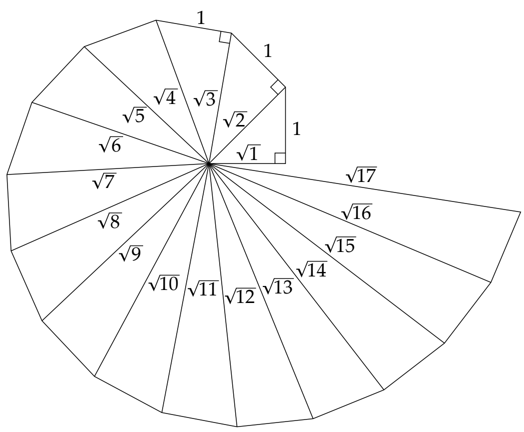
Por lo tanto el volumen del cubo cuyo lado es ρ es dos veces el del cubo cuyo lado es a.

Según cuenta Horacio en una de sus odas, Arquitas falleció en un naufragio en las costas de Apulia, cerca de Tarento entre los años 360 y 350 a. C. Horacio escribió que su cuerpo permaneció sin sepultura en la orilla hasta que un navegante le echó arena encima, pues de otra forma habría vagado en este lado del Lago Estige durante cien años.

3.6. Otros Pitagóricos

Es bien conocido el sentido comunal de los desarrollos científicos que los Pitagóricos consideraron como principio, lo que dificultó históricamente la identificación de discípulos pitagóricos. Con el paso del tiempo y debido fundamentalmente a la persecución que la orden sufrió y provocó su desaparición final, su secretismo pasó a un segundo plano, lo que permitió que algunos representantes de la orden les fuera encargada la tarea de destapar parte de los conocimientos a los que estos llegaron y que constituirían como hemos dicho anteriormente, los fundamentos ideológicos de la Escuela de Platón. Cabe destacar entre otros la figura de Teodoro de Cirene.

Teodoro de Cirene fue un pitagórico contemporáneo de Arquitas, alumno de Protágoras y uno de los profesores y maestros de Teeteto, Platón y Sócrates; vivió la mayor parte de su vida en Atenas. Trabajó en campos tan diversos como la filosofía, la astronomía, la aritmética, la música y la educación. Creía que la alegría y el juicio eran la base para llegar a la felicidad. Es conocido sobre todo por su trabajo matemático, donde probó la irracionalidad de las raíces



Desarrollo de la Espiral de Teodoro de Cirene de los números enteros no cuadrados $(2, 3, 5 \ldots)$ al menos hasta 17[16] a base del método tradicional pitagórico de usar la reducción al absurdo y llegar a una inconsistencia relacionada con pares e impares. También desarrolló la espiral que lleva su nombre usando el Teorema de Pitágoras y añadiendo perpendicularmente a un segmento una unidad lo que forma gráficamente triángulos cuyas hipotenusas son las sucesivas raíces de los números naturales.

Referencias

[1] BABINI, José y REY PASTOR, Julio. *Historia de la Matemática (vol. 1)*, pp. 39–50, Editorial Gedisa, Barcelona, 1985.

[2] BOYER, Carl Benjamin. *Historia de la Matemática*, pp. 71–94, 96, 103–104 Alianza Editorial, Madrid, 2010.

[3] CAJORI, Florian. *A History of Mathematics*, p. 17, The MacMillan Company, 2nd Edition, New York, 1929.

[4] HILBERT, David. *The Foundations of Geometry*, pp. 2–16, The Open Court Publishing Company Co., Reprint Edition. Guttemberg's Project (http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf), Illinois, 1950.

[5] LOMBARDO RADICE, Lucio. *La matemática de Pitágoras a Newton*, pp. 15–17, 22–29, Editorial Laia, Barcelona, 1983.

[6] LOOMIS, Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition*, pp. 1–11, 19–20, Classics in Mathematics Education, Council of Teachers of Mathematics, 2nd. Edition , Michigan, 1940.

[7] ROUSE BALL, Walter William. *A Short Account of the History of Mathematics*, pp. 13–30, MacMillan and Co., Limited, Londres, 1919.

[8] WIKIPEDIA,
Anaxágoras de Clazomene, http://es.wikipedia.org/wiki/Anaxágoras
Anaximandro de Mileto, http://es.wikipedia.org/wiki/Anaximandro_de_Mileto
Arquitas de Tarento, http://es.wikipedia.org/wiki/Arquitas
Escuela de Mileto, http://es.wikipedia.org/wiki/Escuela_jonica
Gnomon, http://es.wikipedia.org/wiki/Gnomon
Hipaso de Metapongo, http://es.wikipedia.org/wiki/Hipaso_de_metaponto
La Escuela de Atenas, http://es.wikipedia.org/wiki/La_escuela_de_Atenas
Los Pitagóricos, http://es.wikipedia.org/wiki/Pitagóricos
Pitágoras de Samos, http://es.wikipedia.org/wiki/Pitagoras_de_Samos
Tales de Mileto, http://es.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto
Teodoro de Cirene, http://es.wikipedia.org/wiki/Teodoro_de_cirene

[16] Demostró geométricamente que los números actualmente representados como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, y $\sqrt{17}$ eran inconmensurables o como hoy día los definimos, eran irracionales.Previamente Pitágoras ya había demostrado esta condición para $\sqrt{2}$.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas
El Álgebra de la Teoría Especial de la Relatividad

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E
Pensamient
Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo pretende ofrecer una visión desde el punto de vista matemático de los conceptos fundamentales sobre los que Albert Einstein construyó su Teoría Especial de la Relatividad que aparecería publicada en *Anales de Física*, dirigida por el prestigioso físico Max Planck, en 1905, y que supuso una revolución en la comunidad científica, pues era capaz de hacer compatibles la Teoría Electromagnética de James Maxwell con la Mecánica Clásica Newtoniana. Más tarde la teoría se puliría, haciendo uso de los espacios pseudoeuclídeos tetradimensionales espacio-tiempo propuestos por el matemático alemán Hermann Minkowski.

Palabras Clave: Teoría Especial de la Relatividad, Albert Einstein, espacios tetradimensionales, álgebra relativista.

1. Introducción

Durante la segunda mitad de siglo XIX, la actividad científica de los físicos y sus esfuerzos se centraron entre otros en la determinación de la velocidad de la luz. Como resultado de los experimentos llevados a cabo, principalmente el experimento de Michelson-Morley en 1887, los físicos concluyeron que los resultados obtenidos en la medición de la velocidad de la luz son independientes de la velocidad del instrumento utilizado para medirla. Como ejemplo, supongamos que estando en la Tierra un observador mide la velocidad de la luz emitida por el Sol y obtuviera como resultado 300000 kilómetros por segundo. Ahora supongamos que el experimentador coloca el equipo de medición en una nave espacial que se aleja del Sol a 160000 kilómetros por segundo. Si se repitiera el experimento esta vez en la nave cabría esperar que la velocidad de la luz relativa a la nave sería de 140000 kilómetros por segundo, pero paradójicamente la luz sigue viajando a 300000 kilómetros por segundo.

Esta revelación condujo a una nueva manera de relacionar los sistemas coordenados empleados para explicar hasta el momento cualquier evento mecánico en el espacio-tiempo. El resultado fue la teoría especial de la relatividad de Albert Einstein, que puso patas arriba toda la mecánica clásica, y dio pie a un conflicto entre la comunidad científica, surgiendo tanto detractores como defensores a ultranza de la recién aparecida teoría relativista.

2. La fundamentación matemática de la Teoría

El final del siglo XIX puso de manifiesto la necesidad de llevar a cabo una formalización de la Física Matemática a través de una geometrización y una axiomatización de la misma. Debemos considerar a los matemáticos alemanes David Hilbert y Hermann Minkowski como dos personajes cruciales encargados de llevar a cabo esta última tarea.

David Hilbert

A lo largo de toda su carrera científica, Hilbert siempre sintió un especial interés por la física, fundamentalmente porque en Gotinga, Universidad donde impartía docencia, este hecho era considerado una tradición matemática, que otros ilustres como Gauss, Riemann y Klein ya habían tratado previamente. La actividad científica de Hilbert coincidió con el nacimiento de las dos grandes teorías físicas del siglo XX, la Física Cuántica (1900) y la Mecánica Relativista (1905), lo que en cierto modo intensificó su afición por la física matemática de la que se ocuparía durante cierto periodo de su vida. Aunque la física debe apoyarse en hechos experimentales, Hilbert la consideró como parte de la disciplina matemática, de este modo sus máximos objetivos fueron establecer con claridad los fundamentos de la física, presentar el formalismo matemático de la física desde una perspectiva geométrica, y desarrollarlo desde un punto de vista axiomático.

En el Congreso Internacional de París de 1900, Hilbert expondría su famoso discurso sobre los 23 problemas del siglo, pero consideremos fundamentalmente en el número seis, el último de los problemas relativos a los fundamentos de las ciencias matemáticas. Su título es *"Tratamiento Matemático de los Axiomas de la Física"* y su planteamiento es el siguiente:

> *"Las investigaciones en los fundamentos de la geometría sugieren el siguiente problema: Tratar de la misma manera, por medio de axiomas, aquellas ciencias físicas en las que la matemática juegue un papel importante: en primer lugar la teoría de probabilidades y la mecánica".*

Llegados a este punto conviene dejar bien claro que existe una diferencia notable entre "Matematización de la Física" y "Axiomatización de la Física".

La Física es una ciencia de la Naturaleza y, consecuentemente, es una ciencia que se debe desarrollar basándose en datos experimentales. Galileo fue el primer científico que estableció con claridad (aunque de forma un tanto poética para los gustos actuales) la idea de que las leyes de la Física son todas ellas expresables en lenguaje matemático. Primero sus seguidores en Italia (Torricelli, Viviani) y luego Huygens y Newton y sus contemporaneos (Barrow, Halley, Hooke, Wren), desarrollaron las ideas de Galileo y buscaron un formalismo matemático apropiado para la mecánica. Los desarrollos posteriores de los Bernoulli, de Riccati y sobre todo de Euler, hicieron que al analizar el siglo XVIII, época de Lagrange y de Laplace, la mecánica (número finito de grados de libertad) pudiera considerarse como una ciencia totalmente "matematizada". Pero la propuesta de Hilbert va mucho más allá; propone no contentarse con descubrir el formalismo matemático que gobierna la Naturaleza (que ya es bastante), sino además demostrar que este formalismo, que recordemos debe adecuarse a los experimentos, admite además una presentación formal similar a la geométrica.

El caso es que Newton cuando, a sugerencia de Halley, se decide a escribir un libro de mecánica desde una perspectiva matemática, toma como modelo a Euclides. El resultado es que los *Principia* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687) tienen una estructura bastante axiomática donde el papel de los famosos cinco postulados de Euclides intenta ser desempeñado por un conjunto de tres leyes del movimiento ("Las Leyes de Newton"). Así las cosas, el trabajo de Newton podría ser considerado como un precedente para el problema número seis, aunque conviene dejar bien claro que los Principia, por más que sea uno de los documentos más importantes en toda la historia de la ciencia, desde un punto de vista puramente axiomático es fácilmente criticable.

Si consideramos la obra de Euclides, durante muchos siglos la geometría Euclídea fue considerada como la "unica y verdadera" (la geometría cartesiana no se oponía sino que podía ser considerada como un perfeccionamiento de la geometría euclídea). Pero en el siglo XIX surgieron de la mano de Gauss Lobachevski y Bolyai nuevas ideas geométricas que dieron lugar a finales del siglo XIX a nuevos modelos establecidos primero por Eugenio Beltrami[1] luego por Felix Klein, y más tarde por Henri Poincaré y David Hilbert, quienes demostraron que la geometría hiperbólica, considerada como un sistema formal deductivo, era tan satisfactoria como la geometría Euclídea clásica. A partir de ese momento la geometría Euclídea pasó a ser una de las varias geometrías existentes (en un lenguaje Riemanniano, un caso muy particular de espacio con curvatura constante); la diferencia estribaba en que se suponía que Euclides describía el mundo real externo y las otras eran simplemente "invención del hombre". Sorprendentemente, esto hizo que pasara de ser una teoría matemática a ser una teoría física. Penrose, que defiende esta interpretación, clasifica, en su conocido libro *La nueva mente del emperador*, las teorías físicas en tres categorías: Soberbias, Útiles, y Tentativas. En el primer grupo incluye siete teorías físicas que, en su opinión, han demostrado tener un alcance y una exactitud realmente extraordinarios. Pues bien, la primera teoría física que coloca en este grupo es precisamente la "Geometría Euclídea". Comenta que, aunque

[1] Considera la *pseudoesfera* como el primer modelo de geometría hiperbólica, que no es otra cosa que la superficie que surge de girar la curva *tractriz* alrededor de un eje de coordenadas.

los científicos de tiempos pasados pudieron no considerarla como una teoría física, eso es en su opinión lo que realmente es:

> *"una sublime y soberbiamente precisa teoría del espacio físico (y de la geometría de los cuerpos rígidos)".*

Pero volvamos al sexto problema. De entrada digamos que, aunque este problema podría ser considerado como algo peculiar y diferenciado de los demás, Hilbert lo situó entre los más importantes; al menos fue uno de los diez seleccionados para la exposición oral. Parece ser que su origen se encuentra en la doble actividad que Hilbert desarrolló durante los años previos a París: por una parte escribe *Die Grundlagen der Geometrie*, por otra empieza a impartir cursos de mecánica. Son en principio dos actividades distintas pero que, de alguna forma, se superponen y le llevan a plantearse la aplicación de la axiomática geométrica a las leyes de la física. Por aquellos años escribe

> *"La geometría es una ciencia que se ha desarrollado hasta un nivel tal que todas sus propiedades pueden ser obtenidas por deducción lógica a partir de otras propiedades previamente admitidas".*

y a continuación añade

> *"Se trata de una situación completamente diferente a lo que ocurre, por ejemplo, con la teoría de la electricidad o la óptica donde, incluso actualmente, se siguen descubriendo nuevos hechos".*

Parece deducirse de estas frases que Hilbert ya se había empezado a plantear el sexto problema hacia 1895-97 y que, aún encontrando deseable la axiomatización de la física, era consciente de que las dificultades surgían al intentar compatibilizar esquemas formales deductivos con medidas experimentales (posibilidad de que los laboratorios descubran fenómenos nuevos que puedan romper los esquemas). No se trata pues de axiomatizar toda la física, sino algunas de sus ramas; de ahí la frase "en primer lugar la teoría de probabilidades y la mecánica" (la expresión teoría de probabilidades hace referencia a la Mecánica Estadística desarrollada en los años 1880-1900, fundamentalmente por Boltzmann).

Hilbert, que está al tanto de los trabajos recientes en mecánica, no cita a los creadores del formalismo matemático de la mecánica (p.ej., Poisson, Jacobi, Liouville, Hamilton) sino que comenta cómo durante esos últimos años (1890-1900) algunos físicos han hecho importantes contribuciones a los fundamentos de la mecánica (cita a Mach, Hertz, Boltzmann y Volkmann) y a continuación añade:

> *"...es por consiguiente muy deseable que la discusión sobre los fundamentos de la mecánica sea desarrollada también por matemáticos".*

En 1905 apareció un documento entre la comunidad científica que iba a ser capaz de ofrecer una nueva perspectiva de la realidad física. Una de las grandes aportaciones científicas de la segunda mitad del siglo XIX fue, sin duda alguna, la teoría del campo electromagnético de Maxwell; pero pasados los primeros años de alegría surgió la crisis: esta nueva teoría no era compatible con la mecánica de Newton. Tanto Lorentz como Poincaré se dedicaron intensamente al estudio del comportamiento de las ecuaciones de Maxwell bajo las transformaciones de Galileo, pero quien resolvió esta cuestión fue un casi desconocido Einstein que publicó en 1905 el que iba a ser uno de los trabajos más importantes del siglo que entonces empezaba, *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*. Einstein propuso mantener la electrodinámica de Maxwell y modificar la mecánica de Newton creando de esta forma una nueva rama de la física que se llamaría "mecánica relativista" o "teoría de la Relatividad (especial)". El impacto de la nueva mecánica fue enorme en todas las universidades alemanas pero sobre todo en Gotinga donde Hilbert y Minkowski impartían un seminario en el que trataban fundamentalmente esas mismas cuestiones (en Francia la situación fue muy distinta ya que Poincaré recibió con bastante frialdad las nuevas ideas de Einstein; de hecho la nueva "mecánica relativista" permaneció bastante marginada en las universidades francesas hasta que Paul Langévin se ocupó de promocionarla varios años después).


Albert Einstein

Hermann Minkowski, que había estado estudiando las teorías pre-relativistas de Lorentz y Poincaré, se sintió muy interesado por el nuevo enfoque relativista. Digamos antes que Einstein había estudiado en el Instituto Tecnológico de Zurich y había tenido a Hurwitz y a Minkowski como profesores, y que cuando Minkowski se encontró con que la nueva teoría provenía de aquel antiguo alumno de Zurich, expresó su sorpresa, ya que parece ser que tenía algunas dudas sobre el nivel de los conocimientos matemáticos de Einstein. En cualquier caso, a partir de 1905, Minkowski se concentró casi exclusivamente en el desarrollo de la electrodinámica incorporando las nuevas ideas de Einstein a la teoría previa de Maxwell-Lorentz.

Minkowski, aunque valoraba positivamente las ideas de Einstein, llegó a la conclusión de que el formalismo matemático utilizado no era el adecuado. Einstein afirmaba que las transformaciones de Galileo debían ser sustituidas por las transformaciones de Lorentz y que, como consecuencia de ello, el tiempo perdía su carácter absoluto para pasar a ser algo relativo. Para Minkowski estas nuevas ideas físicas (con importantes implicaciones filosóficas) debían ser desarrolladas utilizando nuevos planteamientos matemáticos. En su opinión, habría que considerar el tiempo como una cuarta dimensión y desarrollar geométricamente esta idea; de esta forma las ideas de Einstein fueron expresadas en un nuevo lenguaje geométrico en un espacio de cuatro dimensiones pero con una métrica pseudo-Euclídea. En geometría Euclídea, el cuadrado $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ de la longitud de un vector tridimensional (distancia Euclidea entre dos puntos) permanece invariante bajo las transformaciones


Hermann Minkowski

ortogonales que, interpretadas físicamente, se corresponden con las transformaciones de Galileo. En geometría Minkowskiana, la expresión cuadrática

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

permanece invariante bajo transformaciones de Lorentz. Los índices griegos μ, ν, van de 0 a 3, y el tensor métrico $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ en este nuevo espacio viene dado por $g_{\nu\mu} = 0$ si $\mu \neq \nu$, y $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1$. Por consiguiente, las transformaciones de Lorentz se deben interpretar geométricamente como las transformaciones ortogonales de un espacio con métrica de signatura (3; 1); la velocidad, aceleración y la fuerza deben ser sustituidas por sus versiones cuadri-dimensionales (cuadri-velocidad, cuadri-aceleración y cuadrifuerza), los cuadri-vectores pueden tener longitud positiva, negativa, o nula; y lo que es incluso más importante, al introducir un cuadri-potencial electromagnético A^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, las ecuaciones de Maxwell adoptan una forma asombrósamente simple. En resumen, todo lo que en Einstein era complicado y confuso, adopta ahora con este formalismo geométrico, una forma elegante y sencilla. Para sorpresa de todos, las leyes de la física deben ser planteadas en un mundo pseudo-Euclídeo con cuatro dimensiones.

Minkowski presentó el formalismo que hoy lleva su nombre en tres conferencias. La primera de ellas impartida en Gotinga, dio lugar a un artículo que apareció publicado en 1908; las otras dos fueron *Das Relativitëtsprinzip* (El principio de relatividad), comunicación presentada en Gotinga en Noviembre de 1907 y, posteriormente, *Raum und Zeit* (Espacio y tiempo), presentada en Colonia en Septiembre de 1908, de donde procede el siguiente párrafo introductorio:

> *"Los puntos de vista sobre el espacio y el tiempo que deseo presentar ante ustedes surgieron del seno de la física experimental, y de ahí proviene su solidez. Son puntos de vista radicales. De aquí en adelante, el espacio por si mismo y el tiempo por si mismo están condenados a desvanecerse, y sólo una especie de unión entre los dos soportaría una realidad independiente."*

Lamentablemente, Minkowski no llegó a vivir para ver impresas estas dos últimas comunicaciones, ya que murió en enero de 1909 como consecuencia de las complicaciones surgidas en una operación de apendicitis.

Jules Henri Poincaré

Acabaremos esta sección con dos observaciones. En primer lugar, está plenamente admitido que Poincaré fue el primero en introducir la idea de un espacio relativista de cuatro dimensiones; pero se limitó a indicar la posibilidad de interpretar el tiempo t como una cuarta coordenada y a comentar la conveniencia de introducir la unidad imaginaria para reescribir las expresiones cuadráticas relativistas como suma de cuadrados positivos

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$$

Por los motivos que sean, no fue capaz de desarrollar las consecuencias geométricas de esta idea; posiblemente la utilización de coeficientes complejos le privó de adivinar la existencia de geometrías no euclídeas.

En segundo lugar, resaltemos que Minkowski introduce un grupo de transformaciones del espacio-tiempo G_c que depende de c como parámetro, analiza las propiedades y los invariantes de G_c, demuestra que el grupo límite G_∞ caracteriza la mecánica Newtoniana, pero resalta que G_c es matemáticamente más inteligible que G_∞. Está claro que esta aproximación grupo-teórica a un problema geométrico puede considerarse como surgida dentro del espíritu del Programa de Erlangen. Es cierto que, en sentido estricto, Erlangen está relacionado con el análisis comparativo de varias geometrías, pero la aproximación minkowskiana utilizando el grupo G_c cae claramente dentro de este espíritu. En años posteriores surgieron otras posibles geometrías relativistas, espacios de De-Sitter y anti De-Sitter, y se pudo extender la aproximación minkowskiana a estas nuevas geometrías.

3. 1905. El *"Annus Mirabilis"* de Einstein

Todos los estudiosos de Einstein coinciden en afirmar que 1905 fue uno de los años más productivos para la carrera científica de éste. Durante este año Einstein, con tan sólo veintiséis años, llevó a cabo multitud de estudios y llegó a publicar cuatro artículos trascendentales para el devenir de la ciencia en la famosa publicación *Anales de Física* dirigida por Max Planck. En marzo envió un artículo titulado *Un Punto de Vista Heurístico sobre la Producción y Transformación de la Luz* que versaba sobre el efecto fotoeléctrico y los *quantos* de luz (más tarde pasarían a denominarse *fotones*, nombre introducido por Gilbert Newton en 1926). El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones por parte de un metal cuando sobre él se hace incidir un rayo de luz. Este trabajo sugiere el intercambio de energía entre radiación y la materia, confirmado la teoría de Einstein que establecía que la luz tenía tanto carácter de onda como carácter corpúscular, formada por pequeños corpúsculos de energía denominados *cuantos*. Einstein llamó *Energiequanten* y *Lichquanten* a esas unidades elementales de la energía. Para aquel entonces esta afirmación era cuanto menos atrevida, y aunque parte de la comunidad científica no aceptó en un principio este hecho, más tarde se corroboró, tras las experiencias de Compton en 1923, que pusieron de manifiesto la consistencia de la relatividad especial con la idea de un corpúsculo luminoso, demostrando que Einstein estaba en lo cierto.

En el segundo artículo, enviado en mayo y en el que se basaría su tesis doctoral y titulado *Sobre el Movimiento Requerido por la Teoría Cinética Molecular del Calor de Pequeñas Partículas Suspendidas en un Líquido Estacionario*, Einstein realizó un estudio sobre el movimiento browniano, que no es otra cosa que el movimiento desordenado e incesante de pequeñas partículas sobre la superficie de los líquidos. Se llamaba así en honor al botánico escocés Robert Brown que lo descubrió en 1828, a quien le había llamado la atención el movimiento incontrolado de los granos de polen sobre las aguas de un estanque. Einstein demostraba matemáticamente que este movimiento era provocado por la inestabilidad de las moléculas del mismo líquido debido a la agitación térmica de estas, lo que era una prueba directa de la existencia de los átomos, cuya realidad no era entonces universalmente admitida (p.ej, el Nobel de Química en 1909 Wilhelm Ostwald, o el físico, historiador y filósofo austríaco Ernst Mach).

En el tercer artículo, titulado *Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento*, Einstein sentó la bases de la Teoría Especial de la Relatividad. La idea era simple, aunque darle la forma definitiva le llevaría varios años. Einstein quería demostrar que el espacio y el tiempo eran relativos respecto a un observador. Su teoría resolvía los problemas abiertos por el experimento de Michelson-Morley en el que se había demostrado que las ondas electromagnéticas que forman la lus se movían en ausencia de un medio, lo que significa que la velocidad de la luz es, por lo tanto, constante y no relativa la movimiento del observador. Sin embargo la originalidad de este artículo estuvo cuestionado puesto que en él omitió citar toda referencia a las ideas o conceptos desarrollados por otros autores, entre ellos Poincaré. Según parece, Einstein no estuvo al tanto de estas aportaciones anteriores, lo que le llevó a desarrollar su teoría de un modo completamente genuina, deduciendo hechos experimentales a partir de principios fundamentales y no dando una explicación fenomenológica a observaciones desconcertantes. La Relatividad Especial arroja resultados sorprendentes, ya que en ella se niegan los conceptos de espacio tiempo absolutos. La teoría recibió el nombre de *Teoría Especial de la Relatividad* para distinguirla de la *Teoría General de la Relatividad* que fue publicada por Einstein en 1915 y en la que introdujo la gravedad para explicar desde un punto de vista revolucionario un teoría completa sobre el universo.

Antes de acabar el año, Einstein publicó un cuarto artículo en el volumen 18 de *Anales de Física* titulado *¿Depende la Inercia de un Cuerpo de su Contenido de Energía?*, con el fin de complementar el artículo de la relatividad. Se trataba de una conclusión corta de tres folios en la que aparecía por primera vez la famosa relación que determina la energía asociada a la masa. Más exactamente

> *"Si un cuerpo proporciona energía en forma de radiación, su masa disminuye en L/c^2... por lo que llegamos a la conclusión general de que la masa de un cuerpo es la medida de su contenido energético."*

L es aquí la energía; como tal, la famosa fórmula $E = mc^2$ aparece en trabajos posteriores de 1907.

4. El Álgebra de la Teoría

El problema fundamental consiste en comparar dos sistemas de coordenadas distintos inerciales[2], que están en movimiento relativo uno con respecto al

[2] Esta es la característica fundamental y el motivo por el que se denomina Teoría "Especial" de la Relatividad, puesto que únicamente funciona para sistemas que se mueven con velocidad constante. Más tarde en 1907, mientras trabajaba aún en la Oficina de Patentes Suiza, Einstein comenzaría a trabajar en la Teoría General de la Relatividad, introduciendo sistemas no inerciales a su teoría para que pudiera ser aplicable a la totalidad del universo, incluida la fuerza omnipresente que lo mantiene todo unido, es decir la gravedad, lo que significaba contradecir más de dos siglos de tradición científica y a su ídolo, Sir Isaac Newton. El razonamiento de Einstein consistió básicamente en ignorar la atracción gravitatoria y considerar al espacio y al tiempo como entes flexibles que pueden curvarse. Teniendo en cuenta este hecho, Einstein podía explicar por ejemplo

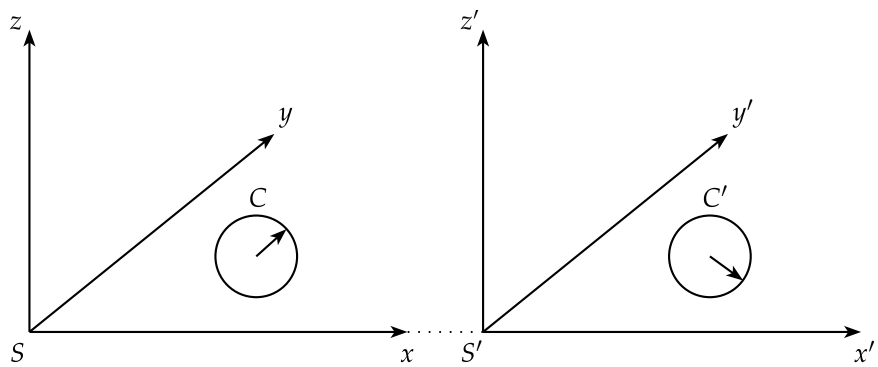
otro bajo la suposición de que la velocidad de la luz es la misma, medida en ambos sistemas. Supóngase que tenemos dos sistemas de coordenadas inerciales (sin aceleración) que notaremos como S y S' en un espacio de tres dimensiones ($\mathbb{R}^3$) y tales que S' se desplaza a una velocidad constante en relación con S, medida a partir de S.

Con el fin de simplificar, suponemos:

1. Los ejes correspondientes de S y S' (x y x', y y y', z y z') son paralelos y el origen de S' se desplaza en la dirección positiva del eje x de S a una velocidad constante $v > 0$ relativa a S.

2. Se colocan dos relojes C y C' en el espacio (el primero estacionario relativo al sistema de coordenadas S y el segundo estacionario relativo al sistema de coordenadas S'. Estos relojes están diseñados para dar como lecturas números reales en unidades de tiempo (segundos). Se calibran los relojes de manera que en el instante en que los orígenes de S y S' coincidan, ambos relojes den la lectura cero.

3. Nuestra unidad de longitud será el *segundo luz* (la distancia que recorre la luz en un segundo) y nuestra unidad de tiempo será el segundo. Ha de observarse que con respecto a estas unidades la velocidad de la luz es de un segundo luz por segundo.



Dado un evento cualquiera (cualquier cosa cuya posición y tiempo de ocurrencia pueda ser descrito) le podemos asignar un conjunto de coordenadas de "espacio-tiempo". Por ejemplo si consideramos que p es un evento que ocurre en una posición

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cómo la tierra giraba en torno al Sol, hecho que la mayoría explicaría que se produce porque el Sol atrae a la Tierra a través de la gravedad, pero Einstein consideró que la Tierra giraba alrededor del Sol porque éste curva el espacio alrededor de la Tierra, y el espacio la empuja hacia el Sol. Einstein había descubierto una nueva Teoría del Universo.

ISSN 2174-0410

relativa a S en un tiempo t leído en el reloj C, podemos asignar a p el conjunto de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Este vector es denominado *coordenadas espacio-tiempo* de p relativas a S y a C. De igual modo p tendrá unas coordenadas espacio-tiempo relativas a S' y a C' de la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Podemos definir una correspondencia $T_v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (que depende de la velocidad v) como consecuencia de lo anterior tal que, para cualquier conjunto de coordenadas de espacio-tiempo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

que miden un evento con respecto a S y a C.

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

es el conjunto de coordenadas espacio-tiempo de este evento con respecto a S' y a C'. Puede comprobarse fácilmente que la correspondencia T_v es biyectiva.

Einstein llevó a cabo una serie de suposiciones sobre la correspondencia T_v que le condujeron a formular su teoría especial de la relatividad, equivalentes al siguiente grupo de axiomas.

Axiomas de la teoría especial de la relatividad

$\boldsymbol{R_1}$: La velocidad de cualquier haz de luz, al ser medida en cualquiera de los sistemas coordenados utilizando un reloj estacionario relativo al mismo sistema, es 1.

$\boldsymbol{R_2}$: La correspondencia $T_v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es lineal.

$\boldsymbol{R_3}$: Para cualquier

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

si

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

entonces $y' = y$ y $z = z'$.

***R*$_4$**: Para

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

x' y t' son independientes de y y z; es decir, si

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ z_1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_v \begin{pmatrix} x \\ y_2 \\ z_2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ t'' \end{pmatrix}$$

entonces $x'' = x'$ y $t'' = t'$.

***R*$_5$**: El origen de S se desplaza en la dirección negativa del eje x' de S' a una velocidad constante $-v < 0$ medida desde S'.

Como veremos, estos 5 axiomas (R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5) definen completamente a T_v. El operador T_v es denominado *transformación de Lorentz en la dirección* x. Nuestro objetivo es calcular T_v, y utilizarla para estudiar curiosos fenómenos de la contracción del tiempo.

Teorema 1. En $\mathbb{R}^4$

(a) $T_v(e_i) = e_i$ para $i = 2, 3$.

(b) $L(\{e_2, e_3\})$ es T_v-*invariante*.

(c) $L(\{e_1, e_4\})$ es T_v-*invariante*.

(b) $L(\{e_2, e_3\})$ y $L(\{e_1, e_4\})$ son T_v^*-*invariantes*[3].

(e) $T_v^*(e_i) = e_i$ para $i = 2, 3$.

Demostración.

(a) Por el axioma R_2

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[3] Se define T^* como la aplicación lineal $T^* : V \to V$ mediante $T^*(y) = y'$, siendo V un espacio vectorial, tal que $(T(x), y) = (x, T^*(y))$. El operador lineal T^* descrito se denomina *adjunto* del operador T, y se demuestra que es único.

Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido mediante $T(a_1, a_2) = (2ia_1 + 3a_2, a_1 - a_2)$. Si β es la base ordenada estándar para $\mathbb{C}^2$, entonces

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$[T^*]_\beta = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$T^*(a_1, a_2) = (-2ia_1 + a_2, 3a_1 - a_2)$$

ISSN 2174-0410

y por lo tanto, por el axioma R_4, las coordenadas primera y cuarta de

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

son iguales a cero para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$. Luego, por el axioma R_3

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las demostraciones de (b), (c) y (d) se realizarían del mismo modo.

(e) Para cualquier $j \neq 2$, en virtud de (a) y (c)

$$(T_v^*(e_2), e_j) = (e_2, T_v(e_j)) = 0;$$

para $j = 2$ por (a)

$$(T_v^*(e_2), e_j) = (e_2, T_v(e_2)) = (e_2, e_2) = 1$$

Concluimos que $T_v^*(e_2)$ es un múltiplo de e_2, o sea que

$$T_v^*(e_2) = \lambda e_2 \quad \text{para alguna} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$1 = (e_2, e_2) = (e_2, T_v(e_2)) = (T_v^*(e_2), e_2) = (\lambda e_2, e_2) = \lambda$$

y por lo tanto

$$T_v^*(e_2) = e_2$$

Del mismo modo $T_v^*(e_3) = e_3$.

Supóngase que en el instante en el que los orígenes de S y S' coinciden se emite un destello luminoso desde su origen común. Cuando este evento se mide relativo a S y C o relativo a S' y C' tiene coordenadas espacio-tiempo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea P el conjunto de todos los eventos cuyas coordenadas espacio-tiempo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

ISSN 2174-0410

relativas a S y C son tales que el destello se observa en el punto de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(medidas con respecto a S) en el instante t (medido en C). Vamos a caracterizar a P en términos de x, y, z y t. Como la velocidad de la luz es 1, en cualquier instante $t \geq 0$ el destello se observa desde cualquier punto cuya distancia al origen de S (medida a partir de S) sea $t \cdot 1 = t$. Estos son justamente los puntos que se localizan sobre la superficie de la esfera de radio t con centro en el origen. Las coordenadas (relativas a S) de tales puntos satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Por lo tanto, un evento está en P si y sólo si sus coordenadas espacio-tiempo relativas a S y a C

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0)$$

satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$. En virtud del axioma R_1 podemos caracterizar a P en términos de coordenadas espacio-tiempo relativas a S' y a C' de la misma manera: un evento está en P si y sólo si sus coordenadas espacio-tiempo relativas a S' y a C'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \qquad (t' \geq 0)$$

satisface la ecuación $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2 = 0$.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2. Para cualquier $w \in \mathbb{R}^4$, si $(L_A(w), w) = 0$, entonces

$$(T_v^* L_A T_v(w), w) = 0$$

Demostración. Sea

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

y supóngase que $(L_A(w), w) = 0$.

CASO 1. $t \geq 0$. Como $(L_A(w), w) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, w es el conjunto de coordenadas de un evento de P relativos a S y a C. Como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

son las coordenadas espacio-tiempo del mismo evento relativas a S' y a C', la discusión que precede al Teorema 2 da

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2 = 0$$

Luego entonces,

$$(T_v^* L_A T_v(w), w) = (L_A T_v(w), T_v(w)) = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2 = 0$$

y se obtiene la conclusión.

CASO 2. $t < 0$. La demostración se obtiene al aplicar el Caso 1 a $-w$.

Procedamos ahora a deducir información acerca de T_v. Sean

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(w_1, w_2) es una base ortogonal para $L(\{e_1, e_4\})$, y $L(\{e_1, e_4\})$ es $T_v^* L_A T_v$-invariante. El siguiente resultado nos dice aún más.

Teorema 3. Existen escalares a y b no nulos tales que

a) $T_v^* L_A T_v(w_1) = a w_2$,

b) $T_v^* L_A T_v(w_2) = b w_1$.

Demostración.

a) De acuerdo con el Teorema 2, $(L_A(w_1), w_1) = 0$, $(T_v^* L_A T_v(w_1), w_1) = 0$. Entonces $T_v^* L_A T_v(w_1)$ es ortogonal a w_1. Como $L(\{e_1, e_4\}) = L(\{w_1, w_2\})$ es $T_v^* L_A T_v$-invariante, $T_v^* L_A T_v(w_1)$ debe pertenecer a este conjunto. Pero $\{w_1, w_2\}$ es una base ortogonal para este subespacio, y entonces $T_v^* L_A T_v(w_1)$ debe ser múltiplo de w_2. Así $T_v^* L_A T_v(w_1) = a w_2$ para algún escalar a. Como T_v y A son invertibles, también $T_v^* L_A T_v$ lo es. Luego $a \neq 0$, demostrando así a). La demostración de b) es semejante.

Corolario. Sea $B_v = [T_v]_\beta$, donde β es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^4$. Entonces

a) $B_v^* A B_v = A$,

b) $T_v^* L_A T_v = L_A$.

Omitiremos la demostración que dejamos para el lector.

Consideremos ahora la situación cuando ha transcurrido un segundo desde que los orígenes S y S' coincidieran medido por el reloj C. Como el origen de S' se desplaza a lo largo del eje x con una velocidad v medida en S, sus coordenadas espacio-tiempo relativas a S y C son

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la misma manera, las coordenadas espacio-tiempo para el origen de S' relativas a S' y a C' deben ser

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

para algún $t' > 0$. Entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{para algún t'>0} \tag{1}$$

Por el corolario del Teorema 3

$$\left(T_v^* L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(L_A \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = v^2 - 1 \tag{2}$$

Pero también

$$\left(T_v^* L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \right) = -(t')^2 \tag{3}$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3), concluimos que

$$v^2 - 1 = -(t')^2, \quad \text{o bien} \quad t' = \sqrt{1 - v^2} \tag{4}$$

Luego, de las ecuaciones (1) y (4), obtenemos

$$T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{1 - v^2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Tenemos que recordar que el origen de S se desplaza en la dirección negativa del eje x de S' con la velocidad constante $-v < 0$ medida desde S' (este hecho es el axioma R_5). En consecuencia, un segundo después de que los orígenes de S y S' coincidieran medido con el reloj C, existe un tiempo $t' > 0$ medido en el reloj C' tal que

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vt' \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \tag{6}$$

ISSN 2174-0410

De la ecuación (6) se obtiene, de una manera semejante a como se obtuvo la ecuación (5), que

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{7}$$

y por lo tanto, de las ecuaciones (6) y (7)

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

El siguiente resultado se puede demostrar fácilmente utilizando las ecuaciones (5) y (8) y el Teorema 1.

Teorema 4. Sea β la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^4$. Entonces

$$[T_v]_\beta = B_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}$$

5. Las paradojas relativistas

En su momento la teoría de Einstein causó cierta perplejidad entre los científicos de la época, puesto que de ella se extraían resultados curiosos y paradójicos, como era la aceptación de la contracción del tiempo, la paradoja de los gemelos, la contracción de Lorentz-Fitzgerald, o el efecto Doopler entre otros.

5.1. La contracción del tiempo

Supongamos que un astronauta abandona nuestro sistema solar en una nave espacial que viaja a una velocidad constante v medida con respecto a nuestro sistema solar. De la teoría de Einstein se deduce que al final del tiempo t medido desde la Tierra, el tiempo que habrá transcurrido en la nave espacial es únicamente $t\sqrt{1-v^2}$. Para establecer este resultado, se consideran los mismos sistemas de coordenadas S y S' y los relojes C y C' que vimos antes. Supóngase que el origen de S' coincide con la nave espacial y que el origen de S coincide con un punto en el sistema solar (estacionario con relación al Sol), de manera que los orígenes de S y S' coincidan y los relojes C y C' den una lectura cero en el momento en el que el astronauta inicia su viaje.

Visto desde el sistema de referencia S, las coordenadas espacio-tiempo del vehículo en cualquier instante $t > 0$ medidas por C son

$$\begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

ISSN 2174-0410

mientras que vistas desde S' las coordenadas espacio-tiempo del vehículo en cualquier instante $t' > 0$ medidas por C' son

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

Pero si dos conjuntos de coordenadas de espacio-tiempo describen el mismo evento, debe tenerse que

$$T_v \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

Luego entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}$$

De la ecuación anterior se obtiene que:

$$\frac{-v^2 t}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} = t' \quad \text{o bien} \quad t' = t\sqrt{1-v^2} \tag{9}$$

que es el resultado que muestra el hecho que queríamos demostrar.

Hagamos una consideración adicional. Supongamos que las unidades de distancia y tiempo que consideramos son unidades que se usan más comúnmente que el segundo-luz y el segundo, tales como el kilómetro y el segundo o la milla y la hora en el mundo anglosajón. Sea c la velocidad de la luz en las unidades que hayamos considerado para la distancia y el tiempo. Se puede ver fácilmente que si un objeto viaja a una velocidad v relativa a un conjunto de unidades, entonces viaja a una velocidad v/c en unidades de segundos-luz por segundo. Así, para un conjunto cualquiera de unidades de distancia y tiempo, la ecuación (9) se transforma en

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

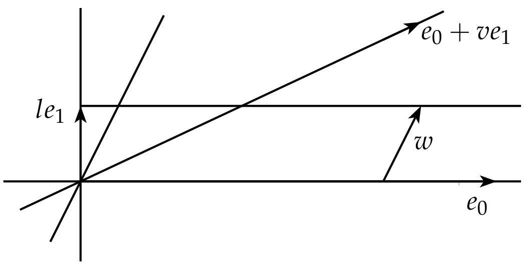
5.2. La paradoja de los gemelos

En la formulación más habitual de la paradoja, debida a Paul Langevin, se toma como protagonistas a dos gemelos (de ahí el nombre); el primero de ellos hace un largo viaje a una estrella en una nave espacial a velocidades cercanas a la velocidad de la luz; el otro gemelo se queda en la Tierra. A la vuelta, el gemelo viajero es más joven que el gemelo terrestre.

5.3. Contracción de Lorentz-Fitzgerald

Consideremos ahora una varilla rectilínea de longitud l en reposo respecto de un sistema de referencia inercial[4]. Vamos a calcular la longitud de la misma varilla medida por un observador inercial que se aleje con velocidad aparente v en la dirección de la varilla (digamos e_1). El vector w que en un instante dado determine la varilla para el nuevo observador

$$w = \lambda e_0 + le_1$$



es espacial para este observador, luego $w = \lambda e_0 + le_1$ ha de ser ortogonal a la velocidad del observador, que es proporcional a $e_0 + ve_1$

$$0 = w \cdot (e_0 + ve_1) = \lambda - \frac{vl}{c^2} \;\; , \quad \lambda = \frac{vl}{c^2}$$
$$w = l\left(\frac{v}{c^2}\, e_0 + e_1\right)$$

y concluimos que para el nuevo observador la longitud l' de la varilla es

$$|w| = \sqrt{w \cdot w} = l\sqrt{l - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$
$$l' = l\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l - \frac{v^2 l}{2c^2} - \cdots$$

La longitud se contrae aproximadamente en $lv^2/2c^2$ unidades cuando $v \ll c$. Por ejemplo, como el diámetro de la Tierra es de unos 12700 kilómetros, un viajero que se alejara de ella observaría una contracción de 0,6 milímetros.

Al considerar la trayectoria de un móvil, siempre hemos supuesto que éste es puntual, de modo que su trayectoria es una curva en el espacio-tiempo $\mathbb{A}_4$. En general, la trayectoria de un móvil no-puntual será una región $F \subset \mathbb{A}_4$ y

[4] Fijadas las unidades de tiempo y longitud, dadas por sendas métricas g y $g^* = -c^2 g$, un *sistema de referencia inercial* en el espacio-tiempo de Minkowski es un observador inercial, cuya velocidad denotaremos e_0, junto con un suceso p_0 de su trayectoria, llamado *origen del tiempo*, y tres vectores ortonormales e_1, e_2, e_3 (respecto de g^*) de $(\mathbb{R}e_0)^\perp$, llamados *ejes*, de modo que la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de V esté orientada positivamente.

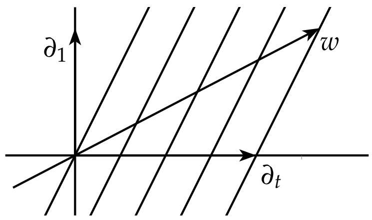
Es decir, es un sistema de referencia afín $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$ tal que $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es una base orientada positivamente y la matriz de la métrica g en tal base resulta

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-2} \end{pmatrix}$$

el lugar que ocupa el móvil en un instante t, para un observador inercial, es $\mathcal{E}_t \cap F$, por lo que la forma de un cuerpo (que es el lugar que ocupa, salvo semejanzas) depende de la velocidad del observador.

5.4. Efecto Doopler

Supongamos que un observador inercial envía una señal luminosa con una frecuencia f, por ejemplo emite f fotones por unidad de tiempo. Vamos a calcular la frecuencia f' de la señal para un observador que se aleje con velocidad aparente ve_1.



Consideremos el intervalo w de la trayectoria del receptor determinado por los f fotones emitidos durante una unidad de tiempo, que ha de ser proporcional al vector $\partial_t + v\partial_1$:

$$w = \partial_t + \lambda(\partial_t + c\partial_1)$$

$$v = \frac{c\lambda}{1+\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{v}{c-v}$$

$$w = \frac{1}{1-\frac{v}{c}}\,\partial_t + \frac{v}{1-\frac{v}{c}}\,\partial_1$$

$$\sqrt{w \cdot w} = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

Como $\sqrt{w \cdot w}$ es el tiempo que mide el receptor durante la absorción de esos f fotones recibe una señal de frecuencia menor

$$f' = f\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

Si en vez de alejarse, el receptor se acerca con velocidad aparente $-v\partial_1$, entonces w ha de ser proporcional al vector $\partial_t - v\partial_1$ y un razonamiento análogo permite concluir que el receptor observa una señal de frecuencia mayor

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

Referencias

[1] CUGOTA, Luís, y ROLDÁN, Gustavo. *Me llamo ... Albert Einstein*, pp. 18–24, Parramón Ediciones S.A, 2004.

[2] DE AZCÁRRAGA, José A., *Albert Einstein (1879-1955) y su ciencia*, La Gaceta de la RSME, Vol. 8.1, pp. 53–92, 2005.

[3] FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., y SPENCE, Lawrence E.. *Álgebra Lineal*, pp. 403–413, Publicaciones Cultural S.A, Primera Edición, México, 1982.

[4] NAVARRO GONZÁLEZ, Juan Antonio, y SANCHO DE SALAS, Juan B.. *Gravitación Newtoniana y Relatividad*, pp. 56, 60–64, Facultad de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 2004.

[5] RAÑADA, Manuel F.. *David Hilbert, Hermann Minkowski, la Axiomatización de la Física y el Problema número seis*, La Gaceta de la RSME, Vol. 6.3, pp. 403–413, 2003.

[6] SÁNCHEZ RON, José Manuel, *Eistein, la relatividad y las matemáticas*, La Gaceta de la RSME, Vol. 7.1, pp. 153–184, 2004.

[7] SENOVILLA, José M. M., *La Cosmología y los matemáticos*, La Gaceta de la RSME, Vol. 8.3, pp. 597–636, 2005.

[8] EN LA RED,
Albert Einstein, http://www.spaceandmotion.com/quantum-theory-albert-einstein-quotes.htm
David Hilbert, http://www.free-photos.biz/photographs/art/abstraction/144518_david_hilbert_1886.php
Jules Henri Poincaré, http://pl.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré
Herman Minkowski, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Minkowski.html

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas
Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E
Pensamient
Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo pretende ofrecer una visión general del descubrimiento de los llamados *cuaterniones* por parte del matemático irlandés William Rowan Hamilton. Se pretende dar al lector algunos detalles del nacimiento de los números imaginarios en el siglo XVI, su interpretación geométrica a principios del siglo XIX, y la extensión del plano complejo a las tres dimensiones a través de los cuaterniones, que abrirían el paso al estudio y el desarrollo de las nuevas álgebras no conmutativas y a una nueva interpretación tridimensional de la realidad física.

Palabras Clave: Sir William Rowan Hamilton, álgebras no conmutativas, números complejos, cuaterniones, análisis vectorial.

1. Introducción

Aunque considerar la paternidad legítima de los números complejos ha resultado históricamente una tarea complicada, tanto la unidad imaginaria i como los números enteros negativos siempre estuvieron rodeados de un halo misterioso y resultaron para los matemáticos una fuente constante en la que beber. El misterio se vio alimentado por dos hechos que sucedieron simultáneamente aunque de forma independiente. Por un lado la publicación en Alemania de *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, más conocida como *Ausdehnungslehre*, traducida como *Teoría de La Extensión*, o *Teoría de las magnitudes extensivas* de Hermann Günther Grassmann (1809-1877) en 1844, que describía las geometrías n-dimensionales de un modo algebraico y los sistemas de los números hipercomplejos, y por otro, el descubrimiento de los *cuaterniones* por parte del matemático irlandés William Rowan Hamilton, que resultaron ser unos nuevos números que no obedecían la propiedad conmutativa de la aritmética común. A pesar de que las álgebras vectoriales descritas por Grassmann resultaron ser mucho más generalistas que las de Hamilton, sin embargo su comprensión y el sentido e importancia de sus ideas no fueron asimiladas y reconocidas en su tiempo.

El descubrimiento de estas nuevas estructuras algebraicas constituyó junto a la aparición de las geometrías no euclídeas un punto de inflexión en el desarrollo de la matemática del siglo XIX. Los matemáticos se vieron obligados a enfrentarse con la relación que existía entre los *símbolos* y los *objetos* matemáticos, y comenzaron a distinguir de manera más clara la interconexión que había existido históricamente entre las *ecuaciones algebraicas* y la manipulación de los *números*. La nueva y más flexible concepción del álgebra emergida a mediados del siglo XIX hizo posible avances en las técnicas algebraicas y la lógica simbólica de matemáticos como Boole, Peirce, y Schröder, o el desarrollo de álgebras abstractas de la mano de matemáticos como Cayley, Sylvester, Clifford, Gibbs, o Dedekind entre otros.

2. La Representación de los Números Complejos

La primera vez que se tiene constancia escrita de la aparición de los números complejos la encontramos en el *Ars Magna* de Girolamo Cardano publicado en 1545. Previamente en el año 1539 Cardano había conocido al célebre matemático Tartaglia, lo que resultaría crucial en su vida puesto que comenzaría a interesarse por las ecuaciones cúbicas. Tartaglia era un matemático de reconocida fama y prestigio, entre otras cosas, por haber ganado concursos sobre la resolución de ecuaciones, usando métodos secretos.

Girolamo Cardano

Niccolò Fontana - Tartaglia

Tartaglia le enseñó a Cardano sus trucos y técnicas secretas para el manejo de las ecuaciones, no sin antes hacerle prestar un juramento de no revelar a nadie dichos secretos. En 1545, Cardano publica su obra *Ars Magna*, donde expone los métodos para la resolución de la ecuación cúbica. Tartaglia monta en cólera y acusa a Cardano de traidor y deshonesto, por haber faltado a su juramento. Sin embargo, un joven matemático de apenas 18 de edad, Lodovico Ferrari, quien a la sazón era sirviente de Cardano, sale en defensa de su protector diciendo que él estuvo presente la noche de la reunión entre los dos matemáticos y no hubo ningún juramento.

En realidad, la fórmula para resolver la ecuación cúbica, había sido descubierta mucho antes por el matemático Scipione del Ferro, quien publicó un pequeño libro, que en alguna oportunidad fue consultado por Cardano. Luego Cardano quedaba libre de toda culpa.

En su *Ars Magna*, Cardano reconoce a Al-Khwārizmī como el padre del álgebra. El libro fue un clásico de la matemática y contribuyó de manera decisiva al desarrollo del álgebra. En aquella obra aparecen muchos resultados origina-

ISSN 2174-0410

les, como el método para eliminar la x^2 en una ecuación cúbica, conocido como el método de Cardano. También desarrolló un método para resolver ecuaciones diferenciales, llamado método de las proporcionales.

Cardano hizo uso por vez primera de las raíces cuadradas de números negativos y consideró la posibilidad de usar los números imaginarios aunque con mucha cautela. En una nueva edición de su libro, en 1570, Cardano se adentró un poco más en el misterio de estos números y ofreció algunas reglas para manipularlos. Por ejemplo, la expresión:

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

Podemos afirmar por lo tanto que fueron entre las soluciones a la ecuación cúbica en el libro de Cardano donde se produjo el nacimiento de los números complejos, como algo digno de ser estudiado por los matemáticos. En particular, para la ecuación:

$$x^3 = 3px + 2q$$

Cardano daba la fórmula:

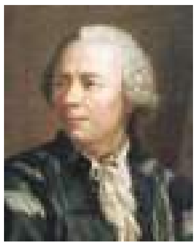
$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$$

conocida como *Fórmula de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano*.

El siguiente hecho importante en el desarrollo de los números complejos sucede en 1637, año en el que Descartes publica su *Géométrie*, acuñando el término "imaginarios" para determinar a estos números. Según Descartes:

> *"Ni las raíces verdaderas, ni las falsas (las negativas) son siempre reales, a veces son imaginarias."*

Pero el establecimiento definitivo en el panorama matemático de los números imaginarios sucede en el siglo XVIII, fundamentalmente emparejado al desarrollo del Análisis, de la mano de uno de los grandes matemáticos de la historia, Leonhard Euler. Euler fue el primero en utilizar la notación i para referirse a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$. En su memoria, *De Formulis Differentialibus Angularibus*, presentada en la Academia de San Petesburgo en 1777, escribió:



Leonhard Euler

> *"En adelante, denotaré la expresión $\sqrt{-1}$ como i resultando entonces que $ii=-1$."*

Pero desde su nacimiento, los números imaginarios estaban huérfanos de una teoría consistente que interpretase sus propiedades de un modo apropiado. En medio de esta falta de entendimiento completo, surgieron fundamentalmente dos teorías que sentarían las bases de sus fundamentos. Por un lado, la asociación de los números complejos a una interpretación geométrica de los mismos, y por otro la consideración de expandir el concepto de número de la aritmética existente hasta entonces, con el fin de que estos tuvieran cabida.

ISSN 2174-0410

John Wallis parece ser que fue el primero que llevó a cabo el intento, aunque sin éxito, de formalizar una interpretación geométrica de los números complejos. En su *Álgebra* publicada en 1685, sugirió que como $\sqrt{-bc}$ era la media proporcional entre $+b$ y $-c$, la interpretación geométrica de $\sqrt{-bc}$ podría obtenerse aplicando la construcción de media proporcional euclídea de dos segmentos representados por $+b$ y $-c$. Pero tras este intento no consiguió avances.

John Wallis

La interpretación geométrica de los números complejos como un punto del plano es un idea sencilla, pero llevó mucho tiempo llegar a su deducción. Cuando finalmente llegó, lo hizo simultáneamente, y lo que es más sorprendente, sin ninguna conexión, de la mano de varias personas, entre ellos, el topógrafo y cartógrafo noruego Caspar Wessel (1745-1818), el contable franco-suizo Jean Robert Argand (1768-1822), y el matemático alemán Carl Friedich Gauss (1777-1855).

Caspar Wessel publicó un único artículo de matemáticas en su vida, en el cual, consideraba como tema principal la interpretación geométrica de los números complejos. En 1797, presentó sus ideas a la Real Academia de Ciencias de Dinamarca; el artículo, escrito en danés, fue publicado dos años más tarde en el *Philosophical Transactions* de la Academia. Desafortunadamente, este artículo pasó inadvertido, puesto que la publicación no era muy conocida entre la comunidad matemática de la época. Un siglo después, en el centenario de su publicación, la Academia realizó una traducción al francés del artículo de Wessel, con el nombre de *Essai sur la représentation analytique de la direction*, que a la postre serviría para reconocer finalmente la importancia de sus aportaciones. En la introducción, Wessel presenta el objetivo de su estudio:

Caspar Wessel

> *"El presente artículo trata la cuestión de cómo podemos representar una dirección de forma analítica; esto es, cómo expresaremos rectas (segmentos rectos) de tal manera que en una ecuación que arroje como resultado una recta desconocida y otras conocidas, la longitud y la dirección de la recta desconocida puedan ser expresadas."*

Su primer paso consistió en dar una definición para la suma de segmentos rectos (vectores[1]), colocando el punto inicial de un segmento en el punto final del otro, observando que esta suma resultaba ser conmutativa. En el siguiente paso, Wessel consideró la multiplicación de segmentos. Para ello colocó un sistema de ejes coordenados perpendiculares, considerando $+1$ para la unidad en uno de los ejes y $+\epsilon$ para la unidad en el otro eje. Wessel escribió:

> *"Sea $+1$ la unidad rectilínea positiva y $+\epsilon$ otra unidad perpendicular a la unidad positiva tomada antes, teniendo ambas el mismo origen; entonces el ángulo de la dirección de $+1$ resulta igual a 0°, y por lo tanto para*

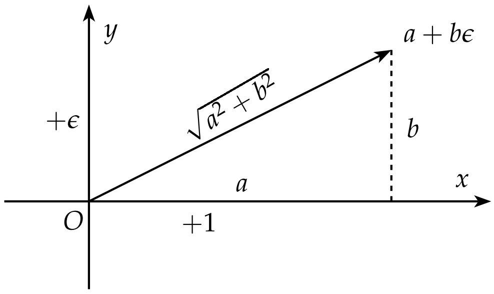
[1] Fue William Rowan Hamilton quien se encargó de acuñar este término del verbo en latín *veher*, que significa "dirigir, direccionar". También acuñó el término *escalar*.

> -1 *es* $180°$, *para* $+\epsilon$ *es* $90°$, *y para* $-\epsilon$ *es* $-90°$ *o* $270°$. *Por la regla que establece que el ángulo de la dirección del producto es igual a la suma de los ángulos de los factores, tenemos:*$(+1)(+1) = +1$; $(+1)(-1) = -1$; $(-1)(-1) = +1$; $(+1)(+\epsilon) = +\epsilon$; $(+1)(-\epsilon) = -\epsilon$; $(-1)(-\epsilon) = +\epsilon$; $(+\epsilon)(+\epsilon) = -1$; $(+\epsilon)(-\epsilon) = +1$; $(-\epsilon)(-\epsilon) = -1$. *De este resultado se observa que* ϵ *es igual al* $\sqrt{-1}$, *y que la divergencia del producto se determina de tal forma que ninguna de las reglas operativas comunes son contravenidas."*

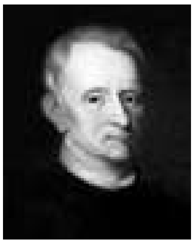
Wessel estableció que cualquier segmento recto podía ser representado mediante la expresión $a + b\epsilon$, y que por lo tanto para su multiplicación resultaba que:

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = (ac - bd) + (ad + bc)\epsilon$$

De este modo, hay que considerar que Wessel no sólo se anticipó a la noción de espacio vectorial, además lo hizo previamente a todo el desarrollo de un álgebra en torno a este concepto, aunque desafortunadamente su descubrimiento se mantuvo en el olvido durante un siglo.



La contribución de Jean Robert Argand *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaire dans les constructions géométriques*, corrió un poco mejor suerte que el artículo de Wessel. Éste fue impreso de manera privada en 1806, en una pequeña edición sin el nombre del autor en la portada. El trabajo se podría haber perdido si no llega a ser por una cadena de acontecimientos ocurridos en 1813 que lo rescataron del olvido. El trabajo de Argand llegó a las manos de Adrien-Marie Legendre antes de su publicación, y éste comentó la importancia de sus descubrimientos en una carta dirigida al hermano de J. F. Français. Français leyó la carta y quedó impresionado de los resultados obtenidos por Argand, por lo que decidió desarrollarlos en una publicación en 1813, donde en el último párrafo puntualizaba que estos conceptos habían sido tomados de la carta de Legrende, y esperaba que el autor de esas ideas fuera identificado y publicara él mismo los resultados. Argand escuchó acerca del artículo de Français, y respondió con un artículo en el siguiente número de la publicación *Annales*, donde especificaba los principales puntos de su trabajo original. Pero a pesar de su gran mérito, esta publicación no tuvo ninguna repercusión relevante.



Jean Robert Argand

ISSN 2174-0410


Carl Friedich Gauss

Tanto Wessel como Argand no eran muy conocidos. Sin embargo, éste no era el caso de Carl F. Gauss, cuya autoridad hizo posible la aceptación general de la interpretación de sus dos anteriores predecesores. Parece ser que Gauss ya había considerado una interpretación geométrica sobre los números complejos a finales del siglo XVIII. En su disertación doctoral de 1799 sobre el Teorema fundamental del álgebra, había empleado la idea aunque no hizo mención explícita sobre ello, sin embargo, sí lo hizo después en una carta a Friedich Bessel, en 1811; finalmente en 1831, en un comentario de su artículo *Theoria Residuorum Biquadraticorum*, la idea era públicamente descrita. La novedad consistía en que Gauss consideró la representación de los números complejos como puntos del plano, en lugar de segmentos del mismo como habían considerado Wessel y Argand. Tal es así, que Gauss consideró el número $a + bi$ como el punto (a, b). Gauss afirmaba:

> *"Este tema (de las magnitudes imaginarias) ha sido tratado hasta ahora desde un punto de vista erróneo, rodeado de una misteriosa oscuridad, y esto es debido a la utilización de una notación inadecuada. Si, por ejemplo,* $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ *hubieran sido denominadas directa, inversa y unidad lateral respectivamente, en lugar de positiva, negativa e imaginaria (o incluso imposible) tal oscuridad hubiera estado fuera de lugar."*

Gauss también consideró que su presentación resultaba la más correcta, haciendo que todas las dificultades sobre estos números desaparecieran. De este modo los números reales representaban una recta, mientras que los complejos representaban el plano. Gauss también acuñó el término técnico de "números complejos" para la cantidad $a + bi$, y se opuso al término "números imaginarios" ya que consideraba que ese término era precisamente uno de los principales causantes del halo de misterio que había rodeado siempre a estos números.

Como resultado de todo esto, si consultamos a matemáticos o las publicaciones francesas, estos hacen referencia al plano complejo como el plano de Argand, mientras que los alemanes lo denotan como el plano de Gauss. Sin embargo, los modestos noruegos nunca tomaron parte en estas disquisiciones patrióticas.

3. William Rowan Hamilton (1805-1865)


Sir William Rowan Hamilton

Desde la muerte de Sir Isaac Newton, hasta la llegada de William Rowan Hamilton, las Islas Británicas no habían dado a la comunidad matemática un personaje de semejante talla intelectual. Éste hizo importantes contribuciones en dinámica y en óptica, inventó los cuaterniones y comercializó algún juego de ingenio que se convertiría después en una especialidad a desarrollar dentro de la teoría de grafos que había visto la luz con Euler y el famoso problema de "Los Siete Puentes de Könnisberg". A lo largo de su vida su popularidad sufrió continuamente curiosos altibajos, siendo

ISSN 2174-0410

aclamado, aunque no comprendido. Más tarde, tras su muerte, su reputación comenzó a declinar hasta el punto de llegar a ser considerado como una figura de segunda categoría. Finalmente el siglo XX, trajo consigo nuevamente una revitalización extraordinaria del interés y la estima por él y sus trabajos.

William Rowan Hamilton nació en Dublín la medianoche del 3 al 4 de Agosto de 1805. Sobre sus ancestros no hay mucho que decir. Su padre Archibald Hamilton, fue un abogado dublinés que defendió al nacionalista irlandés Archibald Hamilton Rowan y obtuvo con éxito una revocación de su sentencia. Fue Rowan quien apadrinó al niño en su bautizo y del que éste adquirió su segundo nombre. El padre era un hombre de negocios con una elocuencia "exuberante", un religioso fanático demasiado jovial en ocasiones por desgracia, rasgos todos que fueron transmitidos a su inteligente hijo. Posiblemente debido a la mala situación financiera de su padre, el niño fue enviado con tan sólo un año junto a su tío, el reverendo James Hamilton, jefe de la escuela diocesana del tranquilo pueblecito de Trim, a unas veinticinco millas al noroeste de Dublín quien se ocupó de su sustento y educación. Su tío también estaba a cargo de la iglesia anglicana local. Su casa estaba a medio camino de unas espectaculares ruinas medievales, junto al río Boyne. Desde el punto de vista político James Hamilton era un Tory, partidario del Acta de Unión que había hecho de Irlanda parte del Reino Unido que reforzó el predominio protestante. El reverendo era un gran lingüista, conocedor del griego, el latín, el hebreo, el sánscrito, el caldeo, el pali, y un largo etcétera. Durante su niñez, William tuvo poco contacto con sus progenitores, limitado solamente a unas cuantas visitas hasta que llegó a la edad universitaria. Sus cuatro hermanas se reunían con el joven William en Trim tan sólo ocasionalmente, pero su familia siempre se preocupó por sus progresos.

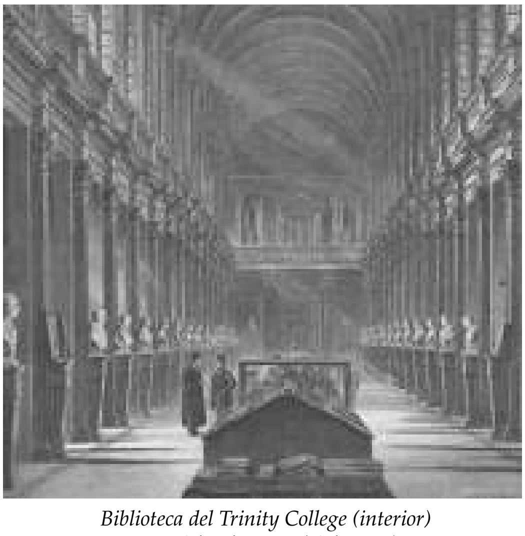
Durante la época de tutelaje del reverendo James, William desarrolló una educación exquisita, revelando su gran capacidad. A los tres años leía perfectamente el inglés y tenía grandes conocimientos de Aritmética; a los cuatro era un buen geógrafo, a los cinco leía y traducía el latín, el griego y el hebreo, y le gustaba recitar versos de Dryden, Collins, Milton y Homero, de este último en griego; a los ocho añadió el dominio del italiano y el francés a su colección, y su dominio del latín le permitía expresar su emoción ante la belleza del paisaje irlandés en hexámetros latinos, ya que citar la corriente prosa inglesa para poner de manifiesto sus nobles y exaltados sentimientos, le parecía demasiado "plebeyo"; finalmente, antes de cumplir los 10 años estableció los fundamentos firmes para profundizar el estudio de las lenguas orientales, comenzando por el árabe y el sánscrito.

En 1817 murió su madre, y pocos meses después también lo hizo su padre. A la edad de trece años comenzó su educación seria de la matemática, con el estudio de Euclides. Teniendo 17 años Hamilton había dominado la matemática, siguiendo el Cálculo integral, y pudo conocer la astronomía matemática, necesaria para ser capaz de calcular los eclipses. Leyó a Newton y a Lagrange. Todo esto constituía una diversión, pues los estudios humanistas eran entonces para él los principales. Lo más importante es que había hecho ya "algunos descubrimientos curiosos", que comunicó en carta a su hermana Eliza. Los descubrimientos a los que Hamilton se refiere son probablemente los gérmenes de su primera gran obra, *Los Sistemas de Rayos* en óptica.

El 7 de julio de 1823, el joven Hamilton ocupó el primer puesto entre 100 candidatos en los exámenes del Trinity College. Su fama le precedía, y como se esperaba, fue pronto una celebridad. En efecto, sus conocimientos humanistas y matemáticos cuando todavía no había obtenido su título excitaron la curiosidad de los círculos académicos en Inglaterra y Escocia, así como de Irlanda, llegando a hacer pensar a algunos que había aparecido un segundo Newton. Ya antes había atraído la atención del doctor John Brinkley, profesor de astronomía de Dublín, por el descubrimiento de un error en la demostración del paralelogramo de las fuerzas propuesta por Laplace en su *Mécanique céleste*.

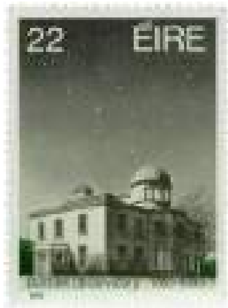
Trinity College junto al Banco de Irlanda por Richard Lovett (siglo XIX)

Siendo aún estudiante, Hamilton escribió la primera parte de lo que más tarde sería su tratado sobre óptica. La intención de Hamilton consistía en renovar la teoría de la luz establecida hasta el momento. Partió de principios ya establecidos, como el de que un rayo de luz siempre marcha por el camino que lleva el tiempo mínimo (según la teoría ondulatoria) o "acción" mínima (según la teoría corpuscular), para llegar de un punto a otro. Esto es cierto, sea el camino recto o curvado por la refracción. Una contribución de Hamilton consistió en considerar la acción (o el tiempo) como una función de las posiciones del punto entre los que la luz pasa, y demostrar que esta cantidad varía cuando las coordenadas de estos puntos varían, según la ley que el llamó la ley de variación de la acción. Demostró que todas las investigaciones sobre cualquier sistema de rayos ópticos pueden ser reducidas al estudio de esta única función. El descubrimiento de Hamilton de esta "función característica", como él la llamó, fue un resultado extraordinario de su genio científico. Su primer artículo sobre el tema fue rechazado, pero al siguiente año en 1827, una versión revisada fue aceptada y publicada por la Academia bajo el título de *Teoría de los Sistemas de Rayos*. Este hecho le hizo ganarse una gran reputación y fue el causante de la dedicación de su actividad científica durante la siguiente década. Había comenzado a idearlo



Biblioteca del Trinity College (interior) por Richard Lovett (siglo XIX) cuando tenía dieciséis años y logró darle una forma más o menos final hacia los veintiuno.

La aparición de este artículo supuso una rápida transformación en la vida de Hamilton. La cátedra de Astronomía en el Trinity College, con un sueldo anual de 250 libras, que concedía a su ocupante el título de Astrónomo Real de Irlanda en el Observatorio de Dunsink, quedó vacante en 1826, cuando quien lo ocupaba, el reverendo John Brinkley, fue nombrado obispo de Cloyne, obispado ocupado anteriormente por el gran filósofo George Berkeley. Hamilton fue elegido como sucesor de Brinkley unos pocos meses más tarde en 1827. La elección de un subgraduado para una cátedra fue un suceso sorprendente y trajo ciertas consecuencias curiosas. Por ejemplo, el Astrónomo Real, en virtud de su oficio, era examinador para el Premio del Obispo Law, una distinción matemática abierta a los candidatos recién graduados como bachilleres, y así vino a ocurrir la situación anómala de que un subgraduado se encontrase examinando a graduados en las ramas más altas de las matemáticas.



Detalle del Observatorio Dunksink en sello irlandés (1985)

Si bien todo el mundo reconocía la grandeza del honor sin precedentes del nombramiento de Hamilton para dicha cátedra, la opinión estaba fuertemente dividida con respecto a su prudencia en aceptarla. George Biddel Airy, a la sazón futuro Astrónomo Real de Inglaterra, estaba mucho más preparado que Hamilton, pero decidió no aceptar la plaza puesto que el sueldo era paupérrimo. Tras un año o dos hubiera sido elegido, sin duda, profesor de Trinity College, con mejores perspectivas económicas y generales. Pero lo que determinó la elección por parte de Hamilton, fue la consideración de que el puesto de Astrónomo Real era prácticamente un nombramiento de investigación, que implicaba muy poco con respecto a tareas fijas, mientras que un profesor en el Trinity College debía convertirse en clérigo y pronto se hubiera transformado en tutor y lector, con deberes fijos que ocuparían la mayor parte de su tiempo. Era cierto que el equipo de investigación del observatorio astronómico era muy pobre; pero lo que realmente estaba en la mente de Hamilton, así como en la de los electores, no era la astronomía, sino un arreglo por el que Hamilton pudiera continuar las investigaciones teóricas de las que el artículo sobre los *Sistemas de Rayos* había sido un glorioso comienzo.

Antes de aceptar sus nuevas responsabilidades, Hamilton realizó su primera visita a Inglaterra en compañía del ingeniero y topógrafo Alexander Nimmo. Su itinerario incluyó Lake District, donde tomó té con el poeta William Wordsworth y compartió parte de los poemas que había escrito, puesto que desde niño había manifestado un gran interés por la poesía. A lo largo de su vida se relacionó con escritores como Maria Edgeworth o Samuel Taylor Coleridge cuyas ideas filosóficas "kantianas" le influyeron en gran medida posteriormente.

De vuelta en su Cátedra de Astronomía, Hamilton impartió un curso de lecciones sobre astronomía. En estas, su costumbre era discutir las relaciones de la astronomía con la ciencia física en general, con la metafísica y con todos los campos relacionados del saber. Sus lecciones eran tan poéticas y tan cultas que pronto atrajeron a audiencias enormes de profesores y visitantes, así como

ISSN 2174-0410

a subgraduados. Cuando en 1831 se empezó a hablar de su traslado a la cátedra de matemáticas, el Consejo insistió en que permaneciera donde estaba. Como incentivo, el Consejo subió su pensión a 580 libras al año y le dio permiso para dedicar su investigación principalmente a las matemáticas.

En 1832, Hamilton anunció a la Academia Real Irlandesa un descubrimiento en óptica notable, que daba continuidad a su teoría de los sistemas de rayos. Se sabía desde hacía algún tiempo que ciertos cristales biaxiales, tales como el topacio y la aragonita, daban lugar a dos rayos refractados, produciendo una doble imagen. Agustin Fresnel había elaborado las leyes de la refracción doble. Ahora Hamilton, investigando por su método general la ley de Fresnel, llegó a concluir que en ciertos casos, un único rayo de luz incidente sobre un cristal biaxial puede dar lugar no solamente a dos, sino a un número infinito de rayos refractados, formando un cono, y que en otros ciertos casos un único rayo dentro de tal cristal emergería de él como un cono diferente. Propuso, por consiguiente, partiendo de consideraciones teóricas, dos nuevas leyes de la luz, que él llamó de refracción cónica interna y externa. Pronto fueron verificadas experimentalmente por su amigo Humphrey Lloyd, un físico de Dublín. El matemático y físico alemán Plücker llegaría a escribirle una carta comentándole:

> *"Ningún experimento de física me había causado nunca tanta impresión ... se trata de algo novedoso y sin parangón."*

En 1834, Hamilton, que entonces contaba con veintinueve años, escribió a su tío:

> *"Es mi propósito y mi esperanza remodelar todo el conjunto de la dinámica, en el sentido más extenso de la palabra, por medio de la idea de mi función característica."*

Procedió entonces a aplicar este principio al movimiento de sistemas de cuerpos, y al año siguiente expresó las ecuaciones del movimiento en una forma que demostraba la dualidad entre las componentes del momento de un sistema dinámico y las coordenadas de su posición. Fue un siglo más tarde cuando el desarrollo de la teoría cuántica permitió a físicos y matemáticos darse perfecta cuenta de la importancia de esta dualidad.

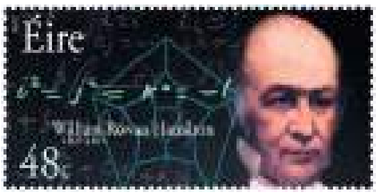
Durante la década de 1830, Hamilton tuvo una vida muy "agitada" tanto científica como personalmente. Estos fueron sus años más productivos, durante los cuales trabajó en óptica, dinámica, y álgebra de manera simultánea. Durante esta década también llevó a cabo un estudio de filosofía, influenciado por las ideas de S. T. Coleridge. Se dice de él que durante esta época su energía parecía inagotable, de forma que en ocasiones se le podía encontrar incluso parapetado en la cubierta del observatorio. Desde el punto de vista personal, Hamilton tuvo varias aventuras románticas, pero hubo una en particular que le marcó enormemente. Se enamoró perdidamente de una mujer llamada Catherine Disney. Aunque la atracción era mutua, la familia de Catherine la obligó a casarse con otra persona y Hamilton estuvo a punto de suicidarse. Podemos imaginar lo enamorado que debía estar y el dolor que debió ocasionarle este hecho como para contemplar el suicidio como una solución siendo una persona tan abnegadamente religiosa como él era. Tras otro desengaño amoroso

Hamilton comenzó a pensar que el matrimonio le sería esquivo, y en su desesperación le propuso matrimonio a su tercera novia Helen Maria Bayly. Ella provenía de una familia de la pequeña nobleza del Condado de Tipperary, donde había vivido con su viuda madre en una pequeña granja. Al principio ella rehusó aceptar su proposición de matrimonio, pero finalmente, aceptó y la boda tuvo lugar el 9 de abril de 1833. Escribiendo acerca de ella en una carta a un amigo, Hamilton hacía notar su "extraordinaria timidez y delicadeza". Estas características llegaron a agudizarse más plenamente después del matrimonio. Además ella pasaba largas épocas viviendo fuera del hogar junto a miembros de la familia Bayly. En Mayo de 1834, nació el primer hijo del matrimonio Hamilton, bautizado con el nombre de William Edwin. El segundo hijo nació casi un año después, bautizado como Archibald Henry, y finalmente la única hija del matrimonio nacería en agosto de 1840, bautizada como Helen Eliza Amelia.

No se puede decir que el matrimonio de los Hamilton fuera una balsa de aceite. A la ya de por sí "complicada" personalidad de Helen, se unía el hecho de su semi-invalidez debido a una enfermedad que había sufrido en el verano de 1832. Helen no era capaz de encargarse de las obligaciones domésticas y fue poco a poco descuidando la atención de su marido. Además en multitud de ocasiones Helen abandonaba el hogar para pasar una temporada junto a miembros de la familia Bayly, dejando a su marido en la más completa soledad a la suerte de unos incompetentes sirvientes. La personalidad de William fue cambiando paulatinamente. La enérgica jovialidad elocuencia y entusiasmo del pasado se fueron tornando en soledad, y William se fue convirtiendo en una persona introspectiva, a menudo encerrándose en sí mismo. Además William comenzó a descuidar su alimentación y a contar con el alcohol como compañero inseparable.

Antes de hablar de lo que Hamilton consideraría su obra maestra, cabe destacar brevemente la cantidad de honores que recibió. A los 30 años desempeñó un cargo importante en la Asociación Británica para el Progreso de la Ciencia. La ceremonia ritual de su investidura se celebró en Dublín en presencia del por entonces Gobernador de Irlanda quien le armó caballero tocándole en ambos hombros con la espada del Estado y le dijo, "Arrodillaos, profesor Hamilton", y luego añadió, "Alzaos, Sir William Rowan Hamilton". Ésta fue una de las pocas ocasiones en la que Hamilton no supo qué decir. A los 30 años fue nombrado presidente de la Real Academia Irlandesa, y a los 38 le fue asignada una pensión vitalicia de 200 libras al año, concedida por el gobierno británico, siendo entonces Primer Ministro del Reino Unido Sir Robert Peel, quien sentía poco afecto por Irlanda. Poco después de esto, Hamilton realizó su descubrimiento capital, los cuaterniones. Un honor que le produjo una de sus mayores satisfacciones ocurrió al final de sus días, cuando ya se hallaba en su lecho de muerte, y se trata de su elección como primer miembro extranjero de la Aca-

Retrato de Hamilton con el bastón de mando de la presidencia de la Real Academia Irlandesa demia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, fundada durante la guerra civil. Este honor fue concedido en reconocimiento por su obra sobre los cuaterniones, que por alguna razón desconocida produjo entre los matemáticos americanos de aquel tiempo (sólo había uno o dos, siendo el principal Benjamin Peirce de Harvard) una conmoción más profunda que las restantes matemáticas británicas desde los *Principia* de Newton.



Sello Irlandés conmemorativo del 200 aniversario del nacimiento de Hamilton (2005)

A lo largo de toda su vida, Hamilton se dedicó a investigar en multitud de disciplinas. Cabe destacar que en el año 1857, vendió por 25 libras los derechos de un juego que denominó el "juego icosiano", o el "juego del viajero", que consistía en conectar mediante un camino simple los vértices de una figura formada por tres pentágonos concéntricos encajados unos dentro de los otros. Este juego serviría para desarrollar en mayor medida la denominada Teoría de Grafos. Lo denominó de este modo, porque en el siglo XVII era común en Europa proveer a los pueblos y ciudades de productos diversos de distinta necesidad. El *agente viajero* o *agente de ventas* llevaba un catálogo consigo para realizar una ruta por diferentes lugares y recoger los pedidos además de para realizar la captación de nuevos clientes. Se procuraba que las rutas de estos agentes describieran un camino cuya longitud fuera la mínima posible con el fin de minimizar los gastos de establecimiento y transporte. Esta clase de recorridos se denominan en Teoría de Grafos *ciclos hamiltonianos* en su honor. El 5 de febrero de 1930, en un coloquio en Viena, el matemático Karl Menger planteó por primera vez el problema del agente viajero en lenguaje matemático formal. Menger afirmaba que el problema de determinar rutas de mínima distancia entre dos localidades era una herramienta para encontrar ciclos hamiltonianos de distancia mínima.

Retrato de W.R. Hamilton

En la última parte de su vida, Hamilton se dedicó casi exclusivamente a la elaboración de los cuaterniones (incluyendo sus aplicaciones a la dinámica, a la astronomía, y a la teoría de la luz) y a su voluminosa correspondencia. Durante estos años, Hamilton se entregó a fantasías románticas manteniendo una secreta y prolongada correspondencia con Catherine Disney, objeto a menudo de muchos de sus poemas, de quien nunca dejó de estar enamorado. Los últimos años de su vida sufrió varios ataques de gota, seguramente agudizados por sus pésimos hábitos alimenticios y su cada vez mayor problemática dependencia del alcohol. Además su situación financiera en estos últimos años se fue deteriorando, llegando prácticamente a un estado de ruina absoluta, en gran medida causada según se cuenta por su primogénito William Edwin. En el verano de 1865, Hamilton enfermó seriamente. En vista del empeoramiento de su salud, Hamilton comenzó a trabajar en lo que sería su última obra *Los Elementos de los Cuaterniones*, aunque desafortunadamente a finales de agosto la gravedad de su situación le impidió finalizarla. Murió el 2 de septiembre. Aunque según los doctores, su alcoholismo no fue la causa fundamental de su muerte,

ISSN 2174-0410

no cabe duda que fue un problema constante a lo largo de sus últimos años de deterioro. Una vez escribió:

> *"Desde hace mucho tiempo he admirado la descripción que hace Ptolomeo de su gran maestro astronómico Hiparco, como un hombre que amó el trabajo y que amó la verdad. Será mi epitafio."*

Como ejemplo de lo que debieron ser sus últimos años de vida, debemos decir que tras su muerte, Hamilton había dejado una enorme montaña de trabajos en indescriptible confusión, y sesenta enormes libros manuscritos de fórmulas matemáticas. El estado en que se hallaban todos estos manuscritos atestiguan las dificultades domésticas con que tropezó en el último tercio de su vida. Entre las montañas de papeles fueron desenterrados platos con restos de comidas. Durante este último período Hamilton vivió como un recluso, sin darse cuenta de los alimentos que le servían mientras trabajaba, obsesionado por la idea de que el último tremendo esfuerzo de su genio magnífico inmortalizaría a él y a su amada Irlanda, y dejaría para siempre inconmovible una contribución matemática a la ciencia como no había tenido lugar desde los *Principia* de Newton.

4. El Álgebra de Hamilton

A finales de la década de 1820-30, Hamilton tenía la atención centrada en sus estudios de óptica; pero su amigo, el matemático John Thomas Graves, comenzó a intercambiar correspondencia con Hamilton sobre ciertos problemas sobre los fundamentos del álgebra. Durante 1826 y 1827, Graves estuvo inmerso en construir una teoría sobre logaritmos de números negativos y complejos, y a menudo se escribía con Hamilton comentándole sus progresos. En 1828, Graves entregó una memoria sobre logaritmos imaginarios en la Royal Society, que fue muy bien recibida por matemáticos de la talla de George Peacock y John Herschel, y publicada poco tiempo después gracias a la intermediación de Hamilton. Este episodio fue el comienzo del interés por parte de Hamilton en los números complejos.

Poco después, fue precisamente Graves quien recomendó a Hamilton la lectura del recién publicado en 1828 *Tratado sobre la representación geométrica de las raíces cuadradas de cantidades negativas* del matemático John Warren. En este trabajo se describía la representación de los números complejos de Argand. Hamilton se sintió inmediatamente cautivado por la idea, de modo que si se consideraban los números complejos como vectores del plano, entonces las operaciones aritméticas elementales adquirían una interpretación geométrica natural, de modo que la suma compleja resultaba equivalente a la suma vectorial, y la multiplicación compleja equivalente al producto de un vector por un escalar más la rotación de dicho vector. Fue entonces cuando en Hamilton surgió de forma natural la idea de intentar generalizar los números complejos con el fin de representar rotaciones y movimientos de vectores en el espacio tridimensional. Si esta generalización funcionaba, sin lugar a dudas los números complejos resultarían una herramienta potentísima para la formulación de

ISSN 2174-0410

las leyes básicas de la física con el fin de describir el movimiento de cuerpos rígidos en el espacio.

En los años inmediatamente posteriores a la lectura del Tratado de Warren, Hamilton intentó por su parte llevar a cabo otras representaciones algebraicas más simples de los números complejos, ya que los matemáticos del siglo XVIII consideraban que la interpretación geométrica de los números complejos de Argand no era demasiado compatible con el paradigma tradicional del álgebra hasta la época. En la década de 1820-30, Hamilton había descubierto (independientemente de Cauchy, que lo haría en 1821), las ecuaciones de Cauchy-Riemann y la representación de una función de variables complejas compuesta por dos funciones de variables reales. Hamilton llamaría a las actuales Ecuaciones de Cauchy-Riemann, *Ecuaciones de Conjugación*, y a las dos funciones reales, *Funciones Conjugadas*. Este descubrimiento le hizo considerar que los números complejos podían verse como pares ordenados, o "parejas" de números reales, y utilizó este concepto para investigar el problema de los logaritmos imaginarios de Graves. Pero Hamilton tenía ahora que explicar cómo estaban relacionadas estas parejas de números con los números reales.

A principios de la década de 1830-40, Hamilton comenzó a interesarse por la filosofía de la mano fundamentalmente de Coleridge y Kant. Este interés se tradujo en un cambio de perspectiva de la actividad científica de Hamilton. En 1830 estudió concienzudamente los trabajos de George Berkeley y el filósofo croata Rudjer Bošković. El siguiente año leyó *Ayudas a la reflexión* de S. T. Coleridge. En octubre de 1831, Hamiltón leyó la *Crítica de la razón pura* de Inmmanuel Kant, que aún no había sido traducida al inglés y que era una obra bastante desconocida para los científicos británicos de la época, y quedó tan profundamente impresionado, que a partir de entonces su actividad científica sufrió un punto de inflexión influenciada directamente por la obra del filósofo alemán.

El 4 de noviembre de 1833, Hamilton presentó un artículo a la Real Academia Irlandesa con el nombre de *Teoría de funciones conjugadas, o parejas algebraicas*. En él, Hamilton definía operaciones de suma y multiplicación para las parejas, y demostraba que el cuadrado de la pareja $(0,1)$ es la pareja $(-1,0)$, de modo que $(0,1)$ debe considerarse como $\sqrt{-1}$; definió las propiedades aritméticas básicas para estas parejas, verificando que formaban un cuerpo[2]. Dos años después, el 1 de junio de 1835, Hamilton presentó un segundo artículo a la Real Academia Irlandesa, titulado *Ensayo preliminar y elemental de álgebra como ciencia del tiempo puro*[3]. En éste, Hamilton consideraba la noción de tiempo como principio y fundamento de la unidad numérica, y comentaba:

> *"La idea de continuidad en la progresión de un momento de tiempo a otro engloba la idea de una progresión continua, de manera semejante, en las cantidades...la existencia de un número o de una razón a que es la raíz*

[2] En una carta fechada en 1837 dirigida a Wolfgang Bolyai, Gauss describía que ya en 1831, el año en el que publicó su teoría sobre residuos bicuadráticos, había tenido la idea de la representación de los números complejos como parejas ordenadas de números reales. Hamilton, independientemente por su parte, fue el primero que publicó la idea.

[3] Este título tiene su origen en Kant pues los números reales como tiempo son definidos como la razón de la longitud de un segmento de recta sobre un segmento unidad. Kant pensaba que la geometría pertenecía al espacio y la aritmética al tiempo.

cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón b."

Siguiendo por este camino, y partiendo de la media proporcional de dos números positivos, establece que:

$$\text{si } a > \frac{n'}{m'} \text{ para } \frac{n'^2}{m'^2} < b \text{ y si } a < \frac{n''^2}{m''^2} > b, \text{ entonces } a = \sqrt{b}$$

Llega así a la introducción de $a = \sqrt{b}$, esto es, de los números irracionales, como una partición definida por dos sucesiones, p_i^2 y p_j^2, tales que:

$$p_i^2 < b < b_l^2, \text{ con } i,j = 1,2,3\ldots$$

Y no continúa desarrollando su teoría de los irracionales. Sólo le interesa definirlos mediante los racionales. Ambos artículos fueron fundidos en uno más general publicado más tarde en 1837.

Hamilton fue el primer matemático en tratar los números complejos como pares ordenados (sin obviar a Gauss puesto que no publicó sus avances), sin embargo es importante comentar que el espíritu de su análisis difiere tanto desde el punto de vista de los textos modernos, como de sus contemporáneos en Cambridge. La visión de los números complejos de los algebristas de Cambridge consistía en reducir todo planteamiento a un mero sistema de reglas para la manipulación simbólica carente de significado. Pero este enfoque era ajeno al pensamiento de Hamilton. Él consideraba el álgebra fuertemente interconectada con la física, donde la interpretación geométrica de los números complejos cobraba sentido como realidad material del mundo que nos rodea. Hamilton deseaba un enfoque del álgebra como ciencia (un conjunto de verdades que explicaran nuestra realidad física). Su ambición en este sentido consistió en establecer una referencia objetiva para las ecuaciones del análisis complejo. En su esencia, Hamilton influenciado por Kant, reclama que la geometría debe considerarse la ciencia del espacio, y de este modo, el álgebra es la ciencia del tiempo. Pero el desarrollo y avance de las investigaciones de Hamilton caminaban en contracorriente a la tendencia histórica establecida por los algebristas británicos de la época.

El punto de vista de Hamilton conllevaba grandes ventajas, la principal desmarcarse de la tendencia establecida, lo que le llevó al tratamiento de los números complejos desde un punto de vista puramente sintáctico y algebraico, hecho que le llevaría descubrir los cuaterniones más adelante. Si se está interesado en resolver ecuaciones algebraicas, entonces los números complejos satisfarán nuestras necesidades. Sin embargo si se tiene un sentido desarrollado de la geometría y de la interpretación física del plano complejo, es natural plantearse la analogía con el espacio tridimensional. Por otro lado, su concepción del álgebra como "ciencia del tiempo puro" (aparte de sus incuestionables repercusiones filosóficas), resultaban ser un fundamento inadecuado para el álgebra del siglo XIX. Hamilton tenía la creencia de que la naturaleza del tiempo requería que todas las operaciones fueran asociativas, y que la inversa del producto siempre existiera. Pero estos requerimientos habían encorsetado el desarrollo del álgebra británica. Desde un punto de vista retrospectivo, la exploración de las nuevas estructuras algebraicas, necesitaban de una concepción mucho más flexible.

5. Los Cuaterniones

Teoría de las funciones conjugadas, o parejas algebraicas: con un ensayo preliminar sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro, puede ser considerada como el primer intento de Hamilton de encontrar un álgebra que englobara un conjunto de axiomas basados en el "orden y progresión continua, o, del tiempo puro". Algunos puntos de este trabajo ya habían sido presentados a la Real Academia Irlandesa en 1833, pero el tratado completo no fue publicado hasta 1837. El trabajo se divide en tres partes, 5 páginas de *Observaciones Generales Introductorias*, 95 páginas de *Ensayo de álgebra como ciencia del tiempo puro*, y 29 páginas de *Teoría de funciones conjugadas, o parejas algebraicas*. Hamilton finaliza su trabajo con la afirmación:

> *"...el autor espera publicar más adelante muchas aplicaciones sobre este aspecto; especialmente sobre Ecuaciones e Integrales, y sobre la Teoría de Tripletas..."*

Las tripletas a las que hacía referencia eran números hipercomplejos referidos al espacio tridimensional del mismo modo que los números complejos se referían al espacio de dos dimensiones. Su deseo fue finalmente satisfecho en 1843, con la aparición de los cuaterniones como números hipercomplejos de cuatro números, tras una larga e infructuosa búsqueda de las tripletas.

Por analogía con los números complejos, al principio Hamilton consideró sus tripletas con la expresión $a + bi + cj$, donde a, b, y c eran números reales, y $i^2 = j^2 = -1$. La suma de estas expresiones no presentaba ninguna dificultad; estas eran sumadas, sumando cada uno de los coeficientes "escalares" de cada una de las unidades i y j del siguiente modo:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j$$

Pero Hamilton, se topó con una dificultad seria al intentar definir el producto de tripletas, ya que estas no guardaban las propiedades comunes de los números complejos. El módulo de un número complejo $a + bi$ resulta $a^2 + b^2$, de manera que el producto del módulo de dos números complejos resulta ser el módulo del producto de los dos números (lo que Hamilton denominó *ley de los módulos*). Pero al considerar el cuadrado de una tripleta, Hamilton se encontraba con lo siguiente:

$$(a + bi + cj)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij$$

cuyo cuadrado del módulo resultaba:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (2bc)^2$$

La ley de módulos no se satisfacía a menos que los términos ij fueran simplificados de la expansión de $(a^2 + b^2 + c^2)^2$. El término debe o bien suprimirse estableciendo $ij = 0$, o incluyéndolo en alguno de los otros tres términos. Hamilton consideraba que establecer $ij = 0$ no resultaba "suficientemente" correcto:

ISSN 2174-0410

> *"Por momentos me he visto tentado en considerar $ij = 0$. Pero me resulta extraño e incómodo, y me percaté de que la misma supresión del término no deseado, podría obtenerse asumiendo algo que me parecía menos violento, es decir que $ji = -ij$. De este modo consideré que $ij = k$, $ji = -k$, reservándome la consideración de si k era nulo o no."*

Su pensamiento aquí es que, si el orden del producto es escrupulosamente respetado, hay en realidad dos términos involucrados en el producto de i y j, es decir, que $2bcij$ debería ser escrito como $bc(ij + ji)$. La ley de módulos podría satisfacerse fácilmente asumiendo que $ij + ji = 0$, sin considerar separadamente ni ij ni ji nulos.

El siguiente paso a dar era el de generalizar el producto de tripletas. Bajo la consideración de que $ij = -ji = k$, Hamilton calculo el producto:

$$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + (ay + bx)i + (az + cx)j + (bz - cy)k$$

Considerando $k = 0$, Hamilton nuevamente se preguntaba si la ley de módulos era satisfecha. Es decir si la ecuación:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2$$

era satisfecha. La respuesta es claramente que no; el lado izquierdo de la igualdad es superior al derecho en el término $(bz - cy)^2$, que es el cuadrado del coeficiente de k en la expansión del producto. Por lo tanto, la asunción de que $k = 0$ no era sostenible. Sin embargo, si se consideraba $k \neq 0$, no se satisfacía enteramente porque el producto de dos tripletas debiera ser otra tripleta, y el producto indicado contenía cuatro términos en lugar de tres. Durante prácticamente diez años Hamilton fue incapaz de avanzar en este sentido. Cada mañana en el desayuno, sus hijos que en cierto modo participaban con afecto en las esperanzas y los desengaños de su padre a medida que las investigaciones tenían lugar, le preguntaban:

> *"Bueno Papá, ¿puedes ya multiplicar las tripletas?."*

a lo que Hamilton respondía sacudiendo tristemente la cabeza:

> *"No. Por ahora sólo puedo sumarlas y restarlas."*

Sin embargo, algo extraordinario iba a suceder mientras paseaba como de costumbre con su mujer por el Canal Real en Dublín el 16 de octubre de 1843. De pronto en un acto de revelación, Hamilton se dio cuenta de que todas sus dificultades podían verse superadas simplemente con la consideración de tomar cuatro términos en lugar de tres, es decir, si tomaba k como una tercera unidad imaginaria añadida a i y j. Hamilton describe este hecho quince años después en una carta a uno de sus hijos:

> *"Mañana será el decimoquinto cumpleaños de los cuaterniones. Surgieron a la vida, o a la luz, ya crecidos, el 16 de octubre de 1843, cuando me encontraba caminando con la Sra. Hamilton hacia Dublín, y llegamos*

> *al Puente de Broughman. Es decir, entonces y ahí, cerré el circuito galvánico del pensamiento y las chispas que cayeron fueron las ecuaciones fundamentales entre i, j, k; exactamente como las he usado desde entonces. Saqué, en ese momento, una libreta de bolsillo, que todavía existe, e hice una anotación, sobre la cual, en ese mismo preciso momento, sentí que posiblemente sería valioso el extender mi labor por al menos los diez (o podían ser quince) años por venir. Es justo decir que esto sucedía porque sentí, en ese momento, que un problema había sido resuelto, un deseo intelectual aliviado, deseo que me había perseguido por lo menos los quince años anteriores. No pude resistir el impulso de coger mi navaja y grabar en una piedra del Puente Brougham la fórmula fundamental con los símbolos i, j, k:*
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
>
> *que contenían la solución del Problema, que desde entonces sobrevive como inscripción."*

Hamilton denominó a estas nuevas expresiones *cuaterniones*, o *números cuaternios*. Son números hipercomplejos de la forma $q = a + bi + cj + dk$, donde a, b, c y d son números reales, e i, j y k satisfacen la relación $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Habiendo asumido que $i^2 = j^2 = -1$ y que $k = ij = -ji$, parecía claro para Hamilton que:

$$k^2 = (ij)(ij) = -(ji)(ij) = -ji^2j = j^2 = -1$$

Para comprobar la ley de módulos, todavía necesitaba valores para ik y kj. No estando seguro aún de que la propiedad asociativa se cumpliera en los cuaterniones, Hamilton concluyó:

> *"...tenemos probablemente que $ik = -j$, porque $ik = iij$, y $i^2 = -1$; de este modo podemos esperar encontrar que $kj = ijj = -i$."*

La propiedad asociativa le habría proporcionado el valor para ki, de modo $ki = (-ji)i = -ji^2 = (-j)(-1) = j$. Pero Hamiltón prefirió argumentarlo del siguiente modo:

> *"...de ella consideré que resultaba que $ki = j$, $jk = i$, porque parecía evidente que si $ji = -ij$, deberíamos tener también que $kj = -jk$, $ik = -ki$. "*

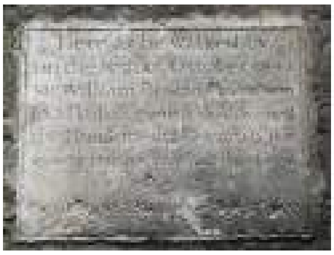
Resumiendo las "asunciones" del producto (como Hamilton las llamaba) para los cuaterniones resulta:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Obsérvese, que para dos cuaterniones q y q', en general no es igual el producto qq' que el de $q'q$. El nuevo álgebra de los cuaterniones obedece las propiedades fundamentales de la aritmética tradicional a excepción de la propiedad conmutativa. La aceptación del álgebra no conmutativa puede ser considerado

ISSN 2174-0410

un destello de su genialidad. Para Hamilton debió resultar bastante complicado ir en contra de la tendencia establecida por los algebristas de su época, muy similar al que debieron sufrir los fundadores de las geometrías no euclídeas (Bolyai y Lobachevsky fundamentalmente) al considerar abstraerse del conservadurismo geométrico reinante durante más de dos milenios, y romper con el quinto postulado de las paralelas. Hamilton debió realizar el sacrificio de renunciar a la propiedad conmutativa, lo que daría lugar a la eclosión de las nuevas álgebras donde esta propiedad no era necesaria. De hecho, durante los tres meses siguientes a la aparición de los cuaterniones de Hamilton, John Thomas Graves realizó en 1843 un estudio (aunque no lo publicó) sobre los *octoniones*[4], que formaban un álgebra 8-dimensional, donde el producto no satisfacía ni la propiedad conmutativa ni la propiedad asociativa.



Placa en el Puente de Brougham

Sello irlandés conmemorativo de la Serie Europa (1983)

Hamilton estaba absolutamente convencido de que los cuaterniones se convertirían en la herramienta precisa con la que poder describir la realidad de espacio físico y el tiempo. De modo que el tiempo es un escalar, y los puntos de espacio están definidos por las tres coordenadas reales. A fin de especificar la operación necesaria para convertir un vector en otro en el espacio, era necesario conocer cuatro números, la relación entre la longitud de un vector y otro, el ángulo entre ellos, el nodo, y la inclinación del plano en el que estos vectores se encuentran.

Sellos irlandeses conmemorativos del centenario del descubrimiento de los Cuaterniones (1943)

Durante los últimos 22 años de su vida, la carrera científica de Hamilton se centró casi de manera exclusiva en el desarrollo de los cuaterniones, aplicándolos a la dinámica, astronomía y la teoría de la luz. Fueron años preponderadamente tristes y solitarios, debido a enfermedades frecuentes y a las ausencias de su esposa. A finales del año 1865, se habían publicado casi 150 artículos sobre el asunto, 109 de ellos de la mano de Hamilton. Diez años después de su descubrimiento, Hamilton publicó sus *Lecciones sobre Cuaterniones*, un trabajo de 736 páginas con un Prefacio adicional de 64 páginas. El libro en cierto modo resultó difícil de entender por los matemáticos de la época, hasta el punto de que un colega escribió a Hamilton:

[4] Cabe destacar que el matemático Arthur Cayley fue el primero en publicar sobre ellos en 1845, por lo que también son denominados *números de Cayley*.

"Lleva más de un año leerlo, y casi una vida comprenderlo."

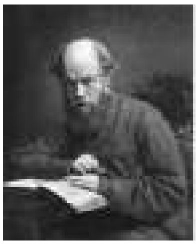
A petición de algunos amigos, Hamilton comenzó a escribir una introducción a los cuaterniones con ejemplos y problemas; pero una vez más su excesiva verborrea le llevó a escribir *Los Elementos de los Cuaterniones*, editado de manera póstuma por el primogénito de Hamilton, que resultaría incluso más extenso que *Lecciones* (762 páginas impresas).

6. Vectores y Cuaterniones

Hermann G. Grassmann

Ya comentamos en nuestra introducción la importancia de los trabajos del alemán Hermann G. Grassmann en el desarrollo de las nuevas álgebras que estaban por venir en la segunda mitad del siglo XIX. Después de proponer en su *Ausdehnungslehre* nuevas bases para todas las matemáticas, comenzando con definiciones de naturaleza más bien filosófica, Grassmann demostró que si la geometría se hubiese expresado en forma algebraica como él proponía, el número tres no hubiese desempeñado el papel preponderante que hoy día tiene como número que expresa el espacio que nos rodea; de hecho, el número de posibles dimensiones de interés para la geometría es ilimitado. Grassmann no pudo formalizar su trabajo ya que en aquel momento no existía un lenguaje algebraico adecuado donde sus ideas pudieran ser plasmadas. Sin embargo, su álgebra lineal fue comprendida y reconocida finalmente alrededor de 1920, cuando Hermann Weyl y otros publicaron su definición formal que ya había sido estudiada y formulada 30 años atrás por el matemático italiano Giusseppe Peano (1858-1932). Grassmann desarrolló la teoría de la independencia lineal de modo extraordinariamente similar a la presentación que hoy día podemos encontrar en los textos modernos de álgebra lineal. Definió la noción de subespacio, independencia, longitud, desdoblamiento, dimensión, unión e intersección de subespacios, y proyección de elementos en los subespacios. Fue a principios del siglo XX cuando los trabajos de Grassmann comenzaron a ser considerados y valorados. Sin embargo a pesar de ello tuvo algunos incondicionales como su compatriota Hermann Hankel (1839-1873), que escribió *Theorie der complexen Zahlensysteme und ihre Functionen* en 1867, donde llevó a cabo una clara y concisa comparación desde el punto de la notación del cálculo cuaterniónico con el grassmaniano. De hecho, previamente el propio Grassmann encontró una forma de reducir su cálculo al formalismo de los cuaterniones.

El trabajo de Grassmann consistió fundamentalmente en una generalización del actual *producto vectorial*, de ahí su valor. Grassmann se guió de su intuición geométrica, definiendo un nuevo producto que en la actualidad se denomina *producto exterior* ($ab = a \wedge b$) que él denominaba producto *escalón*, relacionado íntimamente con el actual producto vectorial, pero sin la restricción de una dimensionalidad fija de éste. Debido a un actual abuso de la notación, algunos docentes y profesores expresan erróneamente el producto vectorial con el símbolo $\wedge$, a pesar de que conceptualmente son diferentes en origen y formulación, ya que el producto exterior es asociativo, mientras que el producto vectorial o producto *cruz* no lo es al ser un álgebra de Lie.




Peter Guthrie Tait *James Clerk Maxwell*

El descubrimiento de los cuaterniones nunca colmaron las expectativas que Hamilton había depositado en ellos con el fin de crear un lenguaje matemático aplicable a la realidad física. Sin embargo, Hamilton contó con un ingente número de defensores a ultranza en favor de la utilización de los cuaterniones en el desarrollo de la física. Entre ellos caben destacar a los físicos escoceses Peter Guthrie Tait (1831-1901) y James Clerk Maxwell (1831-1879), aunque este último, más que defender el uso de los cuaterniones, defendió su metodología como acercamiento de la realidad física. De hecho, Tait escribió *Tratado Elemental sobre Cuaterniones* en 1867, en el que reclamaba la importancia de los cuaterniones en la física. El tratado de Tait, contenía equivalencias con las operaciones modernas del producto escalar y vectorial de vectores, aunque desarrolladas en notación cuaterniona. En particular, especificaba que $S.\alpha\beta = -T\alpha T\beta \cos\theta$, donde T es la longitud del vector y θ es el ángulo entre α y β, y entonces $V.\alpha\beta = T\alpha T\beta \operatorname{sen}\theta \cdot \eta$ donde η es el vector unitario perpendicular a ambos α y β.

Por su parte Maxwell, en su *Tratado sobre Electricidad y Magnetismo*, también defendió en cierto modo las ideas de Hamilton. Su principal propósito era evitar explícitamente las coordenadas cartesianas, y fijar su estudio desde un punto del espacio en lugar de en tres coordenadas, y considerar la magnitud y dirección de una fuerza en lugar de sus tres componentes. Maxwell expresó sus resultados tanto en la forma de coordenadas como en la forma cuaterniona. En los preliminares de la segunda edición de su tratado comentaba:

> *"Pero aún por muchos propósitos del razonamiento físico, para diferenciarlo del cálculo, es deseable evitar explícitamente el uso de las Coordenadas Cartesianas y fijar la atención en un punto del espacio en lugar de en sus coordenadas, y en la magnitud y dirección (de la fuerza) en lugar de en sus tres componentes. Esta forma de comprender geométrica y físicamente magnitudes es más primaria y natural que la otra, aunque las ideas conectadas a ésta no encontraron su completo desarrollo hasta que Hamilton dio un gran salto en el tratamiento del espacio, mediante el invento del Cálculo de los Cuaterniones. (...) Ya que los métodos de Descartes son todavía aquellos con los que los estudiantes de ciencias están más familiarizados, además de ser los más útiles para realizar cálculos, por lo que expresamos todos nuestros resultados en la forma cartesiana. Estoy convencido, sin embargo, que la introducción de las ideas y métodos de los Cuaterniones, será de un gran uso para el estudio de todas las partes de nuestra materia, y especialmente de la electrodinámica, donde tenemos que tratar con un gran número de magnitudes físicas, y las relaciones entre ellas pueden ser expresadas de forma muy simple haciendo uso del método de Hamilton, en lugar de las ecuaciones de costumbre. (...) 11. Una de las características más importantes del método de Hamilton, es la división de las magnitudes en Escalares y Vectores."*

Pero Maxwell no estaba de acuerdo con el Cálculo desarrollado por Hamilton, y llevó a cabo una crítica directa de la existencia en la constitución de los cuaterniones de dos partes no homogéneas, una parte escalar y una parte vectorial (geométrica). De ahí su aceptación de las ideas vinculadas con esta teoría pero su rechazo de sus métodos de cálculo.

William K. Clifford

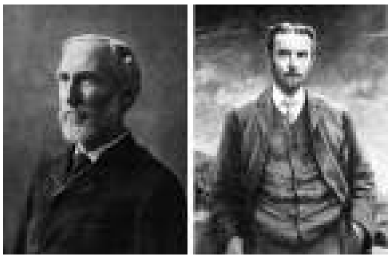
El primer intento por llevar a cabo una transición desde el método de los cuaterniones hacia lo que actualmente denominamos *análisis vectorial*, fue llevado a cabo por el matemático William Kingdom Clifford (1845-1879). Hoy día es ampliamente conocido por sus *álgebras de Clifford*, un tipo de álgebra asociativa que generaliza al cuerpo de los números complejos y a los cuaterniones de Hamilton. Un resultado posterior, los octoniones (bicuaterniones), es ahora conocido como espacio de Clifford-Klein y es empleado para el estudio de movimientos en espacios no euclidianos y en ciertas superficies. En su *Elementos de Dinámica* publicado en 1878, introdujo el producto vectorial, prácticamente tal y como hoy lo conocemos, aunque sólo un refinamiento posterior de la teoría de determinantes acabó de darle la forma, esto es:

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

También introdujo la noción de *producto geométrico*, que funde los productos escalar y exterior en un solo objeto mediante las álgebras que hoy se nombran en su honor. Dicho producto es muy similar al producto de cuaterniones pero no está restringido a 4 dimensiones. Vale:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

Clifford, reveló la importancia del uso de métodos vectoriales en detrimento de los cuaterniones cuyo uso era demasiado limitado. De este modo sus consideraciones para establecer un nuevo producto son fundamentalmente geométricas. Clifford interpretó el área de un paralelogramo como generada por el movimiento de un vector ab sobre un vector ac, definiendo así el producto vectorial, cuyo resultado es un vector de longitud $(ab \cdot ac)\,\text{sen}\,\widehat{bac}$ y cuya dirección depende del sentido de recorrido. Por otro lado el examen de un volumen construido en torno a la transición de ab (el cual representa ahora un área) a lo largo de ac, determina el segundo producto, el producto escalar, como la magnitud $(ab \cdot ac)\cos\widehat{bac}$. Esas dos multiplicaciones son evidentemente equivalentes a las que se obtienen con los cuaterniones (de hecho, no es totalmente un azar si las notaciones empleadas son similares), pero, y es la gran diferencia con Maxwell, Clifford se deshace del poco atrayente manejo de los cuaterniones para considerar productos de dos vectores de manera separada, lo que no hacían los científicos anteriores quienes veían en ellos las dos partes de un mismo y único producto.



Josiah Williard Gibbs *Oliver Heaviside*

A finales del siglo XIX se realizaron algunos descubrimientos físicos debido a la aparición de los cuaterniones. Pero una pequeña revolución matemática estaba a punto de hacer aparición de la mano (de forma independiente) del matemático americano Josiah Williard Gibbs (1839-1925) de la Universidad de Yale, y del matemático inglés Oliver Heaviside (1850-1925). Ambos publicaron sus trabajos en los años 1881 y 1882 respectivamente. Heaviside participó de forma activa en la extensión de las ecuaciones de campo de Maxwell y proporcionó algunas de las primeras soluciones completas. En el estudio del electromagnetismo, Maxwell había utilizado los cuaterniones, pero de un modo muy simplificado. Para los propósitos pedagógicos y sistematizadores de Heaviside esto no era suficiente, por lo que elaboró el análisis vectorial como un álgebra independiente, formulada en el capítulo III de *Teoría del Electromagnetismo* del mismo modo que hoy día sigue siendo la forma actual, donde se encuentran las razones de su rechazo a la teoría cuaterniona, razón por la que en multitud de ocasiones mantuvo polémicos enfrentamientos con P. G. Tait. Paralelamente al trabajo de Heaviside, Gibbs desarrolló un cálculo simbólico separando las partes vectorial y escalar de los cuaterniones. A diferencia de Heaviside, su claridad y rigor matemático llevó a dar un impulso a los métodos de éste. En particular, por ejemplo, desarrolló la teoría del operador *nabla*, en su expresión actual, con todas sus matrices, esto es, rotacional, divergencia, gradiente e identidades. Utilizando sólo la porción vectorial de un cuaternión para representar cantidades físicas, es decir, $u = bi + cj + dk$, desarrolló un nuevo sistema tridimensional denominado *análisis vectorial*. En lugar de hacer uso del producto de los cuaterniones de Hamilton, introdujo dos nuevos tipos de multiplicación; por un lado, el producto escalar de $v = bi + cj + dk$ y $v' = b'i + c'j + d'k$, definido por:

$$v \cdot v' = bb' + cc' + dd'$$

y el producto vectorial dado por:

$$v \times v' = (cd' - c'd)i + (db' - b'd)j + (bc' - b'c)k.$$

A pesar de la defensa a ultranza de los cuaterniones por parte de los seguidores de Hamilton, finalmente las teorías vectoriales de Gibbs y Heaviside se impusieron, gracias sobre todo a los desarrollos refinados del álgebra y la teoría de determinantes, que hizo que el análisis vectorial fuera tomando cuerpo como entidad independiente, no sin antes dejar algún enfrentamiento dramático con los cuaternionistas liderados fundamentalmente por Tait, que se negaban a reconocer la utilidad práctica de la nueva estructura creada. Sin embargo, tras la publicación de *Análisis Vectorial* de Gibbs en 1901 (su publicación de 1881 se realizó de forma privada a modo de libro de texto para sus estudiantes), y la publicación de los nuevos tratados sobre electromagnetismo en lenguaje vectorial, los cuaterniones fueron progresivamente reemplazados. En cierto modo, el origen del mismo análisis vectorial quedó envuelto en un poderoso lenguaje matemático autoconsistente del que quedaron las unidades imaginarias, sino

¿quién jamás sintió curiosidad por saber de donde salían las letras i, j, k del determinante formal que permite calcular el producto vectorial?.

7. La semilla de Hamilton

Alfred N. Whitehead

Max Planck

En el año 1900, el matemático Alfred North Whitehead (1861-1947) consideró que si bien toda la física hasta entonces conocida podía ser tratada por los métodos del álgebra ordinaria, era posible que pudieran aparecer algún día nuevos campos en la física para los cuales el álgebra no conmutativa sería la única representación natural. En aquel mismo año comenzó el camino hacia la realización de esta conjetura. Max Planck (1858-1947) introdujo el cuanto h, el comienzo de la teoría cuántica. Ahora bien, h es un cuanto de acción, y la acción era un concepto central en el sistema de la dinámica de Hamilton. Así, las ideas de Hamilton sobre dinámica comenzaron a aparecer en primer plano, aunque muy lentamente.

Arthur Cayley

La buena semilla siguió creciendo, sin embargo. El descubrimiento de la relatividad especial trajo los cuaterniones al primer plano, porque Arthur Cayley (1821-1895), de la Universidad de Cambridge, había demostrado en 1854 que los cuaterniones podían ser aplicados a la representación de rotaciones en un espacio de cuatro dimensiones. Su resultado produjo una expresión particularmente elegante de la transformación más general de Lorentz. Por otra parte los nuevos descubrimientos subrayaron de nuevo la importancia de la acción, que preserva su forma en diferentes sistemas de referencia y es, por tanto, fundamental en la física de la relatividad.

Werner Heisemberg

Max Born

Pascual Jordan

Mientras tanto, las investigaciones en la teoría cuántica ponían de manifiesto las concepciones dinámicas que Hamilton tenía. Y en 1925 el otro aspecto de su trabajo, su álgebra no conmutativa, fue introducida en la teoría cuántica por Werner Heisenberg (1901-1976), Max Born (1882-1970) y Pascual Jordan (1902-1980), demostrando que las ecuaciones hamiltonianas de la dinámica eran también válidas en teoría cuántica, de modo que los símbolos que representaban las coordenadas y los momentos en la dinámica clásica fueron interpretados como operadores cuyos productos no conmutaban.

El tiempo dio la razón a la intuición que Hamilton tenía sobre la dualidad entre las coordenadas generalizadas y los momentos generalizados. Esto vino a ser demostrado de una forma sorprendente en 1927, cuando Heisenberg descubrió el *Principio de Indeterminación*, que se enuncia comúnmente de esta forma:

> *"Cuanto más exactamente son determinadas las coordenadas de una partícula, menos exactamente puede ser conocido su momento, y recíprocamente, siendo el producto de las dos indeterminaciones del orden de la constante de Plank h."*

Wolfgang E. Pauli

Arthur Conway

Paul A.M. Dirac

Las investigaciones en mecánica cuántica tuvieron la tendencia general de considerar las matrices en lugar de los cuaternios como el tipo de álgebra no conmutativa que mejor se adaptaba a sus problemas; pero las fórmulas originales de Hamilton continuaban apareciendo. Así, "las matrices de spin", de Wolfgang Erns Pauli (1900-1958), de las que depende la teoría de las refracciones y momentos angulares de la mecánica cuántica, son simplemente las tres unidades de los cuaterniones de Hamilton, i, j, k. Arthur Conway (1875-1950) demostró que los métodos de los cuaterniones podían ser utilizados para explicar la teoría del giro del electrón propuesta por Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984).

Referencias

[1] BELL, Eric Temple. *Men of Mathematics*, pp. 340–361, Simon & Schuster, Inc, New York, 1986.

[2] BURTON, David M. *The History of Mathematics: An Introduction*, 6th. Ed., pp. 626–635, The McGraw-Hill Company, USA, 2007.

[3] EWALD, William. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics Vol.I*, pp. 362–369, 375–444, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[4] GONZÁLEZ HERNÁNDEZ, Juan Francisco. *El Producto Vectorial*, Trabajo tomado de la página del Profesor Fernando Chamizo Llorente del Departamento Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Madrid. http://web.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/

[5] GRAVES, Robert Perceval. *Life of Sir William Rowan Hamilton, Vols.I* (1882), *II* (1885), *III* (1889), University Press, Dublin.

[6] GUTIÉRREZ, Santiago. *Hamilton: La Liberación del Álgebra*, pp. 95–99, Revista *Suma*, Nº 49, Junio, Valencia, 2005.

ISSN 2174-0410

[7] HAMILTON, William Rowan. *Lectures on Quaternions*, Hodges and Smith, Dublín, 1853.

[8] HAMILTON, William Rowan. *Elements of Quaternions*, Longmans Grenn & Co., Londres, 1866.

[9] JAMES, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 109–116, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[10] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pp. 682–686, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[11] LOVETT, Richard. *Ireland illustrated with Pen and Pencil*, pp. 22, 31, Hurst & Company, Nueva York, 1891.

[12] MARTÍNEZ-SIERRA, Gustavo y POIRIER, Pierre François Benöit. *Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial*, pp. 205–206, Revista *Latin American Journal Physics Education* Vol. 2, Nº 2, Mayo, México, 2008.

[13] SMITH, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 677–683, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1929.

[14] WHITTAKER, Edmund. *William Rowan Hamilton*, Revista *Scientific American*, Mayo, 1954, reimpresa en *Mathematics in the Modern World*, pp. 49–52, Freeman, San Francisco, 1968.

[15] EN LA RED,
http://es.wikipedia.org/wiki/John_Wallis
http://es.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton
http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem
http://colnect.com/en/stamps/stamp/9359-Dunsink-observatory-Ireland
http://whatever123.glogster.com/william-rowan-hamilton/
http://es.wikipedia.org/wiki/Hermann_Grassmann
http://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Guthrie_Tait
http://es.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell
http://es.wikipedia.org/wiki/William_Kingdon_Clifford
http://es.wikipedia.org/wiki/Josiah_Willard_Gibbs
http://es.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside
http://plato.stanford.edu/entries/whitehead/
http://www.fis.usb.ve/rcastell/fismod/problemarios/crono.html
http://www.ugr.es/~eaznar/fotos_cayley.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg
http://es.wikipedia.org/wiki/Max_Born
http://www.nndb.com/people/144/000099844/
http://es.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Ernst_Pauli
http://ens.math.univ-montp2.fr/SPIP/-Arthur-Conway-
http://ca.wikipedia.org/wiki/Paul_Adrien_Maurice_Dirac

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas
Abel y la imposibilidad de resolver la "quíntica" por radicales

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo ofrece en su última sección, una traducción comentada de la memoria que Niels Henrik Abel publicó en 1824, para demostrar la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado mediante radicales (Teorema de Abel-Ruffini). Además se ofrece una visión general de las dificultades que debió sufrir a lo largo de su vida, anhelando siempre un puesto de privilegio entre la comunidad científica de su tiempo, que sistemáticamente le negó el lugar que la historia de la matemática acabó reservándole.

Palabras Clave: Abel, Quíntica, ecuaciones algebraicas, método de los radicales.

1. Introducción

A lo largo de la historia, fueron muchos los que intentaron resolver las ecuaciones de grado cinco y superior por métodos de radicales, al igual que se había llegado previamente a esta solución para la cuadrática, cúbica y bicuadrática. Pero todos y cada uno de ellos lamentablemente desconocían que este logro era imposible de lograr. Ya Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en su *Disquisitiones Arithmeticae* (1799) había "intuido" esta posibilidad, aunque no ofreció demostración alguna. Haciendo uso de los trabajos sobre "permutaciones" de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Paolo Ruffini (1765-1822), fue el primero en acertar con la estrategia utilizada para demostrar que las ecuaciones polinómicas de grado superior al cuarto son irresolubles por radicales, problema que permanecía abierto desde el siglo XVI y que sería finalmente resuelto por el francés "alma gemela"[1] de Abel, Evariste Galois (1811-1832). Lamentablemente el trabajo de Ruffini no fue del todo aceptado por los matemáticos del momento, quizás debido a la todavía "en pañales" teoría de las permutaciones de Lagrange o quizás por la negación a la aceptación de la imposibilidad de resolver algunas ecuaciones mediante radicales. El caso es que estudios posteriores confirmaron que había una pequeña laguna en los trabajos de Ruffini, lo que hacía de su demostración insuficiente.

El ataque definitivo del problema se llevaría a cabo desde las gélidas tierras noruegas, donde el joven matemático Abel (con tan sólo 21 años) demostraría definitivamente esta imposibilidad de resolver la ecuación de grado cinco por métodos radicales, y lo que resulta evidente debido al aislamiento de Noruega a principios del siglo XIX, de forma independiente a los resultados obtenidos por Ruffini. Abel basó principalmente su estrategia y esfuerzos en los resultados sobre permutaciones obtenidos por Lagrange y por una figura admirada y a la vez en cierto modo odiada (más adelante en la breve biografía de Abel el lector sabrá por qué digo esto) como Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Cabe destacar que el trabajo en cuestión de Cauchy sobre permutaciones (1815) estaba basado fundamentalmente en los trabajos de Ruffini, sin embargo éste le fue ajeno a Abel, quien desconocía en 1824, año en el que preparó su memoria, los trabajos del ilustre italiano.

2. Niels Henrik Abel (1802-1829)

Niels Henrik Abel

Sobre la vida y obra de Niels Henrik Abel se ha escrito una gran cantidad de bibliografía. Casi toda, por no decir la totalidad, coincide en una misma afirmación, que Abel ha sido el matemático escandinavo más brillante de la historia. Su vida presenta todos los ingredientes de un melodrama; la pobreza de un genio que muere consumido en su barrio natal, mientras que egoístas académicos le niegan un lugar privilegiado entre ellos que tanto necesitaba y merecía. Desafortunadamente, estos mismos académicos sólo fueron capaces de rectificar la injusticia cometida con él cuando ya era demasiado tarde, el cuerpo y el genio de Abel se habían ido apagando poco a poco, víctimas de la incomprensión y la tuberculosis.

Søren Georg Abel, párroco luterano de una pequeña isla de la ciudad de Stavenger llamada Finnøy, en la costa sudoccidental noruega, era un ambicioso teólogo educado en la Universidad de Copenhage; su mujer, Anne Marie Simonsen, era la hija de Niels Henrik Saxild Simonsen, un mercader de Risør, dueño de una flota de barcos. Su segundo hijo Niels Henrik, nació el 5 de Agos-

[1] Podemos considerar que las vidas de ambos tuvieron una particular similitud. Ambos sufrieron una genialidad incomprendida para los conservadores cánones de la época que les tocó vivir. Ambos murieron jóvenes, sin darles tiempo a disfrutar de un futuro más prometedor, acorde a los resultados que fueron capaces de alcanzar. Juntos sentaron las bases del nacimiento del álgebra moderna, y sin embargo, nunca fueron suficientemente reconocidos en vida.

to de 1802. Fue el segundo de siete hermanos (seis niños y una niña). Cuando Niels tenía sólo un año de edad, su padre fue designado pastor de un lugar llamado Gjerstad cerca de Risør. Aquellos primeros años fueron tiempos difíciles, dado que Noruega pasaba por un época crítica para su desarrollo político y económico.

Iglesia de Gjerstad. Foto tomada en torno a 1890-1895

En el país dominaba la pobreza, el hambre, y la carestía. Antes en 1789 había comenzado la Revolución francesa, y años más tarde, el gran conquistador Napoleón en el apogeo máximo de su poder e influencia sobre Europa, había forzado a Noruega a la unión política con Dinamarca, y aunque ambas naciones pretendieron ser neutrales en el transcurso de las guerras que se desencadenaron, sufrieron un fuerte ataque naval de Inglaterra en Copenhague (1801), y un bloqueo de la costa noruega en 1807, además de tener que afrontar posteriormente un enfrentamiento militar con Suecia (1813). Tras las guerras napoleónicas, dado que los noruegos habían realizado varios intentos de independizarse de Dinamarca sin éxito, su padre, un profundo nacionalista, y habida cuenta de su actividad política , fue considerado para ser elegido miembro en el cuerpo legislativo del Storting o Parlamento Noruego, encargado en 1814 de reescribir la constitución noruega con el fin de disolver la unión con Dinamarca y pactar la anexión a Suecia, monarquía bajo el reinado de Carlos XIII.

Cristianía en julio de 1814
Pintura de Margrethe Kristine Tholstrup

Unos años antes, Søren, que era un intelectual que leía con asiduidad a Voltaire, había promovido campañas de alfabetización y vacunación en la Noruega rural. También promovió la fundación de la primera Universidad noruega en Cristianía[2] que tuvo lugar en 1811, la cual se pudo crear al proveerse de un cuerpo docente constituido por los mejores maestros de la Escuela Catedralicia de Cristianía (existente desde la Edad Media), inaugurando la docencia universitaria en 1813. Pero Noruega estaba inmersa en una profunda crisis, y el padre de Abel

[2] En 1624, se produjo un incendio que destruyó gran parte del Oslo medieval (la parte ahora conocida como Gamlebyen) y la nueva ciudad fue ubicada cerca de la Fortaleza de Akershus. El Rey Cristián IV de Dinamarca y Noruega renombró la nueva ciudad como Christiania (o Cristianía, en castellano). Desde finales de los años 1800, el nombre de la ciudad apareció escrito también como "Kristiania". No se aprobó oficialmente ninguna de ellas, por lo que ambas eran válidas y se aceptaban sus usos. El nombre original de Oslo fue recuperado en una ley del 11 de julio de 1924, siendo efectiva a partir del 1 de enero de 1925.

ISSN 2174-0410

fue incapaz de resolver la precaria situación familiar, por lo que difícilmente pudo lograr escolarizar a su primogénito y a Niels Henrik.

A la edad de trece años, en 1815, su hijo Niels ingresaría a duras penas en la Escuela Catedralicia de Cristianía. La escuela tenía una inmejorable reputación, pero acababa de perder a parte de sus mejores profesores que se habían mudado a la Universidad Real Frederik, lo que provocó que parte del entusiasmo intelectual de los alumnos de la Catedralicia se viera pronto frenado. Al principio de su instrucción, Abel se mostraría como un estudiante indiferente, más bien mediocre y sin que ni siquiera las matemáticas le despertaran atracción alguna. Sin embargo, afortunadamente, se produjo un inesperado cambio en su actitud tras la muerte de un condiscípulo suyo ante los malos tratos recibidos por un maestro brutal que se excedía con métodos pedagógicos mediante castigos corporales a sus alumnos. El maestro fue entonces relevado (1818) por un joven aunque capacitado profesor matemático llamado Bernt Michael Holmboë (1795-1850), quien inició su misión motivando a sus alumnos para que resolvieran por sí mismos algunos problemas de álgebra y geometría. Supo así vislumbrar entonces el gran potencial de Abel, teniendo que escoger cuestiones especiales para él, a la vista de su enorme capacidad. Según coinciden varios historiadores, es en aquel momento crucial de la vida de Abel, cuando *"se consagra a las matemáticas con la pasión más ardiente"*, adquiriendo rápidamente un pleno conocimiento de las matemáticas elementales.

Bajo las enseñanzas de Holmboë, el joven Abel comenzó a familiarizarse con trabajos de mayor nivel como los de L. Euler (1707-1803) sobre el cálculo (obras que fueron textos universitarios durante más de cien años)[3], Lagrange y Laplace. Registros Bibliotecarios, acreditan que durante su primer año universitario, Abel había solicitado en préstamo, la *Arithmetica Universalis* y *Principia Mathematica* de I. Newton, *Disquisitiones Arithmmeticae* de C. F. Gauss, o *Calcul de fonctions* de J. L. Lagrange entre otras obras de grandes maestros. Años más tarde le preguntaron cómo pudo situarse tan rápidamente en primera fila, a lo que Abel replicó:

Bernt Michael Holmboë

"... estudiando a los maestros, no a sus discípulos."

En esta época, la carrera política del padre de Abel acababa de forma inesperada y trágica en Septiembre de 1818, expulsado del Parlamento debido a falsas acusaciones contra algunos de sus colegas. Inmerso en una profunda depresión, Søren se había refugiado en la bebida como válvula de escape a sus problemas lo que le hizo enfermar gravemente. El padre de Abel fallecía sólo dos años después en 1820. Como anécdota, en el funeral, su viuda Anne Marie Abel bebió en exceso y se fue a la cama con uno de sus sirvientes a la vista de todos los asistentes al acto. Esta pérdida sumiría a la familia en una situación crítica, recayendo sobre Abel una gran responsabilidad para su sustento, ya que su hermano mayor estaba incapacitado para trabajar por enfermedad.

[3] A los 16 años, Abel generalizó el teorema del binomio formulado por Isaac Newton (y extendido luego a los números racionales por Euler), dando una prueba válida, no sólo para números enteros y racionales, sino también para los casos de exponentes irracionales e imaginarios.

Su madre cayó en una profunda depresión difícil de superar lo que la hizo convertirse en una alcohólica.

En 1821, a pesar de la precaria situación en la que vivían él y su familia, Abel logra ser matriculado en la Universidad Real Frederik y en atención a una solicitud tramitada por su mentor Holmboë, se le concede a Abel con carácter excepcional, alojamiento gratuito y una modesta aportación monetaria para pequeños gastos (parte de la misma sufragada particularmente por el propio Holmboë). En aquel entorno universitario y en su ciudad, Abel ya estaba reconocido como un genio sobre el que sus profesores comenzaban a depositar grandes esperanzas desde el punto de vista científico.

Niels Henrik Abel (retrato original)[4]

Durante su último año en la universidad, cuando sólo tenía veinte años, Abel comenzó a atacar el viejo problema de encontrar la solución de la ecuación general quíntica mediante operaciones algebraicas. En términos concretos, se trataba de encontrar la solución mediante radicales de la ecuación general de quinto grado $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$; es decir, hallar una fórmula que exprese sus raíces en términos de coeficientes a, b, c, d, e y f dados, de modo que sólo incluya un número finito de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Abel no sólo estuvo al tanto de los trabajos desarrollados por Cardano, Tartaglia y Bombelli para las ecuaciones cúbica y cuártica, sino que conocía muy bien la problemática pendiente, estimulado por el trabajo de algunos maestros como Lagrange y su obra "*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*" (1770)[5] donde había reconsiderado críticamente los métodos y fracasos de todas las tentativas de búsqueda de soluciones para las ecuaciones algebraicas. Paolo Ruffini (1765-1822) intentó probar la imposibilidad de la resolución algebraica de la ecuación general de grado $n > 4$, primeramente en su *Teoria generale della equazione* en 1799, y más tarde en su *Reflessioni intorno alla soluzione della equazioni algebriche generali* en 1813. Tuvo éxito con su primera versión de la demostración haciendo uso del método de Lagrange, que establece que no existe ninguna ecuación *resolvente*[6] que satisfaga una ecuación de

[4] Este es el único retrato de Abel que se hizo en vida. Se trata de un grabado realizado por Johan Gørbitz en otoño de 1826 durante su estancia en París. © Matematisk Institutt, Universidad de Oslo.

[5] Este trabajo influyó tanto en Ruffini como en Abel para el caso $n > 4$, y también condujo a Galois a su *Teoría de Grupos*. Debe añadirse que Abel tuvo conocimiento de los trabajos de Ruffini, por una referencia que realizó Cauchy sobre él en su trabajo de 1815.

[6] El término *resolvente* (del latín *aequatio resolvens*) significa "ecuación que resuelve". Los referidos intentos de resolución eran equivalentes al establecimiento de la teoría algebraica de la *resolvente*, es decir, el hallazgo de otra ecuación algebraica de grado menor (en general) cuyos coeficientes sean funciones racionales de los coeficientes de la ecuación de partida, y tal que aquella permita hallar las raíces de esta última.

ISSN 2174-0410

grado menor que cinco. Ruffini hizo uso, aunque sin demostrarlo, de un teorema ya hoy conocido como el Teorema de Abel-Ruffini, en el que se afirma que si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad. A pesar de todo, no pudo lograr una fundamentación de acuerdo a los estándares matemáticos de la época. En trabajos posteriores, formularía una regla de cálculo aproximado de raíces.

Paolo Ruffini

El primer triunfo real del problema corresponde a Abel, al parecer independientemente de Ruffini, seguramente debido a la imposibilidad de encontrar en una Noruega bastante precaria, documentos científicos importantes de calidad, y además, de haberlos hipotéticamente, Abel hubiera sido incapaz de comprenderlos, ya que no manejaba por aquel entonces el italiano. Ruffini había basado sus trabajos sobre el problema en los resultados sobre permutaciones obtenidos por J. L. Lagrange. Al igual que otros que habían considerado erróneamente resolver el problema antes que él, Abel creyó en un principio haber descubierto la resolución del problema de la quíntica; sin embargo, a la vista de que ni Holmboë ni ninguno de los mejores matemáticos de Noruega (Christopher Hansteen, Søren Rasmussen,. . .) pudieron comprobar la veracidad de su conjetura, envió a través de Holmboë la presunta resolución al matemático profesor Ferdinand Degen en Copenhague, para que la presentase a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca. Degen le contestó requiriéndole algún ejemplo numérico, sin comprometerse a emitir un juicio. Esa respuesta contenía la advertencia de que "estudiara las integrales elípticas"[7]. Fue entonces cuando Abel se puso a trabajar en la búsqueda de ejemplos, hallando más tarde un error en su razonamiento, lo que le suscitó su primera gran decepción, aunque este hecho le motivaría para reconducir su estrategia en la dirección correcta. Abel se dio cuenta de que su estrategia no era la adecuada y no había tenido éxito en su empresa y aparcó de momento el problema de la quíntica. Entonces centró su atención y sus energías en las integrales elípticas y se dio cuenta de que las funciones inversas de las integrales elípticas, esto es las funciones elípticas, tenían propiedades muy interesantes.

Con respecto a sus gustos, aficiones y carácter, Abel mostraba un gran interés por el teatro, pero nulo por la música. A veces mostraba un espíritu impetuoso, mientras que otras entraba en profundas depresiones; todo esto sugiere que sufría cambios de humor con tendencias maníaco depresivas. Era muy modesto y aparentemente amable, y siempre estaba dispuesto a ayudar a sus amigos cuando fuera necesario. Abel no ofrecía nada notable en su aspecto general. Era de estatura media, complexión delicada y ojos azul claro, y vestía siempre con un atuendo simple y descuidado. Quizás lo único destacable de su carácter era que no resultaba ser una persona demasiado extrovertida. En 1822 conseguiría la graduación.

[7] Esto hizo que Abel se iniciara en la que sería su segunda contribución fundamental para las matemáticas, que le condujo a su famosa memoria de París y su posterior competición con Jacobi.

ISSN 2174-0410

Residencia de estudiantes en Oslo

Antigua Universidad de Cristianía (a finales del siglo XIX)

Durante su estancia en la Universidad, fueron los propios profesores quienes le ayudaron a su manutención. Abel había encontrado en cierto modo una acogida lo más similar posible a un ambiente familiar en la casa del científico, explorador, catedrático de Oslo y profesor de Astronomía Christopher Hansteen, quien le había dado un techo en una habitación del ático de su vivienda, y consideraba a su esposa como una segunda madre, ya que ésta cuidó de él como si de un hijo se tratara, y en estos años difíciles le ayudó enormemente. Abel publicó su primer artículo en una revista de Ciencias Naturales (*Magazin for Naturvidenskaben*) impresa en Noruega, y de la que Hansteen era uno de sus editores. Se publicaron algunos breves trabajos de Abel, pero pronto se comprobó que aquel material que Abel presentaba no era muy común. En 1823, escribió un ensayo en francés titulado *"Solution de quelques problèmes a l'aide d'intégrales définies"*, aparece por primera vez el planteamiento y la solución de una ecuación integral. Buscó financiación en la Universidad para poder publicarlo, sin embargo el trabajo se perdió mientras estaba siendo revisado.

Christine Kemp, retrato de Johan Gørbitz, 1835

Al contrario que Noruega, Dinamarca contaba con una buena escuela de matemáticas. Por ello en el verano de 1823, con la edad de veintiún años, y a instancias de su benefactor Hansteen, el profesor Rasmussen concedió a Abel una modesta beca de 100 *speciedaler*[8] (propulsada con la ayuda de profesores de la Universidad) para visitar a Ferdinand Degen o von Schmidten entre otros célebres matemáticos daneses en Copenhague. Una vez allí, Abel realizó algunos estudios acerca del último teorema de Fermat. El tío de Abel, Peder Mandrup Tuxen, trabajaba en la base naval de Christianshavn, en Copenhague, donde conoció a una joven llamada Christine Kemp, hija de un comisario de guerra en Dinamarca, con quien entabló una relación sentimental. Se dice de ella que no era especialmente bella, pero gozaba de un

[8] Moneda Noruega en circulación entre 1816 y 1875. Más tarde sería sustituida por el *rigsdaler specie*, y este a su vez por la corona noruega. Al cambio 1 corona noruega = $^1/_4$ *speciedaler*.

excepcional buen carácter. En 1824, Christine se mudaría a Son en Noruega donde trabajó como institutriz para estar cerca de su novio, y en las navidades de ese mismo año se prometerían.

Tras su retorno de Copenhague, Abel retomó nuevamente el problema de la ecuación quíntica. Ya a finales de 1823, fue capaz de demostrar correctamente que en general, ésta no podía ser resuelta mediante radicales, resultado ampliado más tarde por Galois a las ecuaciones de grado mayor. Publicó su primera demostración en una memoria en 1824 que comenzaba así:

> *"Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora."*

y seguía,

> *"Uno de los problemas más interesantes del Álgebra es el de la solución algebraica de las ecuaciones, y observamos que casi todos los matemáticos distinguidos se han ocupado de este tema. Llegamos sin dificultad a la expresión de las raíces de las ecuaciones de los cuatro primeros grados en función de sus coeficientes. Fue descubierto un método uniforme para resolver estas ecuaciones, y se creyó sería aplicable a las ecuaciones de cualquier grado, pero, a pesar de todos los esfuerzos de Lagrange y de otros distinguidos matemáticos, el fin propuesto no fue alcanzado. Esto llevó a la creencia de que la solución de las ecuaciones generales era algebraicamente imposible; pero esta creencia no podía ser comprobada, dado que el método seguido sólo llevaba a conclusiones decisivas en los casos en que las ecuaciones eran solubles. En efecto, los matemáticos se proponían resolver ecuaciones sin saber si era posible. Así se podía llegar a una solución, pero si por desgracia la solución era imposible, podríamos buscarla durante una eternidad sin encontrarla. Para llegar infaliblemente a una conclusión debemos por tanto seguir otro camino. Podemos dar al problema tal forma que siempre sea posible resolverlo, cosa que podemos hacer con cualquier problema. En lugar de preguntarnos si existe o no una solución de relación que no nos es conocida, debemos preguntarnos si tal relación es en efecto posible... Cuando se plantea un problema de esta forma, el enunciado contiene el germen de la solución e indica el camino que debe seguirse, y yo creo que habrá pocos ejemplos donde seamos incapaces de llegar a proposiciones de más o menos importancia, hasta cuando la complicación de los cálculos impida una respuesta completa al problema."*

Abel sigue diciendo que debe seguirse el método científico, pero ha sido poco usado debido a la extraordinaria complicación de los cálculos algebraicos que supone.

> *"Pero en muchos ejemplos esta complicación es sólo aparente y se desvanece en cuanto se aborda."*

y añade,

> *"He tratado de esta forma diversas ramas del Análisis, y aunque muchas veces me he encontrado ante problemas más allá de mi capacidad, he llegado de todos modos a gran número de resultados generales que aclaran la naturaleza de esas cantidades cuya dilucidación es el objeto de las Matemáticas. En otra ocasión mencionaré los resultados a que he llegado en esas investigaciones y el procedimiento que me ha conducido a ellos. En la presente memoria trataré el problema de la solución algebraica de las ecuaciones en toda su generalidad."*

Desafortunadamente el resultado de la impresión de este trabajo dejó mucho que desear, fundamentalmente debido a que Abel sólo utilizó seis páginas para ello con el objetivo de ahorrar costes de impresión, lo que le infirió un carácter bastante ecléctico e incluso ilegible en ocasiones. Una versión mucho más elaborada aparecería más tarde en 1826, en el primer volumen del *Journal* de Crelle (del que hablaremos más adelante).

Para entonces el Senado de la Universidad de Cristianía, reconoció la excepcional habilidad de Abel, y decidió que debía ser considerado receptor de una beca para estudiar alemán y francés, y visitar los centros matemáticos más importantes del continente (en Alemania y Francia). Los fondos necesarios provendrían del Estado (200 speciedaler anuales por un periodo de dos años). En agosto de 1825, Abel junto a otros cuatro jóvenes científicos de la universidad (Christian P. B. Boeck, Balthazar M. Keilhau, Nicolay B. Møller y Otto Tank) emprendieron su viaje por las universidades de Francia y Alemania. El plan original consistía en que primeramente Abel debía visitar a Degen en Dinamarca, pero a su llegada encontró que éste ya había fallecido.


Berlín, Heinrich Hintze, 1829

En su viaje por tierras germanas, Abel decidió acompañar a sus compañeros que se dirigían a Berlín. Previamente hizo un alto en las proximidades de Hamburgo, en Altona, donde contactó con el astrónomo Heinrich Christian Schumacher (amigo de Gauss). Una vez llegaron a Berlín, decidieron que pasarían allí el invierno. Abel gastó gran parte de sus fondos en Berlín, pero tuvo la gran suerte de que entró en contacto, previa misiva de recomendación de von Schimidten, con August Leopold Crelle (1780-1855), quien se convertiría en un personaje vital en su vida tanto personal como profesional.

Crelle era un exitoso ingeniero civil que dirigía grandes obras públicas de ferrocarril en Prusia, y gozaba de un mayor peso específico en el mundo matemático que su gran benefactor hasta el momento Holmboë. Nacido en 1780, había desarrollado un temprano interés por las matemáticas, y publicado algunas obras sobre matemáticas aplicada y escolar. En 1826, cuando llegó Abel, Crelle acababa de fundar el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Diario sobre matemática pura y aplicada), llamado comúnmente *Journal* de Crelle.

ISSN 2174-0410

Este hecho provocó que debido a la emisión regular del diario, Berlín fuera considerada una importante ciudad en el mundo matemático. Aunque su objetivo era cubrir también aspectos formales de matemáticas aplicadas, pronto se centra prácticamente de forma exclusiva en la matemática pura. Crelle sostenía que:

> *"... las matemáticas puras deberían ser explicadas en primera instancia sin prestar atención a sus aplicaciones. Debería desarrollarse puramente desde y para sí misma, para que sólo de esta manera pueda ser libre para moverse y evolucionar en cualquier dirección. En la enseñanza de las aplicaciones matemáticas, éste es el resultado particular que la gente busca. Serán extremadamente sencillas de encontrar para aquellos que estén científicamente entrenados, y los que hayan captado su espíritu."*

En el prefacio del primer número de su *Journal*, Crelle declaró sus objetivos: no sólo se publicarían nuevos artículos sino que una selección de artículos publicados en otras lenguas serían traducidos al alemán. El propio Crelle había traducido al alemán el libro de geometría de Legendre y algunos de los trabajos de Lagrange. Pronto, el *Journal* adquirió carácter internacional, gracias a los contactos de Crelle en París entre otros lugares. Tenía un don extraordinario para descubrir jóvenes prometedores matemáticos y animarlos. Los primeros trabajos de Abel, Dirichlet, Eisenstein, Grassmann, Hesse, Jacobi, Kummer, Lobachevski, Möbius, Plücker, von Staudt, Steiner y Weierstrass fueron todos publicados en el *Journal* de Crelle.


August Leopold Crelle

Crelle era un hombre de carácter afable y sociable. Después de que Abel lo conociera en Enero de 1826, éste escribió a su antiguo profesor Holmboë:

> *"No puede usted imaginar qué hombre tan excelente es, exactamente tanto como uno mismo debería ser; pensativo y sin embargo terriblemente cortés como muy poca gente, bastante honesto llegado el caso. Cuando me encuentro con él, me siento tan agusto como cuando estoy con usted o con otros buenos amigos."*

Cuando Abel llegó a Berlín, Crelle estaba pensando en lanzarse a esta gran aventura con sus propios medios económicos y Abel tuvo una parte en que tomara la decisión. Existen dos relatos acerca de la primera visita de Abel a Crelle, ambos interesantes. Por aquella época Crelle desempeñaba un cargo del gobierno para el que tenía poca aptitud y menos gusto: el de examinador del Instituto de Industria (Gewerbe-Institut) en Berlín. El relato de Crelle, de tercera mano (Crelle a Weierstrass y éste a Mittag-Leffler), de esta visita histórica es el siguiente:

> *"Un buen día, un joven muy desconcertado, con un rostro juvenil e inteligente, penetró en mi habitación. Creyendo que se trataba de un candidato para ingresar en el Instituto le expliqué que eran necesarios diversos*

exámenes. Al fin, el joven abrió su boca y dijo en muy mal alemán: ¡No exámenes, sólo Matemáticas!."

Con los ánimos, el apoyo y la amistad de Crelle, Abel publicó sus trabajos de forma regular en el *Journal*; para entonces Crelle ya se había percatado de que estaba ante un auténtico genio matemático. El primer volumen por sí sólo contenía siete de sus trabajos, y los siguientes volúmenes muchos más la mayoría de ellos de importancia suprema. En total llegó a publicar 22.

La estancia de Abel en Berlín, de unos cinco meses, influyó sobremanera en su vida profesional. Allí leyó el *Analyse Algébrique* de A. L. Cauchy por quien manifestaría más adelante una gran admiración por el conjunto de sus trabajos. En uno de sus artículos sobre la quíntica, Abel ya había usado resultados de Cauchy sobre permutaciones.

En una carta a Hansteen, Abel habla fundamentalmente de dos temas, el primero la necesidad de inferir al Análisis Matemático un fundamento firme, y el segundo una imagen de su humanidad y optimismo a pesar de todas las contrariedades con las que se había encontrado a lo largo de su vida.

"En el análisis superior pocas proposiciones han sido demostradas con un rigor suficiente. En todas partes encontramos el desgraciado procedimiento de razonar desde lo especial a lo general, y es un milagro que esta forma de razonar sólo rara vez nos haya llevado a la paradoja. Es en efecto extraordinariamente interesante buscar la razón de esto. Esta razón, en mi opinión, reside en el hecho de que las funciones que hasta ahora se presentan en el Análisis pueden ser expresadas en su mayor parte por potencias. . .. Cuando seguimos un método general ello no es muy difícil [para evitar trampas]; pero tengo que ser muy circunspecto, pues las proposiciones sin prueba rigurosa (es decir sin prueba alguna) se han apoderado de mí en tal grado que constantemente corro el riesgo de usarlas sin nuevo examen. Estas bagatelas aparecerán en el Journal publicado por el Sr. Crelle."

Expresa luego la gratitud a como fue tratado en Berlín.

"Cierto es que pocas personas se interesaron por mí. Pero estas pocas han sido infinitamente cariñosas y amables. Quizá pueda responder en alguna forma a las esperanzas que han puesto en mí, pues es desagradable para un bienhechor ver perderse todos sus esfuerzos."

En la primavera de 1826, era el momento de que Abel se dirigiera a París. Crelle prometió acompañarle e intentar realizar una parada en Gotinga y concertar una visita con Gauss. Desafortunadamente asuntos de negocios impidieron a Crelle dejar Berlín. Previamente Abel había enviado a C. F. Gauss una copia de sus trabajos con la demostración del problema de la quíntica, motivo principal por lo que en el viaje se había planificado hacer un alto en Gotinga para tener una entrevista con él. Cabe destacar la gran decepción y desengaño que sufrió Abel cuando se enteró de la noticia de que Gauss, sin ni siquiera echar un vistazo al breve folleto con la demostración de la resolución de la quíntica por radicales, manifestaba textualmente:

> *"¡He aquí otra de esas monstruosidades!"*

Es claramente evidente que si Gauss se hubiera dignado a enterarse de algunos de los párrafos de la obra, hubiera mostrado otro interés por el trabajo que llegó a sus manos. Quizás no atribuyó la importancia que merecía a la resolubilidad por radicales, y no supo vislumbrar que estaba ante el nacimiento del álgebra moderna, de la que tanto Abel como Galois deben ser considerados los padres naturales. Cuando Abel se enteró de la reacción de Gauss, decidió no visitarlo, no ocultando desde entonces su antipatía por aquél, que manifestaba siempre que encontraba ocasión. Así, Abel llegaría a decir de Gauss:

> *"Jamás en sus grandes trabajos descubre la idea generadora. Es como el zorro, que con la cola va borrando el camino que sigue, para que nadie pueda ir detrás."*

Christopher Hansteen

Durante la estancia de Abel en Berlín, surgió un puesto vacante de profesor en su *alma mater*[9] de forma inesperada, pero antes incluso de que Abel conociera este hecho la vacante fue ocupada por su mentor Holmboë. Abel fue considerado demasiado joven e inexperto. Una vez conoció la noticia se sintió terriblemente desdichado, puesto que sería bastante difícil que volviera a surgir una oportunidad similar en bastante tiempo. Quería casarse pero difícilmente podría hacerlo sin una posición asegurada. Quizás el querer resarcirse de esta decepción fue el motivo por el que en lugar de encaminarse a París, Abel decidió prolongar su viaje (a todas luces, en perjuicio de su salud y de su carrera, además de tratarse de un viaje que poco tenía que ofrecerle desde el punto de vista científico) para disfrutar en algunas "juergas" con sus compañeros estudiantes, dirigiéndose hacia Venecia y el norte de Italia, para atravesar los Alpes en su ruta hacia la capital francesa. Como justificación, Abel escribiría a Hansteen:

> *"Pensé al principio marchar directamente desde Berlín a París, satisfecho con la promesa de que el Sr. Crelle me acompañaría. Pero el Sr. Crelle tuvo dificultades, y tendré que viajar solo. Estoy constituido de tal modo que no puedo tolerar la soledad. Cuando estoy solo me hallo deprimido, me siento pendenciero, y tengo poca inclinación para el trabajo. Por tanto me he dicho a mí mismo que sería mucho mejor ir con el Sr. Boeck a Viena, y este viaje me parece injustificado por el hecho de que en Viena hay hombres como Litrow, Burg, y otros, todos ellos excelentes matemáticos; añádase también que será la única ocasión en mi vida de hacer este viaje. ¿Hay algo que no sea razonable en este deseo mío de ver algo de la vida del Sur? Puedo trabajar activamente mientras viajo. Una vez en Viena, existe para ir a París, una vía directa por Suiza. ¿Por qué no ver un poco todas estas cosas? ¡Dios mío! también a mí me gustan las bellezas de la naturaleza*

[9] *Alma mater* es una expresión procedente de la locución latina, que significa literalmente "madre nutricia" (que alimenta) y que se usa para referirse metafóricamente a una universidad, aludiendo a su función proveedora de alimento intelectual, generalmente para referirse al sitio en donde determinada persona cursa o cursó sus estudios universitarios.

ISSN 2174-0410

como a cualquier otro. Este viaje me hará llegar a París dos meses más tarde, esto es todo. Podré rápidamente recuperar el tiempo perdido. ¿No le parece que este viaje me hará mucho bien?."

Visitaron Leipzig, Freiburgo, Dresden, Praga, Viena, Graz, Trieste, Venecia, Verona, Innsbruck, Lucerna, Zurich, y Basilea. En Freiburgo, visitó a Georg Amadeus Carl Friedrich Naumann y su hermano el matemático August Naumann, y fue aquí donde Abel llevó a cabo descubrimientos interesantes sobre teoría de funciones, sobre todo elípticas e hiperelípticas, y unas clases de funciones que son ahora conocidas como *funciones abelianas*.

París, Seyfert, 1818

Era Julio cuando Abel llegó a París y con la ayuda de su amigo Johan Gørbitz encontró acomodo con una familia pobre pero codiciosa que le proporcionaba dos malas comidas por día y un inmundo aposento a cambio de un elevado alquiler. Había mandado a Berlín la mayoría de sus trabajos para la publicación en el *Journal*, pero se había reservado el que consideraba el más importante para presentarlo en la Academia de Ciencias de Francia. El trabajo en cuestión era un teorema sobre funciones trascendentales. Las vacaciones de verano habían comenzado recientemente, por lo que aquellos matemáticos con los que esperaba entrevistarse estaban fuera de la ciudad. Por lo tanto Abel continuó trabajando en su teorema hasta Octubre momento en el que lo finalizó para su presentación en la Academia. Cuando los profesores regresaron, Abel sintió que éstos eran demasiado inaccesibles, además de que difícilmente le entendían quizás porque su francés no era lo suficientemente fluido. Legendre, cuya principal especialidad eran las integrales elípticas, tuvo su primer encuentro efímero con Abel antes de subir a un carruaje, y sólo tuvo tiempo de saludarle cortésmente y presentarle sus excusas pues debía marcharse. Cauchy también lo recibió con su característica descortesía. Abel comentó sobre este encuentro en una carta fechada el 24 de octubre de 1826, dirigida a Holmboë:

"Le diré que esta ruidosa capital del continente me ha producido por el momento el efecto de un desierto. Prácticamente no conozco a nadie, a pesar de hallarnos en la más agradable estación cuando todos se hallan en la ciudad .... Hasta ahora he conocido al Sr. Legendre, al Sr. Cauchy, al Sr. Hachette y a algunos matemáticos menos célebres, pero muy capaces: el Sr. Saigey, editor del Bulletin des Sciences y el Sr. Lejeune-Dirichlet, un prusiano que vino a verme el otro día creyéndome compatriota suyo. Es un matemático de gran penetración. El Sr. Legendre ha probado la imposibilidad de resolver la ecuación

$$x^5 + y^5 = z^5$$

en enteros, y otras cosas importantes. Legendre es un hombre extraordinariamente cortés, pero desafortunadamente tan viejo como las piedras.

> *Cauchy es un excéntrico, y no se puede llegar a ningún lado con él, aunque es el matemático que sabe en estos momentos cómo desarrollar la matemática. Al principio no comprendía prácticamente nada, pero ahora veo algunas cosas con más claridad. Cauchy es extremadamente Católico y fanático. Una cosa muy extraña en un matemático (...). Es el único que se preocupa de las matemáticas puras. Poisson, Fourier, Ampére, trabajan exclusivamente en problemas de magnetismo y en otras materias físicas. El Sr. Laplace creo que ahora no escribe nada. Su último trabajo fue un complemento a su teoría de las probabilidades. Muchas veces le veo en la Academia. Es un buen sujeto (...) Poisson es un hombre bajo con una tripita muy graciosa. Es un agradable camarada y sabe comportarse con dignidad. También Fourier (...) Lacroix es extremadamente viejo. El lunes el Sr. Hachette me presentará a varios de estos caballeros. Por otro lado, los franceses no me gustan tanto como los alemanes; los franceses son anormalmente reservados hacia los extranjeros. Es difícil acercarse a ellos. Y no me atrevo a presentar mis pretensiones. Todo el mundo trabaja en sus propios asuntos sin importarle los otros. Todo el mundo quiere enseñar y nadie aprender. El más absoluto egoísmo prevalece por todos los sitios. Lo único que buscan los franceses de los extranjeros es la práctica (...) puede imaginar qué difícil es hacerse notar, especialmente para un principiante (...) He realizado un trabajo sobre ciertas clases de funciones trascendentes, para presentarlo a la Academia (...). Se lo mostré a Cauchy, pero seguramente ni se dignará a mirarlo. Y me atrevo a decir sin jactancia, que es un buen trabajo. Siento gran curiosidad por conocer el juicio de la Academia."*

Luego cuenta lo que está haciendo, y añade un resumen de sus proyectos no muy optimistas.

> *"Lamento haber pedido dos años para mis viajes, pues año y medio habrían sido suficientes."*

El estudio fue presentado al Secretario de la Academia de Ciencias de París, Joseph Fourier, el 30 de octubre de 1826, para ser publicado en su revista. El trabajo se remitió a Cauchy y Legendre, con Cauchy como responsable principal, para que fuera evaluado. Para aquel entonces, Legendre, que contaba ya con 74 años, consideró pobre y difícilmente legible el manuscrito, manifestando:

> *"... percibimos que la memoria era apenas legible; estaba escrita con una tinta casi blanca y los caracteres algebraicos a menudo mal formados; estuvimos de acuerdo en que el autor debió proporcionarnos una copia más limpia para ser leída."*

por lo que confió a Cauchy (con 37 años) para que se encargara del informe, informe que Abel esperaba lleno de esperanza pero que nunca llegaba. Lamentablemente como más tarde se confirmaría, no recibió respuesta en vida sobre el trabajo presentado. Sumergido en su propia tarea, Cauchy quizás no le prestó la atención merecida, tal vez porque vislumbrara en aquel mísero estudiante noruego un pobre diablo con ensoñaciones imposibles o incluso quizás por indiferencia al principiante. Al igual que Legendre, Cauchy extravió y olvidó aquel ensayo del que era depositario. Al parecer, cuando Abel se enteró de que Cauchy no lo había leído, aguardó con paciente resignación el veredicto de la Academia (que nunca recibiría), como así reveló a Holmboë en otra carta:

> *"Espero todos los días la decisión sobre los trabajos que presenté a la Academia. Pero los lentos nunca acaban. Legendre y Cauchy fueron los jueces, Cauchy es el principal y Legendre simplemente se deja llevar."*

Pero cuando tuvo constancia de que su manuscrito se había extraviado, hizo además otra cosa, redactar de nuevo el principal resultado. El artículo, aún siendo el más profundo de todos sus trabajos, constaba tan sólo de dos breves páginas. Abel lo llamó estrictamente teorema; no tenía introducción alguna, ni contenía observaciones superfluas, ni aplicaciones.

Como hemos comentado antes, Holmboë había sido contratado como profesor de la Universidad de Oslo. Holmboë no quería el puesto, pensando en que Abel era verdaderamente merecedor de él, pero lamentablemente no tuvo elección, ya que la Universidad de Oslo no podía aguardar la decisión, y en caso de no contestar (Abel para entonces se encontraba en Berlín), se lo ofrecerían a otro candidato. Desafortunadamente este hecho significó la imposibilidad de que Abel pudiera ocupar un puesto apropiado regular en la enseñanza superior de matemáticos.

Después del tiempo transcurrido en Berlín con Crelle, Abel se había cargado de deudas y, aunque su colega y amigo quiso que volviera a Berlín con algunas ofertas para intentar retenerle, una vez agotado incluso el préstamo de Holmboë, Abel quería volver a casa. Sobre todo porque la situación familiar, especialmente la de sus hermanos, era ya desesperada.

En una carta, Abel expresa su necesidad de abandonar la Europa Continental, pues quería dedicarse en profundizar en su matemática.

> *"Muchas cosas me quedan por hacer, pero en tanto me halle en el extranjero todo lo que haga será bastante malo. ¡Si yo tuviera mi cátedra como el Sr. Kielhau tiene la suya!. Mi posición no está asegurada, pero no me inquieto acerca de esto; si la fortuna no me acompaña en una ocasión, quizá me sonría en otra."*

Regresó a Cristianía en Mayo de 1827, y para ganar algún dinero tuvo que dar instrucción a algunos escolares. Su novia Christine se empleó como institutriz en casa de unos amigos de su familia en Frøland. Abel pasó el verano con su novia en esa ciudad. Estaba a la sazón, dedicado a la teoría de funciones elípticas, en su competición con Jacobi, escribiendo algunos artículos sobre la misma. En la Navidad de ese año, hubo de viajar en trineo para visitar a su novia en Frøland, llegando tras su viaje bastante enfermo. El riguroso clima noruego ya le había hecho desde hacía tiempo padecer tuberculosis pulmonar, de la que tuvo conocimiento médico durante su estancia en París y que Abel había atribuido a un frío persistente. Quizás el trajín y la excesiva tensión de aquel largo viaje al extranjero de más de año y medio de duración, contribuyeron a que esa enfermedad le llevara más tarde a su fatal desenlace.

En 1828, Hansteen recibió una subvención para investigar el magnetismo terrestre en Siberia y se nombró entonces a Abel para que lo sustituyera en su puesto docente en la Universidad y también en la Academia Militar. Este hecho mejoró su precaria situación económica. Pero Abel continuaba entregado en cuerpo y alma a su investigación matemática, si bien su salud se iba deteriorando cada día. Las vacaciones veraniegas de 1828 las pasó junto a su novia en Frøland y volvería a viajar de nuevo a esta ciudad para celebrar la Navidad de ese año. A mediados de enero de 1829, Abel empeoró notablemente. Supo que no viviría mucho tiempo, a causa de una hemorragia que no fue posible detener. Con anterioridad ya había escrito a su amigo Keilhau, con quien Abel se sentía profundamente unido, implorándole que se hiciera cargo de la asistencia de su madre; y además de aquel requerimiento, al visitarle le aconsejó que entablara una relación seria con Christine (a quien Keilhau no conocía), manifestándole:

> *"No es bella; tiene el cabello rojo y es pecosa, pero se trata de una mujer admirable."*

(un tiempo después de que Abel muriera, resultó que ambos se casaron). Así fueron los últimos días de Abel en Frøland en el hogar de la familia inglesa en la que Christine era institutriz. La debilidad y la creciente tos hicieron que sólo pudiese estar fuera de la cama unos pocos minutos. Ocasionalmente intentaba trabajar en su matemática, pero ya no podía escribir. A veces revivía el pasado, hablando de su pobreza y de la bondad de la Señora Hansteen. Padeció su peor agonía durante la noche del 5 de abril. En la madrugada llegó a sentirse más tranquilo, y durante la mañana a las once en punto del 6 de abril de 1829, exhaló su último suspiro. Tenía 26 años y ocho meses.


Casa donde murió Abel en Frøland

Dos días más tarde de la muerte de Abel llegaba una carta de Crelle, quien se había encargado de intermediar con el ministro de educación en Berlín para que Abel obtuviera una plaza definitiva como profesor de la Universidad de Berlín en un nuevo Instituto Tecnológico. Allí tendría por compañeros de trabajo a Dirichlet, Jacobi y Steiner. Lamentablemente la carta llegaba demasiado tarde. El propio Gauss, con el fin de reparar dignamente su anterior comportamiento para con Abel, había intermediado junto a Humboldt, solicitando una cátedra para él. Legendre, Poisson y Laplace, habían escrito asimismo al rey de Suecia para que Abel ingresara en la Academia de Estocolmo. Para entonces Cauchy no había aún emitido informe alguno sobre el primer ensayo de Abel, a pesar de que Legendre había emitido varias protestas al respecto, pero para este momento ya se conocía la esencia de la misma a través del *Journal* de Crelle.

El propio Crelle escribió un largo elogio en su *Journal* en el que decía:

> *"Todo el trabajo de Abel lleva la imprenta de la genialidad y la fuerza de*

su intelecto que es extraordinario y en ocasiones increíble, aún cuando la juventud del mismo no fuera tomada en consideración. Se puede decir que fue capaz de salvar todos los obstáculos hasta llegar a la raíz de los problemas con un vigor que parecía inagotable. Atacaba los problemas con extraordinaria energía; él los consideraba desde su superficie y era capaz de vislumbrar con tal perspectiva su estado, que todas las dificultades parecían desvanecerse bajo el victorioso ataque de su genio. . .. Pero no sólo era su gran talento lo que fomentó el respeto de los demás por Abel y lo que hace infinitamente lamentable su pérdida. Se distinguió por la pureza y la nobleza de su carácter y por una rara modestia que le hizo ser una persona tan apreciada como su genialidad."

Al final de sus días, ajeno al conocimiento de Abel y otras instituciones noruegas competentes, ocurrió que C. G. J. Jacobi (1804-1851) tuvo noticias del teorema de Abel por el propio Legendre (con quien Abel sostuvo correspondencia después de su regreso a Noruega) y en una carta a Legendre fechada el 14 de marzo de 1829, éste comentó:

"¡Qué descubrimiento es ese Abel!(. . .) ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su Academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas?."

Esta noticia llegó hasta Noruega, lo que unido a las expectativas que en su momento se habían depositado en la figura de Abel, hizo que el propio cónsul de Noruega en París interpusiera una reclamación diplomática con la firme intención de que el manuscrito perdido se recuperara. La Academia indagó en el asunto y Cauchy encontró finalmente dicho manuscrito en 1830. En una carta fechada en abril de 1829 que contestaba a la del 14 de marzo a Jacobi, Legendre comentaba:

"Esta memoria ha sido encargada en principio al señor Legendre que la ha examinado, pero viendo que la escritura era poco legible y los caracteres algebraicos a menudo mal formados, la remitió a su colega, el señor Cauchy, con el ruego de que se encargara del informe (. . .). El Sr. Cauchy (. . .) olvidó durante mucho tiempo la memoria del Sr. Abel, de la cual era depositario. No fue hasta el mes de marzo de 1829 que los dos comisarios supieron, por el aviso que uno de ellos recibió de un sabio de Alemania, que la memoria del Sr. Abel, que había sido presentada a la Academia, contenía o debía contener unos resultados de análisis muy interesantes y que estaba sorprendido de que no se hubiera hecho un informe de este en la Academia."

Una vez hallado el manuscrito, Cauchy se dispuso a redactar el correspondiente informe, pero ambos (Legrende y Cauchy), se vieron retenidos al sopesar que Abel ya había publicado parte de la memoria en el *Journal* de Crelle. En palabras de Legendre:

"Bajo ese aviso, el Sr. Cauchy buscó la memoria, la encontró y se dispuso a hacer un informe sobre ella, pero los comisarios se vieron retenidos considerando que el Sr. Abel había publicado ya una parte de la memoria en

el Journal de Crelle, y que el autor probablemente continuaría hasta hacer aparecer el resto, y que entonces el informe de la memoria, que no podía ser sino verbal, estaría fuera de lugar. En este estado de cosas sabemos súbitamente de la muerte del Sr. Abel, pérdida muy penosa para la ciencia y que puede hacer ahora el informe necesario para conservar, si ha lugar, este trabajo, que es de los principales de su autor, en la colección de títulos de sabios extranjeros."

Cuando, tras su muerte, la fama de Abel ya estaba cimentada, su apreciadísima memoria afortunadamente no se había extraviado, sin embargo no fue publicado hasta el año 1841 en *Mémoires des savants etrangers*, vol.7, 176-264. Para colmo de desgracias, editor, impresor, o ambos, perdieron el manuscrito antes de que fueran leídas las pruebas de imprenta. La Academia en 1830, quiso sincerarse con Abel, concediéndole el Gran Premio de Matemáticas, en unión con Jacobi, pero Abel ya había fallecido.

Los siguientes párrafos de la memoria muestran su objeto:

"Las funciones trascendentes hasta ahora consideradas por los matemáticos son escasas en número. Prácticamente toda la teoría, de funciones trascendentes se reduce a la de funciones logarítmicas, circulares y exponenciales, funciones que en el fondo forman una sola especie. Tan sólo recientemente se ha comenzado a considerar algunas otras funciones. Entre las últimas, las trascendentes elípticas, algunas de cuyas notables y elegantes propiedades han sido desarrolladas por el Sr. Legendre, ocupan el primer lugar. El autor [Abel] considera, en la memoria que tiene el honor de representar a la Academia, una clase muy extensa de funciones, todas aquellas cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes sean funciones racionales de una variable, y ha demostrado para estas funciones propiedades análogas a la de las funciones logarítmicas y elípticas . . . y ha llegado al siguiente teorema[10]:

"Si tenemos varias funciones cuyas derivadas pueden ser raíces de una, y la misma ecuación algebraica cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable, podemos siempre expresar la suma de cualquier número de tales funciones por una función algebraica y logarítmica, siempre que establezcamos cierto número de relaciones algebraicas entre las variables de las funciones en cuestión."

El número de estas relaciones no depende en modo alguno del número de funciones, sino sólo de la naturaleza de las funciones particulares."

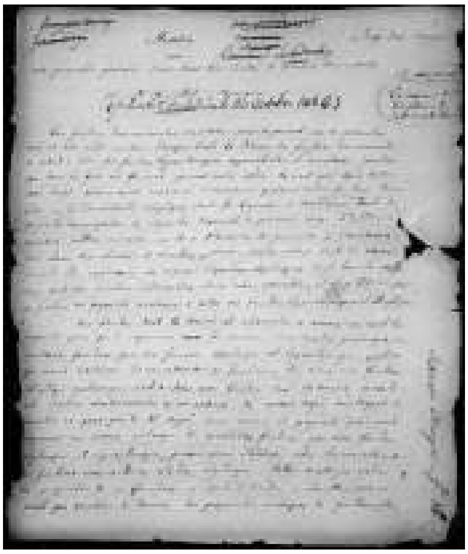
Realmente, y aparte de la escasez de sus recursos, lo más razonable es deducir que después del episodio acaecido, la estancia de Abel en París sólo pudo proporcionarle una amarga tristeza en todos los sentidos. Resulta evidente que a Abel, resumiendo, le sobrarían razones para sentir resentimiento de la actitud de Cauchy, aún cuando jamás dudase de que éste fuera indiscutiblemente un gran maestro del análisis.

Cabe destacar, que para mayor gloria de la ciencia, fue determinante la atención que Jacobi solicitó para con Abel, como muestra de su noble rivalidad,

[10] Conocido hoy en día como *Teorema de Abel-Ruffini*.

además del mismo requerimiento por parte de toda la Alemania científica, para que se buscase con empeño la admirable memoria de Abel. Con todo lo escrito anteriormente, no acabaron aún las peripecias habidas con el manuscrito de Abel. Cuando los matemáticos noruegos Ludwing Sylow y Sophus Lie elaboran en la década de 1870-1880 la publicación de las obras completas de Abel, se encontraron con la desagradable sorpresa de que el manuscrito que Abel había presentado a la Academia de París se había perdido. ¿Qué había ocurrido esta vez?. Según se pudo averiguar más adelante, a un profesor matemático italiano rival de Cauchy para el puesto de profesor en el Colegio de Francia, de nombre Guglielmo Bruto Icilio Timoleone, conde Libri-Carucci della Sommaia, alumno de Legendre, le fue asumida la responsabilidad de seguir la impresión de *Mémoires des savants* antes citadas.

Al parecer Libri llegó a ser un especialista consumado en el arte de expoliar importantes legados de las bibliotecas aprovechando su privilegiado puesto como inspector de bibliotecas. Hacia 1846 se empezó a sospechar de sus hurtos, pero el presidente del consejo de ministros, François Guizot, amigo de Libri, archivó las investigaciones. En 1952, siglo y cuarto después de que Abel presentara la Memoria sobre funciones elípticas a la Academia de París fue finalmente encontrada por Viggo Brun, de Oslo, en la biblioteca Moreniana de Florencia (Italia). Brun, que visitaba la ciudad, aprovechó para saber si en la biblioteca matemática había legados de Guglielmo Libri, sospechando la implicación de éste en la desaparición del manuscrito. Después de realizar algunas pesquisas, Brun encontró lo que buscaba, es decir la Memoria original de Abel que el pícaro de Libri habría logrado llevarse consigo. Sobre este hecho, Brun escribía:



Primera página de la Memoria que Abel presentó a la Academia de París (la segunda, escrita en 1826)

> *"Fue un momento de gran intensidad cuando con ayuda del catedrático Procissi abrí el antiguo manuscrito en la biblioteca Moreniana. Ahí se encontraban las hojas de amarillo pardo, densamente escritas "par N. H. Abel, norvegian" según constaba bajo el título. ¡No conocía yo bien esa letra! ¡Con toda seguridad era Abel! Las letras eran pequeñas, el espacio aprovechado al máximo, las dos caras de la hoja escritas. Al final se leía la dirección de Abel en París "Rue St. Margherite, n. 41 faub. St. Germain" (ahora Rue Gozlin)."*

La narración de la vida de Abel es terriblemente triste, claro ejemplo como en muchos casos, de la íntima conexión entre la pobreza y la tragedia. Su corta vida y su trágica muerte ha dado lugar a numerosos mitos sobre su persona. Algunos lo han considerado como el Mozart de la ciencia. Junto a Galois, ambos son considerados como los precursores del álgebra moderna. Ambos vi-

vieron la época del Romanticismo en su plenitud, y como otros tantos jóvenes incomprendidos dejaron su existencia terrenal a muy corta edad. Sin embargo su legado fue tan inmenso que será imposible que sus nombres queden en el olvido. Como dijo Charles Hermite en referencia a Abel, *"Ha legado a los matemáticos algo que les mantendrá activos durante 500 años"*.

En Noruega, Abel es considerado un héroe nacional. El centenario de su nacimiento es ampliamente celebrado, y varios han sido los honores a título póstumo otorgados al joven sabio, como un cráter lunar o un asteroide que llevan su nombre, una calle del distrito duodécimo de París denominada "rue Abel", una estatua en bronce realizada por el escultor Gustav Vigeland en 1908 que se encuentra en el "Jardín Abel" del Royal Park de Oslo, y que constituye hoy día una de las imágenes más representativas de la ciudad, o una estatua en la Universidad de Oslo. Además de todas estas muestras de afecto, su rostro aparece en multitud de tiradas de sellos filatélicos, o en antiguos billetes noruegos.

Tumba de Abel en Frøland

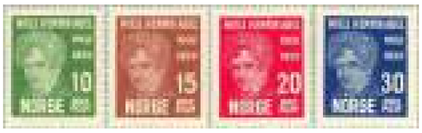
Escultura de Abel en el Royal Park de Oslo

Estatua de Abel en la Universidad de Oslo

Sello conmemorativo de Abel (2002)

Billete de 500 coronas noruegas (1978)

ISSN 2174-0410



Sellos conmemorativos del centenario de la muerte de Abel (Noruega-1929)

Sello conmemorativo de Abel (Noruega-1983)

De estudiante, Abel vivió en Lille Grensen 5. En 2002 la Sociedad Patrimonial de Oslo colocó una placa en su recuerdo.

Busto de Abel en Gjerstad

Estatua de Abel en Frøland

ISSN 2174-0410

3. Memoria sobre ecuaciones algebraicas, en la que se demuestra la imposibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado (1824)

Nuestros comentarios a lo descrito por Abel irán de aquí en adelante en cuadros de texto similares a éste. Adicionalmente se le han añadido a las ecuaciones un número para facilitar su referencia.

Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora. Por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de ecuaciones algebraicas.

Sea

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \tag{1}$$

la ecuación general de quinto grado y supongamos que es resoluble algebraicamente, es decir, y puede ser expresada por una función formada por radicales de las cantidades a, b, c, d y e.

Hemos seguido una notación para los coeficientes ligeramente distinta a la utilizada por Abel en su Memoria. El consideró los coeficientes a como la suma de las raíces, b la suma de sus productos tomados dos a dos, c la suma de sus productos tomando las raíces de tres en tres, así sucesivamente, de acuerdo a las identidades de Girard, esto es, considérese la ecuación cúbica cuyas raíces son x_1, x_2, x_3. La ecuación puede ser escrita de la forma $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Multiplicando esta expresión, tendremos $x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$. Obsérvese que el coeficiente del término x^2, es la suma con signo negativo de las tres raíces, mientras que el coeficiente del término x es el producto simétrico de todas las raíces, tomadas de dos en dos de una vez: $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$. Finalmente, el término constante de la ecuación es el producto negativo de las tres raíces: $-x_1x_2x_3$. Podemos aplicar el mismo razonamiento a cualquier ecuación de grado n, de forma que el coeficiente desconocido correspondiente al grado $n-1$ debe ser la suma con signo negativo de todas las raíces, el siguiente coeficiente debe ser la suma simétrica de todas las raíces tomadas de dos en dos de una vez, y así sucesivamente. A estas relaciones las denominamos *identidades de Girard*, las cuales Newton generalizó acertadamente mediante expresiones que obtuvo de la suma del cuadrado de todas las raíces, o la suma de sus n-ésimas potencias, denominadas *identidades de Newton*.

Claramente en este caso podemos expresar y de la forma:

$$y = p + p_1R^{\frac{1}{m}} + p_2R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{2}$$

siendo m un número primo y R, p, p_1, p_2, etc., funciones similares a y, y así hasta que obtenemos funciones racionales expresadas en función de los términos a, b, c, d, y e.

Esencialmente Abel muesta que una suma de radicales, que por su parte están interrelacionados, pueden siempre ser expresados de la forma de la ecuación (2), incluso poniendo todos los términos en un denominador común, de tal modo que uno consiga únicamente funciones racionales dentro de los radicales más íntimos de la expresión. Abel utiliza (2) por lo tanto para llevar a cabo una reducción al absurdo en su demostración. Recordemos que había asumido que y podía ser expresado como una serie finita de términos algebraicos, en donde R, p, p_1, p_2,... eran cada uno funciones algebraicas de los coeficientes a, b, c, d, e, entendido en términos de los sucesivos órdenes de las funciones como radicales interrelacionados.

Podemos también asumir que es imposible expresar $R^{\frac{1}{m}}$ mediante una función racional en términos de a, b, etc. p, p_1, p_2, y considerando $\frac{R}{p_1^m}$ en lugar de R, está claro que podemos hacer que $p_1 = 1$. Entonces

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}. \tag{3}$$

Abel simplifica (2) deshaciéndose de p_1, redefiniendo $R \to \frac{R}{p_1^m}$, de modo que $p_1 \left(\frac{R}{p_1^m}\right)^{\frac{1}{m}} = R^{\frac{1}{m}}$. En lo que sigue, Abel asume que esto se ha hecho para eliminar p_1.

Sustituyendo este valor de y en la ecuación propuesta (1) y reduciendo, obtenemos un resultado de la forma:

$$P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{4}$$

siendo q, q_1, q_2, etc, racionales de funciones enteras (p. ej. polinomiales) de los términos a, b, c, d, e, p, p_2,... y R.

Abel sustituye la presunta solución (3) nuevamente en la ecuación principal (1). De este modo llega a (4), donde las nuevas funciones q, q_1, q_2,... dependen de todos los términos anteriores: los coeficientes a, b, c, d, e y las cantidades que acaba de utilizar p, p_1, p_2,..., R. Obsérvese que de igual modo que (1) representa un polinomio igualado a 0, esta nueva ecuación también lo hace, de forma que $P = 0$. Obsérvese también que, Abel ha definido q, q_1, q_2,... de modo que cada uno multiplique la potencia apropiada de $R^{\frac{1}{m}}$. Obsérvese también que la mayor potencia de R en (4) será $\frac{m-1}{m}$.

En realidad, denominando $R^{\frac{1}{m}} = z$, tenemos dos ecuaciones

$$z^m - R = 0 \quad \text{y} \quad q + q_1 z + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0. \tag{5}$$

Abel trata de demostrar que $q = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$,..., $q_{m-1} = 0$; su demostración requiere de varios pasos, finalizando con la expresión (8). Comienza definiendo $z = R^{\frac{1}{m}}$, de modo que $z^m = R$ o $z^m - R = 0$. Entonces, en (4) sustituye $z = R^{\frac{1}{m}}$, resultando $q + q_1 z + \cdots + q^{m-1} z^{m-1} = 0$. Estas dos partes de (5) delimitan z.

Si los términos q, q_1,... no son igual a cero, las ecuaciones expresadas en (5) tienen necesariamente uno o más raíces en común. Si k es el número de estas raíces comunes, sabemos que podemos encontrar una ecuación de grado k que tenga tantas como las k raíces mencionadas y en la cual todos los coeficientes sean funciones racionales de R, q, q_1, y q_{m-1}. Sea

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_1 z^k = 0 \tag{6}$$

dicha ecuación. Esta tiene raíces en común con la ecuación $z^m - R = 0$; así, todas las raíces de esta ecuación tienen la forma $\alpha_\mu z$, donde α_μ designa una de las raíces de la ecuación $\alpha_\mu^m - 1 = 0$. Entonces sustituyendo (en (6) $z \to \alpha_\mu z$), tenemos las siguientes ecuaciones,

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_k z^k = 0 \tag{7.1}$$

$$r + \alpha r_1 z + \alpha^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha^k r_k z^k = 0 \tag{7.2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$r + \alpha_{k-2} r_1 z + \alpha_{k-2}^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha_{k-2}^k r_k z^k = 0. \tag{7.k}$$

En la expresión $z = \alpha_\mu z$, el subíndice μ es un índice que varía desde 1 a k (el total de raíces comunes de (5), z, αz, $\alpha_1 z$, $\alpha_2 z$,. . ., $\alpha_{k-2} z$). Sustituyendo $z = \alpha_\mu z$ de nuevo en $z^m - R = 0$ resulta $\alpha_\mu^m z^m - R = 0$, pero $z^m = R$ y esto significa que $\alpha_\mu^m R - R = 0$. Dividiendo por R (que es distinto de 0) se muestra que α_μ es una raíz de la ecuación $\alpha_\mu^m - 1 = 0$. Ahora α_μ es sinónimo de toda la serie de valores 1, α, α_2,. . ., α_{k-2}, donde Abel observa que 1 es una raíz de esta ecuación y la denomina $\alpha_1 = \alpha$. Obsérvese que entonces existen sólo $k - 2$ valores de α_μ, ya que de las k raíces, la primera y la segunda son 1 y α). Abel sustituye ahora los valores sucesivos $\alpha_\mu z = z, \alpha z, \alpha_2 z, \ldots, \alpha_{k-2} z$ nuevamente en la expresión (6). Sustituyendo 1 por α_μ nos da la expresión (7.1); sustituyendo α nos da (7.2),. . . así hasta sustituir α_{k-2} que nos da (7.k).

En estas k ecuaciones, uno puede siempre encontrar el valor de z expresado mediante una función racional de los términos r, r_1, r_2,. . ., r_k, y, como los términos son en sí mismo funciones racionales de a, b, c, d, e, R,. . ., p, p_2,. . ., se deduce que z es también una función racional de estos mismos términos, lo cual es contrario a la hipótesis. Por lo tanto, tiene que cumplirse necesariamente que

$$q = 0,\ q_1 = 0,\ \ldots,\ q_{m-1} = 0. \tag{8}$$

Ahora Abel realiza una observación crítica: de las k ecuaciones (7.1-7.k), siempre podemos encontrar un z como una función racional de r, r_1, r_2,. . ., r_k, y α, ya que tenemos simultáneamente k ecuaciones para determinar k incógnitas, z_1, z_2,. . ., z_k. Obsérvese que esto difiere de la situación de la ecuación original (1), la cual era una ecuación para determinar cinco valores de y; (7.1-7.k) son k ecuaciones lineales para determinar k incógnitas, y pueden ser resueltas por eliminación, tratando cada potencia de z como una incógnita separada y resolviendo las k ecuaciones como si fueran ecuaciones lineales simultáneas para esas k incógnitas. Pero asumimos que $z = R^{\frac{1}{m}}$ no es una función racional de sus variables, por lo que la única alternativa es que $q = q_1 = \cdots = q_{m-1} = 0$, concluyendo la demostración de (8).

ISSN 2174-0410

Si ahora estas ecuaciones son válidas, está claro que la ecuación propuesta (1) es satisfecha por todos los valores que se obtienen para y dándole a $R^{\frac{1}{m}}$ todos los valores

$$R^{\frac{1}{m}},\ \alpha R^{\frac{1}{m}},\ \alpha^2 R^{\frac{1}{m}},\ \alpha^3 R^{\frac{1}{m}}, \ldots,\ \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}, \tag{9}$$

siendo α una raíz de la ecuación

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0. \tag{10}$$

Si $y_1 = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ (3), entonces $q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0$. Esto sucede porque, al sustituir esta expresión de y_1 en (1), obtenemos términos como (productos de p, p_2,...) $(R^{\frac{1}{m}})^a (R^{\frac{2}{m}})^b \cdots$. Agrupando potencias, resulta (productos de p, p_2,...) $(R^{\frac{1}{m}})^{a+2b+\cdots}$. Por lo tanto el exponente $a + 2b + \cdots$ puede ser siempre expresado como $mi + j$, donde i y j son enteros $(j \leq m-1)$, entonces las potencias enteras de $R^i = (R^{\frac{1}{m}})^{mi}$ puede ser sacadas fuera e incluso tanto los productos de p, p_2,... como q, q_1, ... en (4). Abel acaba de demostrar que todas estas q_s son iguales a cero. Ahora si consideramos y_2, en la cual $R^{\frac{1}{m}} \to \alpha R^{\frac{1}{m}}$, puede aplicarse un argumento similar, excepto que haya un factor de α elevado a la misma potencia $(a + 2b + \cdots)$ multiplicando a estos factores previos de q y R. Pero como q_s son cero, entonces cada término desaparece e y_2 también satisface $P = 0$ en (4). El mismo argumento también se aplica a y_3 $(R^{\frac{1}{m}} \to \alpha^2 R^{\frac{1}{m}})$ y todos los otros valores de (9).

Tenemos entonces que todos los valores de y son diferentes, por el contrario en el caso de que tuviéramos un ecuación de la misma forma que la ecuación $P = 0$, ésta nos llevaría, como hemos visto, a un resultado que no puede ser válido. El número m por lo tanto no puede exceder de 5. Por lo tanto designando y_1, y_2, y_3, y_4, y y_5 como las raíces de la ecuación propuesta (1), tendremos

$$y_1 = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{11.1}$$

$$y_2 = p + \alpha R^{\frac{1}{m}} + \alpha^2 p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + \alpha^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}, \tag{11.2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_m = p + \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + \alpha p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}. \tag{11.m}$$

Obsérvese que, si por el contrario $y_1 = y_2$ (por poner un ejemplo), entonces (11.1)=(11.2), lo cual requiere que $\alpha - 1 = 0 = \alpha^2 - 1 = \alpha^3 - 1 = \cdots$, lo cual contradice (10). Por lo tanto todos los valores de y son diferentes. Por supuesto, hay casos especiales de ecuaciones quínticas que tienen raíces iguales, pero se puede comprobar que sus soluciones son racionales simples. Por ejemplo, si todas las raíces son iguales, $y = y_0$, entonces la ecuación quíntica puede ser factorizada como $(y - y_0)^5 = 0$, y claramente puede verse que esa situación se puede dar únicamente si los coeficientes son muy restringidos. Abel también nos recuerda que las raíces no pueden ser nunca más de cinco.

De estas ecuaciones, deducimos fácilmente que:

$$p = \frac{1}{m}(y_1 + y_2 + \cdots + y_m), \tag{12.1}$$

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-1}y_2 + \cdots + \alpha y_m), \tag{12.2}$$

$$p_2 R^{\frac{2}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-2}y_2 + \cdots + \alpha^2 y_m), \tag{12.3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha y_2 + \cdots + \alpha^{m-1} y_m). \tag{12.m}$$

Vemos de esto que p, p_2,..., p_{m-1}, R, y $R^{\frac{1}{m}}$ son funciones racionales de las raíces de la ecuación propuesta (1).

Ahora hace uso de estas cinco raíces y_1, y_2,..., y_5 y utiliza (3) y el resultado obtenido de (9-10) para expresar explícitamente las ecuaciones (11.1-11.m). Entonces suma estas ecuaciones y obtiene

$$\begin{aligned} y_1+y_2 + \cdots + y_m = mp &+ (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})R^{\frac{1}{m}} \\ &+ p_2(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})R^{\frac{2}{m}} + \cdots \\ &+ p_{m-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})R^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Pero por (10) esto nos lleva inmediatamente a (12.1), por lo que todas las sumas $(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})$ desaparecen. Ahora Abel dirige sus esfuerzos a los términos de (4) multiplicando cada ecuación de tal modo que aísla cada término. Para obtener el término $R^{\frac{1}{m}}$, multiplica (11.1) por 1, (11.2) por α^{m-1}, (11.3) por α^{m-2},..., (11.m) por α. Entonces sumándolas todas, obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1+\alpha^{m-1}y_2 + \alpha^{m-2}y_3 + \cdots + \alpha y_m = mp &+ (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})p \\ &+ m\alpha^m R^{\frac{1}{m}} + p_2\alpha^m(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})R^{\frac{2}{m}} + \cdots \\ &+ \alpha^m p_{m-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1})R^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Como $\alpha^m = 1$, entonces $mR^{\frac{1}{m}} = y_1 + \alpha^{m-1}y_2 + \alpha^{m-2}y_3 + \cdots + \alpha y_m$, (12.2). Se utiliza la misma estrategia para el resto de ecuaciones (12.2-12.m).

Consideremos ahora uno de estos términos, por ejemplo R. Sea

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \cdots + S_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}. \tag{13}$$

Tratando este término del mismo modo que y, obtenemos un resultado similar, mostrando que los términos $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2,..., son funciones racionales de los diferentes valores de la función R, y como estos valores son funciones racionales de y_1, y_2, etc., entonces también lo son las funciones $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2,....

Siguiendo este razonamiento, concluimos que todas las funciones irracionales contenidas en la expresión de y son funciones racionales de las raíces de la ecuación propuesta.

Con esto finaliza el segundo paso de toda la demostración.

Siendo establecido este resultado, no es difícil completar la demostración. Consideremos primero las funciones irracionales de la forma $R^{\frac{1}{m}}$, siendo R una función racional de a, b, c, d, y e. Sea $R^{\frac{1}{m}} = r$, donde r es una función racional de las raíces y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 y R una función simétrica de estos términos. Ahora como el caso en cuestión es la solución general de la ecuación de quinto grado, está claro que uno puede considerar y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 como variables independientes; por lo tanto la ecuación $R^{\frac{1}{m}} = r$ puede mantenerse bajo esta suposición. En consecuencia, podemos intercambiar los términos y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 entre ellos en la ecuación $R^{\frac{1}{m}} = r$, ya que por el intercambio, $R^{\frac{1}{m}}$ necesariamente toma m diferentes valores ya que R es una función simétrica.

En este último paso de la demostración comienza la reducción al absurdo. Abel establece que $R^{\frac{1}{m}} = r$ y nos recuerda que acaba de mostrar que es una función racional de las raíces y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5. Es más, R es una función simétrica de estas raíces. Esto significa que podemos permutar las raíces entre ellas sin cambiar R. Esto también significa que la ecuación $R^{\frac{1}{m}} = r$ puede ser permutada entre las m raíces, y se asumirá entonces que r toma los diferentes m valores.

La función r debe tomar también los m diferentes valores de la permutación de las cinco variables que contiene de todas las formas posibles. Para mostrar esto, es necesario que $m = 5$ o $m = 2$, ya que m es un número primo. (Ver la memoria del Sr. Cauchy en el *Journal de l'École Polytechnique*, vol. 17.)

En este paso, Abel hace referencia al trabajo de Cauchy. El Teorema de Cauchy establece que si $m = 5$, nuestra función $r = R^{\frac{1}{m}}$ puede sólo tomar los valores cinco o dos, nunca dos o cuatro. El Teorema de Cauchy establece que r sólo puede tomar un valor, pero esto contradice la suposición inicial de que todas las raíces eran diferentes.

Primeramente, sea $m = 5$. La función r por lo tanto tiene cinco valores diferentes y consecuentemente puede ser expresada de la forma

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4, \tag{14}$$

siendo p, p_1, p_2,... funciones simétricas de y_1, y_2, ... Intercambiando y_1 e y_2, la ecuación nos da,

$$p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4 = \alpha p + \alpha p_1 y_2 + \alpha p_2 y_2^2 + \alpha p_3 y_3^2 + \alpha p_4 y_2^4 \tag{15}$$

donde

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0. \tag{16}$$

Pero esta ecuación resulta imposible, por lo que consecuentemente m debe ser igual a 2.

En su artículo de 1826, Abel ofrece una demostración más profunda y más simple de esta afirmación. Primero, considera expresar una de las raíces y_1 como en (11a), $y_1 = p + R^{\frac{1}{5}} + p_2R^{\frac{2}{5}} + \cdots + p_4R^{\frac{4}{5}}$ y entonces obtiene la expresión para $R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5)$, como en (12.2), donde el caso $m = 5$ es considerado. Sin embargo, esta expresión es imposible, ya que el lado izquierdo de la igualdad toma cinco valores (los posibles valores de las cinco raíces), mientras que la parte derecha tiene 120 (las permutaciones de las cinco raíces). Por lo tanto el caso $m = 5$ debe ser excluido.

Entonces sea

$$R^{\frac{1}{2}} = r, \tag{17}$$

donde r debe tomar dos valores diferentes de distinto signo. Entonces tenemos (ver la memoria del Sr. Cauchy)

$$R^{\frac{1}{2}} = r = v(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\cdots(y_2 - y_3)\cdots(y_4 - y_5) = vS^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

siendo v una función simétrica.

Abel considera dos posibles valores para r de la ecuación (17), recordando que la raíz cuadradada toma siempre los signos $\pm$. El Teorema de Cauchy establece en este caso que r puede ser expresado de la forma de la ecuación (18), donde v es una función simétrica (dependiente de los coeficientes) y $S^{\frac{1}{2}}$ es una función especial, $S^{\frac{1}{2}} = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\cdots(y_2 - y_3)\cdots(y_4 - y_5)$. Obsérvese que S no puede ser cero, ya que ninguna de las dos raíces son iguales.

Consideremos ahora las funciones irracionales de la forma

$$\left(p + p_1R^{\frac{1}{\nu}} + p_2R_1^{\frac{1}{\mu}} + \cdots\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{19}$$

siendo p, p_1, p_2, etc., R, R_1, etc., funciones racionales de a, b, c, d, y e y consecuentemente funciones simétricas de y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5. Como hemos visto, debemos tomar $\nu = \mu =$ etc. $= 2$, $R = v^2S$, $R_1 = v_1^2S$, etc. La función procedente de (19) puede por lo tanto ser expresada de la forma

$$\left(p + p_1S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{20}$$

Sean

$$r = \left(p + p_1S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{21}$$

$$r_1 = \left(p - p_1S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{22}$$

Multiplicándolas, obtenemos

$$rr_1 = \left(p^2 - p_1^2S\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{23}$$

Abel nos recuerda que ahora sabemos que estamos manejando $R^{\frac{1}{2}}$, en lugar de $R^{\frac{1}{5}}$. Utilizando las definiciones $R = v^2 S$, $R_1 = v^2 S, \ldots$, puede expresar las funciones irracionales como (19), de la forma $r = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}$, (21), donde ha eliminado los otros términos de (19) ya que su objetivo es mostrarnos la forma general que tomarán. Igualmente, expresa el otro término irracional del mismo modo $r_1 = \left(p - p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}$, (22). Multiplicando ambos, obtiene la expresión (23), eligiendo convenientemente el signo negativo para r_1.

Ahora si rr_1 no es una función simétrica, m debe ser igual a 2, pero en este caso r tendría cuatro valores diferentes, lo cual es imposible; por lo tanto rr_1 debe ser una función simétrica.

Abel argumenta que el producto rr_1 es una función simétrica, por que si no, entonces por el Teorema de Cauchy, $m = 2$. ¿Qué significa esto?. En (21), r tendría cuatro valores, ya que esto implica que la raíz cuadrada de los términos incluye a su vez raíces cuadradas. Esto no es posible; sólo son posibles los valores $m = 5$ y $m = 2$. Por lo tanto, rr_1 es una función simétrica (23).

Sea v esta función simétrica $(v = rr_1)$, entonces

$$r + r_1 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} + v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{m}} = z. \tag{24}$$

Esta función tiene m diferentes valores, entonces m debe ser igual a 5, ya que m es un número primo. Por lo tanto, tenemos

$$z = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} + v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{5}}, \tag{25}$$

siendo q, q_1, q_2, etc., funciones simétricas de y_1, y_2, y_3, etc. y por lo tanto funciones racionales de a, b, c, d y e.

Como ha excluido la posibilidad de que $m = 2$, entonces por eliminación $m = 5$. Abel expresa z en (25) en términos de las raíces de la quíntica.

Combinando esta ecuación con las ecuación propuesta, podemos expresar y en términos de una función racional de z, a, b, c, d y e. Ahora tales funciones son siempre reducibles a la forma

$$y = P + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}}, \tag{26}$$

donde P, R, P_2, P_3, y P_4 son funciones de la forma $p + p_1 S^{\frac{1}{2}}$, siendo p, p_1, y S funciones racionales de a, b, c, d y e.

De esta expresión para y obtenemos que

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5) = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}, \tag{27}$$

donde

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0. \tag{28}$$

ISSN 2174-0410

Ahora el lado izquierdo de la igualdad (27) tiene 120 valores diferentes y el lado derecho sólo 10; consecuentemente, y no puede tener la forma que hemos considerado, pero hemos demostrado que y debe ser necesariamente de esta forma si la ecuación propuesta es resoluble.

Por lo tanto concluimos que *es imposible resolver por radicales la ecuación general de quinto grado*.

De este teorema se deduce inmediatamente que resulta también imposible resolver por radicales ecuaciones de grado superior a cinco.

Esta última deducción es muy sencilla, ya que si se multiplica la ecuación quíntica por y, entonces tendremos una ecuación de sexto grado, donde una de sus raíces es precisamente $y = 0$, y las otras raíces son irresolubles por radicales, por lo tanto para grados superiores a cinco, es imposible resolverlas mediante radicales.

Referencias

[1] BELL, Eric Temple. *Men of Mathematics*, pp. 307–326, Simon & Schuster, Inc, New York, 1986.

[2] DURÁN, Antonio José. *Cauchy. Hijo rebelde de la revolución*, pp. 106–111, 172–175, Editorial Nívola, Colección *La matemática en sus personajes*, Tres Cantos, Madrid, 2009.

[3] HAYEK, Nácere. *Una Biografía de Abel*, Revista *Números*, Vol. 52, pp. 3–26, Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, diciembre 2002.

[4] JAMES, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 91–97, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[5] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pp. 665–666, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[6] PESIC, Peter. *Abel's Proof*, The MIT Cambridge Press, Massachusetts, Londres, 2003.

[7] ROUSE BALL, Walter William. *A Short Account of The History of Mathematics*, 4th. Ed., pp. 461–462, MacMillan and Co., Limited, Londres, 1919.

[8] SÁNCHEZ MUÑOZ, José Manuel. *Abel y las ecuaciones integrales*, *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, Nº. 42, marzo - junio, 2011.

[9] STEWART, Ian. *Historia de las Matemáticas (En los últimos 10.000 años)*, 1ª.Ed. pp. 190–193, Crítica Editorial, Colección Drakontos, 2008.

[10] THE ABEL PRIZE WEBSITE. *Página completa dedicada a la figura de Abel*, http://www.abelprisen.no/en/abel/

[11] WIKIPEDIA
Niels Henrik Abel, http://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Paolo Ruffini, http://en.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Historias de Matemáticas
Riemann y los Números Primos

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

En el mes de noviembre de 1859, durante la presentación mensual de los informes de la Academia de Berlín, el alemán Bernhard Riemann presentó un trabajo que cambiaría los designios futuros de la ciencia matemática. El tema central de su informe se centraba en los números primos, presentando el que hoy día, una vez demostrada la Conjetura de Poincaré, puede ser considerado el problema matemático abierto más importante. El presente artículo muestra en su tercera sección una traducción al castellano de dicho trabajo.

Palabras Clave: Función Zeta, Números Primos, Hipótesis de Riemann.

1. Introducción

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Demostrar la Hipótesis de Riemann significaría un cambio profundo en la forma de entender la realidad que nos rodea. Por ello, no es extraño que sea considerado como el problema matemático abierto más importante en la actualidad. Pero su reputación ha sufrido el mismo proceso que experimentan los buenos vinos, mejorando con el tiempo, asentándose, a la espera de que la mente privilegiada de un genio pueda arrojar algo de luz sobre el halo de misterio que lo envuelve. Desde que en noviembre de 1859, el alemán Bernard Riemann publicara en la Academia de Berlín *Sobre La Cifra de Números Primos menores que una Cantidad Dada*, muchos matemáticos han intentado, hasta ahora sin éxito, demostrar el *santo grial* de las matemáticas. Pero, ¿qué esconde esta hipótesis?, ¿cuál es el motivo de su fama?, ¿qué conceptos matemáticos oculta?.

Sin lugar a duda el misterio existente en torno a los números primos alimenta la sed de respuestas.

En el año 1900, el alemán David Hilbert pronunció una conferencia durante la celebración del Congreso Internacional de Matemáticos en París. Esta intervención guiaría en cierto modo el devenir futuro de las matemáticas. En ella Hilbert enunció, lo que desde su punto de vista debían ser considerados los 23 problemas matemáticos aún no resueltos más importantes del momento, y en los que la comunidad matemática debería volcar todos sus esfuerzos, de ahí su famosa frase *"Debemos saber, y sabremos"*. El problema número 8 trataba precisamente la *Hipótesis de Riemann*, enunciada de tres modos diferentes:

David Hilbert

HR.1: *La función $Li(x)$ de Gauss está a distancia raíz cuadrada de $\pi(x)$.*

HR.2: *Las funciones $Li(x)$ de Gauss y $R(x)$ de Riemann están a una distancia de orden raíz cuadrada de $\pi(x)$.*

HR.3: *Todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann, definida como continuación analítica de la forma*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad Re(s) > 1$$

están en la franja crítica vertical, formada por los números complejos s tales que $Re(s) = \frac{1}{2}$, esto es, en mitad de la franja crítica.

La Hipótesis de Riemann está relacionada "genéticamente" con los números primos, que son los "átomos" de las matemáticas. Su demostración podría cambiar la forma de hacer negocios hoy en día, pues los números primos son el eje central de la seguridad en la banca y el comercio electrónico. Supondría también que habría una profundo impacto en la vanguardia de la ciencia, que afectaría a la mecánica cuántica, la teoría del caos, y el futuro de la computación. Por ello, el mismo Instituto Matemático Clay de la Universidad de Cambridge en Massachussets, anunció durante el Congreso Internacional de París el 24 de mayo de 2000, en conmemoración del centenario de la conferencia de David Hilbert, que premiaría con un millón de dólares a quien lograra demostrar cualquiera de los 7 problemas matemáticos abiertos del momento, denominados comúnmente *del milenio*[1], del que la Hipótesis de Riemann formaba

[1] Estos problemas, reducidos actualmente a 6 una vez que la *Conjetura de Poincaré*, un problema de topología geométrica, fue demostrada en noviembre de 2002 por el ruso Grigori Perelman, son los siguientes:

1. *P versus NP*. Formulado por Stephen Cook en 1971; puede ser el problema central de las Ciencias de la computación y de especial importancia para los sistemas criptográficos utilizados en la actualidad. Consiste en demostrar que en determinados problemas es mucho más difícil encontrar una solución que comprobar si una solución es correcta.

2. *La Conjetura de Hodge*. Relacionada con la investigación de las formas de objetos complicados mediante la aproximación a partir de combinaciones de bloques geométricos más

parte. Como anécdota para resaltar la importancia de la Hipótesis de Riemann, cabe comentar que en una ocasión en 1943, poco antes de morir, un periodista le preguntó a David Hilbert cuál sería su primera pregunta si pudieran resucitarle 500 años después de su muerte, a lo que éste respondió sin titubeos: *"¿Ha demostrado alguien la Hipótesis de Riemann?"*.

2. Una retrospectiva hasta Riemann de los Números Primos

2.1. Grecia

Euclides de Alejandría[2]

Los primeros intentos de descifrar los misterios de los números primos surgieron en la antigua Grecia. Ellos fueron los que establecieron los principios matemáticos sobre los que se ha trabajado desde entonces. Los pitagóricos se encargaron de profundizar en los conceptos fundamentales de la aritmética, otorgándole a los números un carácter casi místico. Fueron ellos quienes comenzaron a multiplicar y operar con los números, dándose cuenta de que existían algunos de ellos que eran imposibles de reducir. Como anécdota cabe destacar que los números primos pitagóricos son aquellos que se pueden expresar de la forma $4n + 1$, es decir, aquellos números cuyo resto al dividirlos por 4 es 1. Fue entonces cuando las academias y bibliotecas comenzaron a mostrar un ferviente interés por contar con tablas de registro de los números primos cada vez más y más extensas. Pero, ¿era esta lista de números primos finita?

Fue en los *Elementos* de Euclides (en torno al año 300 a.C.) donde encontramos el primer salto cualitativo en lo que a los números primos se refiere. Euclides demostró que la cantidad de números primos era infinita, y lo hizo

simples de dimensión creciente.

3. *La Hipótesis de Riemann*. Considerada como la pregunta abierta más importante en las matemáticas y que trata sobre los números primos, cuyo estudio ha atraído a numerosos matemáticos: Euclides, Gauss, Riemann, Chebyshev, etc. En particular se refiere a la distribución de los números primos en la serie de números naturales, que está muy relacionada con el comportamiento de la llamada función zeta de Riemann.
4. *El problema de Yang-Mils*. Está planteado como un problema matemático y se refiere al estudio de las ecuaciones de Yang-Mills, fundamentales en la unificación de la electrodinámica cuántica con la teoría electrodébil.
5. *El problema de Navier-Stokes*. El estudio de la existencia de soluciones para las ecuaciones básicas del movimiento de los fluidos incompresibles: las Ecuaciones de Navier-Stokes (Navier 1822 y Stokes 1842).
6. *La Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer*. Conduce al estudio del carácter infinito o finito del número de soluciones racionales de una curva algebraica elíptica o de género 1.

[2] Retrato fechado en 1474 del pintor Justus van Ghent (1430-1480) que se encuentra actualmente en el Palacio Ducal de Urbino en la Galería Nacional de Las Marcas. En la Edad Media, Euclides de Alejandría era confundido erróneamente con Euclides de Megara, discípulo de Sócrates, de ahí que en la inscripción al pie aparezca este nombre.

ISSN 2174-0410

mediante un método ingenioso del razonamiento lógico, la *reducción al absurdo*. Para ello consideró como hipótesis de partida que existe un conjunto finito de números primos que denotaremos como $C = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. En este punto Euclides realiza el paso clave para su demostración. Si ahora consideramos el número formado por el producto de todos estos números primos p_i, todos ellos mayores que 1, y le sumamos 1, tendremos:

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$$

Por lo tanto N es mayor que cualquier de los números primos p_i, por lo tanto no pertenece al conjunto C, y por el Teorema Fundamental de la aritmética (que aparece en el Libro IX de los *Elementos*), puede descomponerse como producto de factores primos. Por hipótesis, estos factores sólo pueden estar entre los primos que aparecen en el conjunto C. Por tanto, existirá un primo q del conjunto C, tal que q es divisor de N, y obviamente, q divide a $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$. Por consiguiente, q divide a la diferencia

$$N - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

(que es igual a 1). Pero ningún número primo divide a 1, y q es un número primo que divide a 1, de aquí la contradicción. Concluimos entonces que el conjunto de los números primos no puede ser finito (q.e.d.).

En principio, el argumento de Euclides establece cómo podemos encontrar números primos nuevos: multipliquemos los que conocemos, sumemos uno al producto y factoricemos el número resultante. Por ejemplo si realizamos la siguiente operación $N = 2 \times 3 + 1 = 7$ obtenemos como resultado un nuevo número primo. Desgraciadamente, una vez que hemos obtenido los 200 primeros números primos, la factorización comienza a ser prácticamente inabordable. Como curiosidad, el número $P = 2^{43.112.609} - 1$ con ¡12.978.189! cifras en el sistema decimal, es el número primo más grande conocido hasta Marzo de 2011, descubierto por Edson Smith del Departamento de Matemáticas de la Universidad de California, Los Ángeles (UCLA).

Una vez establecida la infinidad de números primos, el siguiente paso debía ser *cuantificar* la cantidad de números primos que existen menores que un número N establecido previamente. Denotaremos entonces

$$\pi(x) = \text{números primos} \leq x$$

La herramienta más útil que se conoce para contar primos es la *Criba de Eratóstenes*, descubierta por Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.). Éste es un algoritmo utilizado para eliminar los números compuestos entre 1 y x, y se basa en la observación de que si N es menor o igual a x, y no es divisible por ningún primo menor o igual que $\sqrt{x}$, entonces N debe ser primo. Comenzamos por hacer un listado de todos los enteros entre 1 y x, y eliminar de la lista todos los múltiplos de 2. A

Eratóstenes enseñando en Alejandría, pintura de Bernardo Strozzi (1581-1644) continuación borramos los múltiplos de 3, después los múltiplos de 5, etc., hasta que todos los múltiplos de los primos menores o iguales que $\sqrt{x}$ hayan desaparecido de la lista. Los números que hayan sobrevivido a la criba serán todos primos.

La Criba de Eratóstenes nos permite evaluar la función $\pi(x)$ para valores pequeños de x: se trata de una función escalonada que da un salto 1 cada vez que aparece un primo nuevo. Sin embargo, para valores grandes de x, es imposible calcular el valor de $\pi(x)$ con exactitud, pero podemos intentar hacer una estimación de su valor basándonos en el patrón de su comportamiento para valores conocidos.

2.2. Fermat, Mersenne y algunas conjeturas

Tras la caída del imperio romano, Europa quedó sumida en una especie de letargo durante la edad Media. No fue hasta finales del siglo XV, con la aparición del Renacimiento, cuando se empezaron a recuperar en todas las disciplinas del arte, y la ciencia los trabajos de los clásicos. Sin embargo, la aritmética jugó en cierto modo un papel secundario en cuanto a interés se refiere, dejando el protagonismo primero al álgebra durante el siglo XVI, a la geometría algebraica durante la primera mitad del siglo XVII, y al cálculo y al análisis durante la segunda mitad del siglo XVII y todo el siglo XVIII. Sin embargo durante este largo periodo no dejaron de surgir nuevas investigaciones en torno a la aritmética, caracterizada esta época por la aparición de ciertas conjeturas, muchas de ellas en torno a los números primos.

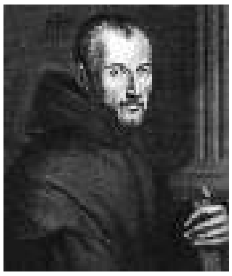
Pierre de Fermat

Pero, si hay un personaje que destaque sobre todos los demás en el siglo XVII en cuanto a la aritmética se refiere, éste es sin lugar a dudas el francés Pierre de Fermat. Fermat, que no era matemático de profesión sino un hombre de leyes, trabajó en infinidad de ramas de las matemáticas. Llegó a descubrir el cálculo incluso antes que Newton o Leibniz, siendo cofundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal, o descubriendo independiente de Descartes el principio fundamental de la geometría analítica. Fermat conjeturó que todos los números de la forma $2^{2^n}+1$ eran primos (debido a lo cual se los conoce como *números de Fermat*, ligados fuertemente a la construcción de polígonos regulares mediante regla y compás, de modo que si notamos como F_n a los números de Fermat, y tenemos que F_n es un número primo p, entonces podemos inscribir en un círculo un polígono regular de p lados con la ayuda únicamente de una regla y un compás) y verificó esta propiedad hasta $n = 4$ (es decir, $2^{16}+1$). Sin embargo, el siguiente número de Fermat $2^{32}+1$ es compuesto ($2^{32}+1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$), como demostró Euler. De hecho, hasta nuestros días no se conoce ningún número de Fermat que sea primo aparte de los que ya conocía el propio matemático francés[3]. También demostró el que hoy es un resultado fundamental de la arit-

[3] Existe un test especializado cuyo tiempo de ejecución es polinómico: el *test de Pépin*. Sin embargo, los propios números de Fermat crecen tan rápidamente que sólo se ha podido aplicar para

mética, conocido como *Pequeño Teorema de Fermat*, cuyo enunciado establece:

> Si p es un número primo, y a es cualquier número natural mayor que 1, entonces $p|a^p - a$, es decir, $a^p - a$ es divisible por p.



Marin Mersenne

El segundo gran personaje del siglo XVII, en lo que a aritmética se refiere, fue el monje francés de la Orden de los Mínimos Marin Mersenne, quien hizo de su habitación en un convento de París un lugar de encuentro de matemáticos de la talla de Fermat o Pascal con la matemática como tema principal de discusión. Mersenne dedicó especialmente gran parte de sus investigaciones a los números primos de la forma $2^p - 1$. Se puede demostrar que si p no es primo entonces $2^p - 1$ tampoco es primo, con lo que sólo tienen un especial interés los números $2^p - 1$ con p primo. Antes de Mersenne, otros matemáticos habían establecido ya que ciertos números del tipo $2^p - 1$ eran primos. En particular, se sabía que $2^p - 1$ era primo para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17$ y 19, y que $2^p - 1$ no era primo para $p = 11$. Entonces Mersenne en 1644, en el prólogo de su libro *Cogitata Physica-Mathematica*, escribió que considerando un primo p entre 2 y 257, el número $2^p - 1$ es primo sólo para los números p siguientes: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257. Toda la comunidad matemática opinaba que era imposible que Mersenne hubiese estudiado tal cantidad de números, pero tampoco había nadie capaz de probar que su enunciado era incorrecto. La afirmación estaba tan por encima de las posibilidades de la época que tuvieron que pasar más de 100 años para que alguien hiciese un avance real en su estudio: finalmente se logró probar que efectivamente el número $2^{31} - 1$ es un número primo. Éste es sólo uno de la cantidad ingente de resultados matemáticos asociados al nombre del matemático más prolífico de la historia, el suizo Leonhard Euler. El estudio del resultado anunciado por Mersenne no se completó hasta 1947, estableciéndose que la lista correcta es: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 y 127. Al final resultó que Mersenne había puesto dos números de más y tres de menos en su lista original. A pesar de todo, los primos de la forma $2^p - 1$ conservan el nombre de Mersenne. Quedaban así entonces establecidos los 12 primeros primos de Mersenne[4].

valores de n pequeños. En 1999 se aplicó para $n = 24$. Para determinar el carácter de otros números de Fermat mayores se utiliza el método de divisiones sucesivas y de esa manera a fecha de junio de 2009 se conocen 241 números de Fermat compuestos, aunque en la mayoría de los casos se desconozca su factorización completa.

[4] Existe un test de primalidad muy eficaz, el *test de Lucas-Lehmer*, para determinar si un número de Mersenne es primo o no. El proyecto de computación distribuida GIMPS, acrónimo de Great Internet Mersenne Prime Seach, se encarga de buscar números primos de Mersenne, que normalmente son los mayores primos que se conocen, de hecho el $2^{43.112.609} - 1$ antes mencionado forma el tetragésimo quinto número primo de Mersenne. La idea es que colaboradores de todo el mundo operen sobre una base de datos central. No hay más que conectar con la página WEB de GIMPS (www.mersenne.org) y descargar el software necesario. Automáticamente, la base de datos central asigna una serie de cálculos. Esta tarea la realiza el ordenador con los recursos que no están siendo utilizados en cada momento, no interfiriendo así en su actividad normal. Una vez obtenidos los resultados, el mismo ordenador contacta automáticamente con la base de datos central, actualizándola. Si el ordenador no está conectado continuamente a Internet, espera a estar conectado para hacer la transferencia de datos. Esto hace posible el uso de los nuevos resultados por otros colaboradores.

ISSN 2174-0410

El 7 de junio 1742, Christian Goldbach, secretario de la Academia Imperial de Ciencias de San Petesburgo desde febrero de 1725, y tutor-educador en Moscú de varios descendientes del zar Pedro I *El Grande* (Ekateriana I, Pedro II, Anna Ivanovna, Iván VI e Isabel Petrovna), escribió una carta a Euler que demuestra la capacidad intuitiva matemática del alemán. En esta carta exponía:

> *"No creo que sea totalmente inútil plantear aquellas proposiciones que son muy probables aunque falte una verdadera demostración, pues aún cuando se descubra que son incorrectas, pueden conducir al descubrimiento de una nueva verdad."*

Además Goldbach le comentaba que, a pesar de no haber encontrado una demostración, estaba seguro de que *todo número natural mayor o igual que 6 se puede escribir como suma de tres números primos*. Euler le contestó el 30 de junio, confirmando que el resultado es equivalente a que *todo número natural par mayor o igual que 3 es la suma de dos primos*. Este último enunciado pasaría a la historia con el nombre de *Conjetura de Goldbach*, uno de los problemas abiertos más famosos de las Matemáticas. Es bien conocido que Descartes había formulado una conjetura similar, aunque no equivalente a la de Goldbach en 1650, que establecía que *todo número par es al menos suma de tres números primos*. Lo que no está tan claro es que formulara dicha conjetura únicamente para los números enteros pares, pero es fácil ver que ésta es equivalente. Muchos han intentado su demostración. Uno de los primeros fue el padre de la teoría de conjuntos, el alemán Georg Cantor. Otros matemáticos brillantes como Lev Schnirelmann, Godfrey H. Hardy, Ivan Vinagodrov y Chen Jingrun, han dedicado parte de sus esfuerzos en lograr desentrañar sus secretos, lográndose avances muy significativos por métodos analíticos, aunque sin llegar a la solución general final. No se duda de su veracidad, como además sugieren los cálculos hechos en la actualidad con algunos de los ordenadores más potentes, pero nadie ha sido capaz de dar una demostración general. El último avance en la comprobación directa del resultado mediante ordenador asegura que el resultado es cierto para todo número par hasta 400 billones.

Otra de las conjeturas más interesantes es la relativa a la cantidad de números primos gemelos. Dos números primos p y q se dice que son gemelos si $p = q + 2$. Como ningún número primo puede ser par, a excepción del 2, dos primos son gemelos si están todo lo cerca que dos primos mayores que 2 pueden llegar a estar. Primos gemelos son, por ejemplo, las parejas $(17, 19)$, $(29, 31)$ y $(1.000.000.000.061, 1.000.000.000.063)$. La *Conjetura de los primos gemelos* establece que existen infinitas parejas de primos gemelos. Aunque esta afirmación parezca muy similar al resultado que hemos demostrado sobre la existencia de una cantidad infinita de números primos, todavía nadie ha sido capaz de determinar si es cierta o no. Esta conjetura puede sugerir que los primos se encuentran cerca unos de otros. Sin embargo, es fácil ver que hay listas de números naturales consecutivos no primos de cualquier longitud. La *Conjetura de Polignac* es una versión más general y más fuerte que la anterior, ya que enuncia que *para cada entero positivo n, existen infinitos pares de primos consecutivos que están separados por $2n$ números compuestos*. A su vez, una versión más débil de dicha conjetura dice que *todo número par es la diferencia de dos números primos*.

Durante el Congreso Internacional de Matemáticos de 1912 celebrado en la ciudad británica de Cambridge, el alemán Edmund Landau redactó un ensayo sobre teoría de números y la función zeta de Riemann. En él, catalogó los cuatro problemas básicos sobre números primos considerados "inabordables" en aquel momento. Estos problemas se denominaron comúnmente *Los Problemas de Landau*, y son los siguientes:

Edmund Landau

1. La *Conjetura de Goldbach*[5].
2. La *Conjetura de los Números Primos Gemelos*.
3. La *Conjetura de Legrende*, establece que *existe siempre un número primo entre dos cuadrados perfectos, esto es, entre n^2 y $(n+1)^2$*.
4. La conjetura de establece que *existen infinitos números primos p tales que $(p-1)$ es un cuadrado perfecto*. Dicho de otra forma, *existen infinitos números primos de la forma n^2+1*.

Otros enunciados sobre números primos aún sin demostrar de forma general son:

1. La *Conjetura de Brocard*, que establece que *entre los cuadrados de primos consecutivos mayores que 2 existen siempre al menos cuatro números primos*.
2. La *Conjetura de Cramer*, cuya veracidad implicaría la de Legendre, que establece la siguiente expresión
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}-p_n}{(\log p_n)^2} = 1$$
3. El *problema ternario*, establece que *dado un número impar $n > 7$, éste es suma de tres números primos*.
4. *Para cualquier n, éste es un cuadrado de la suma de un primo y un cuadrado*[6].
5. La *Conjetura de Hardy-Littlewood* establece que *la cantidad de números primos tales que $n^2+1 < x$ tiende asintóticamente a la siguiente expresión*
$$\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p-1}\left(\frac{-1}{p}\right)\right)\frac{\sqrt{x}}{\log x}$$
Hardy y Littlewood expresaron varias conjeturas sobre los problemas de adición de números primos en su trabajo conjunto de 1923. Algunas de estas se tratan en este documento.

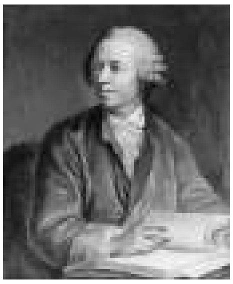
[5] En realidad se denomina *Conjetura fuerte de Goldbach* y como curiosidad no considera el 1 como un número primo. Si se representa dicha conjetura a través de la ecuación $2n = p+q$ siendo $n \in \mathbb{N} | n > 1$ y p y q son números primos, tenemos la expresión equivalente
$$n = \frac{p+q}{2}$$
que nos permite enunciar la conjetura de forma alternativa *todo número natural mayor que 1, es promedio de dos números primos*. También existe una *Conjetura débil de Goldbach*, que establece que *todo número impar mayor que 5 puede escribirse al menos de una forma como suma de tres números primos.*

[6] Esto no es cierto para todos los valores de n, ya que al menos 34 y 58 son excepciones.

ISSN 2174-0410

2.3. Euler y el nacimiento de la función zeta

Hasta el siglo XVIII, nadie había podido vislumbrar ningún patrón en el comportamiento de los números primos. Estos aparecen en la sucesión de los números naturales sin ningún orden aparente, aunque lo que sí es cierto es que su frecuencia disminuye a medida que avanzamos en la sucesión.



Leonhard Euler

En 1737, el prolífico suizo Leonhard Euler encontró una identidad capaz de relacionar los números naturales con los números primos que abriría las puertas de la moderna teoría (analítica) de números , enunciando el siguiente teorema

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \text{ para todo } s > 1 | s \in \mathbb{R}, \text{ y } p \text{ primo.}^7 \qquad (1)$$

¿Pero cómo pudo Euler deducir esta interconexión entre los números naturales y los números primos?. Su demostración más estricta fue publicada en 1744. Sea

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\,x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots$$

Lo que nos lleva a

$$\frac{1}{2}\,x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots$$

Nótese que no existen números pares en los denominadores del lado derecho de la igualdad. Ahora, para eliminar los denominadores que son divisibles por tres, dividimos ambos lados de la igualdad por tres, para obtener

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\,x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \dots$$

Restando, se eliminan todos los denominadores múltiplos de 3, resultando

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\,x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Este proceso es similar a la criba de Eratóstenes, ya que, en cada paso, se elimina el denominador primo y todos sus múltiplos. Repitiendo la iteración, pero esta vez dividiendo la última ecuación por 5, y reagrupando se obtiene

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\,x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \dots$$

[7] En realidad Euler demostró esta afirmación para el caso $s = 1$ en el teorema 7 de su obra *Variae observationes circa series infinitas*, a la sazón una de las primeras de su prolífica carrera.

operando resulta

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 5}\,x = 1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\dots$$

Del mismo modo, los términos con denominadores que son múltiplos de 7, 11, y así con todos los números primos, se irán eliminado, resultando

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18\cdot 22\cdots}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 21\cdots}\,x = 1$$

Pero, como x es sabido que resulta ser la suma de la serie harmónica (la cual diverge), el resultado queda inmediatamente demostrado.

Sin embargo, esta demostración no puede ser considerada suficientemente rigurosa desde un punto de vista de los estándares matemáticos modernos, pero cualquier matemático moderno reformularía el teorema diciendo que la serie harmónica tiene un límite finito si y sólo si el producto infinito lo tiene, y entonces comenzaría la demostración "suponiendo que la serie harmónica converge al valor x".

Sin embargo, si aceptamos el resultado, entonces tenemos una pequeña demostración de que existen infinitos números primos. Para que el producto

$$\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdots}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18\cdots}$$

diverja debe tratarse de un producto infinito, por lo tanto deben existir infinitos números primos.

El teorema 8 de dicha obra de Euler resulta extremadamente importante. Si utilizamos la serie de números primos para formar la expresión

$$\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n-1}\cdot\dots$$

entonces su valor es igual a la suma de esta serie

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots$$

Utilizando la notación moderna, esta expresión resulta ser (1), cuya demostración es exactamente igual a la del teorema 7, con el exponente n incluido. Además, la demostración del teorema 8 es completamente correcta desde el punto de vista de los estándares matemáticos modernos ya que todas las series involucradas en la expresión son absolutamente convergentes.

2.4. Las aportaciones de Legendre y Gauss

Aunque en principio no sabemos cuándo un número va a ser primo, y la distribución de los números primos en la recta real es bastante errática, lo cierto es que la función $\pi(x)$, pese a tener pequeñas oscilaciones, crece con bastante regularidad, y esta regularidad es mucho más extrema cuanto mayores son los valores de la variable x. Veamos una Tabla 1 con valores de $\pi(x)$.

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$	$x/\log x$
10	4	2,50	4,34
10^2	25	4,00	21,71
10^3	168	5,95	144,76
10^4	1.229	8,14	1.085,74
10^5	9.582	10,44	8.685,89
10^6	78.498	12,74	72.382,41
10^7	664.579	15,05	620.420,69
10^8	5.761.455	17,36	5.428.681,02
10^9	50.874.534	19,66	48.254.942,43
10^{10}	455.052.511	21,98	434.294.481,90

Tabla 1

Observando la Tabla 1 vemos que la razón $x/\pi(x)$ aumenta aproximadamente en 2,3 cuando pasamos de una potencia de 10 a la siguiente: esto es, el logaritmo de 10 en base e. Esto nos lleva a conjeturar que

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$$

donde $\approx$ significa que $\pi(x)$ y $x/\log x$ consideradas como funciones sobre $\mathbb{R}$ están muy próximas la una a la otra, de forma que se puede establecer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1 \tag{2}$$

Este teorema fue conjeturado de manera independiente por Adrien Marie Legendre y Carl Friedrich Gauss.

En 1798, el francés Legendre realizó un intento de aproximación de la función $\pi(x)$, estableciendo la siguiente expresión que aparecía en su obra *"Essai sur la théorie des nombres, 1"*

$$\pi(x) = \frac{x}{A\log x + B}$$

para valores de x suficientemente grandes, y más tarde, en 1808, en su obra *"Essai sur la théorie des nombres, 2"* establecía los valores $A = 1$, $B = -1,08366$ (la constante B es a veces denominada *constante de Legendre*).

Pero el primer estudio serio de la función $\pi(x)$ parece ser que lo llevó a cabo un jovencísimo C. F. Gauss entre 1792 y 1793, con tan sólo 15 o 16 años, siendo aún estudiante, así se lo haría saber en una carta en las Navidades de 1849 al astrónomo Encke. Gauss estudió la densidad de números primos entre 1 y 3.000.000, y su distribución en intervalos de longitud 1.000, y conjeturó la fórmula (2), conocida posteriormente como el *Teorema de los números primos*, una vez demostrada de forma independiente por Hadamard y de la Vallée Poussin en 1896.

Carl Friedrich Gauss

Gauss calculó tanto $\pi(x)$ como $x/\log x$ para $x = 3.000.000$, obteniendo

$$\pi(3.000.000) = 216.745 \qquad \frac{3.000.000}{\log 3.000.000} = 216.971$$

ISSN 2174-0410

por lo que concluiría que $x/\log x$ aproxima $\pi(x)$ para $x = 3.000.000$, con un error de sólo 226 primos. De hecho el error es 161, aún menor, pues parece ser que Gauss cometió un error en sus cálculos, resultando $\pi(3.000.000) = 216.816$. En cualquier caso, a pesar de este error de cálculo, Gauss supo vislumbrar que ambas funciones estaban muy cerca una de la otra, aunque desgraciadamente no lo suficiente como para explicar la regularidad de $\pi(x)$. Gauss observó que la frecuencia de primos cerca de un número x grande es prácticamente $x/\log x$, y por lo tanto la probabilidad de que un número grande x elegido al azar sea primo parece ser proporcional a

$$\frac{1}{\log_{10} x} \approx \frac{1}{\text{número de dígitos de } x},$$

observación que de hecho es la idea básica de la teoría de los números primos. Por ejemplo, la probabilidad de que un número de 100 dígitos sea primo es $1/230$, mientras que la probabilidad de que un número de 1.000 dígitos sea primo es $1/2.302$, etc. Así pues, concluyó Gauss, si estimamos $\pi(x)$ por

$$\pi(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \text{Prob.(n primo)} + \text{término de error}$$

tendremos la suma logarítmica

$$\pi(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} + E_1(x)$$

o, lo que es esencialmente lo mismo,

$$\pi(x) = Li(x) + E_2(x),$$

con $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, la función denominada *logaritmo integral*. $E_1(x)$ y $E_2(x)$ son errores muy similares, de hecho,

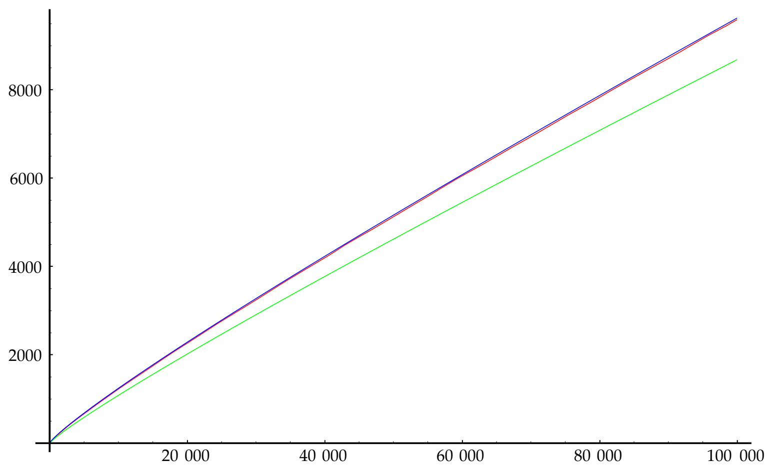
$$\left| \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} - \int_2^x \frac{dt}{\log t} \right| \leq 2$$

por lo que $\pi(x)$ puede ser aproximada mediante una suma o mediante una integral.

Gauss conjeturó que las funciones $Li(x)$ y $\pi(x)$ están muy cerca la una de la otra, y que la probabilidad de que un número grande y arbitrario x sea primo está cerca de $1/\log x$. En cierto modo, Gauss había sido capaz de vislumbrar un cierto patrón en la distribución de los números primos. Su apuesta pasaría a denominarse *Conjetura de los Números Primos*. Para recompensa de Gauss, los matemáticos demostrarían que el porcentaje de error entre la función logaritmo integral de Gauss y la distribución real de números primos se hace cada vez más y más pequeño cuanto más grande es la cantidad de números fijada previamente.

x	$\pi(x)$	$Li(x)$	$x/\log x$	$\pi(x)/Li(x)$
10	4	4,34	5,12	0,781250
10^2	25	21,27	29,08	0,859697
10^3	168	144,76	176,56	0,951518
10^4	1.229	1.085,74	1.245,09	0,987077
10^5	9.582	8.685,89	9.682,76	0,989594
10^6	78.498	72.382,41	78.626,50	0,998366
10^7	664.579	620.420,69	664.917,36	0,999491
10^8	5.761.455	5.428.681,02	5.762.208,33	0,999869
10^9	50.874.534	48.254.942,43	50.849.233,94	0,999966
10^{10}	455.052.511	434.294.481,90	455.055.612,94	0,999993

Tabla 2



Comparativa entre las funciones $\pi(x)$ (en rojo), $\dfrac{x}{\log x}$ (en verde) y $Li(x)$ (en azul)

2.5. Las aportaciones de Dirichlet y Chebyshev

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

En 1837, el francés Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet generalizó el método utilizado por Euler para demostrar que cualquier progresión geométrica $a, a+k, a+2k, a+3k, \ldots$, donde a y k no tengan ningún factor común, existen infinidad de número primos[8]. La principal modificación al método de Euler que Dirichlet llevó a cabo consistió en alterar la función zeta de modo que los número primos fueran separados por categorías dependiendo del resto que resultara de dividirlos por k. Su función zeta modificada, denominada hoy día *función L de Dirichlet*, se expresa

$$L(s,\chi) = \frac{\chi(1)}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \frac{\chi(4)}{4^s} + \ldots$$

[8] De hecho el teorema de Euclides puede ser considerado como un caso especial de esta afirmación para la progresión aritmética $1, 3, 5, 7, \ldots$.

donde $\chi(n)$ es una clase especial de función denominada *carácter de Dirichlet*[9] que clasifica los primos del modo especificado. En particular, esta función cumple una serie de condiciones como que $\chi(mn) = \chi(m) \cdot \chi(n)$ para cualquier m, n; además depende únicamente del resto obtenido al dividir n por k, y $\chi(n) = 0$ si n y k tienen un factor común.

Cualquier función de la forma $L(s, \chi)$ donde s es un número real mayor que 1 ($Re(s) \geq 1$), y χ es un carácter, se denomina función L-serie de Dirichlet. La función zeta de Riemann es un caso especial que aparece cuando se toma $\chi(n) = 1$ para todo n.

Un resultado clave sobre las L-funciones es que, al igual que la función zeta, pueden ser expresadas como un producto infinito de números primos:

$$L(x, \chi) = \frac{1}{1 - \frac{\chi(2)}{2^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{\chi(3)}{3^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{\chi(5)}{5^s}} \times \cdots = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

de modo que p es un número primo.

Tras estas aportaciones de Dirichlet, los matemáticos se dedicaron a generalizar su expresión, extendiendo tanto la variable s como el carácter $\chi(s)$ a los números complejos, y utilizando la versión generalizada para demostrar infinidad de resultados sobre números primos, demostrando así la importancia de las L-series como herramienta fundamental para el estudio de los mismos. Con Dirichlet comenzó la aplicación de los métodos infinitesimales a la teoría de números, y la investigación de la ley de distribución asintótica de los números primos.

Pafnuty Lvóvich Chebyshev

El primer trabajo en el que se demostró la distribución asintótica de los números primos, apareció publicado en el año 1850 en la primera memoria del matemático ruso Pafnuty Lvóvich Chebyshev (1821-1894) con el nombre de *"Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée"* (*"Sobre la función que determina la totalidad de los números primos por debajo de un determinado límite"*), la cual ya había sido previamente presentada en la Academia Imperial de Ciencias de San Petesburgo el 24 de mayo de 1848. En este trabajo Chebyshev demostró que si se realiza cualquier aproximación a $\pi(x)$ del orden de $x/\log x^N$ (siendo N cualquier entero positivo muy grande previamente fijado), entonces la aproximación tendría que ser $Li(x)$. De esta afirmación se deduce que la hipótesis de Legendre para los coeficientes A y B, esto es, $\lim_{x\to\infty} A(x) = 1,08366$[10] es falsa, y que si el límite existe, éste ha de ser igual a 1.

[9] En teoría de números, los caracteres de Dirichlet son un cierto tipo de funciones aritméticas que derivan de caracteres completamente multiplicativos sobre las unidades $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Los caracteres de Dirichlet son usados para definir las Funciones L de Dirichlet, las cuales son funciones meromorfas, con una variedad interesante de propiedades analíticas.

[10] Recordamos que Legendre ya había realizado la aproximación $\dfrac{x}{\log x - A(x)}$ con el valor de $A(x) = 1,08366$ para x muy grandes.

Chebyshev demostró que para cualquier entero positivo n,

$$\underline{\lim}_{x\to\infty}\left(\pi(x)-\int_2^x \frac{dt}{\log t}\right)\frac{\log^n x}{x}\leq 0\leq \overline{\lim}_{x\to\infty}\left(\pi(x)-\int_2 x\frac{dt}{\log t}\right)\frac{\log^n x}{x}$$

donde $\log^n x = (\log x)^n$. Integrando repetidamente por partes, se puede ver que para cada entero positivo n,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \left(1+\frac{1!}{\log x}+\frac{2!}{\log^2 x}+\ldots+\frac{(n-1)!}{\log^{n-1} x}\right)\frac{x}{\log x}+n!\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t}+c_n$$

donde c_n es una constante. Utilizando el símbolo de orden de Landau,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} = O\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right)$$

$$\int_2^{x^{1/2}} \frac{dt}{\log^{n+1} t} < \frac{x^{1/2}}{\log^{n+1} 2}, \quad \int_{x^{1/2}}^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} < 2^{n+1}\frac{x}{\log^{n+1} x}$$

Este resultado muestra que $A = B = 1$ son los valores que mejor aproximan la función de Legendre y sugieren que

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

es la mejor aproximación para $\pi(x)$.

Si interpretamos esta aproximación como una fórmula asintótica, esto implica que

$$\pi(x)\frac{\log x}{x} \to 1 \text{ cuando } x \to \infty$$

y haciendo uso del símbolo de orden de Landau,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

La validez de dicha expresión es lo que posteriormente se denominaría *teorema de los números primos*, o lo que es lo mismo, que $\pi(x)$ tiene el orden de magnitud de $x/\log x$.

Posteriormente, Chebyshev publicó en 1852 su obra *"Mémoire sur les nombres premiers"* (*"Memoria sobre los números primos"*) donde demostró esencialmente que

$$B < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < \frac{6B}{5}$$

para números x suficientemente grandes, donde

$$B = \frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 30}{30} \approx 0,92129$$

y

$$\frac{6B}{5} \approx 1,10555.$$

Por desgracia, con este método fue incapaz de demostrar el Teorema de los Números Primos. Lo que sí demostró fue la *Conjetura de Bertrand* que establece que *siempre existe un número primo p entre n y* $2n$*, siendo* $n \in \mathbb{N}$. Esto supone que, en una progresión geométrica de primer término entero mayor que 3 y razón igual a 2, entre cada término de la progresión y el siguiente, se tiene al menos un número primo.

2.6. La estrategia de Riemann

En 1859, para su ingreso en la Academia de las Ciencias de Berlín, el alemán Bernhard Riemann redactó una memoria de ocho páginas que prepararían el camino para llegar posteriormente al Teorema de los Números Primos. La idea de Riemann se basó en interconectar la función $\pi(x)$ con la función zeta de Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

pero, y éste es el salto cualitativo con respecto a Euler, considerada dicha función como de variable compleja. La derivada logarítmica de la identidad de Euler se traduce en la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad [11]$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^k,\ p \text{ primo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otro lado no es complicado comprobar que el teorema de los números primos, aún conjetura cuando Riemann redactó su memoria, es equivalente al enunciado que afirma que

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x \quad [12]$$

La estrategia de Riemann consistió en tratar de obtener información sobre $\psi(x)$, partiendo de las propiedades de la función $\zeta(s)$. La función zeta de Riemann, como es actualmente conocida, posee únicamente un polo simple que

[11] La función $\Lambda(n)$ es la *función de von Mangoldt*, introducida por Chebyshev en su memoria publicada en 1850.

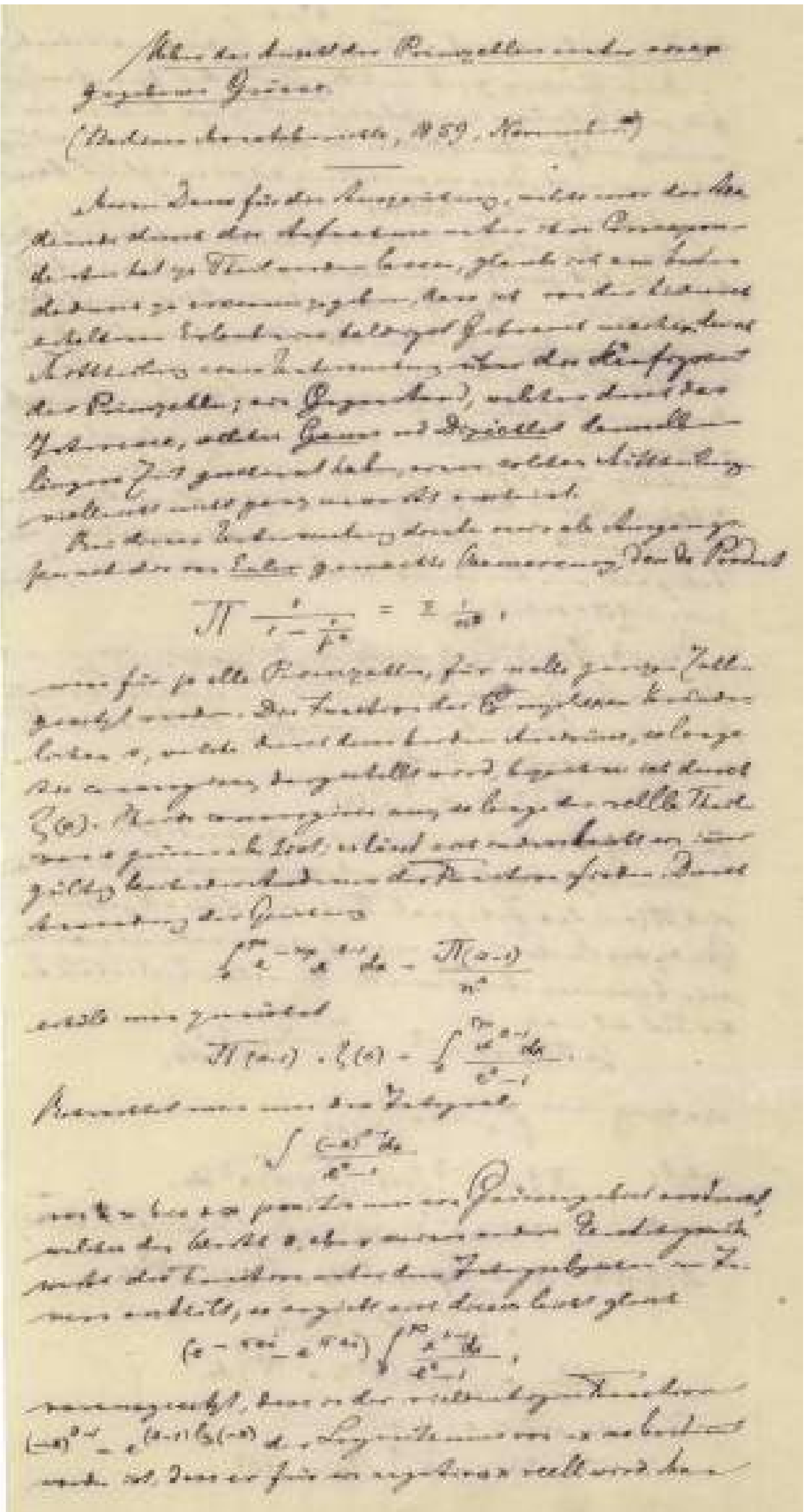
[12] La función $\psi(x)$ es la función sumatorio de Mangoldt, cuya fórmula explícita es

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log(1 - x^2),$$

donde el sumatorio es en todos los ceros complejos ρ de la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ e interpretado como

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{|\Im(\rho)| < t} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

ISSN 2174-0410



Página primera del trabajo original presentado por Riemann en 1859 resulta ser $s = 1$, y se puede extender de forma analítica a todo el plano complejo. La localización de sus ceros en la denominada franja crítica, $0 \leq Re(x) \leq 1$, está fuertemente ligada a la distribución de los números primos. Riemann conjeturó que todos los ceros en esa franja estaban sobre la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$.

Tras su descubrimiento, la Universidad de Gotinga otorgó a Riemann el puesto de Jefe de Departamento de Matemáticas, exactamente el mismo puesto que su predecesor Gauss había ocupado. Desde ese momento, Riemann comenzó a gozar de una vida social muy activa, viendo incrementados su fama y su reputación. Hoy día es considerado un genio, pero de un modo diferente a Gauss; Gauss fue capaz de abarcar todo lo posible en las matemáticas, pero Riemann otorgó a sus aportaciones un carácter casi mágico. Realizó descubrimiento asombrosos sobre los números primos, en parte debido a que fue capaz de "inventar" una maquinaria capaz de interconectar aspectos fundamentales de la teoría de números. También contribuyó en gran medida al desarrollo de la geometría, construyendo nuevos modelos no euclídeos (geometría elípticas) conocidos hoy como *geometrías riemannianas*, donde por ejemplo la Teoría de la Relatividad de Eistein se fundamenta. Su aportación a la ciencia, lejos de estar pasada de moda, se mantiene hoy día relevante.

Por desgracia, nunca sabremos cuán cerca estuvo de demostrar su hipótesis, ya que al parecer tras su muerte su ama de llaves destruyó en el fuego gran parte del material que Riemann tenía en forma de manuscritos o borradores.

3. Sobre La Cifra de Números Primos menores que una Cantidad Dada - Bernhard Riemann

[13] Considero que el mejor modo de expresar mi agradecimiento a la Academia por el honor que hasta cierto punto me ha conferido mediante mi admisión como uno de sus corresponsales, lo llevaré a cabo si pronto hago uso del permiso recibido para comunicar una investigación sobre la acumulación de los números primos, un tema que tal vez pueda ser considerado completamente digno de tal comunicación, dado el interés que *Gauss* y *Dirichlet* han mostrado durante mucho tiempo.

Para esta investigación, mi punto de partida surge de la observación proporcionada por *Euler* de que en el producto

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

p sustituye a todos los números primos, y n a la totalidad de los números. La función de la variable compleja s, que está representada por estas dos expresiones, donde quiera que converjan, la denoto como $\zeta(s)$. Ambas expresiones convergen únicamente cuando la parte real de s es mayor que 1; al mismo tiempo puede encontrarse fácilmente una expresión de la función lo cual siempre

[13] *"Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"* - Bernhard Riemann. Monatsberichte der Berliner Akademie (Informes Mensuales de la Academia de Berlín). Noviembre, 1859. Traducido por José Manuel Sánchez Muñoz, versión 1, Septiembre 2011.

resulta útil. Haciendo uso de la ecuación

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

se observa primeramente que

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}.$$

Si se considera ahora la integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1}$$

desde $+\infty$ a $+\infty$ tomados en sentido positivo en torno a un dominio que contiene el valor 0 pero ningún otro punto de discontinuidad del integrando en su interior, entonces se observa que ésta es igual a

$$(e^{-\pi si}-e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

siempre que, en la función multivalorada $(-x)^{s-1}=e^{(s-1)\log(-x)}$, el logaritmo de $-x$ esté determinado de tal modo que sea un número real cuando x sea negativo. Por lo tanto

$$2\,\mathrm{sen}\,\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

donde la integral tiene el significado que se acaba de especificar.

Ahora esta ecuación nos da el valor de la función $\zeta(s)$ para todos los números complejos s y refleja que esta función es inyectiva y finita para todos los valores finitos de s a excepción de 1, y también que es cero si s es igual a un número entero par negativo.

Si la parte real de s es negativa, entonces, en lugar de ser considerada en torno a un dominio específico en sentido positivo, esta integral puede también ser tomada en un sentido negativo en torno a un dominio que contenga el resto de cantidades complejas, ya que la integral considerada es infinitamente pequeña a pesar de que los valores del módulo son infinitamente grandes. Sin embargo, en el interior de este dominio, el integrando posee discontinuidades únicamente donde x sea igual a un múltiplo de $\pm 2\pi i$, y la integral es por lo tanto igual a la suma de las integrales tomadas en un sentido negativo en torno a estos valores. Pero la integral en torno al valor $n2\pi i$ es $=(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, de lo que se obtiene de aquí que

$$2\,\mathrm{sen}\,\pi s\,\Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}((-i)^{s-1}+i^{s-1}),$$

por lo tanto hay una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$, que, a través de propiedades conocidas de la función Π, podría ser expresada como sigue:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

que se mantiene sin cambios cuando s es sustituida por $1-s$.

Esta propiedad de la función me indujo a considerar, en lugar de $\Pi(s-1)$, la integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ como término general de la serie $\sum \frac{1}{n^s}$, mediante el cual se obtiene una expresión muy apropiada para la función $\zeta(s)$. En realidad

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^\infty e^{-nn\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

por lo tanto, si se establece

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x}=\psi(x)$$

entonces

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

o desde

$$2\psi(x)+1=x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),\ \text{(Jacobi, Fund. S. 184)}$$

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx+\int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}\,dx\\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{\frac{s-3}{2}}-x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx\\ &= \frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

Ahora establezco que $s=\frac{1}{2}+ti$ y

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t),$$

así

$$\xi(t)=\tfrac{1}{2}-(tt+\tfrac{1}{4})\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx$$

o, adicionalmente,

$$\xi(t)=4\int_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx.$$

Esta función es finita para todos los valores finitos de t, y permite ser desarrollada en potencias de tt como una serie rápidamente convergente. Ya que,

ISSN 2174-0410

para un valor de s cuya parte real sea mayor que 1, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ es finito, e igualmente sucede con los logaritmos de los otros factores de $\xi(t)$, deduciendo que la función $\xi(t)$ sólo puede desaparecer si la parte imaginaria de t se encuentra entre $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$. El número de raíces de $\xi(t) = 0$, cuyas partes reales están entre 0 y T es aproximadamente

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

por que la integral $\int d\log\xi(t)$, tomada en un sentido positivo en torno a la región formada por los valores de t cuyas partes imaginarias se encuentran entre $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$ y cuyas partes reales se encuentran entre 0 y T, es igual (hasta una fracción del orden de magnitud de la cantidad $\frac{1}{T}$) a $\left(T\log\dfrac{T}{2\pi} - T\right)i$; esta integral sin embargo es igual al número de raíces de $\xi(t) = 0$ que se encuentran dentro de esta región, multiplicada por $2\pi i$. De hecho ahora se deduce aproximadamente el número de raíces reales dentro de estos límites, y es muy probable que todas las raíces sean reales. Ciertamente, en este punto uno desearía una demostración más estricta. Por ahora he aparcado temporalmente la búsqueda de este número tras algunos intentos fugaces fallidos, ya que parece innecesario para el próximo objetivo de mi investigación.

Si se denota por α a todas las raíces de la ecuación $\xi(\alpha) = 0$, se puede expresar $\log\xi(t)$ como

$$\sum\log\left(1 - \frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0);$$

para deducir, ya que la densidad de las raíces de la cantidad t crece con t sólo como $\log\dfrac{t}{2\pi}$, que esta expresión converge y se alcanza el valor infinito $t\log t$ para un valor infinito de t; por lo tanto, difiere de $\log\xi(t)$ en una función de tt, que para un valor finito de t es continua y finita, y cuando se divide por tt, alcanza valores infinitamente pequeños para valores de t infinitamente grandes. La diferencia es en consecuencia una constante, cuyo valor puede ser determinado mediante la consideración de $t = 0$.

Con la ayuda de estos métodos, el número de números primos que son menores que x puede ser determinado ahora.

Sea $F(x)$ igual a este número cuando x no es exactamente igual a un número primo; pero sea éste mayor que $\frac{1}{2}$ cuando x sea un número primo, así, para cualquier x en el que haya un salto en el valor en $F(x)$,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Si en la identidad

$$\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s}) = \sum p^{-s} + \tfrac{1}{2}\sum p^{-2s} + \tfrac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

ahora se reemplaza

$$p^{-s} \text{ por } s\int_p^\infty x^{-s-1}\,ds, \quad p^{-2s} \text{ por } s\int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,ds, \ldots,$$

se obtiene

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1}\, dx,$$

si se denota

$$F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

por $f(x)$.

Esta ecuación es válida para cada valor complejo $a + ib$ de s tal que $a > 1$ Si, por el contrario, la ecuación

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s}\, d \log x$$

se mantiene dentro de este rango, entonces, por la aplicación del *Teorema de Fourier*, se puede expresar la función h en términos de la función g. La ecuación se descompone, si $h(x)$ es real y

$$g(a + bi) = g_1(b) + ig_2(b),$$

en las dos siguientes:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x) x^{-a} \cos(b \log x)\, d \log x,$$

$$ig_2(b) = -i \int_0^\infty h(x) x^{-a} \operatorname{sen}(b \log x)\, d \log x.$$

Si se multiplican ambas ecuaciones por

$$(\cos(b \log y) + i \operatorname{sen}(b \log y))\, db$$

y se las integra desde $-\infty$ a $+\infty$, entonces por el *Teorema de Fourier* se obtiene en ambas $\pi h(y) y^{-\alpha}$ en la parte derecha de la igualdad; por lo tanto, si se suman ambas expresiones y se las multiplica por iy^{α}, se obtiene

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s\, ds,$$

donde la integración se lleva a cabo de manera que la parte real de s se mantiene constante.

Para un valor de y en el que haya un salto en el valor de $h(y)$, la integral expresa la media de los valores de la función h a ambos lados del salto. Del modo en el que la función f se definió, vemos que se tiene la misma propiedad, y por lo tanto, con toda generalidad

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s\, ds.$$

Se puede sustituir por $\log \zeta$ la expresión

$$\frac{s}{2}\log \pi - \log(s-1) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum\nolimits^{\alpha} \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

establecida anteriormente; Sin embargo, las integrales de los términos individuales de esta expresión no convergen, cuando se extiende hasta el infinito, por lo que es conveniente convertir la ecuación anterior por medio de la integración por partes en

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s\, ds$$

Como

$$-\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim\left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1+\frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right),$$

para $m = \infty$ y por lo tanto

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty} \frac{d\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

entonces se deduce que todos los términos de la expresión para $f(x)$, con la excepción de

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss}\log \xi(0) x^s\, ds = \log \xi(0),$$

que toma la forma

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds} x^s\, ds.$$

Pero ahora

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

y, si la parte real de s es mayor que la parte real de β,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s\, ds}{(\beta-s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int\limits_{\infty}^{x} x^{\beta-1}\, dx,$$

o

$$= \int\limits_{0}^{x} x^{\beta-1}\, dx,$$

dependiendo de si la parte real de β es negativa o positiva. Se tiene como resultado

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds$$

$$= \ -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\,ds$$

$$= \ \int_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\ \text{const.}$$

en el primer caso, y

$$=\int_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\ \text{const.}$$

en el segundo.

En el primer caso la constante de integración se determina si la parte real de β es infinitamente negativa; en el segundo caso la integral de 0 a x toma valores separados por $2\pi i$, dependiendo de si la integración se toma a través de valores complejos con el argumento positivo o negativo, y se convierte en infinitamente pequeño, del primer caso, cuando el coeficiente de i del valor de β se convierte en infinitamente positivo, pero para el segundo, cuando este coeficiente se hace infinitamente negativo. A partir de esto se ve como en el lado izquierdo $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ se determinará con el fin de que las constantes de integración desaparezcan.

Insertando estos valores en la expresión de $f(x)$, se obtiene

$$f(x)=Li(x)-\sum{}^{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)+\int_{x}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}+\log\xi(0),$$

si en $\sum^{\alpha}$ se sustituye por α todas las raíces positivas (o raíces con una parte real positiva) de la ecuación $\xi(\alpha)=0$, ordenados por su magnitud. Se puede observar fácilmente, por medio de un debate más profundo de la función ξ, que con esta ordenación de los términos el valor de la serie

$$\sum\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x$$

coincide con el valor del límite para el cual

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds}x^s\,ds$$

converge a medida que aumenta la cantidad de b sin límite; sin embargo cuando se reordena puede tomar cualquier valor real arbitrario.

De $f(x)$ se obtiene $F(x)$ por inversión de la relación

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

para obtener la ecuación

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

en la cual se sustituye por m la serie consistente en aquellos números naturales que no son divisibles por ningún cuadrado que no sea 1, y en el que μ denota el número de factores primos de m.

Si se restringe $\sum^{\alpha}$ para un número finito de términos, entonces la derivada de la expresión para $f(x)$, o al menos parte de la misma, disminuye rápidamente cuando aumente x,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum^{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

da una expresión de aproximación para la densidad de números primos + mitad de la densidad de los cuadrados de los números primos + un tercio de la densidad de los cubos de los números primos, etc, hasta la magnitud x.

La conocida expresión aproximativa $F(x) = Li(x)$ es válida hasta cantidades del orden $x^{\frac{1}{2}}$ y da valores tan grandes como se quiera; debido a los términos no periódicos, la expresión de $F(x)$ no crece hasta el infinito con x

$$Li(x) - \tfrac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}Li(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6}Li(x^{\frac{1}{6}}) - \tfrac{1}{7}Li(x^{\frac{1}{7}}) + \cdots$$

De hecho, comparando $Li(x)$ con el número de números primos menores que x, establecido por *Gauss* y *Goldsmidt* y llevada a cabo hasta $x =$ tres millones, este número ha resultado ser, en los primeros cien mil, siempre menor que $Li(x)$; de hecho la diferencia aumenta, con muchas fluctuaciones, gradualmente con x. Aunque también el aumento y disminución en la densidad de números primos de un lado a otro que depende de los términos periódicos, ha suscitado atención, sin embargo no se ha podido observar ninguna ley que gobierne este comportamiento. En el futuro, sería interesante hacer un seguimiento de la influencia de los términos periódicos individuales en la expresión de la densidad de números primos. Un comportamiento más regular que el de $F(x)$ sería exhibido por la función $f(x)$, la cual ya en los primeros cien números parece estar de acuerdo con la media establecida con $Li(x) + \log \xi(0)$.

La función $f(x)$ exhibe un comportamiento mucho más regular que $F(x)$, de modo que en la primera centena de números parece coincidir con la cantidad dada por $Li(x) + \log \xi(0)$.

ISSN 2174-0410

4. Los Números Primos tras la Hipótesis de Riemann

4.1. El "asedio" de la conjetura

En la segunda mitad del siglo XIX se llevaron a cabo varias mejoras del límite de Chebyshev, como por ejemplo la realizada en 1892 por James Joseph Sylvester de modo que

$$0,956 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < 1,045$$

para valores de x suficientemente grandes.

Al estar tan interconectadas las funciones $\zeta(s)$ y $\pi(x)$, la hipótesis de Riemann juega un papel fundamental en la teoría de los números primos, de tal modo que si ésta se cumple, entonces el término de error que aparece al realizar las aproximaciones pertinentes, puede acortarse de la mejor manera posible. Concretamente, Helge von Koch demostró en 1901 que

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

si y sólo si la hipótesis de Riemann se cumple[14].

4.2. De Conjetura al Teorema de los Números Primos

Jacques Salomon Hadamard *Charles Jean Étienne G. N. de la Vallée-Poussin*

El gran descubrimiento sobre números primos antes de llegar al siglo XX, fue llevado a cabo por el francés Jacques Salomon Hadamard y el belga Charles Jean Étienne Gustave Nicolas de la Vallée-Poussin, quienes se encargaron de demostrar, de forma independiente, la Conjetura de Gauss sobre números primos, adquiriendo la categoría de Teorema de los Números Primos en 1896. Los trabajos de Riemann sobre la función $\zeta(s)$ sirvieron para describir la estrategia a seguir hasta llegar a la demostración de dicho teorema. Para llegar a dicha demostración, por supuesto no elemental, Hadamard hizo uso de su teoría de funciones integrales aplicada a la función $\zeta(s)$, la cual está definida mediante la serie absolutamente convergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \text{para } Re(s) > 1.$$

[14] Una variante refinada del resultado de Koch, dada por Lowel Schoenfeld en 1976, afirma que la hipótesis de Riemann es equivalente al siguiente resultado:

$$|\pi(x) - Li(x)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\,\ln(x), \qquad \text{para todo } x \geq 2657.$$

Básicamente la demostración de Hadamard y de la Vallée Poussin, consistió en probar que la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ no tiene ningún cero de la forma $1 + it$. En particular, de la Vallée Poussin demostró que

$$\pi(x) = Li(x) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\, e^{-a\sqrt{\log x}}\right)$$

donde a es una constante.

4.3. La sociedad Hardy-Littlewood-Ramanujan

Las luchas entre Newton y Leibniz por la autoría de la invención del cálculo en el siglo XVII, abrieron una profunda herida entre las matemáticas de las islas y el continente. A principios del siglo XX, era evidente que las universidades británicas habían permanecido en cierto modo al margen de la revolución matemática extendida por los cinco continentes durante el siglo XIX, por ello resultó sorprendente que el siguiente avance con respecto a la teoría de los número primos surgiera del Trinity College de Cambridge.

Godfrey Harold Hardy *John Edensor Littlewood*

Para ser justos, ha de reconocerse el mérito del impulso que las matemáticas británicas necesitaban a principios del siglo XX, a la sociedad "intelectual" formada en 1911 por Hardy-Littlewood al que más tarde, en 1914, se le uniría el genio desbordante del indú Ramanujan. De esta colaboración que duraría 35 años, surgieron resultados fundamentales en análisis matemático y teoría de funciones. Juntos realizaron aportaciones clave para el avance en el *Problema de Waring*[15] como parte del *método del círculo Hardy-Littlewood*. Juntos enunciaron la *Conjetura de Hardy-Littlewood*[16] sobre la distribución de los primos gemelos, de forma análoga al teorema de los números primos. Su trabajo conjunto en la teoría de números primos sirvió de impulso de la teoría de números fundamentado en establecer un sistema de conjeturas cuya demostración abriría

[15] En teoría de números el *Problema de Waring*, propuesto en 1770 por Edward Waring en su obra *Meditationes Algebraicae*, establece que *todo entero positivo puede expresarse como suma de a lo sumo n potencias k-ésimas positivas, siendo n dependiente de k (se entiende que k es un número entero positivo)*, por ejemplo, todo número es la suma de al menos cuatro cuadrados, o 9 cubos, o 19 números de potencia 4, etc. La respuesta a esta conjetura es que es cierta, conocido como el *Teorema de Hilbert-Waring*, y fue demostrado por Hilbert en 1909.

[16] Si se denota como $\pi_2(x)$ el número de primos p menores que x tales que $p+2$ también es primo, y la constante de los números primos C_2 como el siguiente producto de Euler

$$C_2 = \prod_{p\geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \approx 0,66016118158468695739278121100145\ldots$$

para primos mayores o iguales que tres. La conjetura establece que:

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$$

en el mismo sentido en que el cociente de las dos expresiones tiende a 1 cuando x tiende a infinito.

una nueva dimensión de problemas. Pero el gran salto en la teoría de números primos estaba aún por llegar. En 1914, tras finalizar la I Guerra Mundial, Hardy demostró que existían infinitos ceros en la expresión de Riemann que estaban alineados en la recta $x = \frac{1}{2}$. Desgraciadamente, aunque este descubrimiento significaba un gran paso adelante en el intento de demostración de la Hipótesis de Riemann, éste no era aún definitivo, puesto que no demostraba que todos los ceros de la función zeta estaban sobre la recta en cuestión tal y como Riemann conjeturó. Es decir, por poner un ejemplo, podemos elegir los números pares y habremos demostrado que estos son infinitos, sin embargo nos quedarán infinitos números, los impares, que no habremos considerado.

Srinivasa Ramanujan

Una mañana de 1913, Hardy recibió una carta de un trabajador de 23 años del puerto de la ciudad de Madrás en la India, con un salario "modesto" de 20 rupias al mes. Su nombre era Srinivasa Ramanujan. Éste había sido animado a escribir a varios distinguidos matemático. La verdad es que Hardy, al igual que el resto de destinatarios de la carta (los matemáticos E. W. Hobson y H. F. Baker), estuvo a punto de deshacerse de ella, aunque esa noche se sentó junto a Littlewood con el fin de desentrañar el misterio de los 120 teoremas que Ramanujan especificaba en su misiva. Entre algunos de ellos, Ramanujan, en desconocimiento de los métodos de Legendre, mejorados después por Gauss, especificaba una fórmula que calculaba con un error minúsculo la cantidad de números primos entre 1 y 100 millones. Horas más tarde ambos reconocían estar ante la obra de un genio, hasta tal punto que Hardy que tenía su propia escala de valores para el genio matemático, consideraba que Ramanujan era un 100, Hilbert 80, Littlewood 30 y él mismo 25. Algunas de las fórmulas de Ramanujan le desbordaron, pero escribió

> *"... forzoso es que fueran verdaderas, porque de no serlo, nadie habría tenido la imaginación necesaria para inventarlas."*

Al igual que Hardy, Ramanujan estaba obsesionado con los números primos, hasta tal punto que en su lugar de trabajo, en lugar de contar barcos, se pasaba el día entero llevando a cabo complicados cálculos matemáticos sobre los mismos. Aislado de la vanguardia matemática de Occidente, lo sorprendente y característico de su genio matemático es que fue capaz de reproducir por sí sólo, de forma totalmente autodidacta, los resultados a los que Riemann había llegado 50 años antes. La Universidad de Madrás le negó su acceso, en parte debido a la animadversión de Ramanujan hacia el resto de asignaturas que no fueran matemáticas. Por ello decidió aprender matemáticas por su cuenta, reclutado en su casa durante 5 años, y aunque este nivel casi "enfermizo" de obsesión hacia las matemáticas es posible que no lleven a resultados importantes, en el caso de Ramanujan le llevó a resultados sorprendentemente claves en la teoría de números. Invitado por Hardy, Ramanujan partió para Inglaterra en 1914 y comenzaron a trabajar juntos.

ISSN 2174-0410

En 1916, Ramanujan realizaba la siguiente conjetura:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}}$$

donde la función $\tau(n)$ se define como *función tau de Ramanujan* y se expresa como

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

Dicha conjetura fue demostrada posteriormente por Louis Joel Mordell en 1920. Ramanujan conjeturó incluso que

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$$

para todos los números primos p, y Pierre René V. Deligne (1968/9) expuso que ésta era una consecuencia de las, por entonces aún no demostradas, conjeturas de Weil.

Con respecto a los números primos, Ramanujan realizó esta increíble conjetura:

$$\pi^2(x) < \frac{e\,x}{\log x}\, \pi\left(\frac{x}{e}\right)$$

el número primo más grande conocido que no cumple dicha inecuación es el ¡38. 358. 837. 677!.

Ramanujan también demostró que,

$$Li(x) = \int_{\mu}^{x} \frac{dt}{\log t} = \gamma + \log\log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log k)^k}{k!k}$$

donde γ es la *constante de Euler-Mascheroni*, cuyo valor es 0,5772156649..., y μ es la *constante de Soldner*, cuyo valor es 1,4513692346.... Otra fórmula de Ramanujan que converge mucho más rápidamente es

$$\int_{\mu}^{x} \frac{dt}{\log t} = \gamma + \log\log x + \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\log x)^n}{n!\, 2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2k+1}$$

En 1917 Ramanujan fue admitido en la Royal Society de Londres y en el Trinity College, siendo el primer indio que lograba tal honor. Lo principal de los trabajos de Ramanujan está en sus "Cuadernos", escritos por él en nomenclatura y notación particular, con ausencia de demostraciones, lo que ha provocado una hercúlea tarea de descifrado y reconstrucción, aún no concluida. Fascinado por el número π, desarrolló potentes algoritmos para calcularlo. De salud muy débil, regresó a la India en 1919 con la intención de mejorar su precaria situación física, pero moriría víctima de la tuberculosis el 26 de Abril de 1920.

ISSN 2174-0410

4.4. La disputa entre Erdős y Selberg

Aunque tras las demostraciones (no elementales) de Hadamard y de la Vallée-Poussin, hubo varios autores que llevaron a cabo simplificaciones, en particular Landau y Wiener, evitando en la medida de lo posible la teoría de funciones de Hadamard, aún estaba lejos de encontrarse una demostración más elemental. De hecho en 1921 G. H. Hardy realizó una conferencia en la Sociedad Matemática de Copenhage, en la que comentaba:

> *"No se conoce aún ninguna demostración elemental sobre el teorema de los números primos, y uno podría preguntarse si es razonable esperar que la haya. Ahora sabemos que el teorema es fundamentalmente equivalente a un teorema sobre funciones analíticas, el teorema que establece que la función zeta de Riemann tiene raíces sobre una cierta recta. Una demostración de tal teorema, fundamentalmente no dependiente de la teoría de funciones, me resulta extraordinariamente improbable. Es temerario afirmar que un teorema matemático no pueda ser demostrado de un modo particular; pero una cosa parece clara. Tenemos cierta perspectiva sobre la lógica de la teoría; pensamos en algunos teoremas, que denominamos "profundos", y otros más superficiales; si alguien realizara una demostración elemental del teorema de los números primos, mostraría que estas perspectivas son erróneas, que el tema no se corresponde del modo al que habíamos supuesto, y que es momento de que los libros sean reorganizados y la teoría reescrita."*

Prácticamente 50 años después de las demostraciones de Hadamard y de la Vallée-Poussin, en el año 1948, el húngaro Paul Erdős y el noruego Atle Selberg, anunciaron haber encontrado una demostración elemental sobre el teorema de los números primos, haciendo uso únicamente de propiedades sencillas de la función logaritmo. Desgraciadamente, este anuncio condujo a una amarga disputa entre los dos matemáticos.

Paul Erdős

Atle Selberg

Erdős publicó su demostración en un artículo del Boletín de la Sociedad Matemática Americana, denominado *Sobre un nuevo método en teoría elemental de números que lleva a una demostración elemental del teorema de los números primos*. Al mismo tiempo Selberg publicó su artículo *Una demostración elemental del teorema de los números primos* en la revista Anales de Matemáticas. Selberg desarrolló su método de criba por el que recibió en 1950 la medalla Fields. Éste está basado en un teorema demostrado en 1973 por el matemático chino Chen Jingrun que dice que *todo entero positivo par, es la suma de un primo y un número producto de al menos dos factores primos (cuasiprimo)*. Selberg es actualmente conocido como uno de los principales matemáticos del siglo XX por su introducción de la teoría espectral en la teoría de números, culminado en su descubrimiento de la fórmula que clasifica todas las funciones aritméticas zeta. Por su parte,

ISSN 2174-0410

Erdős recibió en 1952 el Premio Cole. Su trabajo sirvió para sentar las bases de la teoría de grafos e hipergrafos y métodos probabilísticos con aplicaciones en combinatoria y teoría de números elemental. Ambos recibieron el premio Wolf, Erdős en 1983/1984 y Selberg en 1986.

Referencias

[1] BERNDT, Bruce C.. *Ramanujan's Notebooks: Part IV*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] CILLERUELO MATEO, Javier. *La demostración elemental del Teorema de los Números Primos*, Revista *Números*, Nº 43–44, pp. 243–246, Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, septiembre 2000.

[3] COPEL, William A.. *Number Theory: An Introduction to Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[4] CORRALES, Capi. *Números en Núm3ros*, Revista *SIGMA*, Nº 30, pp. 137–149, Departamento de Educación del Gobierno Vasco, mayo 2007.

[5] DOXIADIS, Apóstolos. *El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach*, Ediciones B, Barcelona, 1998.

[6] DUNHAM, William. *Euler. The Master of us all*, pp. 39–60, , Dolciani Mathematical Expositions Vol. 22, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[7] DU SAUTOY, Marcus. *The Music of The Primes. Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*, Ed. Harper, New York, 2003.

[8] GOLDFELD, Dorian. *The Elementary Proof of The Prime Number Theorem: An Historical Perspective*, pp. 106–111, 172–175, Universidad de Columbia, New York.

[9] HARDY, Godfrey Harold y WRIGHT, Edward Maitland. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4ª Edición revisada, Clarendon Press, Oxford, 1975.

[10] ODIFREDDI, Piergiorgio. *La Matemática del siglo XX. De los Conjuntos a la Complejidad*, 1ª Edición, Katz Editores, Buenos Aires, 2006.

[11] RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.*, Monatsberichte der Berliner Akademie, Berlin, November, 1859.

[12] SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, Carlos, y ROLDÁN INGUAZO, Rita. *Goldbach. Una conjetura indomable*, Colección: La matemática y sus personajes, 1ª Edición. Nívola, Madrid, 2009.

[13] WELLS, David. *The Penguin Book of Curious and Interesting Mathematics*, Penguin, Londres, 1999.

[14] EN LA RED.
Página del Profesor Wilkins en el Trinity College de Dublín, dedicada al trabajo que Riemann presentó a la Academia de Ciencias de Berlín en 1859,
http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/
Blog de Fernando del Álamo. Artículo sobre Bernhard Riemann,
http://www.historiasdelaciencia.com/?p=280
Wikipedia. Artículo sobre la Hipótesis generalizada de Riemann,
http://es.wikipedia.org/wiki/Hipótesis_generalizada_de_Riemann
—. Artículo sobre Euclides,
http://es.wikipedia.org/wiki/Euclides
—. Artículo sobre el Teorema de los Números Primos,
http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_números_primos
—. Artículo sobre de la Vallée-Poussin,
http://es.wikipedia.org/wiki/Charles-Jean_de_la_Vallée_Poussin
—. Artículo sobre Edmund Landau,
http://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Landau
—. Artículo sobre Srinivasa Ramanujan,
http://en.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan
Página del Museo de Bellas Artes de Montreal,
http://www.mbam.qc.ca/en/activites/dossier_25.html
Página de Archivo MacTutor de Historia de las Matemáticas de la Universidad de St. Andrews, Escocia, creado por John J. O'Connor y Edmund F. Robertson. Artículo de Chebyshev,
http://www.gap-system.org/~history/PictDisplay/Chebyshev.html
—. Artículo de Mersenne,
http://www.gap-system.org/~history/PictDisplay/Mersenne.html
—. Artículo de Jacques S. Hadamard,
http://www.gap-system.org/~history/PictDisplay/Hadamard.html
—. Artículo de Johan P. G. L. Dirichlet,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html
—. Artículo de Godfrey H. Hardy,
http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Hardy.html
—. Artículo de John E. Littlewood,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Littlewood.html
Les-Mathematics.Net. Artículo sobre Paul Erdős,
http://www.les-mathematiques.net/histoire/histoire_erd.php
Artículo sobre Atle Selberg,
http://snl.no/Atle_Selberg
Base de datos de Archivos sobre Leonhard Euler,
http://www.eulerarchive.org/

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Cuentos Matemáticos
El Club de la Señora Matemática

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

El Club de la Señora Matemática muestra metafóricamente la enorme diversidad y riqueza desde el punto de vista analítico en el que se pueden llegar a clasificar las funciones, llevando a cabo un breve repaso por algunas de las más singulares.

Palabras Clave: Señora Matemática, funciones.

Como de costumbre, el trajín en el club de la señora Matemática era infernal. Un sinfín de discípulos de la señora se hacinaba en las distintas salas concéntricas que conformaban el club, afanándose en modelar el material que les llegaba para fabricar ejemplos, crear teorías, demostrar conjeturas,...

La señora Matemática gestionaba el club desde tiempo inmemorial. Ni todos sus discípulos juntos hubieran podido calcular su edad. Aunque algunos de ellos llevaban mucho tiempo con ella, ninguno sabía cuál era su verdadero nombre. Casi todos la llamaban la señora Matemática, aunque para algunos era simplemente la señora. Los más cariñosos la llamaban "la mamma", aunque nunca faltaba quien se refería a ella como "la gran putana".

Aunque todos la consideraban como el auténtico motor del club, la señora Matemática no se dejaba ver mucho por él. Ella prefería delegar el trabajo sucio en su discípulo más fiel, aunque no el más aventajado: Sal.

Sal era el encargado de la puerta. Su misión era recibir a todas las funciones, conjuntos, espacios,... que se acercaban al club, y asignarles sala. No solía rechazar a nadie, su lema era: "Todo es aprovechable para la señora Matemática. Lo que no es suficientemente suave y armonioso para demostrar teoremas, es suficientemente patológico para buscar contraejemplos". Ya se encargarán los discípulos de las salas, por desgracia con más talento que yo, de buscar utilidad a lo que les mando, solía añadir.

Ese día, el flujo en el club era particularmente intenso, lo que estaba llevando a Sal al borde del colapso. Aún así aguantaba a pie firme sin perder la compostura, haciendo gala de su gran profesionalidad. Observémosle trabajar:

- Identifíquese
- Función
- Descríbase
- Tengo un salto en un punto, pero soy perfectamente integrable, no se vaya usted a creer. Eso ya lo valoraré yo, no me maree, señora. No concentrará toda la energía en un punto, ¿no? No será por casualidad doña Delta de Dirac...
- ¡No por favor, mi salto es finito! ¡No me confunda! He oído rumores de que la tal Delta ni siquiera es función. Yo soy una función integrable Lebesgue, Riemann y todo lo que me echen.
- Sí, pero no es continua. Anda, vaya a la segunda sala: funciones integrables pero no continuas. ¡Eh!, ahí no entre. Le he dicho la segunda. Con salto no se puede entrar en la tercera, no se empeñe. Reservada para las continuas, ya sabe. A ver, siguiente, identifíquese.
- Función
- Descríbase
- Yo soy absolutamente derivable en absolutamente todos mis puntos.
- Absolutamente, absolutamente... A ver si va a ser el valor absoluto. Vuélvase que le vea. Siempre me quieren engañar, tiene usted un pico en el cero. Pase a la tercera, funciones continuas pero no derivables. Ni se le ocurra pasar más adentro, ó suave, suave le echo a la calle. ¿Quién va ahora?
- Función. Yo tengo saltos en todos los puntos, ahora cero, ahora uno, ahora cero, ahora uno. Creo que no soy nada, ni siquiera integrable. No soy nadie, ahora cero, ahora uno, ahora cero, ahora uno.
- (Joder, qué cosas más raras me vienen hoy). Efectivamente, no es ni integrable Riemann, con lo fácil que es. Puede venir bien para contraejemplos, vaya a ese círculo aislado a la izquierda. Aunque yo de usted me pasaría antes por el discípulo sicoanalista. El que trata los problemas de identidad, ya sabe. ¿queda alguien más?
- Yo soy función, sin saltos, pero con muchos picos, picos en todos los puntos. Estoy muy mal. ¿No tendrá algo suelto?
- (Qué miedo...) Siga a la anterior, es usted un contraejemplo andante. Pásese antes por la unidad de toxicomanía. Vamos, si quiere, no se enfade.

- Yo soy una función muy suavecita, mira qué curvas. Y se repiten hasta el infinito...

- Oiga, no se acerque tanto, que corra el aire. (La verdad es que es un pibón de función. Qué pena que tenga el periodo...). Pase hasta el fondo, al círculo central. Usted tiene todas las condiciones para formar parte de un bello teorema. ¿Quiere pasar algo que no sea función?

- Yo soy un espacio, topológico para más señas. Pero tengo un problema en mi interior, una especie de almorrana sangrante. Tengo un subespacio de mayor dimensión que yo mismo. ¿Me lo podrían extirpar?

- Esto sí que no me lo creo. Tengo que consultar mis libros, esto no es posible. La verdad es que no entiendo mucho de teoría de la dimensión. No sé a quién puede interesar todas estas teorías inaplicables... ¡A sí, existes! Pero de extirpación nada, en el subespacio está tu gracia. Pasa a la sala de espacios topológicos raros para discípulos onanistas. Y no se te ocurra desviarte a la unidad quirúrgica. Parece que hoy no viene nadie más...

- Sí, estamos aquí, lo que pasa es que no nos ves porque somos fraccionarios. Saluda, curva de Koch. Di hola, triángulo de Sierpinski. Me presento, soy el conjunto de Cantor. Aquí mi marido, el conjunto de Julia. Traemos el caos. Déjanos entrar y verás cómo revolucionamos todo. ¡Abajo el orden, viva Mandelbrot!

Y así hasta el infinito. El club de la señora Matemática era lo más parecido al paraíso y lo más parecido al infierno. Porque la señora Matemática podía darte mucha belleza, pero te pedía también mucho a cambio. Eso lo sabía bien quien conseguía entrar en sus aposentos. Pero lo sabía aún mejor quien sólo podía quedarse a las puertas.

Sobre el autor:
Nombre: Javier Rodrigo Hitos
Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Pontificia Comillas, España.

Cuentos Matemáticos
Fracciones bonitas

Fernando Chamizo Lorente
Dulcinea Raboso Paniagua

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

En un futuro tecnificado en el que las Matemáticas han caído en desuso, una joven aficionada a los números llamada Unita, se enfrenta al problema de aproximar una fracción por otra más bonita. En su búsqueda de la solución, visitará la consulta de un mático, una especie de adivino con fama de nigromante que ofrece enseñanzas personales.

Palabras Clave: Aproximación por racionales, geometría de números.

¿Será una vez?

Uno, dos, cuatro, sesenta, ... Unita tenía la manía de contarlo todo, pasos, personas, hormigas y edificios. Era como un reloj, llevaba la cuenta incluso cuando nadie la miraba, y como un reloj, al completar una vuelta, comenzaba a contar de nuevo. Unita había creado una extraordinaria topografía triangulando en pasos el mapa de los alrededores de su casa. Disponía también de unidades propias como el tiempo-latido-normal y el tiempo-latido-corriendo que, a pesar de su imprecisión, servían para alimentar su costumbre. Se añadían a sus síntomas los rudimentos de algunas operaciones aritméticas, principalmente utilitarias para comprobar o abreviar sus cuentas.

Después de la revolución de la tercera década aquello la convertía en una persona singular, pues la revolución había sido tan rápida y eficaz que ni siquiera había dejado los escombros en los que se apoyan nostálgicos y poetas.

Todo comenzó con la aparición del paradigma PROPROG (PRogram Oriented PROGramming) que propugnaba programas creadores de código. El salto cualitativo se produjo cuando el generador de interfaces FACIO, elaborado bajo este paradigma, modificó inopinadamente su propia interfaz varias veces.

Sus mejoras recurrentes mostraron por qué la inteligencia artificial había sido un fracaso: lo importante no es la creación automática de conocimiento, pues como la memoria es casi gratuito e ilimitado, sino su intercomunicación.

El último artefacto portátil era incapaz de realizar un determinado cálculo porque no sabía leer el libro donde estaba escrito. La solución no era miniaturizar los procesadores una vez más haciendo nuevas cajas negras más pequeñas, obsoletas tras unos años. La solución eran los interfaces intercódigo automáticas. Después de que cientos de miles de billones de *querybots* consultaran día y noche, sin participación humana, las fuentes de conocimiento en todos sus formatos, la primera versión de PROGNOSIS vino a la luz. Al principio era una hiperbase de datos relacional que requería la intervención de operadores especializados humanos para formular las preguntas de manera adecuada pero el desarrollo de las interfaces ultralingüísticas permitió que versiones posteriores admitieran cualquier formato de consulta.

La revolución se desató con el acceso universal y sencillo a PROGNOSIS y se completó cuando pasó a denominarse popularmente "el oráculo". Y es que cuando la gente cambia un término científico, permitiendo incluso que sea esdrújulo, aquello ya no es ciencia, es sociedad.

El acceso de entrada al oráculo era la imagen de su poder. Entre la enorme identificación multicolor O-R-Á-C-U-L-O y el pequeño cajetín de entrada de datos (alegoría de la desproporción entre lo conocido y lo consultado), se leía con ese tipo de letra recta y seria con la que las excusas se disfrazan de avisos: "Todas las respuestas. Ninguna pregunta". Y es que el oráculo era infalible pero verdaderamente no conocía las preguntas y por ello podía resultar totalmente inútil para cuestiones incompletas o mal planteadas.

El problema

Hacía unas horas que había amanecido y Unita metía sus cosas apresuradamente en la bolsa, debía darse prisa si no quería llegar tarde al trabajo, otra vez. Y es que de entre todas las características de Unita, la impuntualidad era la que tenía más desarrollada, tal vez el contar las respiraciones que daba en un minuto, la cantidad de rosas rojas y blancas en el jardín del vecino o el número de pasas que incluía ese día su desayuno tuviera algo que ver pero todo aquello se había convertido en un hábito al que no podía o más bien, no quería renunciar.

Un último vistazo para comprobar que todo estuviera en orden y salía de casa. Se podía olvidar de muchas cosas pero nunca de algo para leer en el trayecto de ida y vuelta a su trabajo y es que estos eran los únicos momentos del día en los que su afición de contar parecía volverse en su contra. Todas las mañanas Unita tomaba un vela cerca de su casa, enormes estructuras de plataformas apiladas que parecían flotar unas encima de otras y que se deslizaban a gran velocidad por toda la ciudad, en cada parada la plataforma inferior quedaba fija mientras que el resto seguían su camino. El viaje en un vela era de todo menos tranquilo, cuando las puertas de conexión se abrían parecía que la locura se apoderaba de todo aquel que iniciaba su viaje y esta no les abandonaba hasta que volvían a cruzar la puerta para salir. Demasiado ruido, demasiada gente moviéndose de un lado a otro, algo que desesperaba a Unita y le hacía imposible concentrarse en aquel ir y venir de información. La lectura, y unos buenos tapones en los oídos, hacían su viaje mucho más agradable.

Dos semanas antes, su amigo Cerox le regalaba una extraña novela. Lo peculiar de esta lectura no era la historia en sí, lo extraño de aquel archivo era su formato. La división en páginas, seguramente resquicio del pasado cuando los libros se imprimían en papel, y que el marcador de línea no funcionara en él seguramente habrían desesperado a más de uno, pero esto no molestó en absoluto a Unita que se había propuesto leer 10 páginas al día, 5 en el trayecto de ida y otras 5 en la vuelta, ni una más ni una menos. De este modo, podría leer el total de 500 en exactamente 50 días.

Ya en el vela, inmersa en la lectura, no se percató de que llegaba su parada y tuvo que bajarse en la siguiente. Para Unita el descuido fue doble, a la pérdida de tiempo había que añadirle 5 páginas de más sobre su previsión de lectura.

– Está bien, no es para tanto. Se suponía que hoy debía llegar a la página 300 y si las cuentas no me fallan cuando regrese a casa estaré en la 305.

Absorta en sus pensamientos comenzó a caminar en dirección al trabajo. El frío invierno había llegado a su fin, ahora el sol parecía brillar con más fuerza y la agradable temperatura podría haber hecho a Unita disfrutar del paseo de no ser porque tenía la mente puesta en otras cosas.

– Si hubiera parado antes habría leído tres quintas partes –suspiraba–, en cambio llegaré a un total de 305/500, un poquito más pero ¿cuánto más? ¿No hay una forma más bonita de decir eso mismo?

El cansancio y la contrariedad la sumieron durante el resto del día en una preocupación casi ontológica sobre la naturaleza de las fracciones. Cuando la jornada de trabajo hubo acabado, Unita se dispuso a tomar de nuevo un vela en dirección a su casa.

– Quizás lo más fácil sea no leer nada en el trayecto de vuelta, así todo quedaría igual, el número de páginas no variaría y todo seguiría como antes pero, ¡qué voy a hacer si no leo! ¡no! ¡no puedo! el trayecto sería una auténtica locura.

Una, dos, tres páginas más, parecía que la lectura realmente la evadía de sus pensamientos pero al llegar a la 305, y por segunda vez en ese día, todo parecía derrumbarse bajo sus pies. Al final de la misma se podían distinguir tres líneas verticales que continuaban a lo largo de las 9 páginas siguientes. La explicación más razonable era la de un error al descomprimir el archivo y que a su vez se traducía, tal y como Unita pudo comprobar, en que en realidad el libro constaba de 491 páginas en lugar de las 500 que creía en un principio.

– ¡Tiene que ser una broma! Esta mañana estaba preocupada porque no conseguía entender cuánto era 305/500 y realmente me debía preguntar por 305/491. Si antes tenía mala pinta, ahora la cosa se pone peor.

Cuando estaba a punto de regresar a su casa tuvo lo que en un principio le pareció una gran idea, consultar al "oráculo" el significado de lo que se le antojaban unas horribles cifras. Los números eran simplemente eso, números y no le habían dado nunca problemas, era un juego, pero pronto comenzó a

ISSN 2174-0410

preguntarse por las relaciones entre esas cifras y unas preguntas llevan a otras, el problema ahora para Unita era encontrar las respuestas. Una vez en casa, preguntó al oráculo qué proporción era 305 de 491, pero este no hizo más que devolverle 305/491, los mismos números separados por una barra.

–¿Todas las respuestas? ¡todas las respuestas! ¡Va a ser que no! – una mezcla de indignación y desconsuelo se hacía visible en sus palabras – lo único que consigo al pensar en estas cosas es un espantoso dolor de cabeza, no estoy preparada para esto.

En ese instante Unita recordó algo que había leído el día anterior, *"El bienestar no se consigue solo fortaleciendo el cuerpo, es imprescindible hacer lo mismo con la mente"*. Cuando leyó aquel anuncio, se regocijaba pensando que aquel bienestar lo tenía asegurado, ella se ocupaba de mantener su cuerpo y mente al día, pero en aquel momento no estaba tan segura.

Buscó el anuncio, deteniéndose esta vez en el nombre que aparecía debajo del eslogan, *"mática Demi, pregunta y entenderás la respuesta"*.

Los máticos no eran ni mejores que cualquier otro colectivo y sólo tan distintos de los demás como cualquiera que tenga un nombre. Era verdad que se habían ganado cierto grado de mala reputación por su extraña política: sólo cobraban la primera sesión pero obligaban a asistir a otras gratuitas hasta que ellos consideraran que el tema estaba zanjado porque el cliente hubiera entendido la respuesta. Cuando un cliente hastiado renunciaba a las sesiones, entonces el mático tenía derecho a una fuerte indemnización. Corría el rumor de que algunos prolongaban estas sesiones o las hacían especialmente farragosas para propiciar el abandono.

Muchas preguntas y una respuesta

El aspecto del consultorio de la mática era siniestro. Había todo tipo de instrumentos graduados, volumétricos, alabeados, móviles y simplemente extraños. A Unita le llamó la atención un grueso tomo en una estantería en cuyo canto se leía "Diccionario de $\mathbb{R}$" pero estaba demasiado lejos como para acercar las manos a su curiosidad y se decidió por un objeto más cercano abigarradamente numerado.

–¿Qué es esto? –Preguntó Unita.

–Una regla de cálculo.

La mática desplazó una pieza oculta y añadió con una sonrisa que a Unita se le antojó enfermiza:

–Un antiguo sustituto de los dedos.

Unita no se atrevió a inquirir más sobre ese cepo de tortura ortopédico y halló algún alivio exponiendo el problema que le había llevado allí.

–¿Qué te ha dicho el oráculo?

–Simplemente 305/491.

–Eso es una fracción, ¿por qué no te gusta?

ISSN 2174-0410

–No es una fracción bonita.

–¿Y qué es para ti una fracción bonita?

–No sé, algo así como la mitad, dos terceras partes, cuatro quintas partes o algo de eso.

–¿Una fracción con denominador 8 es bonita?

–Yo diría que sí.

–¿Y con denominador 9?

–No estoy segura.

–¿Entonces el concepto de fracción bonita es subjetivo?

–Supongo que sí –respondió Unita ligeramente acalorada– pero lo que está totalmente claro es que 305/491 no es una fracción bonita.

Unita resopló abrumada por tantas preguntas mientras pensaba que quizá no había sido una buena idea acudir a la consulta. Y es que los máticos empleaban a menudo un método que los olvidados filósofos denominaron mayéutica y la gente común, pesadez.

–¿Sabes dividir?

–Sí –respondió Unita muy ufana.

–¿Con decimales?

–Creo que no –añadió cabizbaja pues no sabía bien a qué se refería.

–No importa, con partes enteras nos arreglaremos –sentenció resuelta y sonriente la mática–. ¿Conoces el teorema del aspa?

Unita dudó, pestañeó maquinalmente con la mirada extraviada, y tras buscar en el desván de los recuerdos perdidos, exclamó triunfante:

-Sí, sí, creo que sí.

El teorema del aspa dice que al multiplicar en aspa dos fracciones, el brazo ascendente es mayor exactamente cuando las fracciones crecen. Por ejemplo,

$$\frac{13}{21} \overset{147}{\underset{143}{\times}} \frac{7}{11}, \qquad 147 > 143 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{21} < \frac{7}{11}.$$

–Coloquemos entonces todas tus fracciones bonitas hasta denominador 8 y veamos cómo están ordenadas. Déjame añadir 0/1 y 1/1 que son fracciones tontas, la nada y el todo, para tener unos extremos sencillos.

La mática movió con soltura su digistilo y escribió:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}.$$

–¿Cómo se puede crear esta lista directamente? –preguntó curiosa, Unita.

–La ordenación creciente de las fracciones entre la nada y el todo hasta un denominador dado tiene una *propiedad mágica*: en el teorema del aspa la diferencia entre el brazo ascendente y el descendente es siempre uno. Por ejemplo, para 2/5 y 3/7, se tiene $3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$. Esto permite calcular, con un poco de práctica, cada fracción a partir de la anterior. ¿No es bonito? –Unita asintió sin convencimiento mientras la mática finalizaba su perorata–. Cuando la práctica no alcanza al cálculo, siempre está el algoritmo de Euclides... pero creo que por ahora es mejor evitar estos temas e ir directos al grano.

–Sí, por favor –exclamó Unita sin contenerse.

–Pues bien, si usamos de nuevo el teorema del aspa, vemos que tu fracción fea cae exactamente entre las fracciones bonitas 3/5 y 5/8. Se puede comprobar que, en efecto, está más próxima a la segunda. En resumidas cuentas –sentenció la mática parsimoniosamente pronunciando con placer cada palabra–, si quieres converir la fracción fea 305/491 en una de tus fracciones bonitas, la mejor elección es 5/8.

–Gracias... –dijo Unita haciendo el ademán de movimiento que acaba las conversaciones y advierte a los pedigüeños.

La mática recuperó como por ensalmo su tono animado, casi descarado, y añadió sonriendo:

–Ahora sabes la respuesta pero no la entiendes, por ello debes asistir a la próxima sesión.

Unita dio un respingo resignado que a pesar de no ser advertido por la mática, halló consuelo en sus próximas palabras:

–Comprender el tema con mediana profundidad nos llevaría demasiadas sesiones. Basta con que entiendas cómo llevar a cabo la algoritmia y poco más.

Algoritmia

Unita recordó los rumores que circulaban acerca de los abusos de los máticos con el número de sesiones. O bien por economía, o bien por timidez o quizá incluso por un pellizco de curiosidad, el caso es que acudió a la segunda sesión. Algo debió de insinuar su semblante, pues al llegar se enfrentó a un alegato.

–¿Sabrías decirme la fracción bonita que aproxima a 3305/4491? – preguntó la mática retóricamente– No. La algoritmia permite, con una generalidad razonable, que una respuesta resuelva muchos problemas –y señaló un cartel apenas legible que rezaba: “Una respuesta. Muchas preguntas”, en clara oposición con el lema del oráculo.

La mática continuó circunspecta con una charla casi moral acerca de los ejemplos que sonaba como un zumbido en los oídos de Unita y que sólo se transformó en palabras cuando la cadencia preconizó el fin del discurso.

–Ahora vamos a ver el algoritmo a través de tu ejemplo. ¿Cuál es el cociente y el resto al dividir 491 entre 305?

–El cociente es 1 y el resto 186 –respondió Unita muy ufana pues nunca había encontrado a nadie parejo en el ancestral y olvidado arte de los cálculos.

–¿Y si ahora tomamos 305 y 186?

–El cociente es 1 y el resto 119.

–¿Y con 186 y 119?

–El cociente es 1 y el resto 67, y con 119 y 67 el cociente es de nuevo 1 y el resto 52.

–Muy bien, ya veo que entiendes el proceso. Cada vez tomamos el último número y el nuevo resto.

Unita preguntó si todos los cocientes eran 1 y la mática le instó a que entre las dos terminaran la cadena de números que se dividían uno entre otro hasta llegar a resto cero. El resultado fue:

$$491 \to 305 \to 186 \to 119 \to 67 \to 52 \to 15 \to 7 \to 1$$

con sus cocientes respectivos 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 7.

La mática puso su digistilo en TABMOD y diseñó en un instante el siguiente esquema:

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0							
0	1							

Aclaró también que las parejas 1, 0 y 0, 1 que aparecían solitarias en los renglones inferiores eran auxiliares, mientras que la primera línea estaba evidentemente formada por los cocientes.

–¿Para qué son esas casillas vacías? –preguntó Unita.

–Ahí van a nacer las fracciones bonitas. Todo lo que tienes que recordar es la siguiente regla de oro:

> Cada cociente multiplica a su columna y se suma el resultado a la columna anterior.

Por ejemplo, debajo del primer cociente, del primer 1, hay un 0 y antes un 1, entonces en la primera celda libre escribimos $1 \cdot 0 + 1 = 1$. De la misma forma, bajo esta celda escribimos $1 \cdot 1 + 0 = 1$. –La mática con un gesto elegante coloreó los números involucrados en los cálculos de rojo y los resultados de azul–. En la siguiente columna repetimos las cuentas con el siguiente cociente, que vuelve a ser un 1, y utilizando los nuevos resultados, obtenemos arriba $1 \cdot 1 + 0 = 1$ y abajo $1 \cdot 1 + 1 = 2$.

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0	1						
0	1	1						

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0	1	1					
0	1	1	2					

La mática pidió a Unita que rellenara la siguiente columna para comprobar si lo había entendido y así lo hizo diligentemente.

	1	1	1	1	1	3	2	7
1	0	1	1	2				
0	1	1	2	3				

Además creyó notar un tono desafiante en esta petición y ella no se arredraba ante unas cuentas tontas. En un impulso casi rebelde completó en un instante toda la tabla.

	1	1	1	1	1	3	2	7	
1	0	1	1	2	3	5	18	41	305
0	1	1	2	3	5	8	29	66	491

La mática no se inmutó ante la inusual iniciativa. Reservó sus emociones para señalar triunfante que la última columna eran los números de partida. Unita, influida por las leyendas de nigromancia acerca de los máticos, preguntó ingenua si eso mismo ocurriría fuera de la consulta. La mática le aclaró tras una carcajada que aquello era cierto no sólo en cualquier sitio, sino para cualquier fracción.

–Cada fracción tiene una tabla, determinada únicamente, y que termina con ella misma. Esta tabla es como un mapa que diera cada vez más detalles hasta terminar a escala 1:1.

–Pero un mapa a escala 1:1 es inútil –apuntó Unita un poco pedante.

Con un rápido toque la mática destacó en colores las columnas de la tabla.

	1	1	1	1	1	3	2	7	
1	0	1	1	2	3	5	18	41	305
0	1	1	2	3	5	8	29	66	491

–Y así ocurre en muchas ocasiones con las fracciones como 305/491 que tú llamaste fea. Las columnas que hemos rellenado dan aproximaciones a diferentes escalas, las mejores aproximaciones, en cierto sentido. En nuestro caso son 0/1, 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 18/29, 41/66 y 305/491. Según avanzamos, se pierde belleza y se gana en proximidad. Dónde acaban las fracciones bonitas depende de tus gustos. Si alguien piensa que un fracción con denominador menor que 30 es todavía bonita, debiera escoger 18/29, pero tú, por lo que dijiste, te quedarías con 5/8. Además las fracciones que están en lugares impares, las verdes, crecen y no superan la fracción inicial, mientras que las de los lugares pares, las rojas, decrecen y no quedan por debajo de ella. Lo puedes comprobar con el teorema del aspa. Nuevamente tendrás la diferencia mágica 1 entre el brazo ascendente y el descendente o viceversa para las mejores aproximaciones consecutivas de la lista.

Tanta información abrumó a Unita y le asaltó la extraña euforia que obliga a los niños a intervenir cuando los mayores los miran. Sin tiempo para pensar, se valió de las últimas palabras que resonaban en su mente.

–¿Qué quiere decir que son las mejores aproximaciones?

–Es un poco difícil explicarlo con precisión pero implica en particular que para cualquiera de las fracciones de la tabla no hay una aproximación mejor

ISSN 2174-0410

con denominador más pequeño. Por ejemplo, cualquier fracción con denominador menor que 29 está más lejos de 305/491 que 18/29. De la misma forma, tu fracción bonita 5/8 es la campeona entre todas las de denominador que no supera a 8.

Los números se dibujan

Esta vez, Unita no tuvo muchas dudas sobre su asistencia a la sesión pues la mática había asegurado que era la última. No obstante, por la locuacidad desinteresada que causa la confianza, preguntó por el motivo de la sesión ahora que ya sabía encontrar las fracciones bonitas o medio feas que aproximan a cualquier fracción. Ese día, darían sentido a la propiedad mágica que vieron en la primera sesión y con un gesto animado, la mática invitaba a Unita a reunirse con ella en el centro de la sala.

–Comenzaremos repasando algunas ideas geométricas simples pero importantes que nos permitirán dar una prueba del problema, el hecho de poder encontrar fracciones bonitas no se limita a unos pocos ejemplos.

–¡Uf! ¿geometría? –Unita no escuchó nada más de lo que había dicho la mática.

–Me extraña tu tono, parece como si estuviera hablando de algo alejado de la realidad cuando todo lo que te rodea tiene su parte geométrica. De hecho, no tienes que buscar mucho para dar con un ejemplo del primer elemento del que te quiero hablar, un retículo, y para ello sólo hace falta que mires el suelo que pisas.

Unita dio un paso atrás sorprendida, miraba primero al suelo y luego a sus pies, cómo si esperase recibir una respuesta de estos. Allí no había absolutamente nada.

–Como puedes observar –la mática continuaba hablando sin apreciar la confusión que sus palabras habían generado en Unita– el suelo del consultorio se compone de grandes baldosas cuadradas, todas iguales, que rellenan toda la sala. La única limitación la imponen las paredes pero puedes entonces imaginar el mismo resultado en una habitación más grande, y más y más grande, quizás podrías pensar en un suelo "infinito" y nuestro primer ejemplo de retículo. Con otro tipo de baldosas, más grandes o pequeñas tendríamos más.

–Creo que no acabo de comprender muy bien a qué te refieres. ¿Qué es un retículo? ¿el suelo o la baldosa?

–No, no, el suelo siempre es suelo –realmente la mática parecía estar disfrutando con la confusión de Unita–, digamos que un retículo sería la forma con la que tú lo visualizas, una especie de mapa con el que moverte. Ahora lo entenderás, sitúate en la intersección de estas cuatro baldosas –la mática señaló un punto en el suelo al que Unita se dirigió obediente–. Ahora imagina que tus pasos fueran de amplitud igual al lado de cada baldosa y sólo pudieras situarte en sus esquinas, de este modo, ¿qué posición dirías que ocupo respecto al lugar donde te encuentras?

–Pues –contestó algo indecisa– supongo que dos pasos al frente y uno a la derecha.

–¡Perfecto! –la mática dio tres pasos al frente cuidando de pisar únicamente en las intersecciones de las baldosas– ¿y ahora?

–Un paso atrás y otro a la derecha –contestó esta vez con más seguridad.

–Está bien, pero para abreviar a partir de ahora solo me dirás dos números, el primero indicará mi posición en pasos a la derecha, o a la izquierda con un signo menos, y el segundo indicará lo mismo con adelante y atrás, de este modo me he movido de la intersección $(1, 2)$ a la $(1, -1)$. Me puedes decir entonces ¿qué posición ocuparías tú?

–Esto no parece complicado, diría que la intersección $(0, 0)$.

–¡Enhorabuena! Pero recuerda que estos puntos, los únicos de todo el plano que deben importarte, vienen impuestos por el tamaño de las baldosas de la sala, si cambiamos su tamaño o incluso su forma tendríamos otros puntos y por tanto otros retículos.

La mática comenzó entonces a moverse rápidamente de un lado a otro, tomando lo que parecían pequeñas piedras de colores que se hallaban repartidas por toda la sala, deteniéndose frente a un gran baúl del que sacó una tabla de madera decorada con cuadrados blancos y negros.

– Precioso ¿no te parece? –dijo con tono solemne– Es un tablero muy antiguo, ¿conoces el ajedrez?

–No estoy segura, el nombre me resulta familiar ¿es un juego?

–En efecto, aunque hoy le daremos otra utilidad. En cierto modo vamos a jugar pero nuestras piezas serán fracciones –mientras, una mezcla de asombro y desconcierto aparecía en la cara de Unita–. Fracciones bonitas, no te preocupes –añadió.

Una vez hubo despejado de libros el escritorio colocó el tablero en la mesa y junto a él, las piedras.

–El tablero será nuestro retículo, limitado por los extremos del tablero pero recuerda que siempre podemos pensar en. . .

–En un tablero infinito –se apresuró a decir Unita.

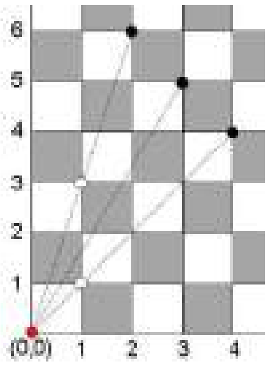
–Veo que le vas cogiendo el truco. Tenemos 64 cuadrados aunque del mismo modo que antes con las baldosas, los únicos puntos que tendremos en cuenta serán las intersecciones, ¿recuerdas la posición que ocupabas?

–La $(0, 0)$.

–Bien, ahora colocaremos en ese punto una piedra roja –dejando una pequeña piedra de ese color en la esquina del tablero más próxima a Unita–. La posición que ocupa esta piedra será especial en el retículo pues vamos a ver el resto de puntos a través de ella, así diremos que un punto del retículo es visible cuando la piedra roja lo pueda "ver" desde su posición privilegiada.

–Lo pueda ver –repetía– lo pueda ver desde su posición, y ¿qué pasa cuando el punto no es visible? ¿es invisible? ¿está escondido?

–En cierto sentido, así es. Un punto es oculto si entre este y el rojo no hay ningún otro del retículo. Por ejemplo, de estos tres puntos –decía mientras colocaba unas piedras negras en el tablero– el único visible es el $(3,5)$, en los otros dos casos las líneas que unen estos puntos con el rojo pasan por otros puntos del retículo –al tiempo que añadía un par de piedras blancas más–, $(1,1)$ y $(1,3)$ respectivamente. Si ahora consideramos puntos más alejados del origen como por ejemplo el $(6,18)$ o el $(12,20)$, ¿qué dirías? ¿son visibles estos puntos?



–¿Cómo quieres que lo sepa? –respondió algo indignada– No puedo hacer lo mismo que tú porque estos puntos quedan fuera del tablero.

–¡Precisamente! Ahora necesitamos ejercitar un poquito nuestro cerebro. En ambos casos, se trata de puntos ocultos, el primero oculto tras el punto $(1,3)$, el segundo tras el $(3,5)$, por otro lado los puntos $(6,19)$ y $(13,21)$ vuelven a ser visibles ¿podrías decirme ahora cómo tiene que ser un punto, digamos (a,b), para ser visible?

–Pues, para que sea visible no estoy segura, pero supongo que para que sea oculto basta con que a y b tengan algo en común, como lo que pasa con el $(12,20) = (4\cdot 3, 4\cdot 5)$.

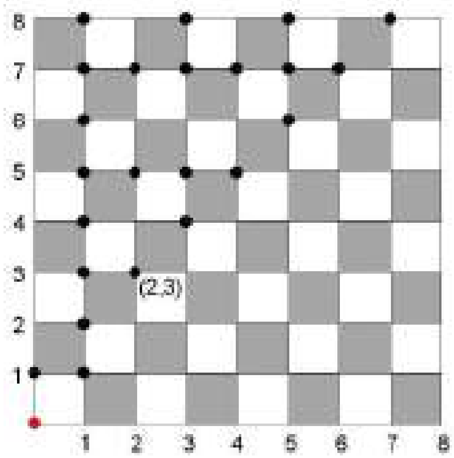
–Tal y como has notado el punto (ka,kb) está oculto por el (a,b) y para que este último sea visible basta con que a y b no tengan factores comunes. Por otro lado, los puntos del retículo podemos verlos en realidad como fracciones, de este modo $(2,3)$ representa la fracción $\frac{2}{3}$ y un punto (a,b) será visible si la fracción correspondiente $\frac{a}{b}$ es irreducible.

–¡Oh! Fracciones, pensaba que ya nos habíamos olvidado de ellas.

–¡Ni mucho menos! –exclamó la mática mientras colocaba más y más piedras sobre el tablero–. Si recuerdas la lista de fracciones que elaboramos en la primera sesión, fracciones bonitas hasta denominador 8.

$$\frac{0}{1},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{1}{1}.$$

–Ahora –continuaba hablando– podemos ver todas estas fracciones como puntos de nuestro retículo, de hecho como puntos visibles. Pero recuerda que aquella lista tenía un orden fijado, el motivo de que aquella diferencia, brazo ascendente menos el descendente, siempre diera uno ahora tendrá su explicación.



–Si nos fijamos en dos fracciones consecutivas, digamos $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, de todas las rectas que se obtendrían al unir estos puntos con el rojo, aquellas que pasan por puntos (a, b) y (c, d) son siempre rectas consecutivas y por tanto el triángulo formado por dichos puntos y el origen no tiene ningún otro punto del retículo en su interior.

–Eso último tiene que ver con que sean puntos visibles ¿verdad?

–Así es, son visibles todos los que están pero además "están todos los que son", al menos en esa región en la que parecen concentrarse, el triángulo definido por las líneas $x = 0$, $y = x$, $y = 8$ –ante la cara de desconcierto de Unita, añadió– pero olvida esto último, lo importante es que te quedes con la idea de que cada uno de estos triángulos ha de tener área mínima.

Si la primera reacción de Unita fue desconcierto ahora había que añadir cierto grado de desconfianza, algo que la mática notó al instante.

–Te estarás preguntando qué tiene que ver el área con el resultado que buscamos, ¿cierto? quizás sería interesante hacer un inciso para aclarar tu mente ¿Sabes cómo calcular el área de un triángulo?

–Me temo que estoy algo perdida con los triángulos, pero por si sirve de algo, la de un rectángulo es lado por lado –respondía Unita cada vez más animada.

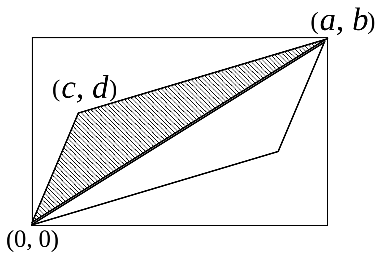
–Pues estamos de enhorabuena porque con eso basta para hallar el área de cualquier triángulo. No tienes más que trazar la diagonal de un rectángulo para que este quede dividido en dos triángulos iguales.

–Entiendo, si conocemos el área del primero basta con tomar la mitad de esa cantidad para tener el área del triángulo. Pero, no es cierto que todos los triángulos puedan formar rectángulos de ese modo.

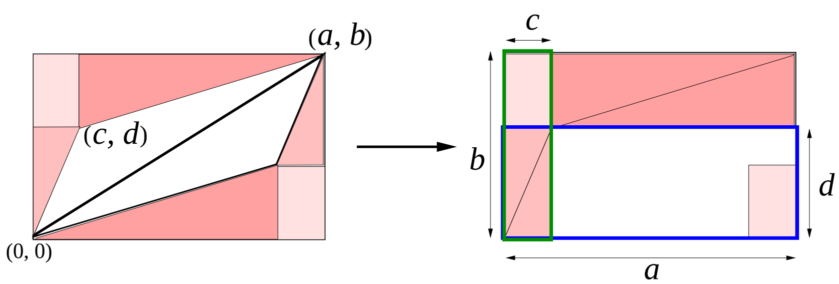
–Esos triángulos son especiales. El problema es que los triángulos que nos interesan no son de este tipo, ¡pero no todo está perdido! –y empuñando su

ISSN 2174-0410

digistilo, añadía– La solución, como antes, pasa por duplicar el triángulo pero ahora obtenemos una especie de "rectángulo feo" el cual podemos incluir dentro de un rectángulo, este último el de toda la vida.



–Lo peculiar de esta construcción –proseguía al tiempo que dibujaba nuevas figuras–, es que la parte que no nos interesa del rectángulo, la podemos dividir en triángulos y rectángulos de los cuales podemos calcular fácilmente su área. Pero. . . – la mática parecía hacerse la interesante – claro que podemos evitarnos las cuentas y con apenas dos movimientos, notando que la parte sin pintar ha de ser la misma en las dos figuras, deducir que el área buscada no es más que $ad - bc$, resta del área de los rectángulos azul y verde, respectivamente.



–Bueno, en realidad sería la mitad de esa cantidad como en el caso de los rectángulos –sentenció Unita que seguía atenta toda la explicación.

–Muy bien. ¡Ya casi lo tenemos! Teniendo en mente esa cantidad

$$\frac{1}{2}(ad - cd),$$

recuerda que los triángulos que nos interesan tienen área mínima debido a su construcción, sus vértices son puntos enteros sin más puntos del retículo en su interior. Ahora resulta que el área es la mitad de un número entero, pues la resta de números enteros vuelve a serlo. La pregunta es ¿cuánto debe medir el área?

–Espera, un momento –tras una pequeña pausa, Unita añadió emocionada– ¡Claro! ¡1, digo $\frac{1}{2}$!

–¿Y recuerdas qué representaban los puntos (a, b) y (c, d)?

–Eso pensaba ahora mismo, y creo que. . . –Unita se reía– La mágica propiedad deja de ser tan mágica.

La mática sonrió dando por finalizada la sesión y el silencio se hizo en la sala. Unita estaba feliz, el camino no había sido fácil de recorrer pero ahora se sentía optimista y sobre todo, segura. La próxima vez que se encontrarse con aquellas cantidades monstruosas simplemente las sustituiría por algo más asequible y a su juicio, más bello, pero lo mejor de todo es que aquel proceso no guardaría secretos para ella. Llegado a ese punto el semblante de Unita cambió, sorprendiendo a la mática que había estado observándola mientras guardaba las piedras en una arqueta.

–¿Ocurre algo?

–No estoy segura. Diría que todo me ha quedado bastante claro, pero ¿eso es todo?

–Por supuesto que no. Hay una extensa teoría que apenas has atisbado en estas sesiones. Lo maravilloso es que es interminable, de algún modo eterna. Lo único que se necesita para avanzar es curiosidad, pues una respuesta origina muchas más preguntas y eres tú quien decide contestarlas o no.

Entonces Unita formuló a la mática una pregunta que hacía muchos años que no escuchaba: –¿Puedo volver mañana?

Sobre los autores:

Nombre: Fernando Chamizo Lorente
Correo Electrónico: fernando.chamizo@uam.es
Institución: Universidad Autónoma de Madrid, España.

Nombre: Dulcinea Raboso Paniagua
*Correo Electrónico:*dulcinea.raboso@uam.es
Institución: Universidad Autónoma de Madrid, España.

Investigación
Causality in Science

Cristina Puente Águeda

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Abstract

Causality is a fundamental notion in every field of science. Since the times of Aristotle, causal relationships have been a matter of study as a way to generate knowledge and provide for explanations. In this paper I review the notion of causality through different scientific areas such as physics, biology, engineering, etc. In the scientific area, causality is usually seen as a precise relation: the same cause provokes always the same effect. But in the everyday world, the links between cause and effect are frequently imprecise or imperfect in nature. Fuzzy logic offers an adequate framework for dealing with imperfect causality, so a few notions of fuzzy causality are introduced.

Keywords: Causality, Causal Relationship, Soft Computing, Deduction.

1. Causality in human cognition

Causality plays and has played an important role in human cognition, in particular in human decision-making, providing a basis for choosing an action which is likely to lead to a desired result. There are many works and theories about this theme. Philosophers, scientists, physics, mathematicians, computer scientist and many others have explored the field of causation starting with the ancient Greeks three thousand years ago.

The idea that causal knowledge is an essential feature of our understanding of the world is very old. In Metaphysics (*I, 1, 981 a 24-30*), Aristotle maintains that knowing is knowing attending to the causes:

"But yet we think that knowledge and understanding belong to art rather than to experience, and we suppose artists to be wiser than men of experience (which implies that wisdom depends on art in all cases rather on knowledge); and this because the former know the causes but the latter do not".

In daily life, causality is present in many situations. If someone fails to stop at a red light and there is a car accident, it can be said that the failure to stop was the cause of the accident. However, failing to stop at a red light does not guarantee that an accident will happen for sure [1]. Sometimes, true statements do not lead to a valid reasoning, as in J. Pearl's example [2]:

1. *"If the grass is wet, then it rained.*
2. *If we break this bottle, the grass will get wet.*
3. *Output→ If we break this bottle, then it rained".*

So, to consider a statement as causal, it has to fulfil three properties which mean that the cause must precede the effect, cause and effect must be materially related, and whenever the cause happens, the effect must take place [3]:

1. Asymmetry: the cause always happens before the effect.
2. Linearity: any cause is followed by an effect.
3. Transitivity: if *A* causes *B* and *B* causes *C*, *A* causes *C*.

According to the way that causal statements are expressed and the type of relationship between the antecedent and the consequence, causality can be divided into the following types:

- Forward and backwards causality: forward causality is expressed in the form: "*What are the effects caused by a concrete event?*" and the inverse causality (or backwards), is expressed in the form "*What actions have been provoked by a certain event?*". In context, the forward causality is easier to deal with than the inverse causality, because, the action involved is usually known. In the inverse causality there can be multiple factors that have provoked an action, therefore it is much more complex to deal with and analyze.
- Direct and indirect causality: in '*A causes B*', *A* is a direct cause of *B*. If *A* causes *B* and *B* causes *C*, *A* is an indirect cause of *C*. Direct causality is linked to the linearity property and indirect causality is related with transitivity property.
- Token and type causality: in '*A causes B*', *A* and *B* are usually referred to singular events or tokens, as in *if John takes a trip, he will be happy*, or to

general events or type: *climbing stairs leads to fatigue*. Causal laws are performed with type statements.

- Positive and negative causality: a cause may have a positive influence on the effect: *low taxes favour the consumption*, or a negative one, *high taxes worsen consumption*.

- Plural and single causality: in '*A causes B*', *A* is a single cause of *B*. In '*A, B, and C cause E*', *A*, *B*, and *C*, are plural causes of *E*.

2. Causality in Science

Causation plays a different role when analyzed from different fields. In legal ambiences it is a matter of conduct and result, while in science, such as physics it is the result of empirical experiments and evidence. This section enumerates the vision of causation through several fields.

- Science [4]: using the scientific method, scientists set up experiments to determine causality in the physical world. Elemental forces such as gravity, the strong and weak nuclear forces, and electromagnetism are known as the four fundamental forces which are the causes of all other events in the universe. However, the issue of to which degree a scientific experiment is replicable has been often raised and discussed. The fact that no experiment is entirely replicable questions some fundamental assumptions in science. In addition, many scientists in a variety of fields disagree that experiments are necessary to determine causality. For example, the link between *smoking* and *lung cancer* is considered proven by health agencies of the United States government, but experimental methods (for example, randomized controlled trials) were not used to establish that link.

- Physics [3]: in physics it is useful to interpret certain terms of a physical theory as causes and other terms as effects. Thus, in classical (Newtonian) mechanics a cause is represented by a force acting on a body, and an effect by the acceleration which follows as quantitatively explained by Newton's second law. For different physical theories the notions of cause and effect may be different. For instance, in Aristotelian physics the effect is not said to be acceleration but to be velocity (one must push a cart twice as hard in order to have its velocity doubled[1]). In the general theory of relativity, too, acceleration is not an effect (since it is not a generally relativistic vector); the general relativistic effects comparable to those of Newtonian mechanics are the deviations from geodesic motion

[1] Aristotle, Physics, Book VII, part 5, 249

in curved space-time [5]. Uncaused motion is also dependent on the theory: for Aristotle it is (absolute) rest, for Newton it is inertial motion (constant velocity with respect to an inertial frame of reference), in the general theory of relativity it is geodesic motion (to be compared with frictionless motion on the surface of a sphere at constant tangential velocity along a great circle). So what constitutes a "cause" and what constitutes an "effect" depends on the total system of explanations in which the causal sequence is embedded. For example, it is not accurate to say, *"the moon exerts a gravitational pull and so the tides rise"*. In Newtonian mechanics, gravity is a law expressing a constant observable relationship among masses, and the movement of the tides is an example of that relationship. There are no discrete events or "pulls" that can precede the rising of tides. Interpreting gravity causally is even more complicated in general relativity.

- Engineering [6]: a causal system is a system with output and internal states that depends only on the current and previous input values. A system that has some dependence on input values from the future (in addition to possible past or current input values) is named an acausal system, and a system that depends only on future input values is an anticausal system. There are many kinds to graphically represent causality in this field, for example the so called fishbone diagrams or cause and effect diagrams, commonly used for product design and quality defect prevention, to identify potential factors causing an overall effect.

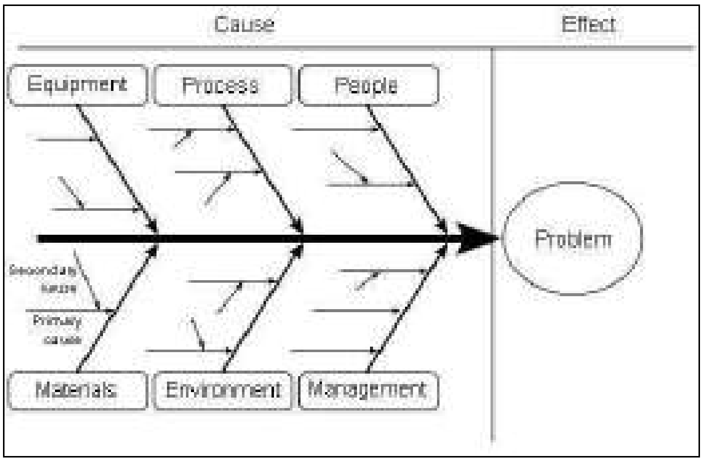


Figure 1: Representation of a fishbone diagram [6]

- Biology and medicine [7]: Bradford Hill pointed that the following aspects of an association needed to be considered to distinguish causal from non-causal associations in the epidemiological situation:

    1) Strength: it refers to the numerical strength of the correlation, expressed as the relative risk to take a disease.

    2) Consistency: it refers to phenomena that have been observed in many places at many times by many different observers in different circumstances.

    3) Specificity: it means when the effect is limited to certain workers in specific situations and when there is no other association between the work and other situations of dying.

    4) Temporality: it has to do with the direction of causality. This aspect is particularly relevant when slowly progressing disease is concerned, as in the example "*Does the patient's diet cause the disease or does the disease alter the patient's diet?*".

    5) Biological gradient: it is also known as a dose-response relationship, when an increment of the supposed cause is associated with an increase in the response (or disease). For example, not only do smokers have a higher prevalence of lung cancer than non-smokers, but also heavy smokers have a higher prevalence than light smokers.

    6) Plausibility: it refers to the scientific credibility of the relationship. In the case of smoking, cigarette smoke is known to contain many established toxins, which makes it a plausible cause of cancer.

    7) Coherence: it is the idea that the possibility of the causal relationship should not conflict with what is known about the natural history and biology of the disease.

    8) Experimental: evidence has to be relevant. For example, if it is suspected that dust is causing the disease, then an experiment in which dust filters are installed would be appropriate and, if successful, would confirm the theory that dust was a causal factor in the incidence of the disease.

    9) Analogy: it is when the reasoning comes from similar phenomena.

- Humanities, law[2]: in the legal field, causation is the *"causal relationship between conduct and result"*. Causation of an event by itself is not sufficient to create legal liability, though establishing causation is required to establish legal liability. Usually it involves two stages:

    1. The first stage involves establishing '*factual*' causation. For example, *Did the defendant act in the accuser's loss?*.

    2. The second stage involves establishing '*legal*' causation. For example, *Is this the sort of situation in which, despite the outcome of the factual investigation, the defendant might be released from liability, or impose liability?*

3. A probabilistic view of causation

Scientific laws tie always together cause and effect. Therefore, the causal principle must guarantee without exceptions *B* whenever *A* happens. In colloquial language, *'Every effect has its cause which is always the same'* or *'The same causes lead to the same effects'*. But this is not always true. Both in scientific and literary texts is possible to find laws or principles that link the cause to the effect in a partial or imperfect way as in the sentence *If the potential is carefully adjusted, and has a false vacuum local minimum, it is possible to obtain a solution that is non - singular over the whole four – sphere* (S. Hawking, Quantum Cosmology). These laws have the form of causative or conditional sentences. Causal relationships do not always denote precise and stable links between cause and effect but, in many cases, they refer to partial or approximate ones.

In the scientific area, quantum mechanics was the first field to show the imperfect character of causality. The laws of quantum physics suggest causal connections that are not absolutely true, but only probable. The Heisenberg uncertainty principle radically changed the criteria of classical causality: in general, in a quantum universe, the same cause does not always lead to the same effect, but a variety of possible effects, each of them with a certain probability. Quantum mechanics introduces the probability on the principle of causality.

The probabilistic view of causality has some differential characteristics:

1. While the laws of classical mechanics refer to universes of discourse with sharp and distinguishable elements, the laws of quantum mechanics speak about collections from which their cardinality can be found, but

[2] Standford Encyclopedia of Philosophy http://plato.stanford.edu/

ISSN 2174-0410

not always their elements. Quantum sets are *posets*: an element belongs or not to the set, but it is not always possible to identify whether the element of the collection is the same as others previously identified.

2. Linking cause and effect involves determining the set of factors that compose the cause [8]. In the quantum world, some of these factors are measurable and others are not; and therefore never completely determined. Causation emerges from the relationship between measurable individual parameters. Probability is related with the distribution of the residual parameters. If an event can be described by a finite list of parameters, it is possible to predict its evolution with a probability that tends towards 1 as more parameters are taken into account.

A probabilistic view of causation is convenient for correctly interpreting some physical laws, such as those related to the kinetic theory of gases, because the number of molecules to consider is in the order of the Avogadro's constant (6×10^{23}) and, thus, impossible to manage in a deterministic way. Therefore, it is needed a probabilistic approach.

The laws governing quantum causality are stochastic and indeterminate - as it is not possible to know all the parameters involved in the nature of a fact-, but precise -as once performed the experiment, a value is obtained-. Quantum laws are a mixture of reason and experimentation: experimentation puts limits on what it is possible to know; reason determines the value of what is known. But there are fields in which causation is not, generally speaking, a crisp relation, but ill defined and fuzzy.

4. Fuzzy Causality

Causality is many times an imprecise and imperfect relationship between two entities, cause and effect. For this reason, Zadeh [9] remarks that does not exist a definition of causality within the conceptual structure of classical logic or probability theory, able to provide a reasonable answer to the following points:

1. The definition has to be general, not restricted to a narrow class of systems or phenomena.

2. This definition has to be precise and unambiguous, in order to be used as basis for logical reasoning or computation.

3. Given two causally connected events, *A* and *B*, this definition has to be able to answer the questions: a) *Did or does or will A cause B or vice-versa?*, and b) *if there is a causal link between A and B, what is the*

strength?.

Zadeh also points out three sources of difficulty in defining or establishing causality. The first one is chaining, that is a temporal chain of events, $A_1,A_2,A_3\ldots.A_n$, which ends on A_n. The difficulty here relies on determining to what degree (if any) A_i(i=1,….,n-1) causes A_n. In [1], it is introduced some examples about the problems that causal chains present:

- *Simultaneous Plant Death*: "*my rose bushes and my neighbour's rose bushes both die. Did the death of one cause the other to die? (Probably not, although the deaths are associated)*".
- *Drought*: "*there has been a drought. My rose bushes and my neighbour's rose bushes both die. Did the drought cause both rose bushes to die? (Most likely)*".
- *Traffic*: "*a friend of mine calls me up on the telephone and asks me to drive over and visit him. While driving over, I ignore a stop sign and drive through an intersection. Another driver hits me, and I die. Who caused my death?*"
- *Poisson*: "*Fred and Ted both want Jack death. Fred poisons Jack's soup, and Ted poisons his coffee. Each act increases Jack's chances of dying. Jack eats the soup, and feeling rather unwell leaves the coffee, and dies later. Ted's act raised the chance of Jack's death but was not cause of it*".

Another problem that Zadeh remarks is the confluence or conjunction. In this case it is presented a confluence of events $A_1,A_2,A_3\ldots.A_n$ and a resultant event *B*. the problem here is to calculate to what degree each event separately caused the final event *B*. To demonstrate this problem, Zadeh proposes two examples:

- *A raincoat manufacturer would like to increase his sales. To this end, he increases the advertising budget by 20%. Six months later, sales went up 10%. Was the increase on sales caused by the increase in the advertising budget? If so, to what degree?*
- *Business news announces that the stock market had a sharp drop. Analysts cite as primary reasons for the drop a 2% increase in unemployment, and 3 dollar-a-barrel increase in the price of oil. To what degrees did the unemployment and the price of oil caused the sharp drop?*

The third problem is covariability, seen as a statistical association. In this case, A and B are variables, and there appears to be a deterministic or statistical covariability between A and B. The problem is establishing if this covariability is a causal relation. Moreover, when is a relation a causal relation? Differentiation between covariability and causality presents a difficult problem, especially in the context of data mining. Causality is referred to demonstrated and established facts; given a cause, an effect happens, but covariability is related more to coincidence and undemonstrated set of facts, despite it is noticeable that if something is changed (the cause), the output is affected (effect). For example, it is generally assumed that aging causes a loss in acuity of hearing. However, recent studies have shown that the loss in acuity is caused by prolonged exposure to high levels of sound and not by aging per se. Or another example, I fell at home and broke my right leg and my left arm. Is there a causal connection between breaking my right leg and left arm?

Another author that considers causality in terms of fuzzy logic is Kosko [10]. He conceives fuzzy causation as a correlation between positive and negative occurrences of cause-effect pairs. Thus, to say that *alcohol is the main cause of road accidents* is, in his view, equivalent to say -in conditional terms-, that *drinking causes traffic accidents and not drinking prevents such accidents*; that is, A causes B is $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$, which is $A \leftrightarrow B$. In other words, there is a correlation between *drinking* / *not drinking* and *increase* / *decrease* of traffic accidents. Causality is determined not only by positive correlations, but also by negative ones.

To deal with these problems, it is needed some tools able to handle imprecision and uncertainty. *Soft-Computing* methods may be able to provide the approximation tools needed.

The concept of *Soft-Computing*, which was introduced by Zadeh, serves to exploit the tolerance for imprecision and uncertainty, to achieve tractability robustness and low cost solutions by means of computing methodologies. In his own words, "*Basically, Soft-Computing is not a homogeneous body of concepts and techniques. Rather, it is a partnership of distinct methods that in one way or another conform to its guiding principle. At this juncture, the dominant aim of Soft-Computing is to exploit the tolerance for imprecision and uncertainty to achieve tractability, robustness and low solutions cost. The principal constituents of Soft-Computing are fuzzy logic, neurocomputing, and probabilistic reasoning, with the latter subsuming genetic algorithms, belief networks, chaotic systems, and parts of learning theory. In the partnership of fuzzy logic, neurocomputing, and probabilistic reasoning, fuzzy logic is mainly concerned with imprecision and approximate reasoning; neurocomputing with learning and curve-fitting; and probabilistic reasoning with uncertainty and belief propagation*". So, *Soft-Computing* is defined by means of different concepts and techniques to overcome the difficulties of real problems which happen in an imprecise world, uncertain and difficult to categorize.

To consider causality from a computational point of view, imprecise causal models are needed, so that *Soft-Computing* techniques need be applied. One of the main problems in this scope is how to computationally recognize and represent causal relationships. Another problem, once recognized this causal entailment between two concepts, is establishing the strength of this union. This could be a research area for many fields in the future.

References

[1] MAZLACK, Lawrence. J., *Imperfect Causality*, pp. 191-201, Vol. 59, Fundamenta Informaticae IOS Press, 2004.

[2] PEARL, Judea, *Causality, models, reasoning, and inference*, Cambridge University Press, 2000.

[3] BUNGE, Mario, *Causality and modern sciences*, Dover, 1979.

[4] SALMON Wesley, *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*, Princeton University Press, 1984.

[5] ADLER Ronald., BAZIN Maurice., *Introduction to general relativity*, section 2.3, McGraw-Hill Book Company, 1965.

[6] ISHIKAWA Kaoru, *Introduction to Quality Control*, Productivity Press., 1990.

[7] BRADFORD Austin, *The Environment and Disease: Association or Causation?*, pp. 295-300, vol. 58, Proceedings of the Royal Society of Medicine, 1965.

[8] RAGIN Charles, *Fuzzy-set, social sciences*, Chicago : University of Chicago press, 2000.

[9] ZADEH Lotfi, *Letter to the members of the BISC group*, Proc. of the BISC Int. Workshop on Fuzzy Logic and the Internet, 2001.

[10] KOSKO Bart, *Fuzziness vs Probability*, pp. 211-240, vol.17, International Journal of General Systems, 1990.

Sobre la autora:
Nombre: Cristina Puente Águeda
Correo Electrónico: cristinapuente2@yahoo.es
Institución: Universidad Pontificia Comillas, España.

Investigación
Mecánica de Contacto de Cuerpos Deformables. Interacción suelo-estructura

Miguel Martín Stickle

Pablo de la Fuente

Carlos Oteo

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

En este artículo se presentan las bases teóricas y numéricas necesarias para analizar el fenómeno de contacto entre cuerpos deformables. Una vez descrito el modelo teórico necesario para la correcta reproducción del fenómeno de contacto entre cuerpos deformables, basado en relaciones cinemáticas y constitutivas adecuadas, se abordan los aspectos fundamentales para una correcta resolución numérica, a través del método de los elementos finitos, de los problemas de contorno asociados. Para validar el marco teórico-numérico propuesto, este se aplica al fenómeno de la interacción suelo-estructura. Los resultados numéricos obtenidos están en consonancia con datos experimentales existentes.

Palabras clave: Mecánica de Contacto Computacional, Método de los Elementos Finitos, Interacción Suelo-Estructura.

1. Introducción

Los problemas de contorno que involucran contacto son de gran importancia para la ingeniería civil. En particular, en ingeniería geotécnica la transmisión de cargas entre la estructura y el terreno se desarrolla principalmente a través del contacto entre superficies [1]. Hoy en día, es bien reconocido que el comportamiento de esta interfaz de contacto influye de forma significativa en la respuesta de los sistemas estructura-cimentación. Es por este motivo que se requiere desarrollar modelos de interacción suelo-estructura precisos y robustos.

Debido a la naturaleza no lineal de la mecánica de contacto, estos problemas han sido tradicionalmente abordados considerando hipótesis excesivamente simplificadoras. En algunos casos se prescribían las cargas directamente sobre el terreno, considerando que la estructura era flexible. En otros casos lo que se imponían eran desplazamientos suponiendo que la estructura era perfectamente rígida. También se ha considerado el caso en que la estructura no experimentara desplazamientos relativos respecto a la cimentación [2]. Estas crudas simplificaciones conducían frecuentemente a predicciones imprecisas del comportamiento real del sistema estructura-cimentación, introduciendo serios errores en la estimación de las tensiones y deformaciones transmitidas a la cimentación [3].

En situaciones especiales, por el ejemplo en el caso de estructuras marítimas como plataformas petrolíferas, diques portuarios, rompeolas, etc., sometidas a la acción cíclica e impulsiva del oleaje, se pueden desarrollar complejas interacciones suelo-estructura. Este tipo de acciones pueden inducir importantes desplazamientos relativos entre la estructura marítima y el terreno [4] así como la posible pérdida de contacto entre superficies involucradas y posterior restablecimiento del mismo. Para poder reproducir este comportamiento altamente no lineal de una forma precisa y robusta parece ser necesaria la utilización de la mecánica de contacto de cuerpos deformables.

De igual forma, este comportamiento fuertemente no lineal dificulta la obtención de soluciones analíticas cerradas, haciéndose necesario el empleo de técnicas numéricas como el método de los elementos finitos.

En el presente artículo de investigación se describe la aplicación de la mecánica de contacto al fenómeno de la interacción suelo estructura bajo una perspectiva numérica. Para ello, en la sección 2 se presenta una descripción de la cinemática asociada al fenómeno de contacto friccional desde un punto de vista de la mecánica de medios continuos. Una vez establecidas las ecuaciones básicas que gobiernan el fenómeno de contacto se describe el procedimiento estándar para considerar el comportamiento constitutivo en la interfaz de contacto. Este aspecto se desarrolla en la sección 3. En la sección 4 se describe el proceso de resolución numérica a través del método de los elementos finitos de un problema de contorno en la mecánica de contacto. En la sección 5 se aplica la mecánica de contacto computacional descrita en capítulos precedentes al fenómeno de la interacción suelo-estructura. Para ello, se reproduce numéricamente un ensayo de laboratorio a escala de un dique vertical formado por un cajón de hormigón apoyado sobre una banqueta de grava y sometido a la colisión de un péndulo. Finalmente en el capítulo 6 se presentan algunas conclusiones.

2. Cinemática asociada al fenómeno de contacto

La descripción del fenómeno de contacto que se va a desarrollar en esta publicación se circunscribe a la mecánica de medios continuos, por lo que en primer lugar se definirán los conceptos fundamentales de esta rama de la mecánica en los que se basa las relaciones cinemáticas de la mecánica de contacto.

Un cuerpo $\mathbf{B}$ puede ser descrito como la clausura de un conjunto abierto conexo y acotado del espacio Euclideo tridimensional $\mathbb{R}^3$. La deformación de un de cuerpo vendrá descrita a través de un difeomorfismo $\varphi : \mathbf{B} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ llamado configuración. La descripción de la deformación de un cuerpo así establecida implica que nada catastrófico va a tener lugar como que el cuerpo se rasgue, se perfore o que exista interpenetración.

Así, el movimiento de un cuerpo se describe como la serie uniparamétrica temporal de configuraciones $\varphi_t : \mathbf{B} \to \mathbb{R}^3$ de tal forma que para una partícula $X \in \mathbf{B}$ su posición a tiempo $t \in \mathbb{R}^+$ vendará dada por la expresión (1)

$$\mathbf{x} = \varphi_t\left(\mathbf{X}\right) = \varphi\left(\mathbf{X}, t\right) \tag{1}$$

Esta ecuación describe una curva en $\mathbb{R}^3$ para la partícula $X \in \mathbf{B}$. Definimos $\mathbf{X} = \varphi_0\left(X\right)$ como la configuración de referencia del cuerpo $\mathbf{B}$. Considerando la expresión (1) tenemos

$$\mathbf{x} = \varphi\left(\varphi_0^{-1}\left(\mathbf{X}\right), t\right) \tag{2}$$

En el presente trabajo no vamos a diferenciar entre $\mathbf{X}$ y X. De esta forma queda simplificada la notación $\left(\mathbf{x} = \varphi\left(\mathbf{X}, t\right)\right)$ siendo $\mathbf{X}$ la posición de la partícula X en la posición de referencia. De esta forma, las posiciones $\mathbf{X}$ y $\mathbf{x}$ pueden ser descritas como vectores en $\mathbb{R}^3$ respecto al origen del sistema de coordenadas, tal y como se aprecia en la Figura 1.

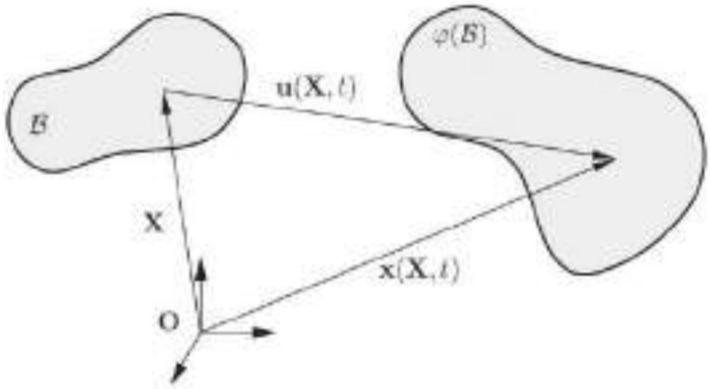


Figura 1. Configuraciones del cuerpo $\boldsymbol{B}$ *. [5]*

En esta figura el vector $\mathbf{u}$ es el vector desplazamiento, definido por la expresión (3)

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},t)=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)-\mathbf{X} \tag{3}$$

es decir, se está considerando una descripción Lagrangiana de la deformación, en la que las variables independientes son el vector de posición $\mathbf{X}$ y el tiempo t.

Con los ingredientes hasta ahora definidos se puede empezar a describir la cinemática asociada al fenómeno de contacto friccional.

Sean $\mathbf{B}^\alpha$ con $\alpha=1,2$ dos cuerpos del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$ y consideremos que los bordes Γ^α de cada uno de ellos, consisten en tres partes: Γ_t^α, donde quedan prescritas las tensiones superficiales; Γ_u^α, donde quedan prescritos los desplazamientos y Γ_c^α, donde los dos cuerpos $\mathbf{B}^1$ y $\mathbf{B}^2$ pueden entrar en contacto. En la zona de contacto hay que formular las ecuaciones cinemáticas de restricción asociadas al contacto tanto normal como tangencial.

Suponiendo que dos cuerpos entran en contacto la condición de no penetración entre ellos vendrá dada por la ecuación (4).

$$\left(\mathbf{x}^2-\mathbf{x}^1\right)\cdot\mathbf{n}^1\geq 0 \tag{4}$$

Donde $\mathbf{x}^\alpha$ denotan las coordenadas de la configuración deformada $\varphi^\alpha(\mathbf{B}^\alpha)$ de cada uno de los cuerpos, es decir, $\mathbf{x}^\alpha=\mathbf{X}^\alpha+\mathbf{u}^\alpha$, donde $\mathbf{X}^\alpha$ son las coordenadas de la configuración de referencia y $\mathbf{u}^{\alpha}$ los campos de desplazamiento, tal y como se puede apreciar en la Figura 2.

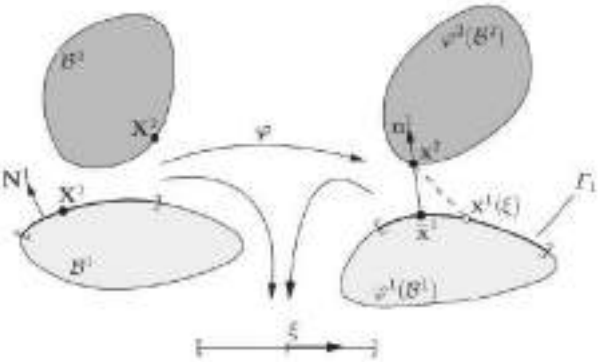


Figura 2. Configuración deformada de cuerpos $\boldsymbol{B}^{\alpha}$. Problema de minimización. [5]

El vector normal $\mathbf{n}^1$ está asociado al cuerpo $\mathbf{B}^1$. Asumiendo que el borde de contacto describe, al menos localmente, una región convexa, podemos relacionar cada punto $\mathbf{x}^2 \in \Gamma^2$ con un punto $\overline{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^1\left(\overline{\boldsymbol{\xi}}\right) \in \Gamma^1$ a través de un problema de minimización de distancia [5], descrito por la expresión.

$$\mathrm{d}\left(\xi_1, \xi_2\right) = \left\|\mathbf{x}^2 - \overline{\mathbf{x}}^1\right\| = \min_{\mathbf{x}^1 \subseteq \Gamma^1} \left\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\left(\xi_1, \xi_2\right)\right\| \tag{5}$$

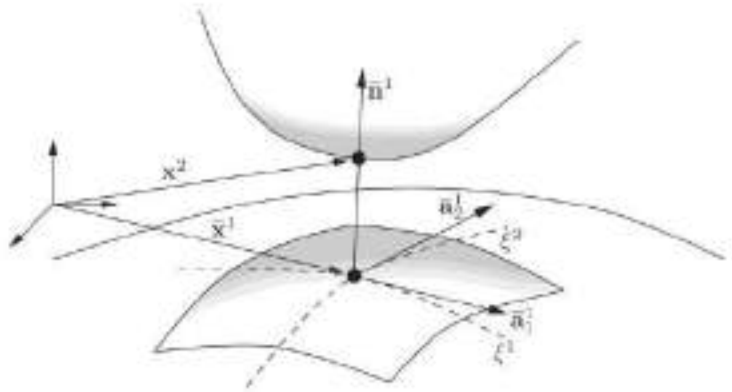


Figura 3. Minimización de la distancia y parametrización. [5]

La distancia puede ser empleada para definir la abertura o penetración entre los dos cuerpos. $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi^1, \xi^2\right)$ representa una parametrización de la superficie borde Γ^1 (Figura 3). De esta forma, el punto $\overline{\mathbf{x}}^1$ se obtiene de la condición necesaria de la función mínima distancia al diferenciar respecto a

$\boldsymbol{\xi} = \left(\xi^1, \xi^2\right)$, tal y como se muestra en la relación (6)

$$\frac{d}{d\xi^\alpha}\hat{\mathrm{d}}^1\left(\xi^1,\xi^2\right) = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\left(\xi^1,\xi^2\right)}{\left\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\left(\xi^1,\xi^2\right)\right\|} \cdot \mathbf{x}^1_{,\alpha}\left(\xi^1,\xi^2\right) = 0 \tag{6}$$

La ecuación (6) requiere la ortogonalidad del primer y segundo término. Como $\mathbf{x}^1_{,\alpha}\left(\xi^1,\xi^2\right)$ representa el vector tangente $\mathbf{a}^1_\alpha$, el primer término ha de tener la misma dirección que el vector normal $\mathbf{n}^1$ en el punto de mínimo $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2\right)$. Así, se obtiene la condición $-\mathbf{n}^1\left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2_2\right) \cdot \mathbf{a}^1_\alpha\left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2\right) = 0$, lo que significa que la solución $\mathbf{x}^1\left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2\right)$ al problema de minimización es la proyección ortogonal de $\mathbf{x}^2$ sobre la superficie borde actualizada $\varphi^1\left(\Gamma^1_c\right)$. A esta última superficie se la suele denotar por superficie maestra. Por contra $\varphi^2\left(\Gamma^2_c\right)$ es la superficie esclava.

Una vez el punto $\overline{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^1\left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2\right)$ es conocido, podemos definir la restricción representada por la condición de no penetración a través de la expresión

$$\mathrm{g_n} = \left(\mathbf{x}^2 - \overline{\mathbf{x}}^1\right) \cdot \overline{\mathbf{n}}^1 \geq 0 \tag{7}$$

Siendo $\overline{\mathbf{n}}^1$ el vector normal asociado al cuerpo $\mathbf{B}^1$, evaluado en el punto de mínima distancia $\left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2\right)$.

En la dirección tangencial de la interfaz de contacto generalmente se distinguen dos casos. Uno es el estado en el que no hay desplazamiento relativo en la dirección tangencial entre las superficies de contacto. El otro caso corresponde al estado de deslizamiento, el cual indica la existencia de un movimiento relativo tangencial entre las superficies de contacto.

La condición matemática para representar la no existencia de desplazamiento relativo tangencial entre dos cuerpos que entran en contacto, puede ser derivada de la proyección (6). Es claro que un punto que permanece pegado a otro cuerpo no experimenta movimiento en la dirección tangencial, por lo que su valor respecto a la coordenada $\left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2\right)$ no cambiará, es decir, $\dot{\overline{\xi}}^\alpha = 0$. Así, se puede formular la siguiente condición:

$$\mathbf{g}_T = g_T \cdot \overline{\mathbf{a}}_\alpha^1 = \mathbf{0} \tag{8}$$

donde $g_T = \left(\mathbf{x}^2 - \overline{\mathbf{x}}^1\right) \cdot \mathbf{a}_\alpha^1$. La expresión (8) expresa el desplazamiento relativo en la dirección tangencial, el cual ha de ser cero.

En el caso de existir desplazamiento relativo entre dos cuerpos, este está relacionado con el cambio del punto $\mathbf{x}^2 \in \Gamma^2$ relativo a la proyección $\overline{\mathbf{x}}^1 \in \Gamma^1$. Esto significa que el punto solución $\left(\overline{\xi}^1, \overline{\xi}^2\right)$, el cual ha sido obtenido a través del problema de distancia mínima (5), se moverá sobre la superficie maestra. Tal y como puede apreciarse en la Figura 4, el camino seguido por el punto $\mathbf{x}^2$ sobre la superficie maestra no se conoce a priori, por lo que durante nuestros cálculos no podemos asumir nada respecto al camino seguido [5], solo conocemos el vector de velocidad relativa $\mathbf{v}(t)$ a tiempo *t*. De esta forma, en un problema de deslizamiento con fricción, uno tiene que integrar las velocidades relativas para obtener el camino de $\mathbf{x}^2$ sobre la superficie maestra.

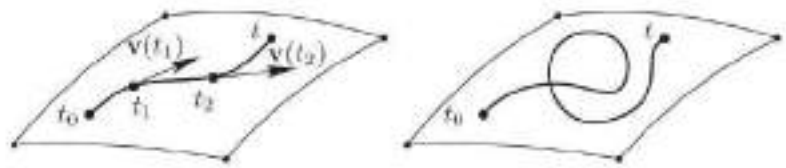


Figura 4. Camino seguido por el punto $\mathbf{x}^2$ relativo a la superficie maestra. [5]

En primer lugar, se determina el desplazamiento relativo del punto $\mathbf{x}^2$ en la superficie de contacto, el cual está definido en términos del cuerpo $\mathbf{B}^1$. La diferencial del deslizamiento relativo respecto a la parametrización de la superficie borde $d\mathbf{g}_T$ es un vector tangente, pudiéndose expresar respecto a los elementos de la base del plano tangente asociado a través de la expresión $d\mathbf{g}_T = \overline{\mathbf{a}}_\alpha^1 d\xi^\alpha = \overline{\mathbf{x}}_{,\alpha}^1 d\xi^\alpha$, tal y como se muestra en la Figura 5.

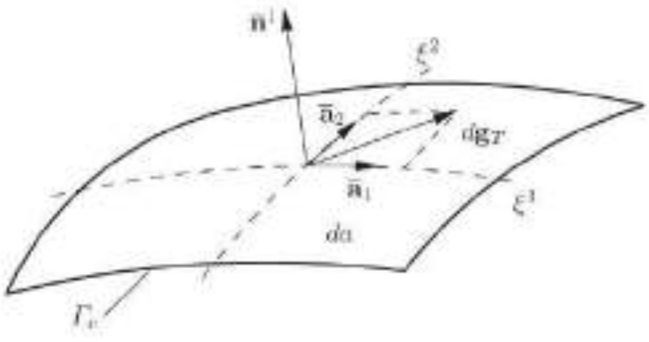


Figura 5. Incremento de camino friccional. [5]

Sabiendo que $d\mathrm{g}_T = \left\| d\mathbf{g}_T \right\|$ y $d\xi^\alpha = \dot{\xi}^\alpha dt$, la longitud del camino friccional puede ser calculada como

$$\mathrm{g}_T = \int_{t_0}^{t} \left\| \dot{\bar{\xi}}^\alpha \cdot \bar{\mathbf{x}}^1_{,\alpha} \right\| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\bar{\xi}}^\alpha \cdot \dot{\bar{\xi}}^\beta \cdot a_{\alpha\beta}}\, dt \tag{9}$$

Donde $a_{\alpha\beta}$ es la métrica asociada a la superficie borde. Para evaluar esta última expresión, sería necesario conocer la derivada temporal de $\bar{\xi}^\alpha$, pudiendo obtenerla derivando respecto al tiempo la relación $\left(\mathbf{x}^2 \text{-} \bar{\mathbf{x}}^1\right) \cdot \bar{\mathbf{a}}^1_\alpha = \mathbf{0}$, que es válida en el punto de contacto ya que $\left(\mathbf{x}^2 \text{-} \bar{\mathbf{x}}^1\right)$ es normal a la superficie de contacto y $\bar{\mathbf{a}}^1_\alpha$ es el vector tangente al borde Γ^1. De esta forma, y tras un poco de geometría diferencial se obtiene la siguiente expresión para $\dot{\bar{\xi}}^\beta$

$$\dot{\bar{\xi}}^\beta = \bar{H}^{\alpha\beta} \cdot \left(\left[\mathbf{v}^2 \text{-} \bar{\mathbf{v}}^1 \right] \cdot \bar{\mathbf{a}}^1_\alpha + \mathrm{g}_\mathrm{n} \bar{\mathbf{n}}^1 \cdot \bar{\mathbf{v}}^1_{,\alpha} \right) \tag{10}$$

Donde $\bar{H}^{\alpha\beta} = \left(\bar{H}_{\alpha\beta}\right)^{-1}$ y $\bar{H}_{\alpha\beta} = \left(\bar{a}_{\alpha\beta} - \mathrm{g}_\mathrm{n} \bar{b}_{\alpha\beta}\right)$, mientras que $\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}^1_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}^1_\beta$ es el tensor métrico y $\bar{b}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}^1_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{n}}^1$ es el tensor de curvatura, ambos considerados en la superficie borde.

3. Comportamiento Constitutivo en la interfaz de contacto

Una vez establecidas las ecuaciones básicas que gobiernan el fenómeno de contacto, es esencial describir el comportamiento constitutivo en la interfaz de contacto, tanto en la dirección normal como en la dirección tangencial [5].

Entre los distintos métodos que existen para obtener las tensiones normales provocadas por el fenómeno de contacto se ha optado por considerarlas como reacciones en la zona de contacto [6] por lo que se derivan de las ecuaciones de restricción presentadas en el capítulo anterior.

Como ya se ha indicado, la condición matemática para un estado de no penetración viene dada por $g_n \geq 0$, condición que impide la penetración del cuerpo $\mathbf{B}^2$ en el cuerpo $\mathbf{B}^1$, teniendo lugar el contacto cuando $g_n = 0$. En este último caso, la componente normal σ_n^1 del vector de tensión $\mathbf{t}^1$ en la interfaz de contacto ($\mathbf{t}^1 = \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \overline{\mathbf{n}}^1 = \sigma_n^1 \cdot \overline{\mathbf{n}}^1 + t_T^{1\beta} \cdot \overline{\mathbf{a}}_\beta^1$) ha de ser no nula y de compresión, es decir, $\sigma_n^1 < 0$. El vector de tensiones actúa en ambos bordes de contacto, tal y como se aprecia en la Figura 6, obedeciendo el principio de acción-reacción $\mathbf{t}^1\left(\overline{\xi}\right) = -\mathbf{t}^2$ en el punto de contacto $\overline{\mathbf{x}}^1 \in \Gamma^1$.

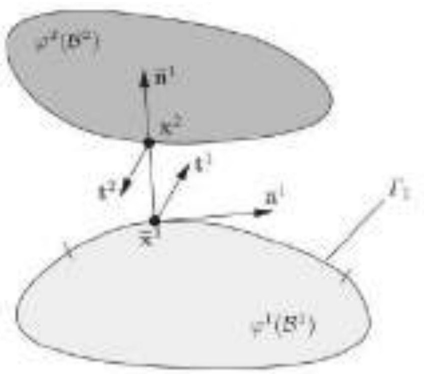


Figura 6. Tensiones en la interfaz de contacto. [5]

De esta forma, tenemos $\sigma_n^1 = \sigma_n^2 < 0$. Es importante resaltar que $t_T^{1\beta} = 0$ en el caso de considerar un contacto sin fricción. Así, resumiendo, en caso de estar en contacto, las condiciones son $g_n = 0$ y $\sigma_n < 0$. Si existe una separación entre los cuerpos, entonces la relación que se tiene es $g_n > 0$ y $\sigma_n = 0$. Esto nos lleva a las condiciones de contacto no friccional conocidas como Hertz-Signorini-Moreau [5]

$$g_n \geq 0, \sigma_n \leq 0, \sigma_n \cdot g_n = 0 \tag{11}$$

Es interesante remarcar, tal y como se aprecia en la Figura 7 que las ecuaciones (11) conducen a una ley de contacto no diferenciable para la presión de contacto normal.

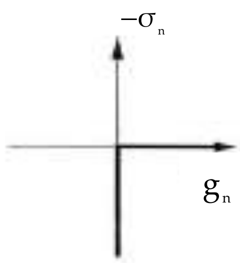


Figura 7. Presión de contacto frente a abertura normal.

En relación a los contactos con una componente tangencial no nula hay que incorporar una ley que gobierne el comportamiento friccional. Es importante destacar la dificultad de obtener leyes que gobiernen este fenómeno debido a su dependencia de variables termomecánicas, del comportamiento tensodeformacional de los cuerpos que entran en contacto, el estado de las superficies que entran en contacto (rugosidad, composición química, etc.), etc. Debido a que es imposible considerar todas estas variables en una única formulación matemática, en la práctica, uno trata de expresar la ley de fricción como función de los aspectos más importantes en consonancia con el contexto en el que se desarrolla el contacto. El resto de las variables, determinan el valor de los coeficientes adimensionales que aparecerán en la ley [7].

Entre las diversas leyes existentes para modelar el comportamiento friccional, la ley de Coulomb ha sido la más utilizada, pasando a continuación a describirla.

Si los cuerpos que entran en contacto inicialmente no experimentan un desplazamiento relativo, es decir, se encuentran en modo de no deslizamiento o "pegado", es decir, la velocidad tangencial relativa entre los cuerpo es cero, entonces la expresión (12) es la más idónea para su modelización:

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{g}_T = \mathbf{0} \tag{12}$$

Una vez la fuerza tangencial existente en la interfaz de contacto supera cierto umbral (Figura 8) entonces, las superficies que entran en contacto ya no permanecen "pegadas" entre sí, sino que experimentan un desplazamiento relativo entre ellas.

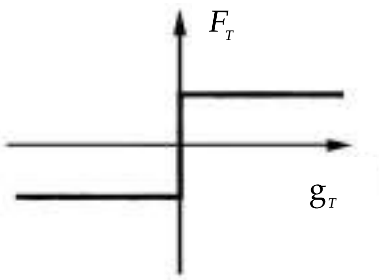


Figura 8. Ley de Coulomb de fricción

Este movimiento relativo tangencial, denotado deslizamiento, se puede expresar por la ley de Coulomb

$$\mathbf{t}_T = -\mu \cdot |\sigma_\mathbf{n}| \cdot \frac{\dot{\mathbf{g}}_T}{\|\dot{\mathbf{g}}_T\|} \quad \text{si} \quad \|\mathbf{t}_T\| \geq \mu |\sigma_\mathbf{n}| \tag{13}$$

Donde μ es el coeficiente de fricción para el deslizamiento. El valor de este coeficiente, constante en la ley clásica de Coulomb, depende de los materiales que entran en contacto, pudiéndose ver distintos valores para este coeficiente en la Tabla 1.

Tabla 1. Coeficientes de fricción para distintas parejas de materiales

Pareja de materiales que entran en contacto	Coeficiente de fricción
Hormigón-Hormigón	0.5-1
Hormigón-Arena	0.35-0.6
Hormigón-Acero	0.2-0.4
Metal-Madera	0.3-0.65
Goma-Acero	0.15-0.65
Acero-Acero	0.2-0.8
Acero-Hielo	0.015-0.03
Madera-Madera	0.4-1

El principal problema que presenta la formulación de Coulomb es que introduce un comportamiento no diferenciable al existir un umbral a partir del cual empieza a haber deslizamiento entre las superficies de contacto. Este aspecto conlleva serios problemas a la hora de realizar un tratamiento numérico del contacto cuya modelización se basa en esta ley [7]. En la literatura especializada [5, 8] se han propuesto una serie de modelos que evitan esta dificultad. Estas formulaciones, se basan en la consideración de un funcional que permite una transición suave del modo de "pegado" al modo de deslizamiento, regularizando la ley de Coulomb. En el caso dos dimensiones se tiene la expresión (14)

$$\mathrm{t}_T = -\mu \cdot \varphi\left(\dot{\mathrm{g}}_T\right) \cdot \left|\sigma_{\mathbf{n}}\right| \tag{14}$$

Donde la función φ que regula la transición suave del modo de "pegado" al modo de deslizamiento puede tener diversas expresiones. Entre estas, una de las más consideradas por los investigadores es la que aparece en la fórmula (15). El procedimiento de suavizado puede apreciarse en la Figura 9.

$$\varphi\left(\dot{\mathrm{g}}_T\right) = \frac{\dot{\mathrm{g}}_T}{\sqrt{\dot{\mathrm{g}}_T^2 + \chi^2}} \tag{15}$$

En esta última expresión el parámetro escalar χ es la variable de regularización. Se observa que si $\chi \to 0$ se obtiene como caso límite la ley clásica de Coulomb. Es importante destacar que para valores muy elevados de χ este modelo no es capaz de reproducir adecuadamente los movimientos "pegado"-deslizamiento. Por otro lado, la diferenciabilidad de la expresión (15) permite el empleo de algoritmos numéricos más simples y robustos.

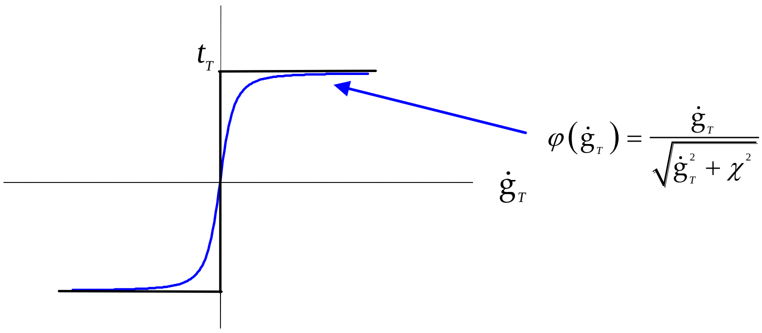


Figura 9. Regularización de la ley de fricción de Coulomb

4. Método de los elementos finitos en la mecánica de contacto.

4.1. Introducción

En esta sección se describe el proceso de resolución numérica a través del método de los Elementos Finitos de un problema de contorno en la mecánica de contacto. Los pasos a seguir quedan descritos en la Figura 10.

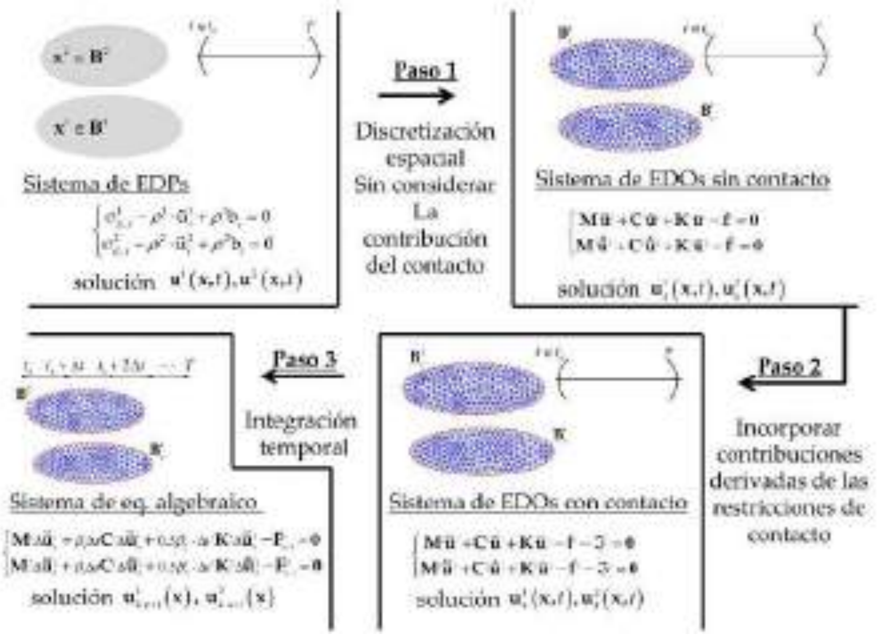


Figura 10. Procedimiento de resolución de un problema de contacto a través del Método de los Elementos Finitos

Partiendo del problema de contorno que gobierna la deformación de un sólido, el primer paso consiste en desarrollar la discretización espacial a través del método de los elementos finitos sin considerar la existencia de contacto. El siguiente paso consiste en modificar el sistema discretizado incorporando las restricciones del contacto. Finalmente, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias completo y de segundo orden es resuelto a través de un algoritmo de integración temporal.

4.2. Mecánica de medios continuos sin contacto

La deformación de sólidos se puede describir a través de las relaciones cinemáticas combinadas con las ecuaciones de balance y las constitutivas. Por claridad en la exposición, se va a considerar únicamente un problema puramente mecánico en el que la densidad de los cuerpos involucrados es constante bajo un comportamiento constitutivo elástico lineal isótropo. Bajo estas hipótesis, las ecuaciones de gobierno se componen de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento (16) y de la ley constitutiva correspondiente (17)

$$\sigma^{\alpha}_{ij,j} - \rho^{\alpha}\ddot{u}^{\alpha}_{i} + \rho^{\alpha} b_i = 0 \tag{16}$$

$$\sigma^{\alpha}_{ij} = \left[K^{\alpha}\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G^{\alpha}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij} \right) \right] \varepsilon^{\alpha}_{ij} \quad \left(\boldsymbol{\sigma}^{\alpha} = \mathbf{D}^{\alpha\mathbf{e}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha} \right) \tag{17}$$

Siendo ρ^{α} la densidad de cada cuerpo $\mathbf{B}^{\alpha}$ con $\alpha = 1,2$, que se ha supuesto constante, σ^{α}_{ij} las componentes del tensor de tensiones de Cauchy, u^{α}_{i} las componentes del vector desplazamiento, b_i las componentes del vector de fuerzas volumétricas por unidad de masa (fuerza gravitatoria), $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_{k,l} + u_{l,k} \right)$ el tensor de deformación, con $1 \le i,j,k,l \le 2$ en dos dimensiones $1 \le i,j,k,l \le 3$ en tres dimensiones. K^{α} el módulo de deformación volumétrica y G^{α} el módulo de deformación tangencial de cada cuerpo $\mathbf{B}^{\alpha}$.

El sistema de ecuaciones (16) y (17) definen un sistema de ecuaciones completo del problema de asociado a la respuesta dinámica. Para poder resolver este sistema es necesario incorporar unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas, estas últimas vienen expresadas por (18)

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{\alpha}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{t}^{\alpha}_{imp}(\mathbf{x},t) \text{ para } (\mathbf{x},t) \in \Gamma^{\alpha}_{t} \times (0,T) \\ \mathbf{u}^{\alpha}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{u}^{\alpha}_{imp}(\mathbf{x},t) \text{ para } (\mathbf{x},t) \in \Gamma^{\alpha}_{u} \times (0,T) \end{aligned} \tag{18}$$

Donde el borde total Γ^{α} del cuerpo $\mathbf{B}^{\alpha}$ con $\alpha = 1,2$, es la unión de sus componentes, es decir, $\Gamma^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{t} \cup \Gamma^{\alpha}_{u}$. En subsiguientes apartados, cuando se incorporen las restricciones derivadas del fenómeno de contacto, se considerará la existencia de una tercera componente Γ^{α}_{c}, donde los dos cuerpos $\mathbf{B}^{1}$ y $\mathbf{B}^{2}$ pueden entrar en contacto.

4.3. Paso 1. Discretización espacial sin considerar restricciones de contacto

Una vez la formulación fuerte del problema de cuerpos deformables ha sido planteada a través de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, se discretizan las variables primitivas que en el presenta caso se corresponde con los desplazamientos $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$, pudiendo escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1 &\cong \mathbf{u}^1 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{N}_k^u \cdot \overline{\mathrm{u}}_k^1 = \mathbf{N}^u \overline{\mathbf{u}}^1 \\ \mathbf{u}^2 &\cong \mathbf{u}^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{N}_k^u \cdot \overline{\mathrm{u}}_k^2 = \mathbf{N}^u \overline{\mathbf{u}}^2 \end{aligned} \tag{19}$$

Debido a que las ecuaciones de gobierno obtenidas presentan derivadas parciales de primer orden en el espacio, es necesario emplear funciones de interpolación N_k^u que sean C^0 [9]. Se consideran elementos isoparamétricos en la discretización de las ecuaciones de gobierno, empleando el mismo tipo de elementos para ambos cuerpos.

Así, premultiplicando la ecuación (16) por $\left(\mathbf{N}^u\right)^{\mathrm{T}}$, integrando el primer término por partes, incorporando el comportamiento constitutivo e incorporando una componente de amortiguamiento se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^1\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^1 + \mathbf{C}^1\dot{\overline{\mathbf{u}}}^1 + \mathbf{K}^1\overline{\mathbf{u}}^1 &= \int_{\mathbf{B}^1} \left(\mathbf{N}^u\right)^{\mathrm{T}} \rho^1 \mathbf{b}^1 d\Omega + \int_{\Gamma_t^1} \left(\mathbf{N}^u\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_{imp}^1 d\Gamma_t^1 \\ \mathbf{M}^2\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^2 + \mathbf{C}^2\dot{\overline{\mathbf{u}}}^2 + \mathbf{K}^2\overline{\mathbf{u}}^2 &= \int_{\mathbf{B}^2} \left(\mathbf{N}^u\right)^{\mathrm{T}} \rho^2 \mathbf{b}^2 d\Omega + \int_{\Gamma_t^2} \left(\mathbf{N}^u\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_{imp}^2 d\Gamma_t^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Siendo $\mathbf{M}^\alpha$, $\mathbf{K}^\alpha$ y $\mathbf{C}^\alpha$ las matrices de masas, rigidez y de amortiguamiento del sistema, respectivamente, para cada cuerpo con $\alpha = 1, 2$ estando definidas por:

$$\mathbf{M}^\alpha = \int_{\mathbf{B}^\alpha} \left(\mathbf{N}^u\right)^{\mathrm{T}} \rho^\alpha \mathbf{N}^u d\Omega \; ; \mathbf{K}^\alpha = \int_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\alpha e} \mathbf{B} d\Omega \tag{21}$$

Con $\mathbf{C}^{\alpha} = \tilde{\alpha}\mathbf{M}^{\alpha} + \tilde{\beta}\mathbf{K}^{\alpha}$; $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{N}^{u}$ y $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$

4.4. Paso 2. Restricciones derivadas del contacto.

Resolver un problema de contacto con varios cuerpos deformables significa resolver las ecuaciones de equilibrio de los distintos cuerpos junto con las condiciones de contorno de contacto impuestas por la presencia del resto de cuerpos.

Cuando los cuerpos $\mathbf{B}^1$ y $\mathbf{B}^2$ entran en contacto entran en contacto, tanto las fuerzas normales, derivadas de las ecuaciones de restricción Hertz-Signorini-Moreau, como las tangenciales, derivadas de la ley que gobierna el comportamiento friccional, han de incorporarse en la discretización espacial de las ecuaciones que gobiernan el problema de contorno considerado. Esta contribución a las ecuaciones de gobierno ha de considerarse exclusivamente en los bordes que entran en contacto, es decir Γ_c^1 y Γ_c^2

Una vez la interfaz de contacto es conocida y considerando la contribución del contacto, las expresiones se ven modificadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^1\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^1 + \mathbf{C}^1\dot{\overline{\mathbf{u}}}^1 + \mathbf{K}^1\overline{\mathbf{u}}^1 &= \int_{\mathbf{B}^1} \left(\mathbf{N}^u\right)^T \rho^1 \mathbf{b}^1 d\Omega + \int_{\Gamma_t^1} \left(\mathbf{N}^u\right)^T \mathbf{t}_{imp}^1 d\Gamma_t^1 + \Im_c^1 \\ \mathbf{M}^2\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^2 + \mathbf{C}^2\dot{\overline{\mathbf{u}}}^2 + \mathbf{K}^2\overline{\mathbf{u}}^2 &= \int_{\mathbf{B}^2} \left(\mathbf{N}^u\right)^T \rho^2 \mathbf{b}^2 d\Omega + \int_{\Gamma_t^2} \left(\mathbf{N}^u\right)^T \mathbf{t}_{imp}^2 d\Gamma_t^2 + \Im_c^2 \end{aligned} \qquad (22)$$

Donde $\Im_c^1$ y $\Im_c^1$ son las contribuciones debidas al contacto. Considerando que la discretización del contacto se desarrolla nodo a nodo, siendo la formulación empleada para el tratamiento numérico el método de penalización y considerando como comportamiento friccional la regularización de la ley de Coulomb presentada en secciones anteriores, las contribuciones debidas al contacto adquieren la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_c^1 &= \sum_{i=1}^{n_c}\left(\varepsilon_n g_{ni} A_i \mathbf{n}_i^1 - \mu \frac{\dot{g}_{Ti}}{\sqrt{\dot{g}_{Ti}^2+\chi^2}}\left|\varepsilon_n g_{ni}\right| A_i \mathbf{t}_{Ti}^1\right)\\ \mathfrak{I}_c^2 &= \sum_{i=1}^{n_c}\left(-\varepsilon_n g_{ni} A_i \mathbf{n}_i^1 + \mu \frac{\dot{g}_{Ti}}{\sqrt{\dot{g}_{Ti}^2+\chi^2}}\left|\varepsilon_n g_{ni}\right| A_i \mathbf{t}_{Ti}^1\right)\end{aligned} \quad (23)$$

Donde $\mathbf{n}_i^1$ y $\mathbf{t}_{Ti}^1$ son el vector normal y tangente en el nodo i al borde Γ_c^1 del cuerpo $\mathbf{B}^1$, respectivamente, tal y como se puede apreciar en la

Figura *11*

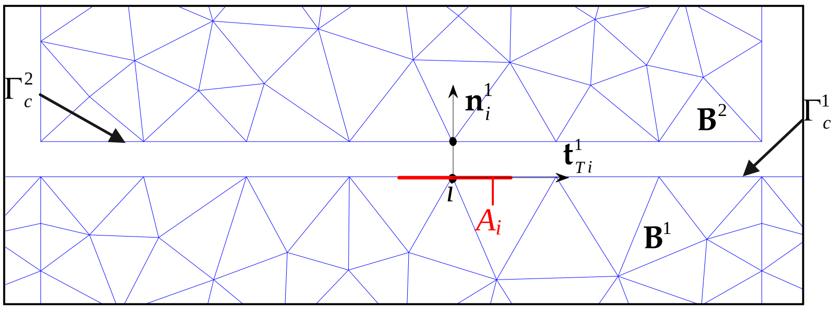


Figura 11. Elemento de contacto nodo a nodo

En esta figura, también se puede apreciar el área de influencia A_i asociada al nodo *i*. Ya que la discretización de contacto empleada es nodo a nodo, se aprecia como en las expresiones (23) el sumatorio se establece sobre número de nodos activos n_c, que a lo sumo pueden llegar a ser $\min\{\text{nº nodos } \Gamma_c^2, \text{nº nodos } \Gamma_c^1\}$. En la

Figura *11* se aprecia la localización de los contornos Γ_c^2 y Γ_c^1

En las expresiones anteriores $g_{ni} = (\mathbf{u}_i^2 - \mathbf{u}_i^1)\cdot \mathbf{n}_i^1$, mientras que $g_{Ti} = (\mathbf{u}_i^2 - \mathbf{u}_i^1)\cdot \mathbf{t}_{Ti}^1$, siendo $\mathbf{u}_i^1$ el desplazamiento del cuerpo $\mathbf{B}^1$ en el nodo *i*, mientras que $\mathbf{u}_i^2$ es el desplazamiento del cuerpo $\mathbf{B}^2$ registrado en el nodo del borde Γ_c^2 que esté a menor distancia del nodo *i* del cuerpo $\mathbf{B}^1$. ε_n es el coeficiente de penalización. μ es el coeficiente de fricción. Por último, el parámetro χ es la variable de regularización de la ley de Coulomb.

4.5. Paso 3. Integración temporal.

Es aconsejable agrupar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales de los cuerpos $\mathbf{B}^1$ y $\mathbf{B}^2$ a través del conjunto de variables $\left[\overline{\mathbf{u}}^1, \quad \overline{\mathbf{u}}^2\right]^T$. De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales (22) se pueda expresar mediante la expresión

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}^1 \\ \overline{\mathbf{u}}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbf{u}}}^1 \\ \dot{\overline{\mathbf{u}}}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^1 \\ \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^1 + \mathfrak{I}_c^1 \\ \mathbf{f}^2 + \mathfrak{I}_c^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Esta representación además de ser más conveniente para el desarrollo de la discretización temporal de las ecuaciones de gobierno, permite una implementación eficiente en el lenguaje M del entorno Matlab al tener almacenada la información del sistema de ecuaciones diferenciales de forma matricial.

Evaluando el sistema (24) para el paso de tiempo t_{n+1}, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \\ \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \\ \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n+1}^1 \\ \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^1 + \mathfrak{I}_{c\ n+1}^1 \\ \mathbf{f}_{n+1}^2 + \mathfrak{I}_{c\ n+1}^2 \end{bmatrix}$$

(25)

Discretizando temporalmente los desplazamientos $\overline{\mathbf{u}}^{global} = \left[\overline{\mathbf{u}}^1, \quad \overline{\mathbf{u}}^2\right]^{\mathrm{T}}$ a través del método Generalizado de Newmark $GN22$ [10], se obtienen el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n+1}^{global} &= \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} + \Delta\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} \\ \dot{\overline{\mathbf{u}}}_{n+1}^{global} &= \dot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} + \Delta t \cdot \ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} + \beta_1 \cdot \Delta t \cdot \Delta\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} \\ \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{global} &= \overline{\mathbf{u}}_{n}^{global} + \Delta t \cdot \dot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \cdot \Delta\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \cdot \beta_2 \cdot \Delta\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{n}^{global} \end{aligned} \quad (26)$$

Siendo β_1 y β_2, parámetros que habitualmente se escogen en el rango de 0 a 1. Dependiendo del valor asignado a estos parámetros se puede obtener una amplia gama de integradores con distintas propiedades de estabilidad y precisión. Para que el esquema de integración obtenido a partir del sistema de ecuaciones en diferencias (26) sea incondicionalmente estable, se ha de cumplir $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 1/2$. Habitualmente, se suele incorporar algo de amortiguamiento numérico, empleando $\beta_2 = 0.605, \beta_1 = 0.6$

Incorporando la relación (26) en (25) se obtiene el sistema de ecuaciones algebraico (27) a resolver para cada paso de tiempo donde $\left[\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^1 \quad \Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^2\right]$ permanecen desconocidas.

$$\begin{aligned}&\Psi_{n+1}^1\left(\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^1, \quad \Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^2\right) \equiv \dots\\&\mathbf{M}^1\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^1 + \beta_1 \cdot \Delta t \cdot \mathbf{C}^1\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^1 + 0.5\beta_2 \cdot \Delta t^2 \cdot \mathbf{K}^1\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^1 - \mathbf{F}_{n+1}^1 = \mathbf{0}\\&\Psi_{n+1}^2\left(\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^1, \quad \Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^2\right) \equiv \dots\\&\mathbf{M}^2\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^2 + \beta_1 \cdot \Delta t \cdot \mathbf{C}^2\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^2 + 0.5\beta_2 \cdot \Delta t^2 \cdot \mathbf{K}^2\Delta\ddot{\mathbf{u}}_n^2 - \mathbf{F}_{n+1}^2 = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{27}$$

Las funciones $\mathbf{F}_{n+1}^1, \mathbf{F}_{n+1}^2$ del sistema algebraico (27) quedan formuladas en las expresiones.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{n+1}^1 &= -\mathbf{M}^1\ddot{\mathbf{u}}_n^1 - \mathbf{C}^1\left[\dot{\mathbf{u}}_n^1 + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n^1\right] - \mathbf{K}^1\left[\overline{\mathbf{u}}_n^1 + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_n^1 + 0.5\Delta t^2 \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n^1\right] + \mathbf{f}_{n+1}^1\\\mathbf{F}_{n+1}^2 &= -\mathbf{M}^2\ddot{\mathbf{u}}_n^2 - \mathbf{C}^2\left[\dot{\mathbf{u}}_n^2 + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n^2\right] - \mathbf{K}^2\left[\overline{\mathbf{u}}_n^2 + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_n^2 + 0.5\Delta t^2 \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n^2\right] + \mathbf{f}_{n+1}^2\end{aligned} \tag{28}$$

Debido al contacto, el sistema (27) es no lineal incluso en el presente caso en el que se han considerado dos cuerpos con un comportamiento elástico lineal. Este sistema puede resolverse de forma iterativa a través del conocido algoritmo de Newton-Raphson.

Una vez se haya resuelto el sistema no lineal (27), los valores de los desplazamientos $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{global}$ a tiempo t_{n+1}, son evaluados a través de las expresión (26).

5. Interacción suelo-estructura.

5.1. Introducción

En este capítulo se presenta una aplicación de la mecánica de contacto computacional descrita en capítulos anteriores. Esta aplicación consiste en la reproducción numérica de un ensayo de laboratorio a escala de un dique vertical formado por un cajón de hormigón apoyado sobre una banqueta de grava y sometido a la colisión de un péndulo [11]. Esta aplicación ha sido desarrollada en el trabajo de tesis doctoral del autor del presente trabajo de investigación [12]

En primer lugar se describe el modelo a escala empleado por Goda en 1994, pasando a continuación a describir el modelo numérico desarrollado para reproducir el ensayo experimental. Una parte fundamental del modelo numérico está relacionada con la interacción entre el cajón y la banqueta de grava. Tras un análisis cualitativo de la respuesta proporcionada por el modelo numérico se presenta una comparación entre los resultados numéricos y los datos experimentales.

5.2. Modelo a escala

En la Figura 12 se puede apreciar la descripción del modelo a escala del dique vertical empleado por Goda en 1994, en el que no se consideró la presencia de agua. Como se puede apreciar en esta figura, se trata de un dique vertical compuesto con una banqueta de grava de 190mm de alto, con una anchura en la parte superior de 400mm y una pendiente 1 a 2. La grava empleada en la banqueta estaba formada por piedras cuyo tamaño se correspondía con $d_{50} = 15\mathrm{mm}$ y coeficiente de gradación de $\left(d_{75}/d_{25}\right)^{0.5} = 1.16$. El suelo sobre el que se apoyaba la banqueta era de hormigón.

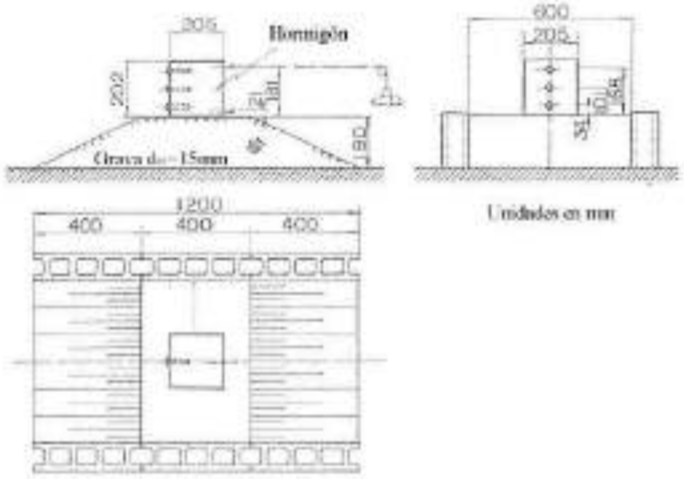


Figura 12. Modelo a escala de un Dique Vertical sobre una banqueta de Grava

El cajón fue modelado a través de un bloque de hormigón de 202mm de alto, 205mm de ancho y 205mm de largo, con una densidad de $\rho = 2314\,\mathrm{kg/m^3}$. El bloque incorporaba en la cara anterior tres tornillos metálicos a tres alturas diferentes [illegible]$_t = 34, 101, 168\mathrm{mm}$ sobre la base del bloque. Estos tornillos fueron considerados como puntos de impacto sobre los que colisionaba el péndulo, tal y como se puede apreciar en la Figura 13.

Figura 13. Disposición del péndulo y de los indicadores.

En la Figura 13 se puede apreciar la disposición del péndulo empleado para colisionar con el bloque de hormigón. Este péndulo de masa $\mathrm{M} = 5.5kg$ fue suspendido del techo a través de una cuerda. Se consideraron tres longitudes de cuerda, $\ell_0 = 3.393, 3.46, 3.527\mathrm{m}$, ajustadas para conseguir que el péndulo impactara sobre cada uno de los tres tornillos metálicos. El péndulo fue situado a una distancia de $s_0 = 250\mathrm{mm}$ respecto a la cara anterior del bloque de hormigón, tal y como se puede apreciar en la Figura 13.

El movimiento del bloque de hormigón fue medido a través de los indicadores de deformación situados a 41mm respecto a la parte superior e inferior del bloque de hormigón. Además, se emplearon dos medidores de desplazamiento para poder verificar el deslizamiento residual tras la colisión del péndulo.

De los distintos ensayos realizados por Goda en 1994 se ha considerado para el presente caso de aplicación aquel que se corresponde con una longitud de cuerda $\ell_0 = 3.393\mathrm{m}$, haciendo colisionar el péndulo en el tornillo metálico situado a $\ell_t = 168\mathrm{mm}$.

5.3. Modelización a través del Método de los elementos finitos

El modelo a escala del dique vertical ha sido analizado a través del método de los elementos finitos bajo la hipótesis de deformación plana. En la Figura 14 se muestra la geometría y la malla de elementos finitos empleada en el análisis numérico, consistente en 558 elementos triangulares isoparamétricos de seis nodos para discretizar la banqueta de grava y 156 elementos triangulares isoparamétricos de seis nodos para discretizar el cajón.

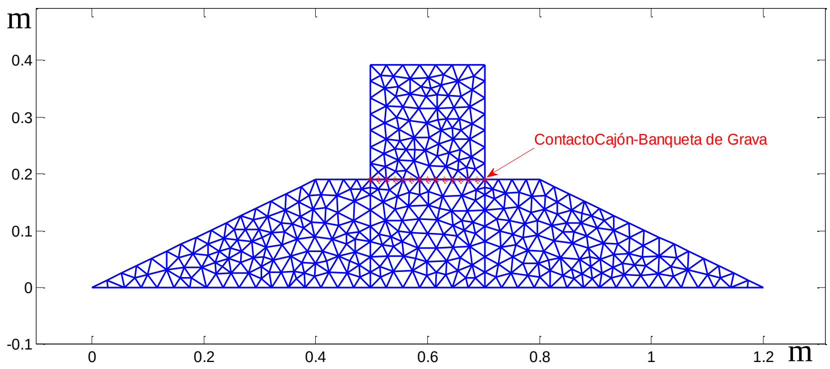


Figura 14. Malla de elementos finitos empleada en la simulación numérica

En el borde inferior de la banqueta de grava los desplazamientos verticales y horizontales han sido impedidos, permitiendo el libre movimiento en el resto de bordes de la geometría no involucrados en el contacto entre el cajón y la banqueta de grava. La parte inferior del cajón así como la zona central de la banqueta de grava son modelados a través del contacto descrito en secciones anteriores del presente trabajo. Esta zona de contacto queda resaltada en rojo en la Figura 14.

En relación a la carga impulsiva derivada de la colisión del péndulo, la velocidad de impacto del péndulo ha sido derivada de las ecuaciones de movimiento de un péndulo, calculando el impulso de impacto a partir de dicha velocidad. Estas expresiones son:

$$\begin{aligned} \omega &= s_0 \cdot \left(g / \ell_0 \right)^{1/2} \\ I &= M \cdot \omega \cdot \left(1 + e_0 \right) \end{aligned} \tag{29}$$

En la expresión (29) e_0 es el coeficiente de restitución, siendo su valor en este caso de 0.2. Incorporando los datos especificados en los párrafos anteriores, es decir, $s_0 = 250\text{mm}$, $\ell_0 = 3.393\text{m}$ y $\text{M} = 5.5kg$, se obtiene un impulso de $I = 2.81 N/s$. Por otro lado, debido a que la simulación numérica se realiza bajo la hipótesis de deformación plana, es necesario corregir el impulso I para obtener un sistema dinámico en el que la relación entre la masa del sistema y la fuerza aplicada sea igual a la del modelo a escala. De esta forma, en el modelo numérico, se considera un impulso de $I = 13.71 N/s$.

Este impulso fue aplicado a una altura de $:_t = 168\text{mm}$ sobre la base del cajón mediante el esquema triangular de la Figura 15.

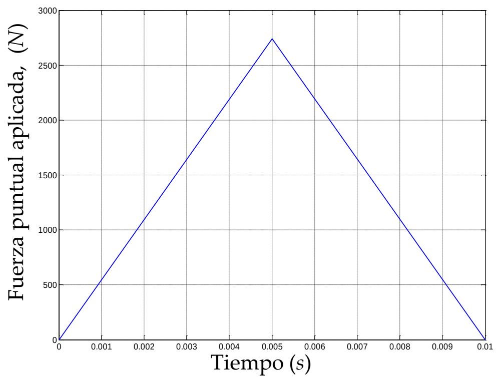


Figura 15. Desarrollo temporal de la fuerza puntual aplicada sobre el cajón.

Tanto la banqueta de grava como el cajón han sido modelados bajo un comportamiento constitutivo elástico lineal isótropo. La rigidez horizontal considerada por Goda en su modelo masa-muelle, derivada a partir del movimiento del bloque de hormigón medido en el ensayo, era de $K_x \cong 500\text{kN}/\text{m}$. El valor asignado al módulo tangencial G para la banqueta de grava en el modelo numérico fue el asociado a esta rigidez horizontal, siendo el coeficiente de Poisson $\upsilon = 0.25$. El módulo tangencial del cajón fue de $G = 2 \cdot 10^9\ \text{N}/\text{m}^2$ siendo el coeficiente de Poisson $\upsilon = 0.2$.

Debido a que la ley constitutiva empleada es elástico lineal, se ha incorporado un amortiguamiento de Rayleigh para poder reproducir numéricamente los efectos de la histéresis presente en la relación tensión-deformación de la banqueta de grava. Los valores asignados a los coeficientes de Rayleigh fueron $\alpha = 0.023$ y $\beta = 0.023$.

Para modelar correctamente el fenómeno de contacto, se consideró un coeficiente de penalización $\varepsilon_n = 5 \cdot 10^8\ \text{N}/\text{m}^3$, siendo el coeficiente de fricción $\mu = 0.65$. Por último, el parámetro de regularización de la ley de Coulomb considerado ha sido $\chi = 10^{-10}$. Los valores asignados a los parámetros del esquema numérico integración temporal $GN22$, fueron $\beta_2 = 0.605, \beta_1 = 0.6$.

5.4. Resultados y discusión

Antes de analizar la respuesta del cajón ante el impacto del péndulo así como el comportamiento dinámico del contacto incorporado en la interface entre el cajón y la banqueta de grava, se muestra el correcto funcionamiento estático del modelo numérico, analizando la respuesta del sistema cajón – banqueta de grava al colocar el cajón sobre la banqueta de grava.

En la Figura 16 se puede apreciar el desplazamiento vertical del sistema cajón-banqueta de grava al colocar el cajón sobre la banqueta. En esta figura, se puede apreciar como la transición de colores del cajón a la banqueta de grava es continua, por lo que el fenómeno de la interacción entre el cajón y la banqueta de grava, desde el punto de vista de compatibilidad geométrica, ha sido simulado correctamente.

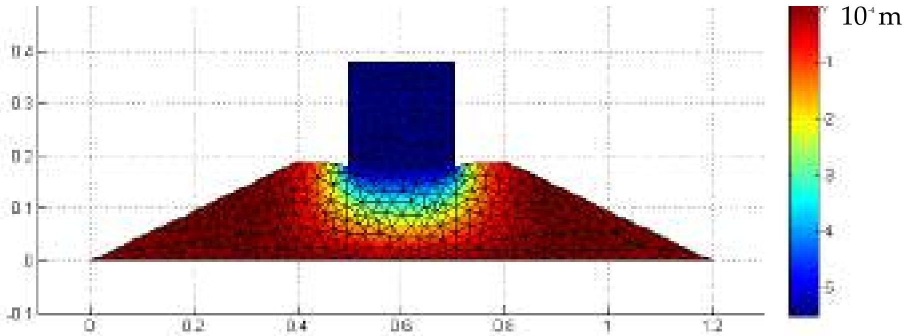


Figura 16 Isolíneas de desplazamiento vertical tras apoyar el cajón sobre la banqueta de grava. Resultado numérico.

Una vez analizado el fenómeno de contacto estático desde el punto de vista de la compatibilidad geométrica de mallas, se observa en la Figura 17 el campo de tensiones registrado en la banqueta de grava y en el cajón tras apoyar el cajón. En esta figura se puede apreciar como la distribución de tensión vertical en la superficie de contacto entre el cajón y la banqueta de grava es propia de una cimentación rígida, mostrando unos valores máximos de tensión vertical en los extremos y un valor mínimo en el centro. Por otra parte, el valor medio de las tensiones en la superficie de contacto se corresponde con el peso propio del cajón $\sigma_z = 2314 \cdot 9.81 \cdot 0.202 = 4586\,\mathrm{N/m^2}$.

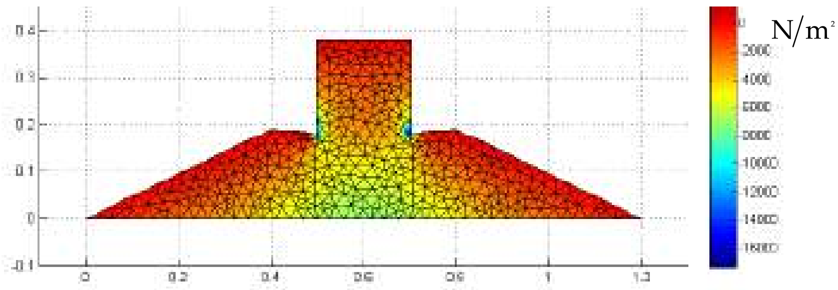


Figura 17 Isolíneas de tensión vertical registradas en banqueta de grava y cajón tras colocar el cajón. Resultado numérico.

Una vez analizado el comportamiento del contacto entre el cajón y la banqueta de grava de forma estática, se pasa a continuación a analizar la respuesta del cajón ante el impacto del péndulo, prestando especial atención al comportamiento dinámico del contacto.

En la Figura 18 se muestra la comparación entre los datos experimentales obtenidos por Goda en 1994 y los resultados numéricos alcanzados al analizar la respuesta del dique vertical a escala ante la acción impulsiva de un péndulo.

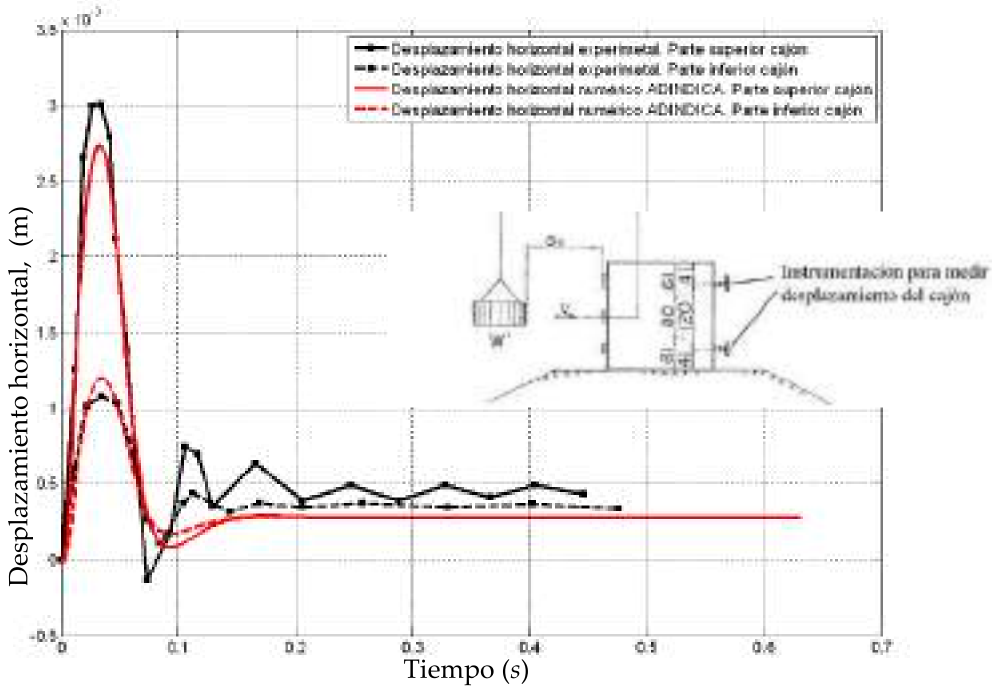


Figura 18. Comparación entre los resultados numéricos y los datos experimentales obtenidos por Goda en 1994. Desplazamientos horizontales del cajón.

En esta figura se puede apreciar como la respuesta numérica obtenida es bastante buena. Se observa como los desplazamientos numéricos registrados son muy similares a las mediciones experimentales, siendo la diferencia entre los datos experimentales y los numéricos inferiores al 8%.

Tras aplicar el impacto, se observa como el desplazamiento horizontal no regresa a cero, si no que existe un desplazamiento residual, representando el deslizamiento sufrido por el bloque de hormigón sobre la banqueta de grava tras la colisión del péndulo.

Debido a que la diferencia entre las lecturas experimentales de desplazamiento residual registradas por los indicadores es insignificante, se pudo concluir que el impacto del péndulo no causo el cabeceo del bloque de hormigón. Esta última observación se puede también derivar de los resultados numéricos, ya que tampoco existe una diferencia apreciable entre los desplazamientos residuales obtenidos de cada indicador. El desplazamiento residual registrado en los cálculos numéricos es un 20% inferior a los registrados experimentalmente.

En la Figura 19 se puede apreciar el desplazamiento horizontal experimentado por la esquina inferior izquierda del cajón junto con el desplazamiento horizontal del nodo de la banqueta de grava más cercano a esta esquina del cajón. Se puede apreciar claramente como tras la colisión del péndulo, el bloque de hormigón queda ligeramente desplazado respecto a su posición inicial, existiendo un deslizamiento de unos 0.4mm, valor muy similar al registrado experimentalmente.

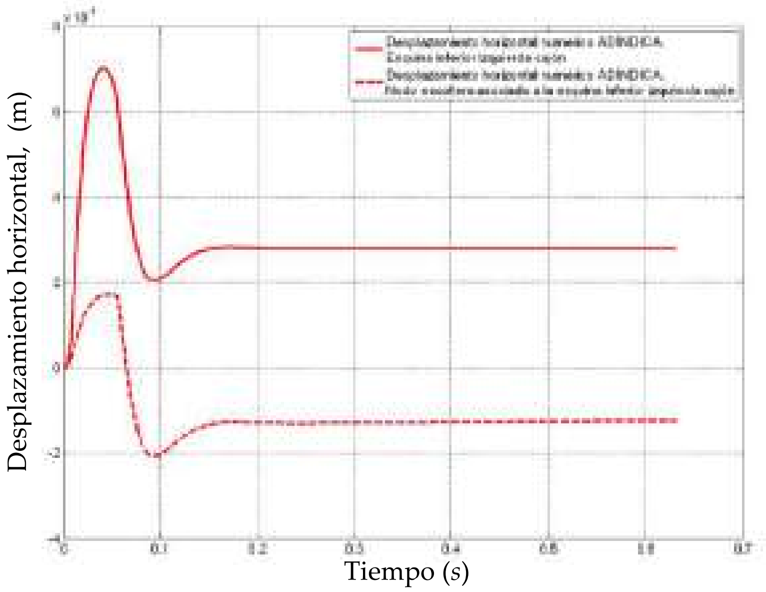


Figura 19 Comparación entre el desplazamiento horizontal registrado en la esquina inferior derecha del cajón y el nodo de la escollera más próximo a la esquina inferior derecha del cajón.

En la Figura 20 se muestra, empleando un factor de amplificación de desplazamientos de 20, la deformada en el instante en el que se alcanza el máximo desplazamiento horizontal. En esta figura se aprecia claramente la pérdida de contacto entre el bloque de hormigón y la banqueta de grava derivada de la colisión del péndulo. De la misma forma, se aprecia como el contacto implementado reproduce adecuadamente la no interpenetración entre las geometrías de los cuerpos que entran en contacto.

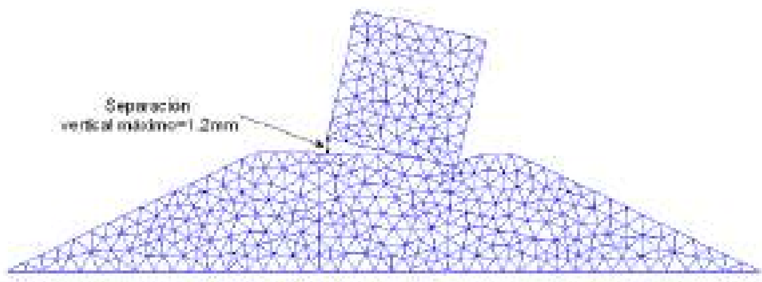


Figura 20 Deformada en el instante t=0.032s, máximo desplazamiento horizontal. Resultado numérico.

La pérdida de contacto parcial entre el bloque de hormigón y la banqueta de grava queda puesta de manifiesto con más claridad en la Figura 21, en la que se muestra el desplazamiento vertical experimentado en la esquina inferior izquierda del cajón junto con el desplazamiento vertical del nodo de la banqueta de grava más cercano a este. En esta figura se aprecia claramente como la colisión del péndulo es de suficiente intensidad para separar el bloque de hormigón de la banqueta de grava. También se aprecia cómo, una vez el efecto del impacto ha pasado, el peso del bloque de hormigón es el causante del restablecimiento del contacto, no existiendo interpenetración apreciable entre ambos cuerpos.

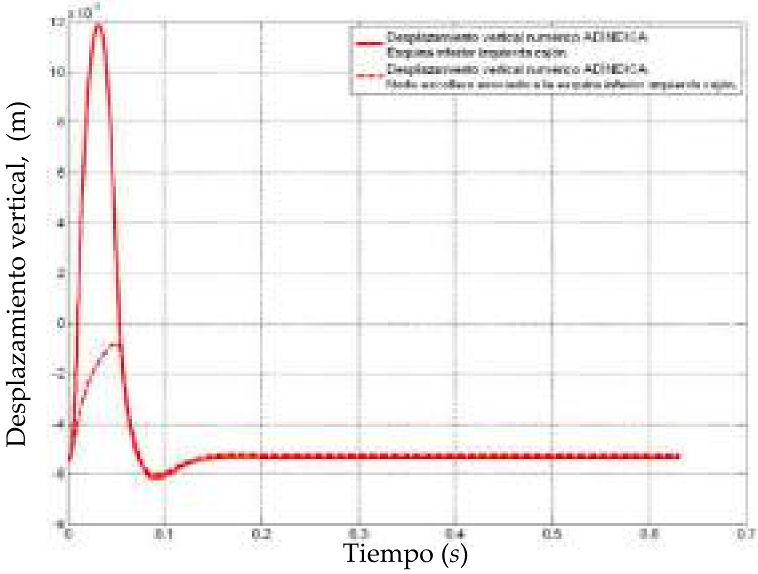


Figura 21. Comparación entre el desplazamiento vertical registrado en la esquina inferior derecha del cajón y el nodo de la escollera más próximo a la esquina inferior derecha del cajón.

Por último, en la Figura 22 se muestra el campo de tensiones registrado en la banqueta de grava y el cajón tras el impacto del péndulo. En esta figura se puede apreciar como la distribución de tensión vertical en la superficie de contacto entre el cajón y la banqueta de grava representa correctamente el giro del cajón, mostrando una concentración de tensiones verticales en la parte derecha inferior del cajón, mostrando una buena compatibilidad entre los registros obtenidos en la banqueta de grava y el cajón.

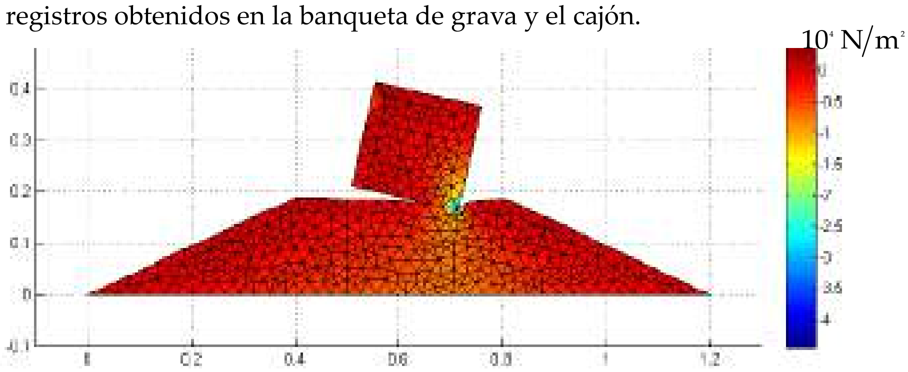


Figura 22. Isolíneas de tensión vertical registradas en la banqueta de grava y el cajón tras el impacto del péndulo. Instante de tiempo t=0.032s. Resultado numérico.

6. Conclusiones

En el presente artículo de investigación se describe la aplicación de la mecánica de contacto al fenómeno de la interacción suelo estructura bajo una perspectiva numérica. Se describe el modelo teórico necesario para la correcta reproducción del fenómeno de contacto, basado en relaciones cinemáticas y constitutivas adecuadas, abordando posteriormente los aspectos fundamentales para una correcta resolución numérica, a través del método de los elementos finitos.

Bajo el marco teórico y numérico propuesto, se reproduce numéricamente un ensayo de laboratorio a escala de un dique vertical formado por un cajón de hormigón apoyado sobre una banqueta de grava y sometido a la colisión de un péndulo. Las principales conclusiones alcanzadas son:

- La interacción suelo-estructura que involucra importantes deformaciones así como pérdida de contacto entre superficies y posterior restablecimiento del mismo se representa mejor a través de la mecánica de contacto friccional que prescribiendo condiciones de contorno.
- Considerando algoritmos numéricos apropiados, el método de los elementos finitos puede proporcionar soluciones precisas y robustas a problemas de la interacción suelo-estructura.
- En el caso particular abordado de la colisión de un péndulo sobre

un dique vertical los resultados numéricos alcanzados reproducen fielmente el comportamiento obtenido experimentalmente.

7. Referencias

[1] SHENG D, WRIGGERS P, SLOAN W. Application of Frictional Contact in Geotechnical Engineering. *International Journal of Geomechanics.* 2007; **7**(3): 176-185.

[2] ZIENKIEWICZ OC, SHIOMI T. Dynamic behavior of saturated porous media: The generalized Biot formulation and its numerical solution. *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.* 1984; **8**:71-96.

[3] DESAI CS. *Geotechnical Modeling and Applications*. Gulf Publishing Company, 1987.

[4] BEA RG, WRIGHT SG, SIRCAR P, NIEDORODA AW. Wave Induced Slides in South Pass Block 70, Mississippi Delta. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE.* 1983; **109**(1) :619-644.

[5] WRIGGERS P. *Computational Contact Mechanics*. Springer: New York, 2006.

[6] KIKUCHI N, ODEN JT. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. SIAM, Philadelphia, 1988.

[7] RAPPAZ M, BELLET M, DEVILLE M. *Numerical Modeling in Materials Science and Engineering*. Springer: New York, 2003.

[8] ODEN JT, PIRES EB. Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity. *Journal of Applied Mechanics.* 1983; **50**: 67-76.

[9] HUGHES TJR. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications: New York, 2000.

[10] KATONA MG, ZIENKIEWICZ OC. A unified set of single step algorithms part 3: the beta-m method, a generalization of the Newmark scheme. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1985; **21**: 1345-1359.

[11] GODA Y. Dynamic Response of Upright Breakwaters to Impulsive Breaking Wave Forces. *Coastal Engineering* 1994; **22**(1-2): 135-158.

[12] STICKLE MM. *Sobre la respuesta dinámica del terreno bajo la acción del olaje en cajones fondeados en suelos arcillosos*. PhD Thesis, Polytechnic University of Madrid, 2010.

Sobre los autores:

Nombre: Miguel Martín Stickle
Correo Electrónico: miguel.martins@upm.es
Institución: Grupo M2i, ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Pablo de la Fuente
Correo Electrónico: pdelaf@caminos.upm.es
Institución: ETS Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid

Nombre: Carlos Oteo
Correo Electrónico: carlosoteo@telefonica.net
Institución: Catedrático de Ingeniería del Terreno

Juegos Matemáticos
La Torre de Hanói y los Q_n Grafos

Mª Milagros Latasa Asso

Revista de Investigación

G.I.E. Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

La Torre de Hanói es uno de los hallazgos matemáticos más ingeniosos de la matemática recreativa. Gracias a una leyenda con tinte oriental hoy se conoce de modo universal. Se describen en este artículo las relaciones entre las soluciones del rompecabezas y los ciclos hamiltonianos en los grafos Q_n.

Palabras Clave: Grafo, Juegos, Hanói

1. La leyenda

El matemático francés Édouard Lucas d'Amiens con el pseudónimo de profesor N. Claus de Siam (anagrama de *Lucas d'Amiens*), mandarín del Colegio de Li–Sou-Stian (una nueva permutación de letras, esta vez de las de las de las palabras *Saint Louis*), ideó y dio a conocer este problema en 1883. Se comercializó como un juego con el nombre de "*La Torre de Hanói*".

El material del rompecabezas lo forman tres pivotes sujetos en una base horizontal y un cierto número de discos de distintos diámetros que se colocan en uno de los pivotes extremos. En la parte baja se coloca el de mayor diámetro y encima los de diámetros menores en orden decreciente.

El objetivo del juego consiste en pasar los discos de un extremo al otro siguiendo unas precisas normas que son:

- En cada movimiento solo puede moverse un disco.
- El número de movimientos debe ser el menor posible
- No se puede colocar nunca un disco sobre otro de menor diámetro.

La Torre de Hanói tuvo desde su comienzo un gran éxito y se dio a conocer con una leyenda que perfeccionó el escritor Henri de Parville al año siguiente:

> *"En el gran templo de Benarés, debajo de la cúpula que marca el centro del mundo, yace una base de bronce, en donde se encuentran acomodadas 3 agujas de diamante, cada una del grueso del cuerpo de una abeja y de una altura de 50 cm aproximadamente. En una de estas agujas, Dios, en el momento de la creación, colocó 64 discos de oro, el mayor sobre el plato de bronce y el resto, de menor tamaño, conforme se llega a la cima. Día y noche, incesantemente, los sacerdotes del templo mueven los discos de una aguja a otra de acuerdo con las leyes impuestas e inmutables de Brahma, que requieren que los sacerdotes se encuentren todo el tiempo laborando, no muevan más de un disco a la vez y que deben colocar el disco en alguna de las agujas de modo que no cubra a un disco de radio menor. Cuando los 64 discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Dios colocó los discos, en el momento de la creación, a la otra aguja, el templo y los brahmanes se convertirán en polvo y junto con ellos el mundo desaparecerá."*
>
> ***Texto original de Henri de Parville (de 1884)***

Este final nos invita a averiguar el número de movimientos que han de realizar los monjes de Benarés para cumplir con el mandato de Brahma. Tal vez el fin del mundo esté próximo.

Figura 1: Portada original
Fuente: www.cs.wm.edu/~pkstoc/toh.html

ISSN 2174-0410

2. Pasarán millones de años

Para resolver el problema de la torre de Hanói con n+1 discos, primero se trasladan los n discos de menor diámetro al poste central. Se necesitarán para ello x movimientos. A continuación se mueve el disco de mayor diámetro al tercer poste, y finalmente los n discos menores encima del mayor. En total serán precisos 2x+1 movimientos.

Para un disco se necesitarán 2^1-1 movimientos.
Para dos discos $2\cdot(2^1 - 1) + 1 = 2^2 - 1$ movimientos.
...
Para n discos el número de movimientos será: $2\,(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

Luego, para n = 64, el número de movimientos necesario para resolver el puzzle es

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Si los sacerdotes del templo de Benarés fuesen capaces de mover un disco cada segundo, sería necesario algo más de medio billón de años para trasladar la torre de Hanói de un extremo a otro.

3. Los Qn grafos

Consideremos el subconjunto V de R^n definido por:

$$V = \{A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n \;/\; a_i = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall\, i = 1,2,\dots, n\}$$

Claramente $\#\,V = VR_{2,n} = 2^n$

Diremos que $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V$ son *adyacentes* si

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \right| = 1 .$$

Llamaremos *n - cubo* y lo representaremos por Q_n al grafo (V, E) dónde V está formado por las n-uplas arriba descritas y

$$E = \{AB \;/\; A, B \in V \quad A \text{ y } B \text{ son adyacentes}\}$$

Todos los vértices tienen el mismo grado n ya que hay n formas distintas de variar una posición en una n-upla. Se deduce entonces que Qn es un grafo regular de orden n.

Una simple operación nos permite calcular el número de aristas:

$$\sum_{v\in V} grado\,(v) = \sum_{j=1}^{2^n} n = n\,2^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \# E = n\, 2^{n-1}$$

En la *Figura 2* se puede apreciar una representación de Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4

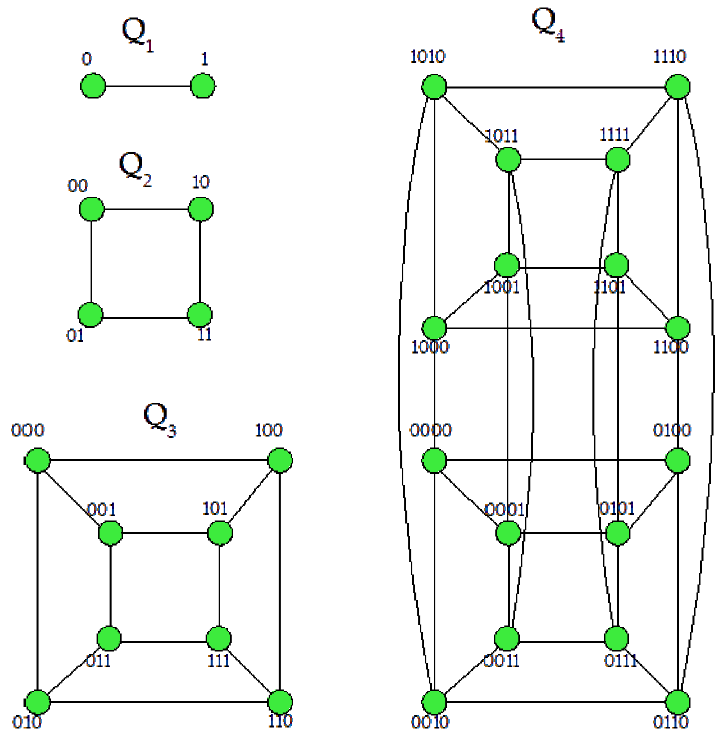
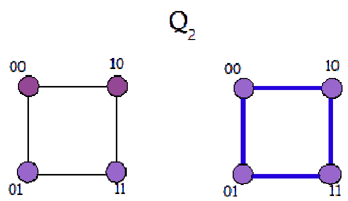


Figura 2. Representación de Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4

4. Los Qn grafos son hamiltonianos (n ≥ 2)

Razonamos por inducción sobre *n*:

Para *n* =2 es clara la existencia de un ciclo hamiltoniano



$\Rightarrow$ Q_2 es hamiltoniano.

Supongamos que Q_k es hamiltoniano, veamos que lo es Q_{k+1}:

Sean los dos subgrafos de Q_{k+1} : $G^1 = \left(V^1_{k+1}, E^1_{k+1}\right)$ y $G^2 = \left(V^2_{k+1}, E^2_{k+1}\right)$ donde:

$$V_{k+1}^1 = \{(a_1, a_2, ..., a_{k+1}) / \ a_{k+1} = 0, a_i = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall i = 1,2,.., k\}$$

$$V_{k+1}^2 = \{(a_1, a_2, ..., a_{k+1}) / \ a_{k+1} = 0, a_i = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall i = 1,2,.., k\}$$

$$E_{k+1}^1 = \left\{ \overline{AB} \quad eje \quad de \quad Q_{k+1} / A,B \in V_{k+1}^1 \right\}$$

$$E_{k+1}^2 = \left\{ \overline{AB} \ eje \ de \ Q_{k+1} / A,B \in V_{k+1}^2 \right\}$$

Demostraremos ahora que G^1 y G^2 son isomorfos a $Q_k = (V_k, E_k)$. Para ello definimos las aplicaciones f: $V_k \longrightarrow V_{k+1}^1$ g: $V_k \longrightarrow V_{k+1}^2$ de modo que

Si A = $(a_1, a_2, ..., a_k) \in$ Vk cualquiera

$$f(\text{A}) = f((a_1, a_2, ..., a_k)) = (a_1, a_2, ..., a_k, 0)$$

$$g(\text{A}) = g((a_1, a_2, ..., a_k)) = (a_1, a_2, ..., a_k, 1)$$

- Tanto f como g son aplicaciones biyectivas:

  Desde luego f está bien definida.

  $f((a_1, a_2,\ldots,a_k)) = f((b_1, b_2,\ldots,b_k)) \Rightarrow (a_1, a_2,\ldots,a_k, 0) = (b_1, b_2,\ldots,b_k, 0) \Rightarrow$

  $\Rightarrow a_i = b_i \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow (a_1, a_2,\ldots,a_k) = (b_1, b_2,\ldots,b_k) \Rightarrow$ <u>f inyectiva</u>

  Por otra parte, dado $(a_1, a_2,\ldots, a_k, 0) \in V_{k+1}^1$, $\exists$ $(a_1, a_2,\ldots, a_k) \in V_k$ /

  $f((a_1, a_2,\ldots,a_k)) = (a_1, a_2,\ldots,a_k, 0) \Rightarrow$ <u>f sobre</u> .

- Veremos ahora que <u>f es un</u> isomorfismo <u>de grafos</u>. En efecto:

  $(a_1, a_2,\ldots,a_k)$ y $(b_1, b_2,\ldots,b_k)$ adyacentes en $Q_k \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k} b_i \right| = 1 \quad \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \left| (a_1 + a_2 + ... + a_k + 0) - (b_1 + b_2 + ... + b_k + 0) \right| = 1 \quad \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (a_1, a_2,\ldots,a_k, 0)$ y $(b_1, b_2,\ldots,b_k, 0)$ son adyacentes en $G_1 \ \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow f((a_1, a_2,\ldots,a_k))$ y $f((b_1, b_2,\ldots,b_k))$ son adyacentes en G_1 .

  De forma análoga se probaría que <u>g es un isomorfismo de grafos</u>.

Q_k es hamiltoniano $\Rightarrow \exists$ σ permutación del conjunto $\{1, 2, ..., 2^k\}$ /

$A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)},\ldots, A_{\sigma(2^k)}$ es una ordenación de los vértices de V_k que define un ciclo hamiltoniano en Q_k : $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(2^k)}$, $A_{\sigma(1)}$

- f isomorfismo de grafos ⇒ f(Aσ(1)), f(Aσ(2)),…, f(Aσ(2k)), f(Aσ(1)) ciclo hamiltoniano en V^1_{k+1} .
- g isomorfismo de grafos ⇒ g(Aσ(1)), g(Aσ(2)),…, g(Aσ(2k)), g(Aσ(1)) ciclo hamiltoniano en V^2_{k+1} .

Observemos que $\{ f(A_{\sigma(1)}), f(A_{\sigma(2)}), \ldots, f(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(1)}), g(A_{\sigma(2)}), \ldots, g(A_{\sigma(2^k)})\}$ es el conjunto de vértices V_{k+1} ya que $V_{k+1} = V^1_{k+1} \cup V^2_{k+1}$

Sea $A_{\sigma(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{kj})$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, 2^k\} \Rightarrow \forall j \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$

$f(A_{\sigma(j)}) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{kj}, 0)$ y $g(A_{\sigma(j)}) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{kj}, 1)$ adyacentes ⇒

⇒ las parejas $f(A_{\sigma(1)})$, $g(A_{\sigma(1)})$ y $f(A_{\sigma(2^k)})$, $g(A_{\sigma(2^k)})$ son adyacentes ⇒

⇒ ∃ ejes en Q_{k+1} que unen los vértices $f(A_{\sigma(1)})$, $g(A_{\sigma(1)})$ así como $f(A_{\sigma(2^k)})$, $g(A_{\sigma(2^k)})$.

El ciclo definido por

$$f(A_{\sigma(1)}), f(A_{\sigma(2)}), \ldots, f(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(1)}), \ldots g(A_{\sigma(2)}), g(A_{\sigma(1)}), f(A_{\sigma(1)})$$

es hamiltoniano ⇒ Q_{k+1} es hamiltoniano.

Luego Q_n es hamiltoniano $\forall\, n \in$ N.

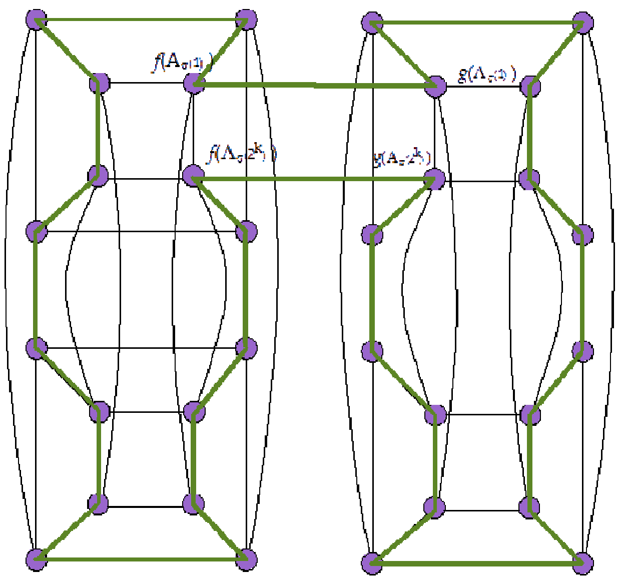


Figura 3. Ejes en Q_{k+1} que unen las parejas de vértices $f(A_{\sigma(1)})$, $g(A_{\sigma(1)})$ y $f(A_{\sigma(2^k)})$, $g(A_{\sigma(2^k)})$.

5. La solución de la Torre de Hanói y los Qn grafos

Partimos de una torre de Hanói con n discos que se numeran 1, 2,…, n desde el más pequeño al de mayor tamaño. Cada estado en la resolución del juego se identifica con una n-upla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dónde $a_i = 0, 1$ dependiendo de la clase de Z/2Z a la que pertenezca el nº de movimientos del disco iésimo. Un movimiento del disco iésimo se identifica con el paso de $(a_1, a_2, \dots, 0, \dots, a_n)$ a $(a_1, a_2, \dots, 1, \dots, a_n)$ o viceversa.

La sucesión de n-uplas que aparece en la resolución del problema, define un ciclo hamiltoniano en Q_n. Recíprocamente: existe un ciclo hamiltoniano en Q_n que nos lleva a la solución del rompecabezas.

Para n = 2:

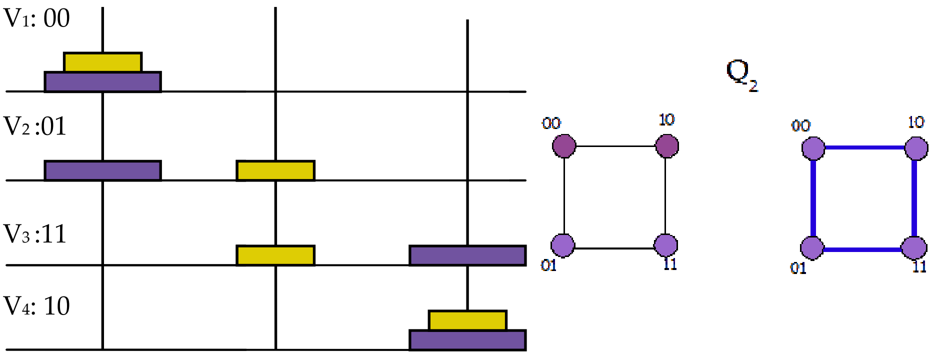


Figura 4. Solución del puzzle con dos discos y ciclo en Q_2

Para n = 3

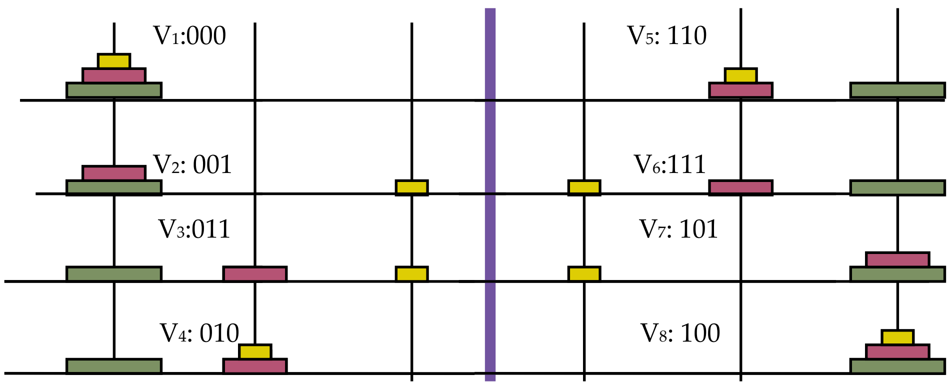


Figura 5. Solución de la Torre de Hanói con tres discos

La solución del puzzle descrita en la *Figura* 5 define el siguiente ciclo hamiltoniano en Q_3.

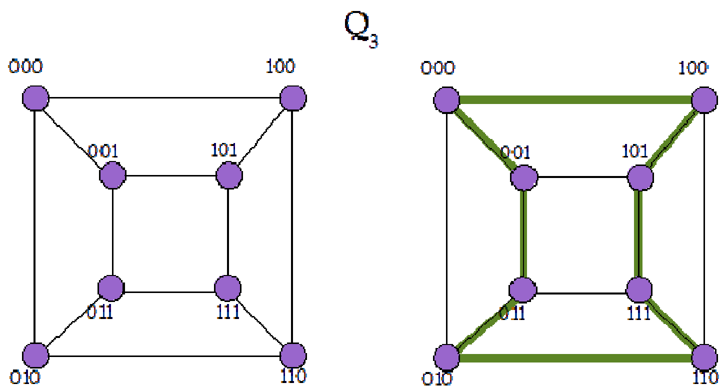


Figura 6. Ciclo descrito en Q_3 por la solución de la Torre de Hanói.

Se invita al lector a buscar los ciclos hamiltonianos en Q_4 y Q_5 que determinan las soluciones del rompecabezas de la torre de Hanói para cuatro y cinco discos.

Solución Q_4

Solución Q_5

Referencias

[1] CHARTRAND, Gary. *Introductory Graph Theory,* pp 134, 135, 136, 137, Dover Publications, Mineola, New York 1985

[2] AZNAR ENRIQUE, R. *Biografías de matemáticos.* http://www.ugr.es/~eaznar/lucas.htm

[3] STOCKMEYER, Paul K. *The Tower of Hanoi* http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/

[4] KOLAR, M . *The shortest and "mysterious" TH algorithm* http://hanoitower.mkolar.org/shortestTHalgo.html

[5] BALBUENA CASTELLANO, Luis. *Las Torres de Hanói y el mandato de Brahma*, pp. 83 - 94, Nº 28 revista SIGMA. , Universidad del País Vasco, Mayo 2006.

Sobre la autora:
Nombre: Mª Milagros Latasa Asso
Correo Electrónico: mlatasa@gmail.com
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Instituto de Enseñanza Secundaria Virgen de la Paz, Madrid, España.

Juegos Matemáticos
Solución torre de Hanói para $n = 4$ y ciclo hamiltoniano en Q_4

Mª Milagros Latasa Asso

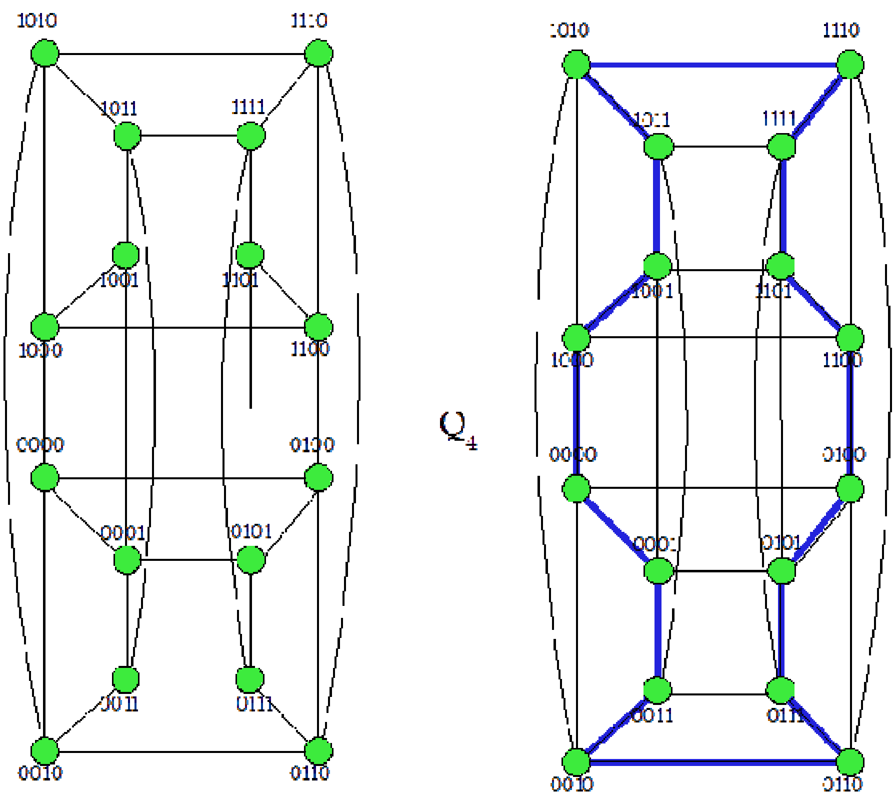
Revista de Investigación

Pensamiento Matemático

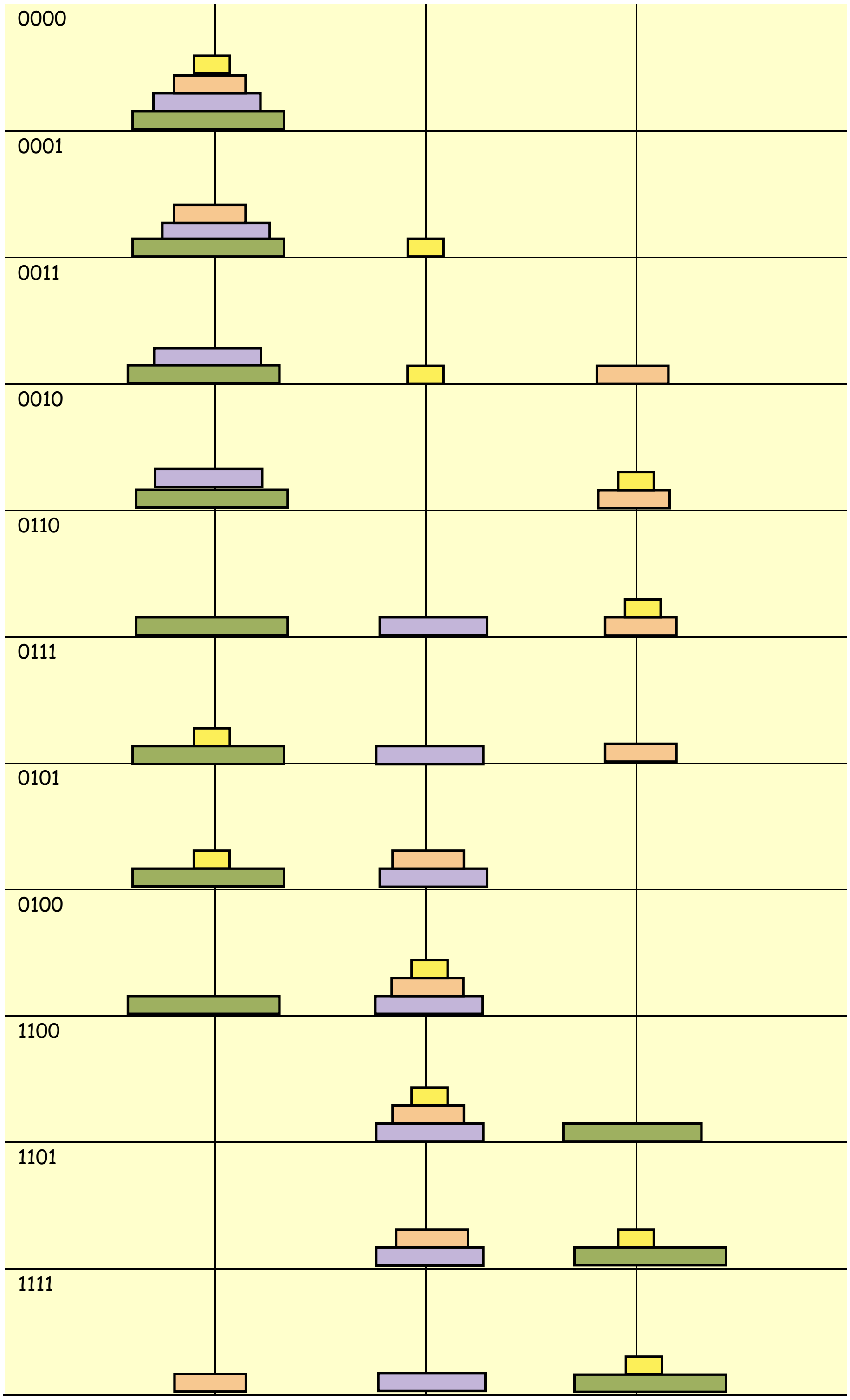
ISSN 2174-0410

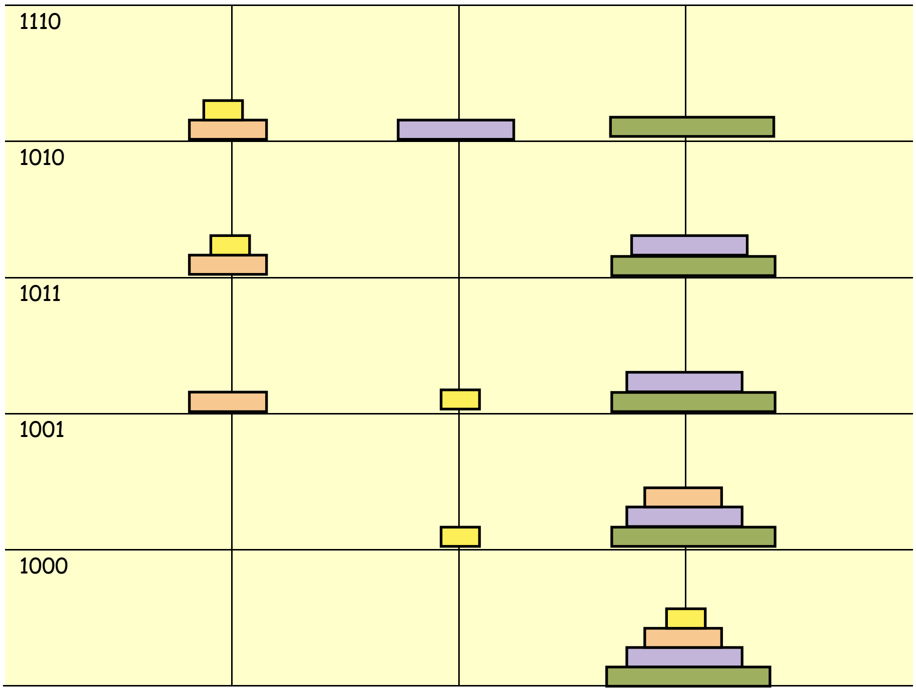
8 de abril de 2011

1. Ciclo en Q4



2. Solución del puzzle





.

Sobre la autora:
Nombre: Mª Milagros Latasa Asso
Correo Electrónico: mlatasa@gmail.com
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Instituto de Enseñanza Secundaria Virgen de la Paz, Madrid, España.

Juegos Matemáticos
Solución torre de Hanói para $n = 5$ y ciclo hamiltoniano en Q_5

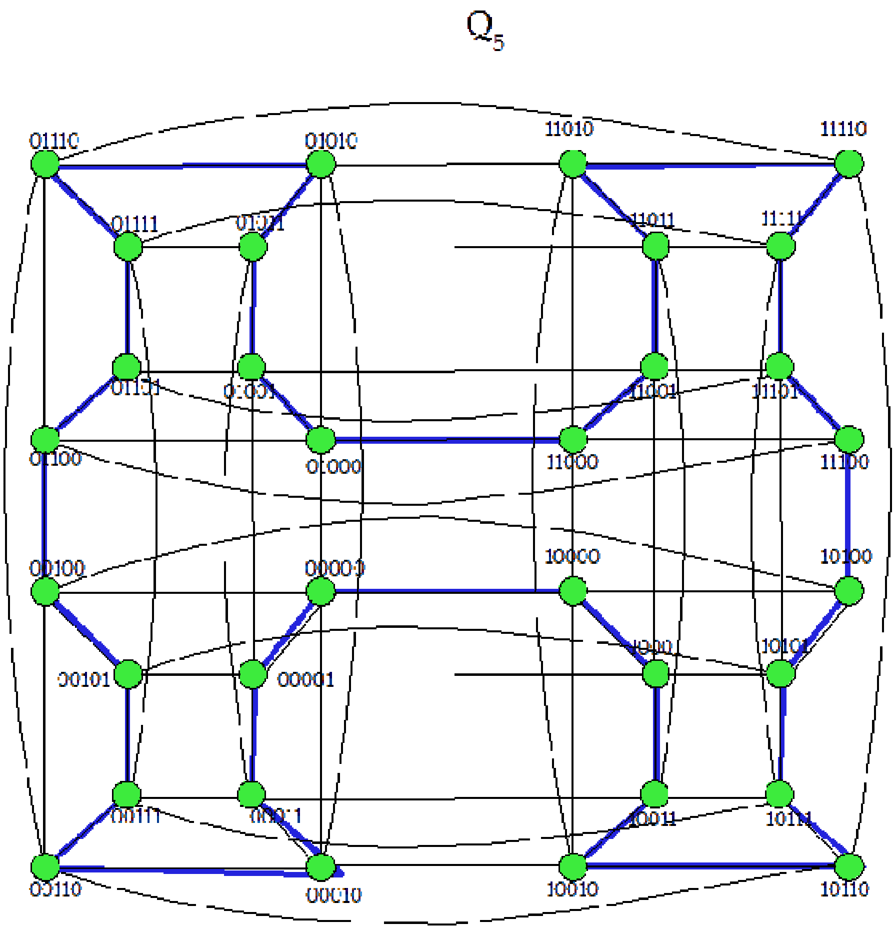
Mª Milagros Latasa Asso

Revista de Investigación

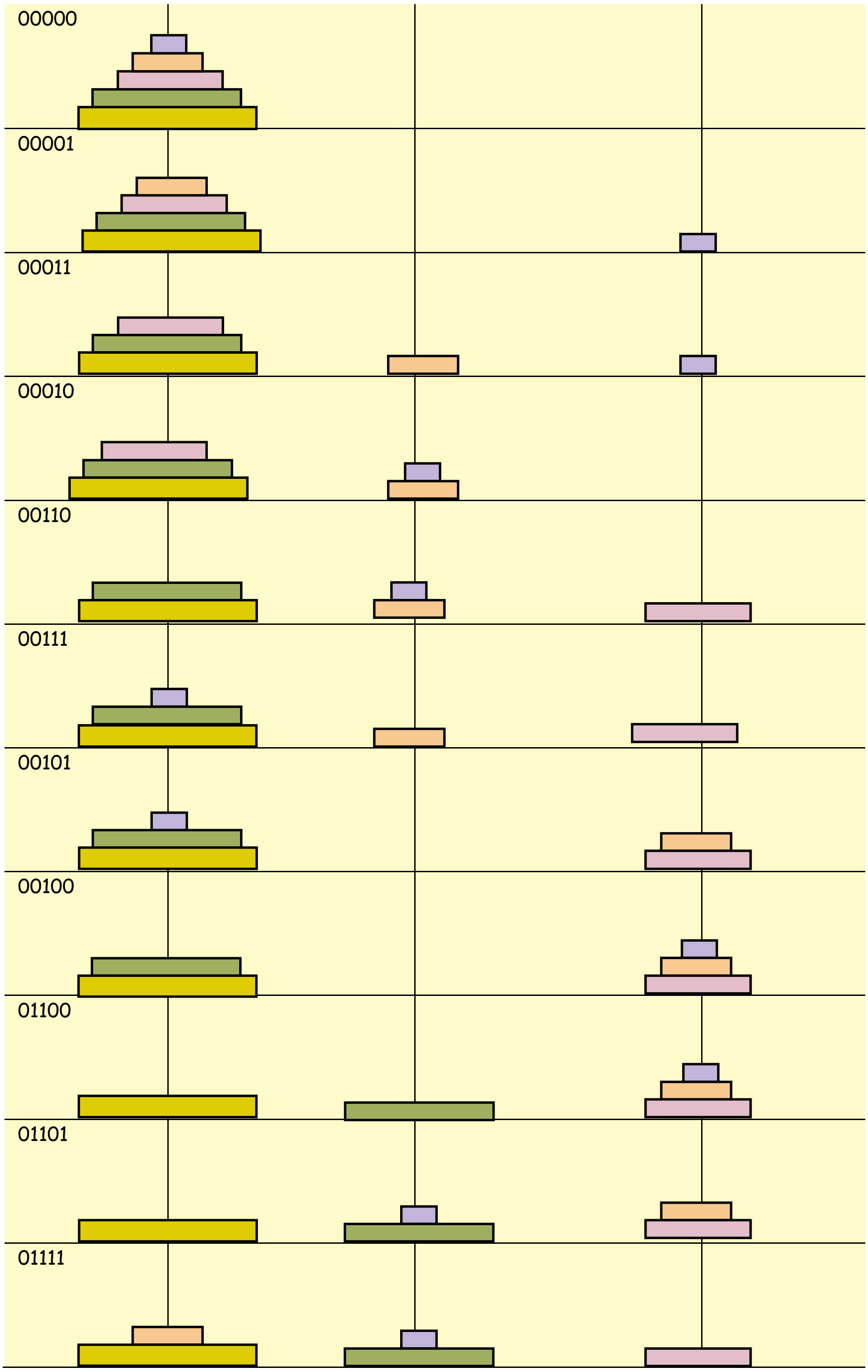
Pensamiento Matemático

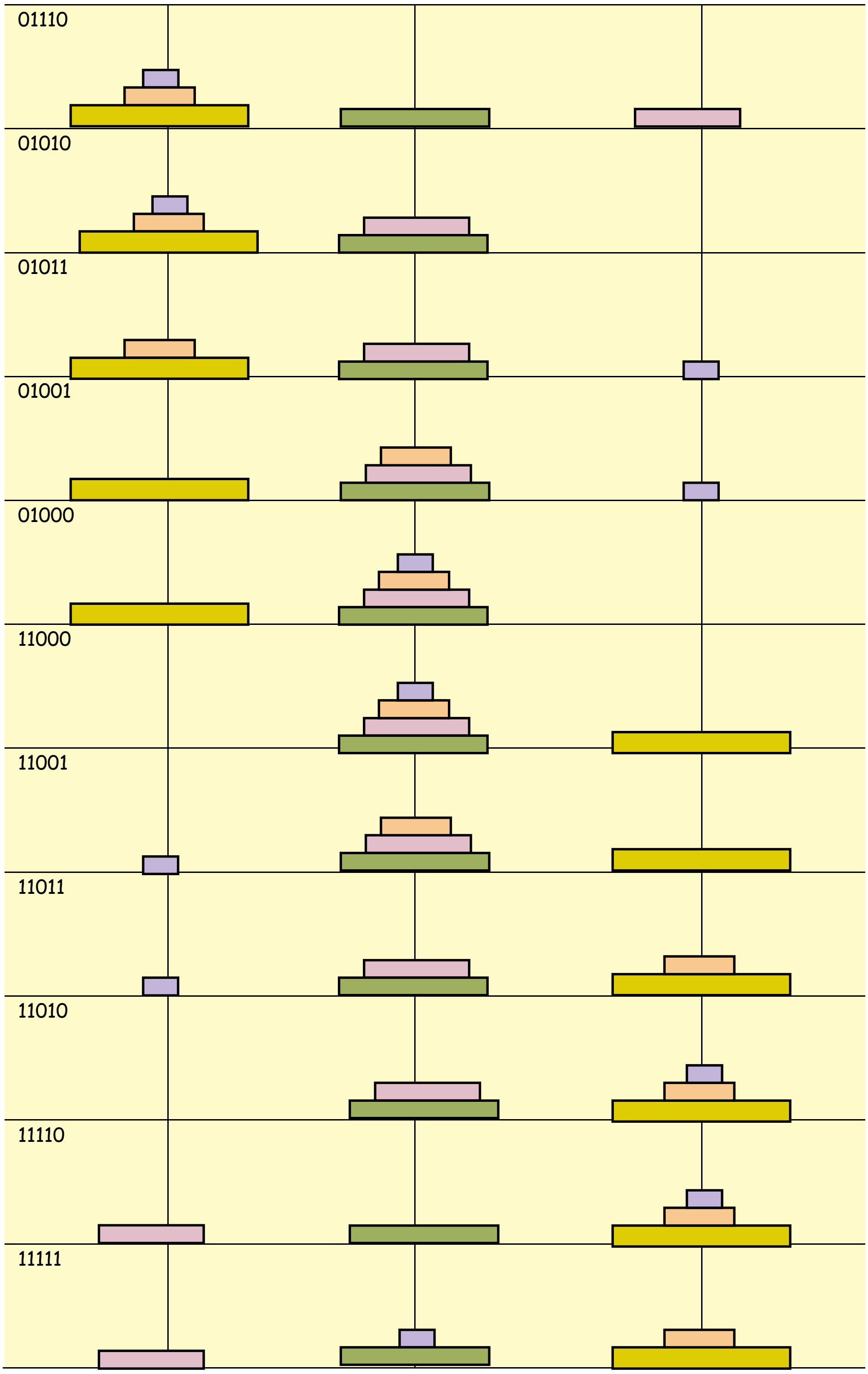
ISSN 2174-0410

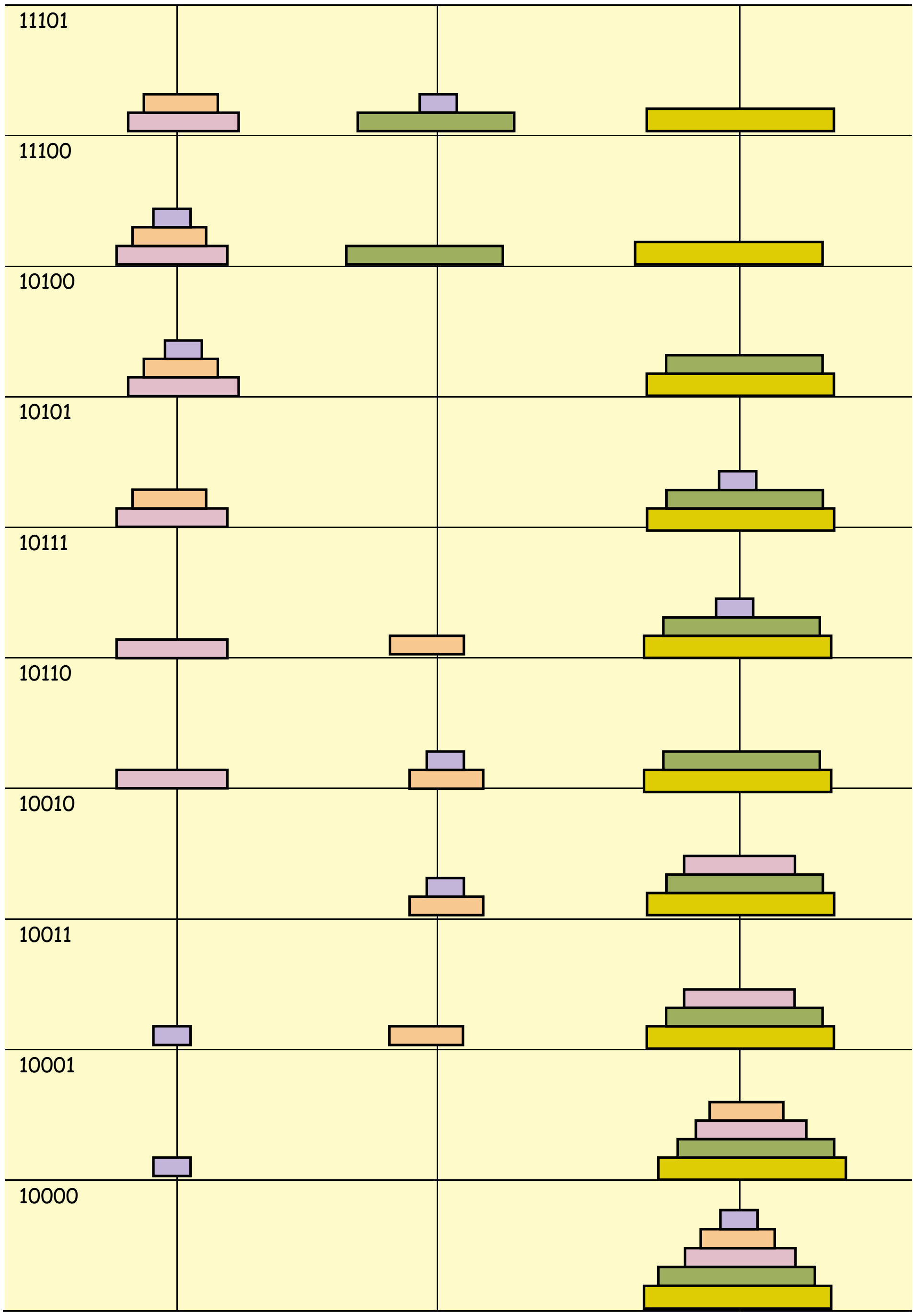
1. Ciclo en Q5



2. Solución del puzle




01110
01010
01011
01001
01000
11000
11001
11011
11010
11110
11111



Sobre la autora:
Nombre: Mª Milagros Latasa Asso
Correo Electrónico: mlatasa@gmail.com
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Instituto de Enseñanza Secundaria Virgen de la Paz, Madrid, España.

Juegos Matemáticos
Rendezvous, un juego de Lewis Carroll

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Todos en mayor o menor medida asociamos el nombre de Lewis Carroll a la literatura, sobre todo a la de temática infantil, con títulos a sus espaldas como *Alicia en el País de las Maravillas*, *Alicia a través del espejo*, o *La Caza del Snark*. Pero además de literato, Lewis Carrol fue un hombre con bastantes inquietudes en torno a la matemática, la lógica y el pensamiento filosófico. Pero no todo el mundo es conocedor de su faceta como creativo en el campo de los juegos. *Rendezvous* es una de sus más sorprendentes invenciones, un juego de inteligencia para todos los públicos, cuyas directrices hacen de él un entretenimiento bastante original.

Palabras Clave: Rendezvous, Lewis Carrol, juego de tablero.

1. El Autor

Lewis Carroll limpiando la lente de su cámara. Foto de Oscar Gustav Rejlander (1863).

Lewis Carroll es el seudónimo por el que es conocido en la historia de la literatura Charles Lutwidge Dodgson (Daresbury, Cheshire, 27 de enero de 1832 - Guildford, Surrey, 14 de enero de 1898), diácono anglicano, lógico, matemático, fotógrafo y escritor británico.

El joven Charles comenzó su formación en su propia casa (su padre párroco de profesión atestiguaba una exquisita formación en instituciones como Westminster School o Christ Church, en Oxford). El joven mostró desde pequeño una gran precocidad intelectual. A los doce años fue enviado a una escuela privada en las afueras de Richmond, donde parece que se integró bien, y en 1845, fue trasladado a Rugby School, donde su paso le resultó un experiencia en cierto modo ingrata. Abandonó Rugby a finales de 1850 y en enero de 1851 se trasladó a la Universidad de Oxford, donde ingresó en el antiguo colegio de su padre, Christ Church, donde obtuvo con facilidad excelentes resultados. Estudios actuales confirman que en Oxford le fue diagnosticada erróneamente una epilepsia, lo cual por entonces constituía un estigma social considerable.

Dodgson escribió poesía y cuentos que envió a varias revistas y que le reportaron un éxito discreto. Entre 1854 y 1856 su obra apareció en las publicaciones de ámbito nacional *The Comic Times* y *The Train*, así como en revistas de menor difusión, como la *Whitby Gazette* y el *Oxford Critic*.

En 1856 publicó su primera obra con el seudónimo que le haría famoso: un predecible poemilla romántico, *Solitude*, que apareció en *The Train* firmado por Lewis Carroll. El sobrenombre lo creó a partir de la latinización de su nombre y el apellido de su madre, Charles Lutwidge. Lutwidge fue latinizado como Ludovicus, y Charles como Carolus. El resultante, Ludovicus Carolus, regresó otra vez al idioma inglés como Lewis Carroll.

También en 1856, un nuevo deán, Henry Liddell, llegó a Christ Church, trayendo con él a su joven esposa y a sus hijas, que tendrían un importante papel en la vida de Dodgson. Éste entabló una gran amistad con la madre y con los niños, especialmente con las tres hijas, Lorina, Alice y Edith. Parece ser que en una de las excursiones con las niñas el 4 de julio de 1862, fue donde Dodgson inventó el argumento de la historia que más tarde llegaría a ser su primer y más grande éxito comercial. Él y su amigo, el reverendo Robinson Duckworth, llevaron a las tres hermanas Liddell (Lorina, de trece años, Alice, de diez, y Edith, de ocho) a pasear en barca por el Támesis. Según los relatos del propio Dodgson, de Alice Liddell y de Duckworth, el autor improvisó la narración, que entusiasmó a las niñas, especialmente a Alice. Después de la excursión, Alice le pidió que escribiese la historia. Dodgson pasó una noche componiendo el manuscrito, y se lo regaló a Alice Liddell en las Navidades siguientes. El manuscrito se titulaba *Las aventuras subterráneas de Alicia*, y estaba ilustrado con dibujos del propio autor. Se especula que la heroína de la obra está basada en Alice Liddell, pero Dodgson negó que el personaje estuviera basado en persona real alguna.

Tres años más tarde, Dodgson, movido por el gran interés que el manuscrito había despertado entre todos sus lectores, llevó el libro, convenientemente revisado, al editor Macmillan, a quien le gustó de inmediato. Tras barajar los títulos de Alicia entre las hadas y La hora dorada de Alicia, la obra se publicó finalmente en 1865 como *Las aventuras de Alicia en el País de las Maravillas*, y firmada por Lewis Carroll. El multitudinario éxito del libro llevó a su autor a escribir y publicar una segunda parte, *Alicia a través del Espejo*. Posteriormente, Carroll publicó su gran poema paródico *La caza del Snark*, en 1876; y los dos volúmenes de su última obra, Silvia y Bruno, en 1889 y 1893, respectivamente.

Pero Carroll siempre se sintió atraído por las matemáticas. Aunque la mayor parte de su atención la dedicó a la geometría, escribió también sobre numerosos otros temas matemáticos: de la cuadratura del círculo, del cifrado de mensajes (llegando a inventar algunos métodos), de álgebra, de aritmética electoral y votaciones, y de lógica, sobre todo en los últimos años de su vida, prestando no solo atención a los juegos y paradojas (analizó la paradoja de Aquiles y la tortuga, y elaboró una propia, la de la barbería), sino también a la búsqueda de formas de exposición sistemática de, por ejemplo, la teoría del silogismo. Por lo demás, elaboró cuadros, fichas y diagramas del tipo de los de Venn e introdujo árboles lógicos. En cuanto a la geometría, publicó numerosos apuntes a modo de aclaraciones sobre la obra de referencia de su época, los *Elementos de Euclides*, y un libro en el que confrontaba a éste con otros autores contemporáneos, *Euclides y sus rivales modernos* en 1879, además de *El Juego de la Lógica*, o *Una Teoría Elemental de Determinantes*, escrito en 1867, donde da las condiciones por las cuales un sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales.

2. El Juego

La temática del juego aunque algo complicada, es muy original. El número de jugadores es dos. Los **elementos** con los que vamos a contar serán un tablero como el de ajedrez, de 8×8 casillas, aunque si pudiera ser posible, es conveniente que todas las casillas fueran de un color semejante. Los dos jugadores tendrán ocho peones, uno los tendrá negros y el otro blancos. Cada jugador además contará con nueve tarjetas de tamaño de una casilla, que utilizarán a modo de marcas.

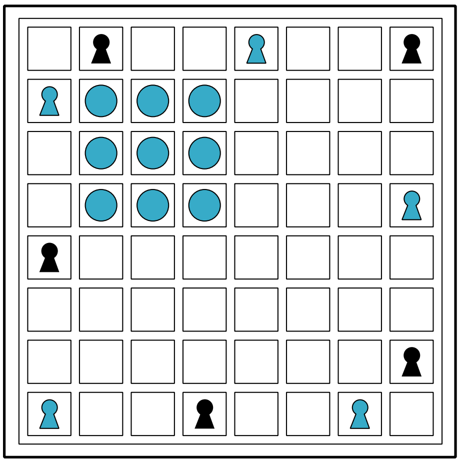


Figura 1. Posición inicial de los 10 peones. Los nueve círculos indican un rendezvous.

El **objetivo** del juego consistirá en ir eliminando a los peones adversarios en sucesivas etapas. Para ello, una partida consta de varias etapas. Al inicio de cada etapa, y aquí es donde se encuentra su originalidad, se establece un lugar de encuentro (un *rendezvous*) que consiste en un conjunto de casillas hacia donde cada jugador debe tratar de conducir sus peones. Aquel que sea capaz de meter antes sus pones en el *rendezvous*, ganará esa etapa y le quita un peón al adversario. Otra curiosidad del juego es que en cada etapa el *rendezvous* es distinto, es decir, está ubicado en otra zona del tablero y se compone de una cantidad diferente de casillas.

El **desarrollo** del juego es el siguiente. El juego comienza con 10 peones sobre el tablero, 5 negros y 5 blancos situados como en la Figura 1. Un jugador coloca donde prefiera 9 tarjetas, siempre en casillas libres, marcando un cuadrado de 3×3 casillas que forman el primer *rendezvous*, marcado con círculos en la Figura 1. Entonces el otro jugador inicia los movimientos y cada uno trata de conducir sus 5 peones dentro del *rendezvous*.

Existen una serie de **movimientos** que pueden llevarse a cabo. Cada peón puede moverse a lo largo de cualquier línea libre de casillas, en horizontal, vertical o diagonal. En su primer turno, tanto Negro como Blanco sólo pueden mover hasta 2 casillas. En cualquier turno subsiguiente, cada jugador puede mover de 1 a 5 casillas según quiera. Esta cantidad de casillas a mover puede repartirlas el jugador a su gusto entre sus peones, pero no puede mover un mismo peón más de 3 casillas, a menos que este peón sea el único de los suyos que esté fuera del *redezvous*.

Al efectuar su jugada, el jugador debe contar en voz alta la cantidad de casillas que va moviendo. Después de mover un peón y dejarlo, no puede volver a mover ese mismo peón en ese turno.

Esta idea, de poder dividir una cantidad de movimiento entre varias fichas, es también un rasgo inusual del juego de Carroll. Obsérvese que en su turno el jugador no está obligado a usar toda su disponibilidad de movimiento, sino que puede preferir mover menos. Pero sí está obligado a mover por lo menos una casilla por turno.

Durante el transcurso del juego se producen **capturas** cuando un jugador consigue meter todos sus peones en el *rendezvous*, y éste todavía no se llenó, entonces quita un peón adversario del tablero (del exterior del *rendezvous*) y lo sustituye por un nuevo peón propio (tomado de los que tiene en reserva fuera del tablero) y con esto termina su turno.

Cuando un jugador tiene todos sus peones en el *rendezvous*, y éste se llenó, elimina directamente del tablero el peón adversario que quedó fuera del *rendezvous*, con lo que se termina la primera etapa (el primer *rendezvous*) del juego.

En la **continuación** del juego, los peones mantienen su posición (retirándose de debajo de ellos las tarjetas que marcaban el *rendezvous*) y el jugador que se quedó con menos peones sobre el tablero (o, en caso de igualdad, el que perdió por última vez un peón) es el encargado de situar las tarjetas de un nuevo *rendezvous*.

Si sobre el tablero quedaron 9 peones, el nuevo *rendezvous* se compondrá de 8 casillas. Si, en cambio, quedaron 8 peones, el nuevo *rendezvous* será de 7 casillas. Siempre una casilla menos que la cantidad de peones en juego.

Los *rendezvous* pueden adoptar formas distintas:

1. Si son de 7, 5 o 3 casillas caben las posibilidades que muestra la Figura 2 y, son los que Carroll denominó *rendezvous cerrados*.

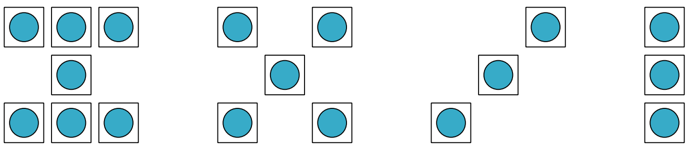


Figura 2. Estas son las formas que pueden tener los rendezvous de 7, 5 y 3 casillas. También valen por supuesto si los giramos 90°

2. Si son de 8, 6 o 4 casillas (denominados *rendezvous abiertos*, tienen formas más extrañas. El jugador que lo establece se fija en una casilla cualquiera interior del tablero (en la Figura 3. la indicamos con la letra A) y forma el *rendezvous* con casillas de la periferia que están alineadas en horizontal, vertical o diagonal con A. Por supuesto, elige tantas casillas como

corresponden al *rendezvous*. En la Figura 3 se muestran algunos de los *rendezvous abiertos* posibles.

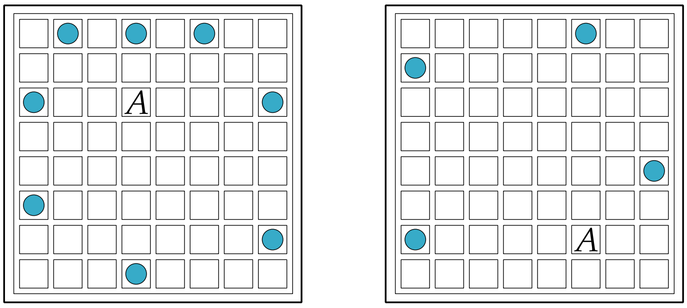


Figura 3. Aquí vemos un rendezvous de 8 y 4 casillas respectivamente.

Las casillas que componen el *rendezvous* se indican con las tarjetas. En la Figura 3 se han marcado con círculos.

El jugador que establece el *rendezvous* puede ubicarlo en cualquier zona del tablero, siempre y cuando no tenga peones propios ya metidos en esas casillas. Antes de empezar a mover los peones, su adversario puede exigir un "intercambio". En tal caso, el que estableció el *rendezvous* debe intercambiar todos sus peones con los peones adversarios que él decida.

Cada nuevo *redezvous* se juega en forma similar al primero, sólo que ahora los peones arrancan desde donde finalizaron en el *rendezvous* anterior.

Existe un **movimiento especial** que sucede al jugarse un *rendezvous abierto*, de modo que cualquier peón que está en la periferia puede moverse a lo largo de la periferia sin tener en cuenta las esquinas (es decir, como si la periferia del tablero fuera una línea recta). Además, todo lo que se mueva ese peón por la periferia, hasta llegar a una primera casilla del *rendezvous*, cuenta como si hubiera movido una sola casilla. Pero si sigue más allá, cada casilla que sobrepasa a la del *redezvous* cuenta ya como en la regla normal del movimiento.

El **final** del juego sucede cuando a medida que se va jugando un *rendezvous* tras otro, se va perdiendo peones. El jugador que se queda con un único peón pierde la partida.

3. Los Consejos de Carroll

Cuando juegue un *rendezvous cerrado*, recuerde que usted tiene dos objetivos a la vista, esto es, por un lado meter a sus peones, y por otro mantener a los peones adversarios fuera. Una simple carrera hacia el *rendezvous* no es siempre la mejor estrategia; mucho puede conseguirse interponiendo peones propios entre los adversarios y dificultando su avance. No trate de bloquear todos los peones enemigos, uno es generalmente lo máximo que puede llegar a frenar; por lo tanto, a menudo es conveniente seleccionar al peón enemigo que esté más lejos del *rendezvous* y dedicarle los buenos servicios de (digamos) tres peones propios, cuya tarea será marchar hombro con hombro, delante de él, como una especie de "guarda de honor", cuidando de llevar la delantera, como para tener tiempo de anunciar su llegada al *rendezvous* y...¡asegurarle una buena recepción!.

Es ventajoso apoderarse de la casilla central de un *rendezvouz cerrado*, y también de una casilla de una esquina (o del costado) donde usted quiera introducir otro peón. Tan pronto como el peón de fuera quede en una casilla adyacente a esa esquina, podrá ser introducido allí, en el turno siguiente: bastará con mover el peón central a una casilla libre del *rendezvous*, luego mover el peón de la esquina al centro y, finalmente, introducir al peón de fuera en la esquina. Algo similar vale para los *rendezvous abiertos*.

También viene bien que usted acomode sus peones (los que ya haya introducido en el *rendezvous*) de modo que plantee dificultades a los enemigos que estén por llegar.

Por ejemplo, en un *rendezvous* de 9 casillas al que vienen acercándose cuatro peones adversarios, puede usted poner tres de sus peones como en la Figura 4a (la de la izquierda) y tendrá una pared impenetrable, ofreciendo así tres casillas vacantes para que allí se alojen los cuatro esforzados viajeros (una gentileza que tardarán en olvidar). De modo similar, si hay dos peones enemigos acercándose desde el noreste: poniendo tres de sus peones como muestra la Figura 4b les proveerá usted de una casilla vacante a los dos visitantes.

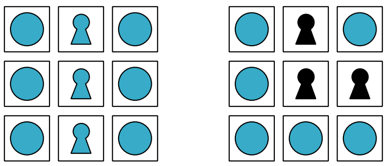


Figura 4.

Si usted se encontrara con que el adversario está ya por acomodar todos los peones en el *rendezvous*, mientras que a usted le quedan aún dos o tres fuera, recuerde que tan pronto como él tenga todos sus peones dentro, reemplazará un peón suyo por uno nuevo de los de él; y que elegirá seguramente para cambiar al peón que está más cerca del *rendezvous*. En consecuencia, lo mejor para usted es no tener ningún peón más cerca que otro. Intente mantenerlos a todos juntos, a igual distancia del *rendezvous*, para que, cualquiera que sea el peón que pase al bando contrario, usted pueda frenar de inmediato su avance con los otros peones vecinos.

Referencias

[1] *Rendezvous: Un juego de Lewis Carroll*, pp. 52–53, Revista *Cacumen*, Nº 44, Septiembre, 1986, Zugarto Ediciones S.A, Madrid.

[2] WIKIPEDIA,
Lewis Carrol, http://es.wikipedia.org/wiki/Lewis_Carroll

ISSN 2174-0410

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Críticas
Los números primos. Un largo camino al infinito.

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

En este artículo se hace un informe de un libro sobre los números primos perteneciente a la colección divulgativa "El mundo es matemático". Dicha colección incluye otros libros que serán comentados próximamente.

Palabras Clave: Divulgación matemática, números primos, teoría de los números

1. Ficha técnica

Título: Los números primos.

Un largo camino al infinito

Autor: ENRIQUE GRACIÁN

Nº Páginas: 144

De la colección "El mundo es matemático"

Editado por: RBA

ISBN: 9788498678185

Año de Edición: 2010

2. Crítica

El libro del que se hace el informe pertenece a una colección de divulgación de las matemáticas. Por ello, el autor no presupone un nivel matemático alto del lector e introduce los temas de una forma adecuada, incluyendo definiciones de todos los conceptos y yendo de menos a más hasta llegar a explicar de manera clara temas nada triviales siempre relacionados con los números primos. Se puede decir por tanto que el libro está muy bien escrito, tanto en la parte matemática como en la literaria, quedando al alcance del público no especializado sin perder rigor.

Sin embargo, se aprecian aspectos mejorables que podrían ser modificados en próximas ediciones:

Hay un cierto desorden en los planteamientos. Por ejemplo, como se indica más abajo, el pequeño teorema de Fermat se enuncia varias veces de distintas formas, algunas de ellas con erratas ó no completas. Quizás hubiera sido mejor enunciar el teorema una sola vez y aludir a este enunciado cuando fuese necesario.

Se incluyen descripciones muy bellas, como la de la biblioteca de Alejandría, pero con una relación tangencial con los números primos, lo que hace que a veces se pierda el hilo conductor del libro. Otras veces se incluyen introducciones muy amplias a temas relacionados con los números primos pero que al final no se desarrollan mucho. Por ejemplo, cuando se habla del matemático Ramanujan, se incluyen muchos aspectos de su vida, anécdotas,… para concluir que su aportación a los números primos no es tan interesante como la que hizo a otras facetas de las matemáticas.

Da la sensación de que la última parte del libro está escrita de forma más esquemática, con más prisas (quizás debido a presiones por el plazo de entrega). Por ejemplo, cuando se expone el resultado de Agrawal, Kayak y Saxena, no se definen los parámetros que aparecen, ni se explica demasiado el alcance de dicho resultado.

Una última cosa que se echa en falta es la presentación de más conjeturas. Aunque el libro es rico en conceptos y resultados referentes a los números primos, como se puede ver en las próximas secciones no se habla tanto de los problemas abiertos, a pesar de que el estudio de los números primos es una de las partes de las matemáticas con más problemas abiertos en la actualidad, muchos de ellos muy atractivos por sus enunciados sencillos de entender.

3. Matemáticos que aparecen

Entendemos matemático en el sentido amplio de "aquél que hace matemáticas", independientemente de cuál sea su profesión oficial. Con este criterio, los matemáticos incluidos en el libro son (por orden de aparición):

Fermat, Euler, Cartan, Weil, Alphonse de Polignac, Mersenne, Ramanujan, Pierre de Carcavi, Gauss, Bernard Frénicle de Bessy, Leibniz, Hensen, Jacob Bernoulli, Johan Bernoulli, Mengoli, Fourier, Goldbach, Chen Jingrun, Napier, Briggs, Hadarmard, de la Valle Pousin, Filolao, Riemann, Cardano, Descartes, de Moivre, Vandermonde, Argand, D'Alembert, Falconer, Legendre, Dirichlet, Jacobi, Eisenstein, Hardy, Littlewood, Poincare, Perelman, Matigasevich, Stechkin, Atkin, Wilson, Carmichael, Agrawal, Kayal, Saxena.

4. Novelas con contenido matemático a las que se alude

Hay dos novelas recientes en las que se tratan los números primos y de las que este libro se hace eco. Son:

- La soledad de los números primos (P. Giordano)

- El tío Petros y la conjetura de Goldbach (A. Dioxadis)

Para más información sobre las mismas, consultar las referencias.

5. Conceptos matemáticos que se definen ó a los que se alude

Los siguientes conceptos son definidos a lo largo del libro:

-Número primo: sólo divisible por él mismo ó por la unidad

-Primos gemelos: dos primos consecutivos

-Primos relativos: números que no tienen ningún factor primo común

-Test de primalidad: prueba para ver si un número es primo

-Números de Fermat: números de la forma $2^{2^n}+1$. Si son primos, se les llama primos de Fermat

-Números de Mersenne: números de la forma 2^n-1. Si son primos, se les llama primos de Mersenne

-Definición de función

-Definición de serie numérica

-Conjunto de los números complejos: $C=\{a+b\,i\,/\,a,b\in\Re,\ i=\sqrt{-1}\}$

-Función compleja: función cuyas variables son complejas.

-Función de Riemann: $Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s\in C$

-"Definición" de serie de Fourier (sólo intuida)

-Producto de Euler: descomposición de la función Z de Riemann en productos que sólo utilizan números primos

-Definición de logaritmo

-Función $\pi(x)$: da el número de primos menores que x

-Campana de Gauss: medida de la distribución de los errores

-Polígono de Gauss: polígono regular de 17 lados construido con regla y compás

-"Definición" de clases de equivalencia (intuidas)

-Definición de congruencias (aritmética modular)

-n-ésimo número de taxicab: número natural más pequeño que se puede expresar como suma de 2 cubos positivos de n formas distintas. Se conocen sólo los 5 primeros

-Algoritmos polinomiales: procedimientos que resuelven el problema utilizando una cantidad polinomial de tiempo (eficientes)

-Algoritmos exponenciales: procedimientos que resuelven el problema utilizando una cantidad exponencial de tiempo (no eficientes)

-Problemas P: se pueden resolver en tiempo polinomial

-Problemas NP: se puede comprobar una solución en tiempo polinomial

-Polinomio de Jones, Wado, Sata y Wienes: polinomio cuyos valores positivos son todos primos

-Seudoprimo: Número que cumple una condición necesaria para ser primo sin serlo

-Números de Carmichael: Números que cumplen la condición necesaria para ser primo que da el pequeño teorema de Fermat, sin ser primos

6. Conjeturas de las que se habla

Se exponen las siguientes conjeturas acerca de los números primos:

-Existen infinitos primos gemelos

-La generalización de la anterior: para todo número natural c existen infinitas parejas de primos separados por $2c$

-Conjetura de Goldbach: todo número natural mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos primos.

-Conjetura de Riemann: la parte real de todo cero no trivial de la función Z de Riemann es $\frac{1}{2}$

-$P = NP$: todo problema que tiene un algoritmo de comprobación polinomial tiene un algoritmo de resolución polinomial

7. Resultados que se exponen

Los siguientes resultados sobre los números primos ó sobre temas relacionados con ellos son mostrados en el libro:

ISSN 2174-0410

-Teorema fundamental de la aritmética: todo número natural se puede descomponer como producto de números primos de manera única

-Existen infinitos números primos (teorema de Euclides. Con bosquejo de la demostración)

-Existen n números consecutivos compuestos para todo n (con bosquejo de la demostración)

-La única terna de números primos impares consecutivos es 3, 5, 7 (sin demostración)

- Todo número primo de la forma $4n+1$ es suma de dos cuadrados (teorema de Euler, conjeturado por Fermat)

-Último teorema de Fermat: la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras no nulas si $n > 2$

-Pequeño teorema de Fermat: p divide a $a^p - a$ para todo primo p y todo entero a (demostrado por Euler)

-La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es $\frac{\pi^2}{6}$

-Todo número par suficientemente grande puede expresarse como la suma de un primo y un número producto de a lo más dos primos

-Teorema de los números primos: $\pi(x)$ es del orden de $\frac{x}{\log x}$

-La función Z de Riemann es igual al producto de Euler:

$$Z(x) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-x}}$$

-Hay infinitos ceros no triviales de la función Z de Riemann y todos tienen parte real entre 0 y 1

- Hay infinitos ceros de la función Z de Riemann con parte real $\frac{1}{2}$

-1729 es el número natural más pequeño expresable como suma de dos cubos de dos formas distintas ($1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$)

-p es primo si y sólo si $(p-1)! \equiv -1(p)$ (es decir, p es primo si y sólo si p divide a $(p-1)!+1$)

- $2^{43112609} - 1$ es primo (mayor primo de Mersenne conocido hasta Junio de 2009)

ISSN 2174-0410

8. Métodos matemáticos, algoritmos a los que se alude

-Para localizar números primos: criba de Eratóstenes, criba geométrica de Matiyasevich, criba de Atkin

-Para cifrar y descifrar números: algoritmos RSA, DSA, ECDSA

-Para comprobar si un número es primo: test de Lucas-Lehmer (test de primalidad)

9. Erratas, errores, aspectos mejorables

Aunque como se ha dicho el libro es riguroso en el tratamiento matemático, tiene algún aspecto mejorable como ahora veremos, especialmente en lo referente al tratamiento del pequeño teorema de Fermat.

-En la página 24, pone $\{2, 3, 5, 7\}$ por $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

-En la página 47, es erróneo el contraejemplo que se pone para ver que la condición del pequeño teorema de Fermat no es necesaria, ya que 10 no divide a $3^{10}-3$. De forma análoga, el ejemplo de la página 86 de aplicación del pequeño teorema de Fermat para ver que un número no es primo es erróneo, ya que el número que se toma, 6, cumple el resultado con 4 aun no siendo primo (parece como si estos ejemplos estuvieran intercambiados).

-En la página 47 se enuncia el pequeño teorema de Fermat con pérdida de generalidad: p divide a $a^p - a$ si p es un primo que no divide a a (también se cumple si p divide a a). Se vuelve a enunciar bien en la página 85. Se enuncia otra vez bien en la página 132, pero se pone la condición superflua de que a, p sean primos relativos (incluida en las condiciones p primo, $a < p$)

-En la página 54 pone $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\,i}$ por $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$

-En la segunda tabla de la página 83 está mal la primera columna.

-En la página 85 donde pone elevar p a alguno de esos números debe poner elevar alguno de esos números a p

-En la página 88 donde pone $i^4 = -i$ debe poner $i^4 = 1$

-El dibujo de la página 91 sobra, ya que se mejora en la página 92 (aunque en el mejorado aparece una "a" no definida)

-En la página 99 falta un 2 en el exponente de la y en la función f

ISSN 2174-0410

-En la página 103 pone $Z(2)=\frac{\pi^4}{90}$ por $Z(4)=\frac{\pi^4}{90}$

- En la página 134, en curiosidades numéricas, pone primos por primo. La serie que dice que se forma añadiendo ceros a 91, en realidad añade nueves y ceros.

- En la página 138, en la demostración del pequeño teorema de Fermat, no se indica el primer paso de la inducción (es trivial). Se ponen los números combinatorios con la línea de fracción y en la última ecuación hay errores de impresión en los exponentes.

Referencias

[1] DIOXADIS, Apostolos. *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, Ediciones B, Barcelona, 1998.

[2] GIORDANO, Paolo. *La soledad de los números primos*, Editorial Salamandra, Barcelona, 2009.

Sobre el autor:
Nombre: Javier Rodrigo Hitos
Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Pontificia Comillas, España.

Críticas
Bletchley Park, un museo de informática y criptografía

Susana Mataix

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Bletchley Park es un museo situado a una hora de Londres dedicado a la criptografía y a la informática. Fue la sede de los Servicios de Inteligencia Británicos durante la Segunda Guerra Mundial y donde trabajó el matemático Alan Turing, diseñando un ordenador para leer los mensajes cifrados con la máquina Enigma.

Palabras Clave: Bletchley Park, museo, criptografía, Turing.

Hace 20 años estaba prevista la demolición de una casa de campo victoriana en el pueblo de Bletchley para ser sustituida por un complejo de casitas unifamiliares residenciales. Poca gente conocía aquel lugar, y los que lo conocían no lo habían mencionado en sus vidas cotidianas. Sin embargo, en un impulso romántico, antes de proceder a su derribo, unos funcionarios ingleses quisieron reunir allí a algunos de los que durante la guerra habían trabajado en sus instalaciones, consistentes en la magnífica casa principal y unos barracones precarios, algunos de los cuales habían desaparecido. No pensaron que la convocatoria iba a tener tanto éxito. Los asistentes a la ceremonia de despedida empezaron a contar historias de todo tipo, a liberar recuerdos de lo que había sido una aventura intelectual y una aportación inédita a la Segunda Guerra Mundial. Se habían cumplido los 35 años preceptivos para poder difundir secretos de Estado y militares y podían recordar e intercambiar las vivencias de parte de aquellas miles de personas que trabajaron en el más riguroso de los secretos construyendo el primer ordenador diseñado para descifrar los mensajes secretos de los alemanes. Aquella reunión de antiguos compañeros de trabajo cambiaría el destino de la mansión en Bletchley y la reconvertiría en un museo sobre la criptografía y Alan Turing, el matemático que lideró los avances más espectaculares en la informática.

Curiosamente no era la primera vez que la casa de Bletchley se libraba de su destrucción. En 1939, un promotor inmobiliario la adquirió en una subasta cuando los últimos vástagos del propietario inicial quisieron deshacerse de ella. La casa se había construido como casa de campo y tenía unos jardines con lago incluido. Situada a las afueras de un pueblo en crecimiento, la parcelación del terreno era inevitable. Pero el Ministerio de Información británico andaba a la búsqueda de adquirir propiedades en puntos estratégicos para alojar parte del personal ante un inevitable conflicto. El emplazamiento de Bletchley Park, un nudo ferroviario a mitad de camino entre Londres, Birmingham, Oxford y Cambridge, era perfecto para reclutar personal cualificado de las Universidades cercanas, y se convirtió en la décima adquisición del Ministerio, pasando a llamarse durante la guerra Estación X. Allí se instalaron las oficinas del personal destinado a tratar la información militar. Todos los cables y mensajes interceptados a los alemanes, o a los japoneses, se enviaban a las instalaciones de Bletchley para ser descifrados y leídos.

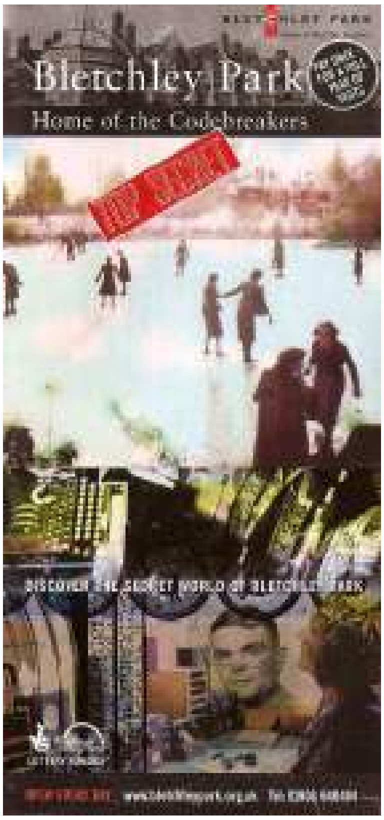


Figura 1. Cartel publicitario del Museo

La labor de espía en la retaguardia requería de grandes dosis de paciencia e intuición. Se trataba de sustituir las letras en los mensajes hasta dar con una secuencia que tuviera sentido y sirviera para acertar con las claves empleadas. Un trabajo monótono, tedioso y repetitivo que impulsaría la construcción de los primeros ordenadores. En los momentos de máxima actividad llegaron a trabajar en las instalaciones unas 4.000 personas en tres turnos. Las tres cuartas partes eran mujeres. Nadie sabía a que se dedicaban los que allí trabajaban. Los del pueblo pensaban que se trataba de una instalación para enfermos mentales a juzgar por el aspecto de alguno de ellos. Y todos los empleados se comprometieron a guardar la confidencialidad de las operaciones, y a no revelar a nadie las funciones desempeñadas. El primer ministro británico, Winston Churchill, se refirió a ese departamento como el de "las gallinas que pusieron huevos de oro y nunca cacarearon". Efectivamente, los trabajadores de Bletchley Park consiguieron lo que parecía imposible, hacerse con el sistema de cifrado alemán y tener acceso a información militar clave del enemigo, permitiendo contrarrestar determinadas operaciones y salvando la destrucción de sus flotas militares. Y además no alardearon de sus logros y callaron sobre su participación en la guerra hasta que muchos años después se permitió la divulgación de los hechos acontecidos durante la guerra, cuando se habían desmantelado los ordenadores y las instalaciones donde habían trabajado en secreto estaban tan deterioradas que solo se podía esperar el derribo.

En estos 20 años desde que se decidió recuperar las instalaciones, Bletchley Park ha atravesado vaivenes y se temió por el fracaso del proyecto, pero en la actualidad ha conseguido consolidarse como un museo de referencia de la criptografía, los orígenes de la informática, y del carismático y malogrado matemático Alan Turing. Cada año se amplían las instalaciones y se las dota de nuevos elementos cuidando la vertiente didáctica. Y siguiendo las tendencias de los museos actuales se complementan las exposiciones con la realización seminarios y talleres, además de procurar rentabilizar sus locales ofreciéndose para la realización de eventos privados.

El museo alberga unas piezas claves como: una colección de máquinas de cifrado, es especial, distintas versiones de la máquina Enigma; una reproducción de Colossus, el primer ordenador electrónico semiprogramable; una réplica del Bombe de Turing, el ordenador diseñado para atacar los complejos cifrados de las máquinas Enigmas, además de haber conseguido adquirir recientemente los escritos originales del matemático que revelan su visión para apuntar nuevas áreas de investigación.

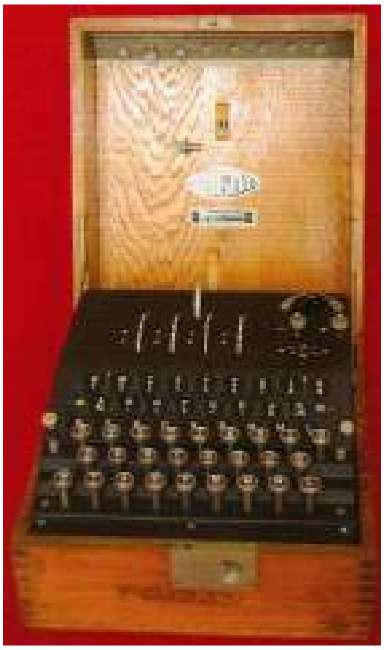


Figura 2. Máquina Enigma utilizada por los alemanes para cifrar sus comunicaciones militares

El Bombe, era un complejo sistema mecánico ideado por Alan Turing y Gordon Welchman para facilitar las tareas de criptoanálisis de los mensajes cifrados por los aliados y del que se construyeron 210 equipos por la British Tabulator Machine Company durante la II Guerra Mundial. Todas las máquinas fueron destruidas, por razones de seguridad, nada más acabar la guerra. Era una verdadera lástima que no hubiese sobrevivido ninguno de aquellos ordenadores primitivos ya que en las últimas décadas del siglo XX , el auge de la informática y la explotación de los sistemas de cifrado en actividades civiles propició un avivado interés de la comunidad científica por el malogrado Alan Turing y un deseo de reconocer adecuadamente sus contribuciones intelectuales al nacimiento y desarrollo de la informática.

Afortunadamente, en el año 1995 los Servicios de Inteligencia británicos ofrecieron al museo 4000 planos originales de la máquina, lo cual animó a la dirección del museo a considerar el encargar una copia. Pero reconstruir fielmente el ordenador era una tarea compleja ya que la mayor parte de las piezas no se fabricaban y, por respeto al proyecto, una réplica debía ser fiel al original hasta en sus menores detalles, no una mera imitación. Por suerte, John Harper, un ingeniero retirado que había trabajado en la ICL, empresa que sustituyó a la BTM, la constructora de las Bombes, asumió el reto de montar una réplica exacta de la máquina de Turing. Contactó con algunos veteranos de su empresa que habían sido los encargados del montaje y el mantenimiento de las máquinas, reclutó a 60 voluntarios, fundamentalmente ingenieros jubilados y logró la financiación y apoyo de empresas informáticas inglesas.

La reconstrucción duró casi una década, pero se consiguió fabricar de nuevo uno de los primeros ordenadores de la historia. Para ello se siguieron cuidadosamente los planos, se recuperaron piezas obsoletas de equipos de desecho, se construyeron cables eléctricos con materiales desfasados, se fabricaron todos los componentes según las especificaciones originales. Cualquier desviación del original fue detallada para tener una pieza de verdadero valor histórico y no una simple copia.

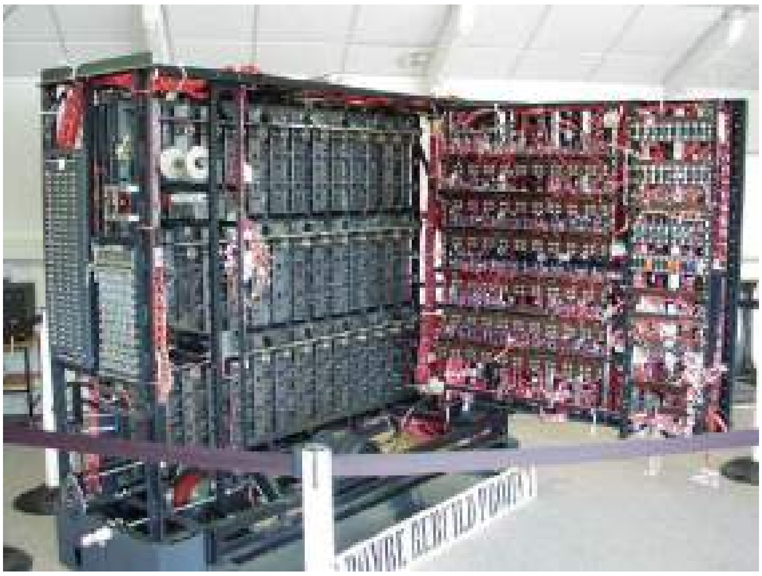


Figura 3. Interior de la Máquina Bombe

John Harper y sus colaboradores realizaron una extraordinaria labor para dotar al museo de esa perfecta réplica y permitir contemplar su complejidad y funcionamiento y complementan la extensa exposición de máquinas de cifrado utilizadas durante la guerra. En España se ha acometido una tarea similar. Un ingeniero español, dentro de su trabajo de doctorado, reconstituyó los planos del desaparecido telescopio Herschel y se mandó construir una copia para exhibirla en el lugar donde estuvo originalmente, el Real Observatorio Astronómico del Retiro.

Por supuesto, el personaje central de Bletchley Park es el matemático Alan Turing cuyas aportaciones intelectuales han sido fundamentales en la lógica, la informática, la criptografía y la filosofía.

En el año 2011, el museo consiguió, con la ayuda económica de Google, donaciones particulares y fondos de la fundación británica para conservación del patrimonio histórico, comprar en una subasta una colección de los papeles originales de Alan Turing que habían sido conservados por Max Newmann, un amigo y colega del matemático. La colección incluye las pruebas de imprenta de dieciséis de las dieciocho publicaciones de Turing y se exhiben con unas explicaciones muy claras sobre la relevancia y aportación científica de cada uno de los papeles.

Figura 4. Escultura de Alan Turing realizado por Stephen Kettle

El artículo de 1936 *"On computable numbers with an application to the Entsheidung problem"* es la piedra angular de la Ciencia Informática. En él analiza uno de los famosos problemas formulados por Hilbert y demuestra que no todos los problemas planteados matemáticamente pueden ser resueltos por ordenadores, por mucha memoria o tiempo que dispongan.

En su escrito de 1950 *"Computing machinery and intelligence"* se convierte en el padre de la inteligencia artificial al anticiparse a otros tratados y considerar la posibilidad de que las máquinas piensen. Diseña su juego de imitación, actualmente conocido por el *"test de Turing"*, donde a un humano y a un ordenador se les hace pregunta para tratar de descubrir a través de las respuestas cuál es el ser humano y cuál el ordenador.

En 1951 solicitó una patente, *"Accoustic delay lines"*, detallando un sistema de memoria para los ordenadores basado en unos tubos llenos de mercurio, donde la información circulaba en forma de ondas acústicas. El documento es un ejemplo de una faceta desconocida de Turing y le acredita como un auténtico ingeniero, además de un excelente matemático.

Aparte de las zonas dedicadas a la criptografía y la informática, Bletchley Park es la sede de otras exposiciones: de juguetes de los años 30, vehículos empleados durante la II Guerra Mundial, proyectores y material cinematográfico antiguo, y una impresionante colección privada de objetos relacionados con Winston Churchill. El acceso a Bletchley Park se puede hacer en tren desde la estación Euston en Londres.

Referencias

EN LA RED.
Página web del lugar histórico de las actividades británicas de desencriptado,
http://www.bletcheypark.org
Página sobre la máquina británica Bombe,
http://www.jharper.demon.co.uk/bombe1.htm

Sobre la autora:
Nombre: Susana Mataix
Correo Electrónico: susanamataix@gmail.com
Profesión: Matemática y Escritora.

Entrevista a Mariano Soler Dorda, Catedrático del Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil de la Universidad Politécnica de Madrid

Revista de Investigación

Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Mariano Soler Dorda es Catedrático de Universidad de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid y lleva más de 35 años dedicado a la docencia de las Matemáticas. Acaba de recibir el premio al mejor profesor del pasado curso 2010-2011. Es una persona comprometida con la docencia de las Matemáticas y con gran experiencia en este tema.

Hemos charlado con él sobre la enseñanza de las Matemáticas en la Universidad.

Palabras Clave: Docencia Universitaria de las Matemáticas

1. Entrevista

- Mariano ¿cuántos años llevas impartiendo Matemáticas en la Universidad?

Llevo 39 años de docencia activa. De hecho, acaban de reconocerme el decimo tercer trienio. Mi comienzo fue en la Universidad de Zaragoza, donde realicé mis estudios de licenciatura y doctorado. Pasé (ya como funcionario) a la facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense (mi periodo más breve en un centro, sólo tres años) y, por último, llegué a la Escuela Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica, en la que continúo.

- *¿Cuál es la finalidad de las Matemáticas en las Escuela Técnicas?*

Las Matemáticas son una de las herramientas, no útiles sino imprescindibles, para un ingeniero. Tengamos en cuenta que intervienen tanto en la modelización de un problema real, como en su resolución. Un ingeniero debe convertir (representar) la situación que se le plantea en un conjunto de expresiones matemáticas que permitan su tratamiento, resolver el problema planteado y aplicar las soluciones obtenidas a la situación real en que se encuentra. Las matemáticas aparecen en todas las fases de ese proceso.

Mariano Soler Dorda

- *¿Cómo ves el futuro de las Matemáticas en las Ingenierías?*

Como ya he dicho, las Matemáticas son imprescindibles en la ingeniería, por lo que su futuro no debería causar preocupación. Sin embargo hay que eliminar un recelo sobre ellas que viene de antiguo. Se han utilizado en demasiadas ocasiones para crear barreras y seleccionar a los alumnos que deben seguir estudiando, lo que adultera su función y ha producido un rechazo que aún perdura. Por otra parte, considero muy importante quitar el exceso de purismo en la presentación de las materias. En el estudio de las Matemáticas como tales, se busca la precisión absoluta en la formulación de ciertos teoremas, precisión que no es necesaria para un ingeniero que vaya a ejercer la profesión. Este purismo desalienta al estudiante.

- *¿Qué cambios importantes has ido notando con el paso de los años? Han cambiado planes de estudio, ha cambiado la preparación de los alumnos…*

En la Universidad, los planes de estudio no han cambiado de forma sustancial hasta ahora, con el paso al llamado Sistema Bolonia. En la enseñanza preuniversitaria los cambios han sido tremendos y, en general, de mal en peor. El propio informe PISA nos dice el desastroso estado en que se encuentra la formación en esos años. El paso del Bachillerato a dos años ha impedido que los alumnos adquieran conocimientos esenciales, y han producido también un cambio de actitud. En este momento, al llegar a la Universidad, el alumno considera que sólo tiene derechos, ninguna obligación, carece del más elemental espíritu crítico y considera, o poco menos, que el aprobado es la consecuencia natural de haberse matriculado.

- ¿Cuál es el secreto para ser un buen docente de Matemáticas? ¿Cómo se consigue el reconocimiento de los alumnos como te ha pasado a ti con el reciente premio que te han concedido los estudiantes?

Esta pregunta es de respuesta compleja. En primer lugar, tiene que gustarte dar clase. Disfrutar con ello, no sólo gustar. Estar dispuesto a dedicar mucho tiempo a preparar cada clase, los ejemplos (que varían de año en año según la mentalidad de los alumnos de cada uno de ellos) son fundamentales y deben ser refinados poco a poco. Paciencia infinita con las preguntas de los alumnos. Cada una de ellas debe ser la más importante del mundo.

También creo que hay algún factor genético.

- ¿Cómo afrontas el nuevo plan de estudios en el caso de las asignaturas que impartes en la Escuela? La incorporación al modelo de Bolonia, ¿ha supuesto un cambio significativo en tu manera de impartir docencia?

Cuando me preguntan por Bolonia suelo contestar que "es una ciudad italiana". El espíritu, si no la letra, de este proceso reside en buena parte en los grupos reducidos de alumnos, que permitan trabajar personalmente con ellos. Aquí, en Caminos, tenemos grupos "reducidos", de sólo 120 alumnos. Se habla de "evaluación continua". Con ese número en cada clase, la respuesta debe hacerse a través de otra pregunta: "Evaluación continua, ¿eso qué es?". En resumen, y sin profundizar más: Las cosas siguen como antes y la enseñanza es, obligatoriamente, del mismo tipo. No se puede hacer un cambio de este tipo pretendiendo que sea "a coste cero", como se ha hecho.

Por supuesto hemos tenido que recortar temarios e impartirlos desde un punto de vista más práctico. Menos teoría y más problemas. En fin, veremos con el tiempo como resulta.

- Es la época de La Innovación Educativa. Todos los docentes estamos rodeados de esa palabra, de proyectos de Innovación Educativa de planteamientos innovadores, de nuevas metodologías. ¿Qué es para ti la Innovación Educativa, cómo te planteas tú innovar para captar la atención de tus estudiantes?

Por todo lo que he dicho antes, estamos obligados a la clásica lección magistral. Con 120 alumnos en clase, la innovación se reduce a que los que llevamos corbata la cambiemos con cierta frecuencia. Me merecen muchísimo respeto los que se dedican a intentar hacer más atractivo el estudio a los alumnos, a tratar que el aprendizaje sea menos doloroso, pero la aplicación práctica de estas técnicas exige un limitado número de alumnos directos. No tenemos aquí esa idílica situación que aparece en las películas americanas (me temo que sólo en las películas) del profesor-tutor que tiene a su cargo 5 ó 6 alumnos, que les dirige y les mima.

Estamos viviendo ahora una explosión de innovación educativa. Me temo que quede en lo mismo que el agujero de ozono, que existe, pero ha dejado de tener interés para el gran público.

- ¿Esta valorada la docencia dentro del mundo universitario? No se encuentran en casi ningún aspecto, posibilidad de incluir los méritos docentes en los curriculums de los docentes. Normalmente no existen epígrafes relacionados con este tipo de acciones en los curriculums I+D, en las peticiones de complemento retributivo de la comunidad, en las memorias de los departamentos, en los formularios de petición de sexenios,…¿Es posible que esto influya en las prioridades de los profesionales del sector?

En esto se ha producido también un cambio. La Universidad es, desde mi punto de vista, un centro docente en el que, además, se investiga. Ahora se considera que es, a todos los efectos, un centro de investigación en el que se da alguna clase porque no queda más remedio. Esto se ha visto tanto en los procesos de acceso a las plazas, como en todo lo que tú decías de ausencia total de reconocimiento a esa labor. Por supuesto que no debe menospreciarse la investigación, y espero que nadie entienda eso en lo que estoy diciendo. La Universidad debe ser un puesto de avanzada en el conocimiento y contribuir de forma fundamental al desarrollo tanto de los conocimientos básicos (también ignorados en los proyectos de investigación en beneficio de la llamada "investigación aplicada") como de los directamente aplicables (a la técnica, medicina, etc.) pero de ahí a que "lo único" que haya que hacer sea investigar, hay un abismo. Tenemos alumnos a los que formar y eso exige que hagamos un gran esfuerzo en la transmisión de conocimientos. Esto influye en lo que me preguntabas antes sobre la docencia. Hay casos de personas que su único interés es la investigación y dar clase ni les apetece, ni les gusta. Sin embargo, el único lugar en el que pueden investigar y simultáneamente obtener un sueldo es la Universidad. Si unimos esto a que, en este momento, el único mérito efectivo para obtener una plaza en la Universidad es la investigación, el futuro como centro docente está servido.

Se hacen demasiadas comparaciones con los centros de Estados Unidos, comparaciones que no son aceptables. En primer lugar estamos comparando centros públicos (España) sin autonomía presupuestaria con centros privados (USA) totalmente autónomos y con subvenciones multimillonarias de empresas como IBM. Incluso, y basta ver el pié de muchos artículos de

ISSN 2174-0410

investigación, por parte del ejército americano. Esto es similar a comparar el equipo de fútbol de Barcelona con el de Garrapinillos. Sin embargo, ¡hasta metemos goles!

Yo creo que en el momento actual la situación idónea sería la de simultanear dos tipos de personal universitario: La que hasta ahora es única, profesor-investigador con parte predominante docente y la de investigador puro y duro, sin obligaciones docentes en cursos de primer y segundo ciclo. Esperemos que alguna vez la situación económica y la disposición política permitan una solución de este tipo.

- Para finalizar, ¿Cuáles han sido y son los objetivos principales en tu carrera como profesor?

Intentar y, a veces conseguir, que lo difícil sea fácil. Intento conseguir que mis alumnos sepan utilizar esa herramienta tan importante que son las Matemáticas para hacer bien su trabajo. Hacer que se olvide ese temor reverencial a las mismas que viene imbuido por tantos años de mala enseñanza de las Matemáticas. Que no sean algo mágico, que no se diga inmediatamente "uf!!! esto es imposible". Además, y a través de esto, que se acostumbren a pensar, a utilizar la cabeza como una de las más poderosas herramientas de que disponemos.

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

Revista de Investigación. Edición Digital. ISSN 2174-0410

Número 1. Octubre 2011

G.I.E

Pensamient
Matemátic

EXPERIENCIAS DOCENTES

GYMKHANA MATEMÁTICA PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS POR LA CIUDAD UNIVERSITARIA DE MADRID

VISUALIZACIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS MEDIANTE EL USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA GEOGEBRA

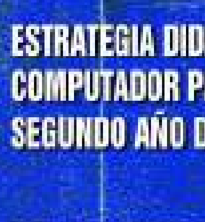
ESTRATEGIA DIDÁCTICA LÚDICA BASADA EN EL COMPUTADOR PARA ENSEÑANZA DE POLINOMIOS EN SEGUNDO AÑO DE EDUCACIÓN BÁSICA

INVESTIGACIÓN

CAUSALITY IN SCIENCE

MECÁNICA DE CONTACTO DE CUERPOS DEFORMABLES. INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

ENTREVISTA A:



MARIANO SOLER DORDA, CATEDRÁTICO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA APLICADAS A LA INGENIERÍA CIVIL DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

GÉNESIS Y DESARROLLO DEL CÁLCULO FRACCIONAL

LAS ESCUELAS JÓNICA Y PITAGÓRICA

EL ÁLGEBRA DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

HAMILTON Y EL DESCUBRIMIENTO DE LOS CUATERNIONES

ABEL Y LA IMPOSIBILIDAD DE RESOLVER LA "QUÍNTICA" POR RADICALES

RIEMANN Y LOS NÚMEROS PRIMOS

CUENTOS MATEMÁTICOS

EL CLUB DE LA SRA. MATEMÁTICA

FRACCIONES BONITAS

Y ADEMÁS:

JUEGOS MATEMÁTICOS Y CRÍTICAS