Revista de Investigación. Edición Digital. ISSN 2174-0410

Número 0. Abril 2011

G.I.E

Pensamiento Matemático

EXPERIENCIAS DOCENTES

LAS COMPETICIONES TIPO OLIMPIADA COMO MOTIVACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: UNA EXPERIENCIA INTERNACIONAL

ACTIVIDADES ON-LINE PARA EL DESARROLLO DE LAS DESTREZAS MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS: AULA "PENSAMIENTO MATEMÁTICO"

EL GRUPO DE INVESTIGACIÓN MAIC, "MATEMÁTICAS APLICADAS A LA INGENIERÍA CIVIL" Y SU WEB DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A ALUMNOS CON MINUSVALIA VISUAL

ENTREVISTA A:

ANA CASARAVILLA GIL, ACTUAL ADJUNTA A INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID Y PROFESORA

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

BRIANCHÓN Y SU TEOREMA

EULER Y LA CONJETURA DE FERMAT SOBRE NÚMEROS TRIANGULARES

¡QUÉ *HISTORIA* ESTO DE LA ESTADÍSTICA!

HERMITE Y LA TRASCENDENCIA DE *e*

APROXIMACIÓN DEL DISEÑO ARQUITECTÓNICO A LA FRACTALIDAD

INVESTIGACIÓN

¿ES EL COEFICIENTE DE HURST UN BUEN INDICADOR DE LA EXTIENCIÓN DE ESPECIES?

POLÍTICA Y GEOMETRÍA

LUZ Y GRAVEDAD (REFLEXIONES GEOMÉTRICAS SOBRE CÁUSTICAS Y LENTES GRAVITACIONALES)

Y ADEMÁS:

CUENTOS Y JUEGOS MATEMÁTICOS, CRÍTICAS DE LIBROS...

Editorial del Número 0

Equipo Editor
Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

En abril de 2011 nace la Revista Pensamiento Matemático (PM), publicación electrónica del Grupo de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid "Pensamiento Matemático".

Editorial del Número 0 de la Revista

La idea motriz de la Revista PM es difundir todas las acciones generadas que tienen relación con las matemáticas, principalmente a nivel educativo pero sin descuidar la trasmisión de trabajos de investigación.

Queremos construir un lugar donde se recojan todas vuestras propuestas, aspirando a ser un instrumento de comunicación para la comunidad docente, en particular en temas de innovación educativa, entendidos en un sentido amplio.

PM nace con la pretensión de convertirse en una herramienta al servicio de los profesores de matemáticas tanto universitarios como de educación secundaria, a los que les interesa ahondar en las técnicas de enseñanza-aprendizaje, así como motivar a los estudiantes hacia esta ciencia y difundir los trabajos de investigación que pueden ser interesantes para el colectivo.

El espectro de la Revista es amplio ya que existen muchas áreas y trabajos que pueden ser provechosos para los interesados en esta ciencia y en la trasmisión de sus contenidos de una manera útil. De esta forma se divide cada número en una serie de secciones donde se clasifican los artículos a publicar.

El carácter electrónico de la Revista pretende dotarla de la accesibilidad y rapidez necesaria para poder estar al día en los estudios recientes, en los cambios que se produzcan y que puedan afectar a la docencia y en los nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje.

Esperamos contar con vuestro interés y aportación.

En este número 0 se recogen una colección de artículos realizados por los miembros del equipo editorial y científico, todos ellos pertenecientes al Grupo de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid "Pensamiento Matemático", que se espera sirvan de muestra de lo que puede tener cabida en la publicación.

Experiencias Docentes
Las competiciones tipo olimpiada como motivación para el aprendizaje de las matemáticas: una experiencia internacional

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

Este artículo presenta el trabajo realizado por el GIE "Pensamiento Matemático" para preparar la participación de un grupo de alumnos universitarios en la competición matemática IMC.

Palabras Clave: Innovación educativa, olimpiadas matemáticas, trabajo grupal.

1. Introducción

El grupo de Innovación educativa "Pensamiento Matemático", perteneciente a la Universidad Politécnica de Madrid, ha venido realizando en los últimos años labores de organización de competiciones con contenido matemático para motivar el aprendizaje de esta disciplina en los estudiantes universitarios y de Secundaria. Además de estas actividades de organización de eventos matemáticos, el grupo ha tenido una experiencia de participación indirecta en una competición internacional, que se comenta en esta introducción.

La competición a la que se alude es un concurso matemático tipo olimpiada, que se desarrolló en Julio del 2010 en su 17 edición en Blagoevgrad (Bulgaria): se trata de la IMC (Internacional Mathematics Competition), una competición universitaria en la que participaron 328 estudiantes de 90 Universidades de todo el mundo.

A lo largo de las últimas ediciones han participado estudiantes de Universidades españolas en esta competición, acudiendo este año por primera vez estudiantes de la Universidad Politécnica de Madrid, centro al que está adscrito el GIE "Pensamiento Matemático".

La participación del GIE en la competición ha consistido precisamente en preparar a este grupo de estudiantes, así como a los que fueron por la Universidad Pontificia Comillas de Madrid, para que pudieran afrontar los dos exámenes de 5 horas con 5 problemas cada uno que conformaban la competición.

En este artículo se explica en qué consistió la preparación: en la sección 2 se comenta el trabajo previo de realización de un manual, en la sección 3 se detalla cómo se utilizó este manual para el adiestramiento "on-line" de los estudiantes, en la sección 4 se analiza el resultado obtenido por dichos estudiantes en la competición y en la sección 5 se abordan posibles líneas de mejora en la preparación para el futuro.

2. El trabajo previo: un manual de preparación

La participación en una olimpiada matemática internacional requiere de un nivel de conocimientos teóricos muy elevado, así como de mucha práctica en la resolución de problemas matemáticos, por lo que el trabajo de entrenamiento con los estudiantes que van a participar es muy importante. Por este motivo, se consideró necesaria la elaboración de un manual de preparación que contuviera los desarrollos teóricos necesarios para la realización de "problemas tipo" de competiciones matemáticas y una colección de problemas resueltos seleccionados de exámenes de diversas Olimpiadas matemáticas.

Los contenidos teóricos del manual se dividieron en los siguientes apartados: Estrategias básicas, Desigualdades, Ecuaciones Funcionales, Interpretaciones Geométricas, Principios de conteo, Algunos resultados de Teoría de Números y Números complejos.

Los problemas, con las soluciones desarrolladas por los autores del manual, se extrajeron de las siguientes competiciones: IMC (Internacional Mathematics Competition), OIMU (Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria), OCU (Olimpiada Colombiana Universitaria).

Se incluyó además una sección de "otros problemas" donde se recogían problemas tomados de otras páginas de preparación entre las que cabe destacar la de José Luis Díaz Barrero, profesor de la Universidad Politécnica de Catalunya que también ha preparado a estudiantes para participar en la IMC (ver [1]), ó problemas interesantes derivados de algunos problemas de competiciones matemáticas, propuestos por los autores del manual.

Para implicar en este estadio inicial a los alumnos de Comillas que iban a participar en la IMC, se propuso a los que tenían beca de excelencia que dedicaran el trabajo de dicha beca a colaborar en la elaboración del manual (agradecemos en este sentido de forma especial a Maite Peña y Pedro Ciller por el gran trabajo realizado).

La versión actual de este manual está colgada en el aula virtual de pensamiento matemático que ha llevado a cabo el GIE (ver [6])

Hay que destacar que el manual nunca se considera finalizado: se va actualizando periódicamente con la inclusión de soluciones a nuevos problemas. Existe además un foro para que los estudiantes puedan hacer sus sugerencias, presentar soluciones alternativas a los problemas propuestos en el manual…

3. El trabajo con los estudiantes

Como la preparación tuvo lugar principalmente a principios de Julio (después de exámenes) fue eminentemente on-line, utilizándose el aula virtual de pensamiento matemático comentada en la anterior sección, principalmente el apartado "Olimpiadas matemáticas" de la misma, donde se encuentra el manual. Este tipo de preparación generó unos foros de discusión muy interesantes desde el punto de vista didáctico, ya que los profesores iban corrigiendo los problemas resueltos que enviaban los estudiantes, lo que llevaba a nuevas versiones que se iban acercando de forma sucesiva a la resolución correcta de los problemas, fomentándose así el trabajo en grupo (todos aportaban comentarios e ideas sobre las soluciones propuestas por los demás) y enriqueciéndose el conocimiento de cada estudiante con nuevos puntos de vista para atacar los problemas.

4. Resultados y soluciones

Los alumnos que participaron en la IMC, después de pasar por el proceso de preparación, fueron, por la Universidad Pontificia Comillas, Pedro Ciller, Isabel Garro, Manuel Peña y Alberto Orgaz y por la UPM Borja Morán y Miguel Delgado. Cabe destacar que Pedro Ciller obtuvo una mención especial y que Borja Morán se quedó a un solo punto de la misma, resultados de gran merito teniendo en cuenta la dificultad de los problemas planteados en esta competición.

Para finalizar esta sección, presentamos una solución al problema 3 del primer día de competición, distinta a la solución oficial (ver [5]). Como los problemas están ordenados por orden de dificultad, éste se puede considerar de nivel intermedio, lo que da una idea del alto nivel que suele tener esta Olimpiada matemática. El enunciado del problema es:

Define la sucesión x_n inductivamente por

$$x_1 = \sqrt{5}\ ,\ x_{n+1} = x_n^2 - 2\ .$$

Halla

$$\lim_{n\to\infty} x_1 \dots x_n / x_{n+1}$$

Solución

Vamos a expresar:

$$y_n = x_1 \dots x_n / x_{n+1}$$

de forma explícita. Para ello expresamos primero x_n de forma explícita:

Las funciones cosh, cos cumplen que multiplicar por 2 su argumento hace el efecto de elevar la función al cuadrado, que es lo que hace la ecuación de recurrencia que define x_n. Buscamos entonces una expresión del tipo

$$x_n = A\cosh\left(B\,2^n\right)$$

y la sustituimos en la ecuación de recurrencia (tomamos cosh y no cos porque cosh tiende a infinito para argumentos grandes, como parece que hace x_n):

$$x_{n+1} = A\cosh\left(B\,2^{n+1}\right) = A\left(2\cosh^2\left(B\,2^n\right) - 1\right) = x_n^2 - 2 = A^2\cosh^2\left(B\,2^n\right) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A = A^2,\ -A = -2 \Leftrightarrow A = 2$$

Por tanto $x_n = 2\cosh\left(B\,2^n\right)$, con:

$$x_1 = 2\cosh\left(2B\right) = \sqrt{5} \Rightarrow B = \frac{1}{2}\operatorname{argcosh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

Entonces

$$x_n = e^{B\,2^n} + e^{-B\,2^n} = \left(e^{B\,2^{n+1}} + 1\right) \Big/ e^{B\,2^n}$$

Que con el valor de B hallado da:

$$x_n = \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^n} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n-1}}$$

por lo que:

$$y_n = \left(\left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^2 + 1 \right) \ldots \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^n} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{1+2+\ldots+2^{n-1}} \right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^n}$$

Que simplificando da:

$$y_n = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^2 + 1 \right) \ldots \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^n} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} + 1 \right)$$

Desarrollando el numerador de y_n, vemos que se puede expresar como:

$$\sum \left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{i_1}+\ldots+2^{i_k}} + 1$$

Donde el sumatorio se realiza sobre los vectores $(i_1, \ldots, i_k)$ con $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, $1 \le k \le n$

Los exponentes de los términos que se suman están entre 2 y 2^{n+1} -2 y son todos los números pares entre estos dos (es como poner un número par en base 2), por lo que:

$$\sum \left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{i_1}+\ldots+2^{i_k}} + 1 = \sum^{0 \le i \le 2^n-1} \left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2i} = \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} - 1 \right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^2 - 1 \right)$$

(en la última igualdad hemos aplicado la fórmula para la suma de una progresión geométrica de razón $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$)

Tenemos entonces que:

$$y_n = \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} - 1\right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} + 1\right)$$

(donde hemos tenido en cuenta que $\phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ cumple que $\phi^2 = \phi + 1$). Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} - 1\right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} + 1\right) = 1$$

(ya que los términos ± 1 son despreciables)

Observación

El programa Mathematica da la forma explícita de x_n, con una simplificación distinta a la aquí dada. No da la forma explícita de y_n

5. Líneas de mejora futura

Aunque los estudiantes que participaron en la preparación y en la Olimpiada se declararon en general satisfechos con la experiencia (quizás en mayor medida con la semana de competición, por la oportunidad de conocer a estudiantes de otros países), dieron algunas sugerencias que pueden ser útiles para la mejora del proceso preparatorio en años venideros. La principal es la que se comenta a continuación:

Como se comentó en la sección 3, la preparación tuvo una duración de alrededor de tres semanas, después de los exámenes de Junio. Esto hizo que los estudiantes la afrontaran cansados por el esfuerzo de todo el curso, y que no tuvieran demasiado tiempo de asimilación de los difíciles contenidos que debían dominar.

Por ello pudiera ser útil el acomodar la preparación al curso académico, bien ofertándola en una asignatura optativa dentro de los nuevos planes, ó bien llevando a cabo un curso on-line de preparación de al menos un cuatrimestre. En cualquiera de las dos modalidades, el manual de preparación se utilizaría como libro de referencia.

Referencias

[1] DÍAZ, José Luís. *Página web personal,*
http://www-ma3.upc.es/users/diaz/

[2] GUZMÁN, Miguel. *Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. Esquema de un curso inicial de preparación*, pp. 52-75, Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, España, 1987.

[3] LANTARÓN, Sagrario, LÓPEZ, María Dolores, SALVADOR, Adela. *Actividades de apoyo al desarrollo de la competencia "pensamiento matemático"*, pp. 82-89, Actas de las III Jornadas Internacionales UPM sobre Innovación Educativa y Convergencia Europea (INECE'09), Madrid, 2009.

[4] LANTARÓN, Sagrario, LÓPEZ, María Dolores, RODRIGO, Javier. *Lecture room web for the improvement of mathematic knowledge*, pp. 3263-3269, Actas de la International Conference on Education and New Learning Technologies (EDULEARN10), Barcelona, 2010.

[5] *Página web de la IMC,*
http://www.imc-math.org/

[6] *Página web del aula virtual Pensamiento Matemático,*
http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/

Sobre el autor:
Nombre: Javier Rodrigo Hitos
Correo Electrónico: **jrodrigo@upcomillas.es**
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático, Universidad Pontificia Comillas, España.

Experiencias Docentes
Actividades on-line para el desarrollo de las destrezas matemáticas en los estudiantes universitarios: Aula "Pensamiento Matemático"

Mª Dolores López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

4 de abril de 2011

Resumen

Al igual que otras asignaturas, pero quizás de manera más pronunciada, las matemáticas están viendo reducidos en gran medida sus créditos en los nuevos planes de estudios. Por ello, ofertar acciones que posibiliten alcanzar competencias relacionadas con ésta y otras ciencias básicas resulta de gran utilidad. Con este propósito, desde el Grupo de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid "Pensamiento Matemático", se ofrece a los alumnos un "Aula de Pensamiento Matemático". En ella se presentan una serie de actividades on-line que permiten la capacitación de los alumnos en diversas competencias transversales, la mayoría relacionadas con el pensamiento matemático.

Palabras Clave: Innovación Educativa, Formación On-Line, Didáctica de las Matemáticas, Aula Virtual.

1. Introducción

La renovación docente de las enseñanzas universitarias se ha convertido en una línea estratégica de actuación de todas las universidades y con ellas de todos los profesores que las componen, para lo cual se buscan elementos y acciones que permitan cumplir la doble misión de enseñar y de lograr que el alumno aprenda y que no sólo aprenda conocimientos sino también competencias profesionales.

Concretamente, la enseñanza de las matemáticas en la mayoría de las escuelas y facultades se encuentra con un doble problema. Por un lado, los cambios en la universidad que se están desarrollando dentro del marco del Espacio Europeo están haciendo que en los nuevos planes de estudios, las matemáticas estén viendo reducidos sus créditos y con ello las horas presenciales de clase dedicadas a esta materia. Por otro, gran número de estudiantes rechazan las matemáticas, no las entienden y no consiguen ver su utilidad.

Desde nuestro Grupo de Innovación Educativa "Pensamiento Matemático" http://www.caminos.upm.es/Matematicas/WEBGIE/ pretendemos ofrecer unas estrategias y actividades que contribuyan tanto a completar la formación de los estudiantes en matemáticas y suplir ciertas carencias, como a incrementar el interés de los estudiantes de los primeros cursos universitarios hacia esta ciencia, además de fomentar mejor ambiente de trabajo y cooperación.

El trabajo se centra en la visualización, entendimiento, motivación y acercamiento de los alumnos hacia los temas relativos a las matemáticas. Se pretende divulgar los conceptos matemáticos que deben conocer y que estudiarán a lo largo de su etapa de aprendizaje, a través de actividades relacionadas con acciones cotidianas. Se trata de actividades abiertas y de carácter divulgativo.

Tiene como propósitos principales, por un lado, ayudar a revertir el disgusto y malestar ante las matemáticas que tienen gran número de estudiantes de todas las edades, así como mejorar el rendimiento de los mismos en esta materia que es fundamental para la formación intelectual y para el progreso personal, por otro lado, el acercamiento de los estudiantes a la universidad.

Para todo ello se ha puesto en funcionamiento un aula virtual: "Aula de Pensamiento Matemático", con numerosas actividades:
http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/

2. Desarrollo de la propuesta

2.1. Generalidades

Desde la Web del Aula de Pensamiento Matemático hemos querido ofrecer una serie de actividades que permitan activar la mente y acercarla hacia las matemáticas a la vez que hagan pasar un buen rato al visitante.

Con ellas quiere facilitarse a los interesados, entre otras, la posibilidad de:

- Aprender conceptos matemáticos que no conocen y son necesarios para enfrentarse a sus estudios universitarios.
- Manejar el lenguaje matemático y su simbología.
- Entrenar su mente hacia la problemática científica.
- Aprender a apreciar las matemáticas y su utilidad en todos los campos.
- Relacionar el mundo científico con el ocio.
- Prepararse para participar en competiciones científicas.

Figura 1. Pantalla de inicio del Aula de Pensamiento Matemático.

Para ello se propone una lista de actividades en el aula virtual que están en continua renovación y ampliación. Éstas son:

- Juegos, pasatiempos y enigmas matemáticos.
- El lenguaje matemático: demostrar y resolver.
- Olimpiadas matemáticas.
- Matemáticas, cine y literatura: Lectura de novelas, historias y cuentos con contenido matemático, cine matemático, …

- Chip geométrico
- Convocatoria de competiciones y concursos.
- Documentales
- Geogebra

Figura 2. Índice de actividades propuestas en el Aula.

A continuación se comentará y justificará el contenido de algunas de las actividades.

2.2. Juegos, pasatiempos y enigmas matemáticos

Gran número de estudiantes rechazan las matemáticas o no las encuentran atractivas. En cambio, pueden verse atraídos por los jeroglíficos, los juegos, los acertijos, la magia,… Bajo el reclamo "Despierta tu ingenio" se presenta en esta primera actividad del Aula una serie de retos, enigmas y curiosidades que pueden resultar atractivas para los alumnos.

Los retos matemáticos presentados como juegos o pasatiempos pueden servir de recreo y entretenimiento para los estudiantes a la vez que ejercitan su inteligencia y les preparan para resolver con mayor facilidad los problemas que seguramente, se les presentarán a lo largo de sus estudios y de su profesión. Resulta un material complementario que puede ser integrado con aprovechamiento en las asignaturas básicas. Su finalidad consiste en estimular la capacidad de raciocinio, de análisis y síntesis, introducir ciertos conceptos teóricos, así como la potenciación del pensamiento matemático en general.

2.3. El Lenguaje Matemático: Demostrar y resolver

Uno de los problemas actuales al que nos enfrentamos los profesores de los primeros cursos universitarios de materias relacionadas con las matemáticas, es el salto formal que los alumnos deben dar en cuanto al lenguaje y el tratamiento de los textos científicos. Existe un vacío entre lo que han aprendido y cómo lo expresaban en la enseñanza secundaria y lo que se encuentran y se les pide en la enseñanza universitaria.

Cuando un alumno intenta adentrarse en un estudio más serio de esta ciencia existen algunos puntos que le resultan indispensables:

- Manejarse correctamente con el lenguaje propio de las matemáticas, con sus expresiones y simbología que, en muchas ocasiones, se emplean con otras acepciones en el lenguaje cotidiano.
- Entender y poder llevar a cabo de forma correcta una demostración. Es importante tratar de ser capaz de reconocer qué método puede ser más adecuado para demostrar una afirmación.
- Familiarizarse con la idea de problema matemático y con los diversos puntos de vista para la resolución de los mismos. Aprender a aplicar las estrategias habituales de la resolución de problemas.

En esta actividad del portal se ayuda a aclarar todas estas cuestiones con la intención de orientar a quienes tratan de adentrarse en las matemáticas a nivel universitario.

Se pone a disposición de los alumnos un material de utilidad para iniciar una carrera técnica en los casos en los que los estudiantes se ven sumergidos en serias dificultades frente a las propuestas de los profesores. Se abordarán cuestiones del tipo:

- Diferencias entre los lenguajes cotidiano y matemático: Hacia el lenguaje científico.

- ¿Qué es una demostración?
- Diferentes técnicas de demostración.
- Estrategias para la resolución de problemas.

La presentación de estas materias se hace a través de vídeos y documentos a disposición del visitante.

Figura 3. Cabecera de la actividad "El Lenguaje Matemático: Demostrar y resolver".

2.4. Matemáticas, cine y literatura

Es indudable que existe un rechazo considerable de un porcentaje elevado de los estudiantes hacia las matemáticas. Sienten verdadera alergia por las fórmulas y la abstracción, por el lenguaje con el que los contenidos matemáticos se establecen. De esta forma, transmitir conocimientos matemáticos requiere una importante labor previa, casi tan necesaria como la selección y preparación de los temas a explicar. Desde esta actividad del Aula se desea mostrar a los estudiantes que el uso de conocimientos técnicos puede servir para conseguir un mejor aprovechamiento de la lectura de novelas y el visionado de películas dirigidas a un público general, pero con ciertos contenidos científicos. El manejo de ciertos conceptos matemáticos permite crear tramas y situaciones interesantes en gran número de ambientes y épocas reflejadas en el cine y la literatura. Es posible disfrutar de una lectura o de una película amena y de calidad y a la vez pensar y reflexionar sobre problemas o cuestiones matemáticas.

En esta parte del Aula de Pensamiento Matemático quiere ofrecerse al alumno información sobre la existencia de estas películas y libros así como un análisis completo sobre la matemática que en ellos se trata. Esperamos además fomentar un debate y un cambio de impresiones sobre estas obras.

Hemos dividido el contenido de la actividad en:

- Matemáticas y literatura. A su vez dividida en:
  - Novelas con contenido matemático: En ella se presentan algunas novelas de diversos subgéneros que tratan de aunar las ciencias y las letras y donde las matemáticas están presentes de una manera importante. Se anima a los visitantes a leerlas y establecer entre todos, a través del correo electrónico, un debate sobre el contenido, el tratamiento de las matemáticas y su utilidad. De cada libro se ofrece la siguiente información: Un resumen, un análisis de las matemáticas en la novela, una crítica y opinión del mismo y unas notas sobre el autor.
  - Historias matemáticas: Aquí se recogen artículos de historia matemática donde es posible aprender sobre los grandes matemáticos y sus aportaciones. Se pueden realizar aportaciones siguiendo las instrucciones de la página.
  - Cuentos matemáticos: Bajo el reclamo "Diviértete leyendo relatos y cuentos cortos matemáticos" se presentan cuentos realizados por aficionados (estudiantes, profesores,…). Se anima al visitante a mandarnos los suyos para incluirlos en la sección.
- Matemáticas y cine: Esta sección está dividida en subapartados donde se comentan y analiza la matemática que aparece en diversas películas dirigidas a todos los públicos.

Figura 4. Pantallas dedicadas a la actividad "Matemáticas, cine y literatura".

2.5. Chip geométrico

El propósito de esta parte del Aula, bajo la llamada "Si te mareas en el espacio", es proponer ciertas actividades que aborden diversos temas desde una perspectiva geométrica como pueden ser, entre otros: simetrías, proporciones, fractales, curvas, superficies, rompecabezas y puzzles…

La geometría es una parte importante de la cultura del hombre, no es fácil encontrar contextos en que la geometría no aparezca de forma directa o indirecta. Actividades tan variadas como el deporte, la jardinería o la arquitectura por citar algunas se sirven de la utilización, consciente o no, de procedimientos geométricos.

La geometría ha sido durante siglos uno de los pilares de la formación académica desde edades tempranas. Durante el siglo pasado, perdió paulatinamente presencia en los planes de estudio. Afortunadamente, los actuales currículos de matemáticas de todos los niveles educativos están confiriendo a la geometría la importancia debida. No obstante, algunos estudiantes tienen dificultades en algunos aspectos de esta ciencia. La frase "no tengo visión geométrica" se puede oír entre ellos.

El objetivo general de esta parte del Aula es ofrecer a los alumnos actividades que les amplíe su capacidad geométrica y les motive hacia esta parte de las matemáticas.

2.6. Documentales

Aquí, proponemos una serie de documentales matemáticos que pueden resultar muy útiles para la comprensión de muchos conceptos matemáticos. Existen actualmente recursos de alta calidad y acceso libre que resultan un complemento realmente provechoso para la enseñanza de las matemáticas. Un vídeo bien realizado permite visualizar conceptos que, enseñados teóricamente puede que no hayan llegado adecuadamente al alumnado. Que los estudiantes los tengan a su disposición a la hora de enfrentarse a ciertos contenidos resulta altamente útil.

A modo de ejemplo, hemos incluido en esta sección un enlace al documental "Dimensions" acompañado de este texto: Este documental te gustará si estás interesado en la Geometría, tanto en la clásica como en la más moderna. Con unas bellas animaciones se explican conceptos geométricos en distintas dimensiones, desde los más sencillos a conceptos elevados como las fibraciones, la proyección estereográfica,… Tienen la particularidad de que cada capítulo lo "presenta" un eminente matemático relacionado con el contenido del capítulo.

Figura 5. La actividad dedicada a documentales matemáticos.

3. Conclusiones

Hemos presentado un proyecto que creemos interesante para todo aquel que considere que la tele-formación es una herramienta de utilidad. Se quiere que este portal, Aula de Pensamiento Matemático, sirva de lugar de encuentro entre los diferentes agentes que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por eso se pretende que tanto docentes como alumnos, y por qué no incluso curiosos, y mentes inquietas, se acerquen por aquí y contribuyan a enriquecernos desde el punto de vista intelectual.

La idea es ir actualizando poco a poco los contenidos del Aula, aportando aquellos nuevos contenidos que tras la experiencia docente, las aportaciones de los alumnos y los diversos usuarios consideremos interesantes.

De esta forma, animamos a todo aquel que lo desee, se exprese participando en todas las materias que considere oportunas, por lo que la colaboración y sugerencias de todos los usuarios del Aula resultará fundamental para poder enriquecer el portal y hacerlo más ameno y útil para el alumnado.

Se ha creado el presente portal con la intención de que sirva de referente a la Comunidad Educativa. La idea de hacerlo nace fundamentalmente con la intención (entre otras muchas cosas) de hacer más cercana al visitante la labor pedagógica del profesor de matemáticas en todos sus niveles, y de forma paralela desarrollar una labor social con el fin de que este esfuerzo sirva de ayuda para la sociedad en general.

Sobre las autoras:

Nombre: Mª Dolores López González
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Sagrario Lantarón Sánchez
Correo Electrónico: sagrario.lantaron@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Experiencias Docentes
El grupo de investigación MAIC, "Matemáticas aplicadas a la ingeniería civil" y su web de enseñanza de las matemáticas.

Adela Salvador Alcaide
Alfonso Garmendia Salvador

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

2 de abril de 2011

Resumen

El grupo de investigación reconocido por la Universidad Politécnica de Madrid, "Matemáticas aplicadas a la ingeniería civil" (MAIC) tiene como una de sus líneas de investigación la innovación educativa, y ha trabajado en distintos proyectos como "Diseño y difusión de materias de formación interdisciplinares a distancia con contenido matemático o informático", la continuación de dicho proyecto, o trabajar con materiales en la web dirigidos a la extinción de las titulaciones. En este artículo se presenta las páginas web de innovación educativa realizadas en el marco de dichos proyectos.

Palabras clave: Innovación Educativa, Formación on-line, Didáctica de las Matemáticas.

1. Introducción

Por resolución de 29 de noviembre del 2004 del Rector de la Universidad Politécnica de Madrid se realizó la Convocatoria de reconocimiento de Grupos de Investigación de la UPM. Con fecha 14 de junio de 2005 se ordenó la publicación de resolución de la Convocatoria con la aprobación del Grupo "Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil (MAIC)" como

Grupo de Investigación Reconocido en la UPM.

Se le concedió a MAIC el proyecto "Diseño y difusión de materias de formación interdisciplinares a distancia con contenido matemático o informático". Este proyecto ha desarrollado materiales para la red adecuados para una enseñanza no presencial, constituyendo una experiencia de innovación educativa con la aplicación de nuevos métodos docentes y tecnológicos.

En este proyecto se han diseñado materiales adecuados para el aprendizaje tutelado a distancia sobre los siguientes temas:

- ✓ Evaluación de Impacto Ambiental
- ✓ Programación orientada a objetos en C++
- ✓ Programación orientada a objetos en JAVA
- ✓ Programación en MATLAB
- ✓ Blog en innovación educativa
- ✓ Actividades TICs

Este diseño constituye una mejora del proceso educativo de grado y postgrado ya que proporciona una cantidad importante de material que va a ser necesario para los futuros ingenieros ya que puede serles útil en distintas titulaciones, bien en el grado, en los estudios de master o ser imprescindibles en los estudios de doctorado, o una vez acabada la carrera académica, en el desarrollo profesional del ingeniero o arquitecto.

Un buen número de estudiantes accedieron a la página web para trabajar con los materiales colgados.

La consecución de estos proyectos puede verse en la página web del grupo:

http://www.caminos.upm.es/matematicas/Fdistancia/PIE/innovacion.htm

Consideramos que está siendo muy provechosa la publicación de dichos materiales.

2. Desarrollo de la propuesta

El desarrollo de la propuesta se ha realizado desde la Web del grupo MAIC (ver en las figuras 1 y 2 las líneas de investigación del grupo y la página de inicio del proyecto realizado):

Cada una de las materias desarrolladas en el proyecto requiere un desarrollo muy distinto, y su diseño y difusión plantean nuevos retos que hacen innovadora la respuesta. Se comenta a continuación cómo se han implementado cada una de ellas:

Figura 1. Pantalla de inicio del grupo MAIC.

Figura 2. Pantalla de inicio del Proyecto de Innovación educativa.

2.1. Evaluación de Impacto Ambiental

La legislación vigente obliga a realizar en determinadas obras y proyectos una evaluación de impactos ambientales, que por desconocimiento del tema por parte de los profesionales, se suele realizar mal, lo que cuesta dinero a la administración y a los promotores, pues se añaden requerimientos innecesarios y absurdos y dejan de incluirse otros más importantes. Realizar unos estudios donde se aprenda cómo se debe hacer dicha evaluación, ateniéndose a la legislación vigente, y analizando la forma de hacer el inventario, evaluando cada efecto para determinar si constituye un impacto, y determinando las medidas correctoras oportunas, es importante en las carreras de ingeniero de caminos, ingeniero civil, de obras públicas, arquitecto, ingeniero agrónomo, agrícola, montes y forestal.

Todos los años se imparten cursos a distancia utilizando los materiales de la web. Dichos cursos constan de tres módulos: 1) Conceptos generales, 2) Legislación y 3) Metodología y de tres prácticas: 1) Análisis de la aptitud de un territorio para albergar una actividad, 2) Supuesto práctico y 3) Utilización de un software confeccionado para evaluar el impacto medioambiental.

Para evaluar la aptitud del territorio se utiliza la capacidad de acogida por un lado y el impacto que produciría la actividad por otro. En el supuesto práctico se usa un estudio de impacto real, y se vuelve a valorar la importancia y la magnitud de cada impacto, se definen las medidas correctoras llegando a escribir el documento de síntesis, y por último se utiliza un software confeccionado por miembros del MAIC que guía en la evaluación de impactos paso a paso.

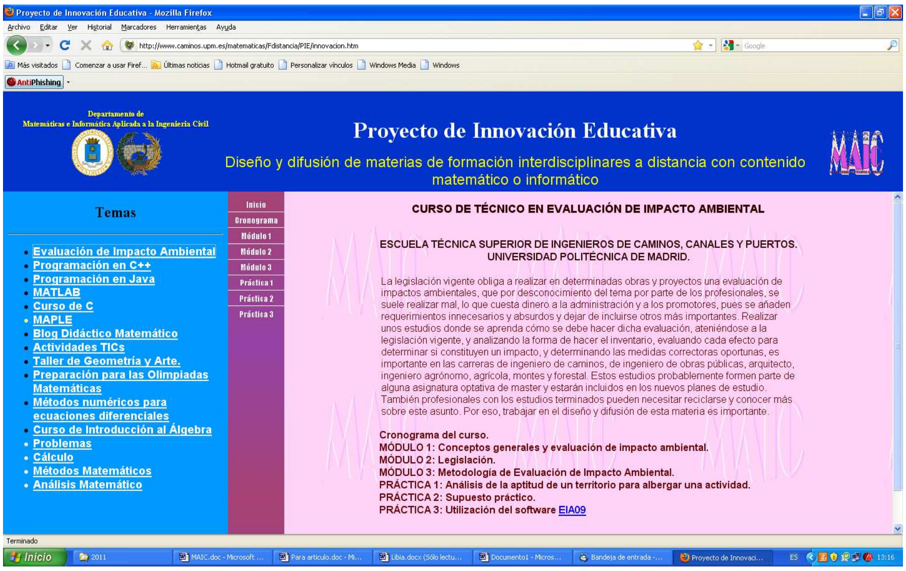


Figura 3. Curso de evaluación de impacto ambiental.

2.2. Programación orientada a objetos en C++

El lenguaje de programación C++ es un lenguaje estructurado de alto nivel cuyo enseñanza y aprendizaje es muy adecuado en las enseñanzas técnicas. Sin embargo en los planes de estudio actuales en pocas escuelas se enseña. Por ello este proyecto de innovación pretende analizar las dificultades de su enseñanza y aprendizaje y elaborar materiales adecuados para impartir a distancia esta materia.

2.3. Programación orientada a objetos en JAVA

El lenguaje de programación JAVA es un lenguaje bastante nuevo con una nueva filosofía de la programación al ser, eminentemente un lenguaje orientado a objetos, lo que requiere organizar de otra manera la forma de pensar. Es el lenguaje más demandado hoy en el mundo de la empresa. Sin embargo en los planes de estudio actuales en pocas escuelas se enseña. Por ello este proyecto de innovación pretende analizar las dificultades de su enseñanza y aprendizaje y elaborar materiales adecuados para impartir a distancia esta materia.

2.4. Programación en MATLAB

La programación en Matlab es adecuada, sobre todo, para el profesorado de matemáticas. Por ello los materiales que queremos organizar para impartir a distancia esta materia van dirigidos fundamentalmente (aunque no exclusivamente) al profesorado de secundaria. Nos parece que conocer las dificultades que encuentra este profesorado puede servir de nexo de unión entre el profesorado de universidad y el de secundaria, lo que seguramente mejorará la acogida y la relación que la universidad tenga con el alumnado que llegue de secundaria a la universidad.

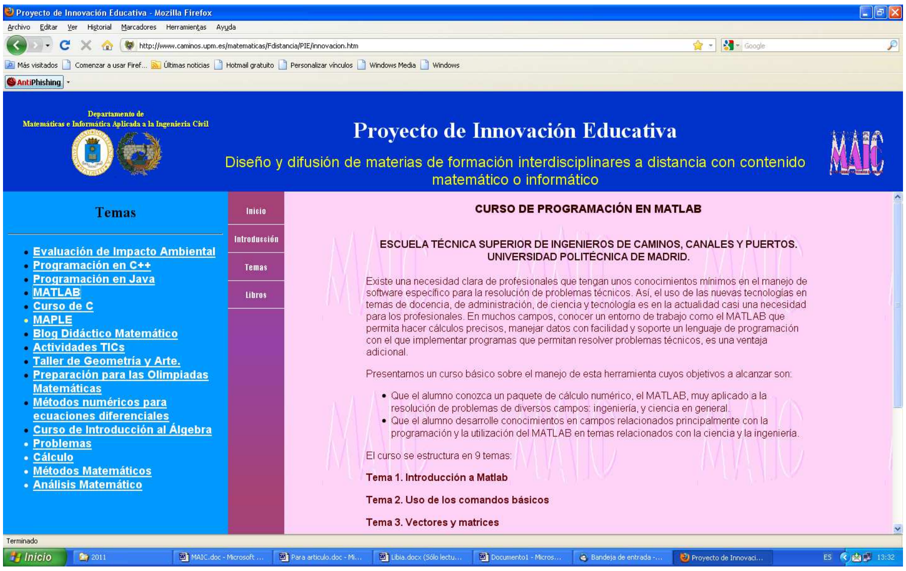


Figura 4. Curso de programación en MATLAB.

2.5. Blog en innovación educativa

Se ha confeccionado un blog sobre innovación educativa. Este blog servirá también como nexo de unión entre el profesorado de secundaria y el de universidad permitiendo en su foro de discusión conocer las distintas sensibilidades, y mejorar de forma colateral el conocimiento sobre el alumnado que llega a la universidad para poder resolver las carencias y las dificultades que plantea este nuevo alumnado.

Figura 5. Blog de innovación educativa en Matemáticas.

2.6. Actividades TICs

Se denominan actividades TICs aquellas actividades que utilizan las nuevas tecnologías. Pueden dividirse en dos tipos de tecnologías, las propias de un aula de informática de los centros, y las que pueden impartirse en el aula de clase usual dotada de algún medio técnico. Miembros del equipo ya llevan tiempo reflexionando sobre la forma de impartir enseñanzas de matemáticas en el aula de ordenadores. Pero en este proyecto se han elaborado materiales adecuados para que el profesorado tanto de secundaria como de universidad, se atreva a utilizar con su alumnado dichos medios. Para ello lo primero es seleccionar aquellas partes de las asignaturas de secundaria y de la universidad que mejor pueden enseñarse, y lo segundo ver si el uso de una hoja de cálculo, si el uso de un software... puede mejorar la enseñanza y aprendizaje. Estos materiales se están difundiendo en la página web del grupo de investigación MAIC.

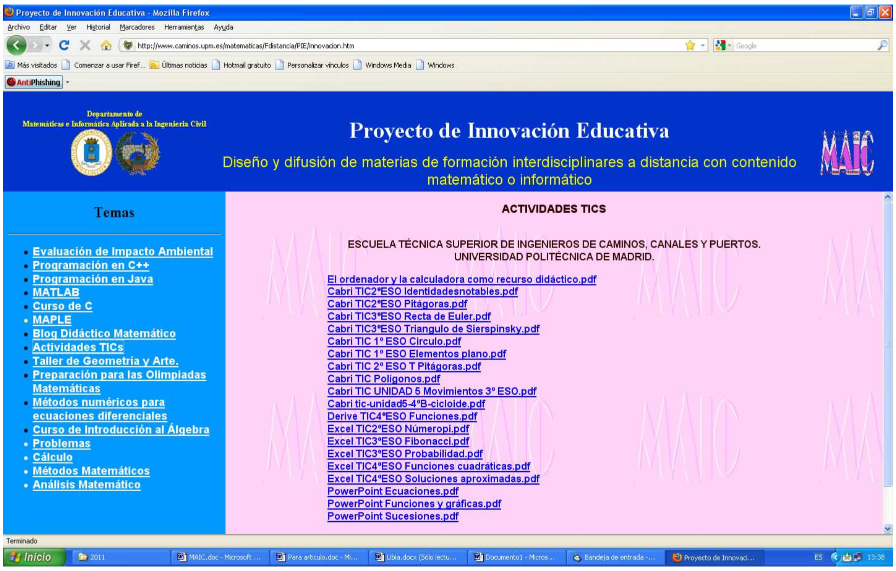


Figura 6. Actividades TICs.

2.7. Otros proyectos

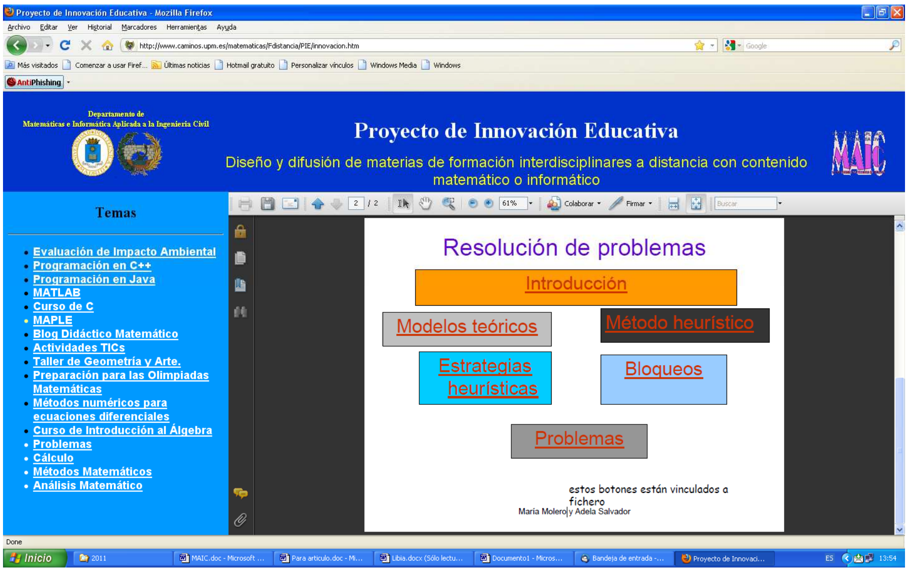


Figura 7. Resolución de problemas.

Posteriormente continuamos trabajando con el proyecto: SEGUNDA PARTE DEL PROYECTO DISEÑO Y DIFUSIÓN DE MATERIAS DE FORMACIÓN INTERDISCIPLINARES A DISTANCIA CON CONTENIDO

MATEMÁTICO O INFORMÁTICO con el que se desarrollaron los materiales siguientes:

- ✓ Preparación para las Olimpiadas Matemáticas
- ✓ Programación en C
- ✓ Taller de Geometría y Arte
- ✓ Curso de Introducción al Álgebra
- ✓ Problemas, problemas, problemas.
- ✓ Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales

Actualmente está en curso que se apruebe un proyecto que tiene como objetivos:

1. Adaptación de materiales y de docencia mediante Internet, dirigida especialmente a proporcionar un apoyo eficaz al alumnado con motivo de la extinción de las titulaciones de los planes de estudio anteriores al Real Decreto 1393/2007, mediante sistemas de tutela para aquellas materias sin docencia del Departamento de Matemáticas, y la elaboración de materiales de autoestudio y autoevaluación.
2. Diseño de las materias indicadas en la web del departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil de la ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Preparación para las Olimpiadas Matemáticas, Curso de resolución de problemas y pensamiento matemático, Cálculo, Álgebra, Análisis Matemático, Métodos Matemáticos, Informática), para promover su formación a distancia, y que se puedan utilizar tanto para una puesta a punto del alumnado como para ayudar en las asignaturas que quedan sin clases presenciales por la extinción de las titulaciones

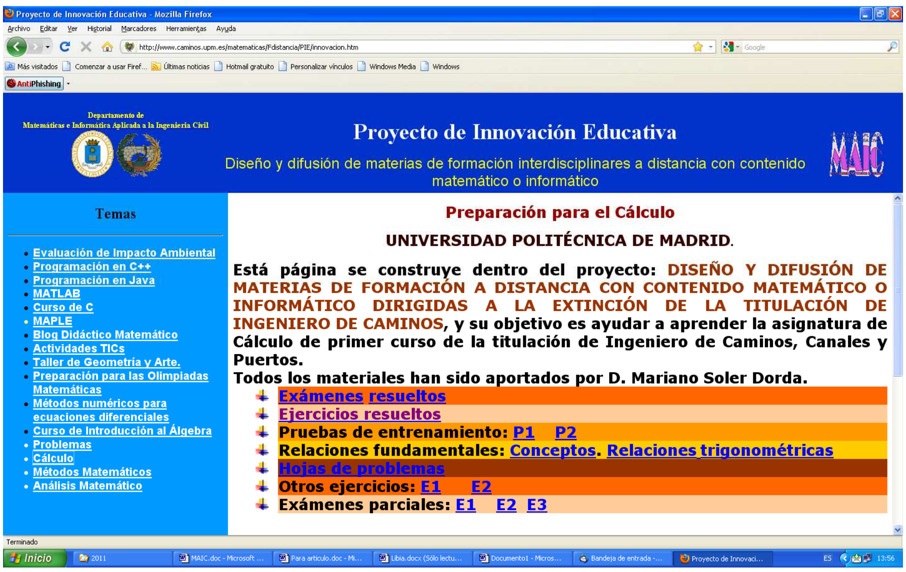


Figura 8. Preparación para el cálculo.

3. Difusión de dichas materias en la web del grupo de investigación "Matemática aplicada a la ingeniería civil (MAIC)", en cursos, conferencias, seminarios, exposiciones, artículos y libros.
4. La obtención de nuevos conocimientos generales, científicos y técnicos que supongan un avance dentro del ámbito de las nuevas tecnologías y de la innovación educativa.
5. Conseguir que la web constituya un repositorio de recursos docentes que pueda ser utilizado por el alumnado y el profesorado conjuntamente, e incluso por el alumnado de diferentes centros.
6. Internacionalización de las actividades y la publicación de sus resultados en foros de impacto científico y tecnológico.

3. Conclusiones

La web del grupo MAIC se ha ido enriqueciendo con nuevos materiales adecuados para el autoaprendizaje y para la formación a distancia. El alumnado puede acceder libremente y trabajar con dichos materiales.

Nos parece que la mejora de esta web, tanto en contenidos como en su formato es de gran interés tanto para el profesorado como para el alumnado.

Referencias

[1] BUDD, Timothy A.; *An Introduction to Object-Oriented Programming*; Addison-Wesley, 2002. (Tercera edición)

[2] LAFORE, Robert; *Object-Oriented Programming in C++*; The Waite Group, 1999.

[3] GARMENDIA, A.; SALVADOR, A.; CRESPO, C.; GARMENDIA, L. *Evaluación de impacto ambiental*, Incluye CD Rom. Pearson Educación, Prentice Hall. 2005

[4] MAIC http://www.caminos.upm.es/matematicas/Fdistancia/PIE/innovacion.htm

Sobre los autores:

Nombre: Adela Salvador Alcaide

Correo Electrónico: ma09@caminos.upm.es

Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España

Nombre: Alfonso Garmendia Salvador
Correo Electrónico: algarsal@upvnet.upv.es
Institución: Universidad Politécnica de Valencia, España.

Experiencias Docentes
Uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación para la Enseñanza de las Matemáticas a Alumnos con Minusvalía Visual

José Manuel Sánchez Muñoz
José Eduardo Badilla Mora

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

3 de mayo de 2011

Resumen

En este artículo se pretende llevar a cabo una presentación de las herramientas tecnológicas que podemos utilizar en nuestra labor docente cotidiana como elemento integrador de aquellos alumnos que poseen minusvalía visual, de modo que como profesionales podamos atender la necesidad educativa de éstos, a la vez que garantizamos un apropiado aprendizaje de los contenidos matemáticos establecidos por el currículo. Se presentará de manera explícita el abordaje de aquellos contenidos que involucran representaciones gráficas, tales como los relacionados con la estadística, geometría, funciones o trigonometría. Se expone información sobre el uso del software *Quick Tac 4.0 versión beta* combinado con *Quick Tac 3.1*, *Math Trax*, *Vozme*, y la impresión de documento en braille mediante las máquinas de impresión *Juliet Pro 60*, o *Book Maker* entre otras.

Palabras Clave: Braille, discapacidad visual, matemática, notaciones matemáticas braille, Duxbury, Quick Tac, Math Trax, Vozme, impresoras braille, tecnología, máquinas perkins.

1. Introducción

Es innegable la creciente importancia del uso de las nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación como herramientas indispensables en nuestra labor docente cotidiana. Tan o más importante es la integración dentro de la comunidad educativa de aquellos alumnos que poseen algún tipo de minusvalía mediante adaptaciones curriculares y medidas de atención a la diversidad. En particular en este artículo trataremos como integrar el uso de estas herramientas en nuestras aulas con alumnos que posean cualquier tipo de minusvalía visual, ya sea ceguera total o parcial.

Entre la amplísima gama de alternativas posibles a utilizar, intentaremos adaptar éstas de tal manera que garanticemos la óptima integración del alumno y un apropiado aprendizaje de los contenidos matemáticos. Entendemos que, desde nuestro punto de vista como docentes, el uso de toda esta tecnología nos permitirá proponer al alumno con minusvalía visual contenidos adaptados que permitan y potencien un aprendizaje significativos de todos los contenidos establecidos por el currículo. Fundamentalmente nos hemos centrado en alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O) con edades entre 12-16 años, aunque por supuesto puede hacerse extensible tanto a alumnos de primaria como de estudios superiores (Bachillerato y Universidad) según lo establecido por la *Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE)*, del 3 de octubre de 1990 (publicada en el BOE de 4 de octubre) en España.

El enfoque que se mantendrá será el de la utilización de las tecnologías por personas videntes para estudiantes con condición de ceguera total o parcial. Este será nuestro principio de aplicación de las mismas, pues el software que se utilizará como eje principal es, por su naturaleza, de carácter visual. Se hará uso de las tecnologías como puente entre el contenido matemático y el aprendizaje del mismo con el propósito de que esta información se ponga en práctica en centros de educación inclusivos para su difusión y posible replicabilidad.

2. Recursos Tecnológicos

Existe una gran variedad de recursos tanto de equipos de impresión como de software adaptado a las necesidades de alumnos con este tipo de minusvalía. A continuación hacemos un breve exposición de algunos de ellos.

2.1. Impresoras Braille

Son impresoras con características semejantes a una impresora normal, su función consiste en imprimir en Braille desde cualquier ordenador el documento que se desee, para que el estudiante con discapacidad visual pueda consultarlo por medio de su lectura táctil, lo que comúnmente se denomina *impresión en alto relieve*. Las impresoras braille se ofrecen en diversos tamaños según las exigencias del usuario, en modelos que satisfacen las necesidades personales, de la escuela o de una editorial Braille, con capacidad para imprimir por ambas caras del papel con una velocidad de hasta 150 signos por segundos.

La siguientes figuras muestran algunas de las máquinas impresoras más representativas del mercado, la 1 y 2 de la marca *Enable Technologies*[1] y la 3 y la

[1] http://www.brailler.com/

4 de la marca *Braille Works*[2].

Figura 1. Juliet Pro 60 Braille Printer

Figura 2. Book Maker

Figura 3. Index Braille 4×4 Pro

Figura 4. Basic D Braille Embosser

2.2. Quick Tac 4.0 versión beta

QuickTac[3] es un software de "dibujo" a partir de una construcción de una red de puntos. Estos puntos pueden ser impresos directamente en relieve en alguna impresora braille capaz de producir gráficos, o ser guardados en un archivo que se puede insertar en Duxbury DBT o abrir en MegaDots. Permite la elaboración de materiales o documentos completos que incluyan dentro de los mismos gráficos de cualquier índole, con capacidad de ser impresos en Julieth Pro 60, Book Maker, o Index Braille 4×4 Pro entre otras.

Se trata de un software bastante intuitivo, relativamente sencillo de manejar y de gran utilidad para la preparación de material específico para los alumnos no videntes o con deficiencias visuales.

Es un software con licencia freeware (se puede descargar libremente de su página), con el que podemos imprimir sobre relieve prácticamente cualquier figura elemental (lineas, curvas, círculos, triángulos, rectángulos, texto,...). Des-

[2] http://www.brailleworks.com/Products/BrailleEmbossers.aspx
[3] http://www.duxburysystems.com/tgd.asp?choice=quick

graciadamente el inconveniente que tiene es que no existe una versión en castellano, pero su sencillez hace que este último factor no sea tan importante.

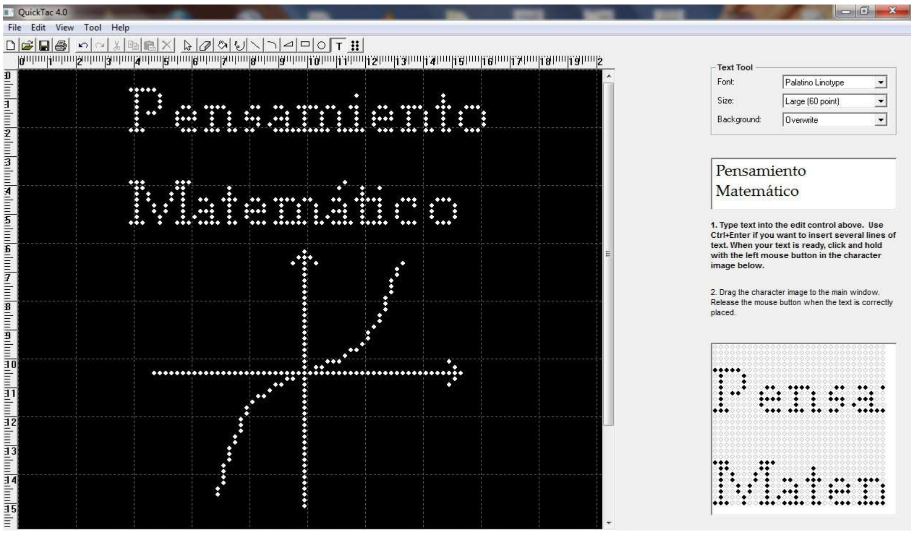


Figura 5. Quick Tac 4.0 versión Beta

2.3. Quick Tac 3.1

Al igual que el anterior, este software permite trasladar al sistema de braille textos en formato de texto (*.txt, *.doc, etc). En la adaptación de materiales con contenidos de matemáticas, facilita la transliteración de texto convencional a Braille y la edición final del mismo se efectúa por medio de la digitación manual de las expresiones propiamente matemáticas (notaciones matemáticas braille específicas).

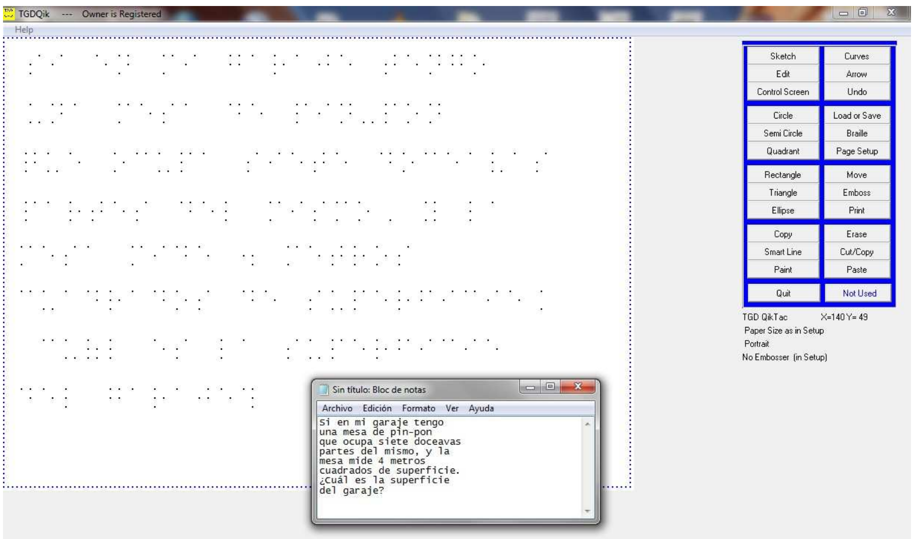


Figura 6. Transliteración de texto escrito a Braille con Quick Tac 3.1

Al igual que el anterior se trata de un software en inglés, y también permite dibujar cualquier figura elemental para su posterior impresión a través de una máquina en alto relieve.

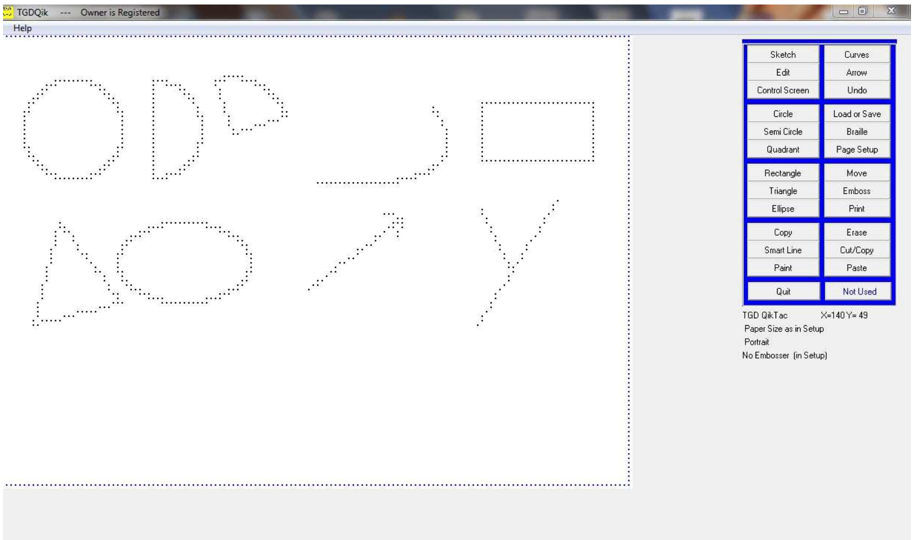


Figura 7. Representación de figuras elementales con Quick Tac 3.1

2.4. Math Trax

Math Trax[4] un software desarrollado por la NASA con capacidad de generar representaciones gráficas en pantalla y estudio de las características de las mismas por medio del sonido (monotonía, signos de la función, entre otros) y una descripción de la función en pantalla accesible por medio de algún lector de pantalla como por ejemplo Jaws. Desafortunadamente también se trata de un software en inglés.

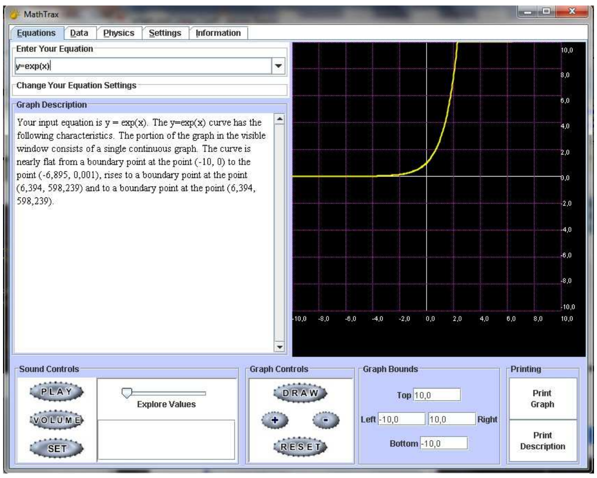


Figura 8. Representación de $y = e^x$ mediante Math Trax

[4] http://prime.jsc.nasa.gov/mathtrax/

2.5. Vozme

Vozme[5] se trata de un servicio online gratuito que nos permite convertir archivos en formato de texto en archivos de audio y después incluso descargarlos en formato *.mp3 para su posterior edición. Su uso docente puede ser muy útil a la hora de establecer enunciados de problemas o definiciones de contenidos.

Figura 9. Vozme

2.6. Lectores de Pantalla

Son programas específicos para la lectura del display del ordenador. Pueden ser de pago como Jaws[6] o bien gratuitos como NVDA[7].

3. Aprendizaje Matemático, Notaciones Matemáticas Braille y Máquinas Perkins

El aprendizaje real de las matemáticas de un estudiante con discapacidad visual es un proceso que se inicia desde los primeros momentos en que él mismo empieza a experimentar el mundo que lo rodea por medio de sus otros sentidos. En ese momento el tacto se convierte en uno de los sentidos trascendentales por medio del cual su aprendizaje se irá agudizando cada vez más, hasta prácticamente alcanzar niveles de comprensión, desarrollo y aplicación, muy semejantes al del estudiante vidente. Es necesario fomentar la exploración táctil de formas concretas (figuras geométricas) y establecer una representación táctil de las mismas mediante figuras representadas e impresas en alto relieve. De esta forma se responde a las necesidades posteriores de "lectura" de figuras en alto relieve que se presentarán como instrumentos de ayuda en la comprensión de conceptos matemáticos. Una buena lectura y comprensión de una

[5] http://vozme.com/index.php?lang=es
[6] http://www.freedomscientific.com/products/fs/jaws-product-page.asp
[7] http://www.nvda-project.org/

representación gráfica en relieve comienza desde su elaboración con tamaños apropiados, hasta la creación de la imagen táctil en el cerebro.

En este sentido el estudiante no vidente debe aprender a construir imágenes cerebrales por medio de la información que el tacto de sus dedos le envía. Una buena "lectura" de una figura comienza por un reconocimiento general de la misma con la palma de la mano extendida, esto dará la pauta del tamaño de la misma y la información que contiene. Posteriormente se inicia con el reconocimiento minucioso y detallado de la información insertada dentro de la misma y hacia donde se deben dirigir los flujos de información que garanticen el éxito de la resolución de la situación.

Figura 10. Máquina Perkins

La adquisición de destrezas en la lecto-escritura braille debe ser permanente y constante, buscando siempre alcanzar los mejores niveles de escritura y lectura. La utilización de la Máquina Perkins como recurso en el aprendizaje de las matemáticas debe ser uno de los pilares fundamentales para el aprendizaje significativo de las matemáticas, añadiendo a esto un vasto conocimiento de las notaciones matemáticas braille y su apropiada aplicación.

4. Adaptaciones en Contenidos de Geometría

Desde el punto de vista pedagógico, la geometría es quizás la parte de las matemáticas con mayor dificultad en cuanto al aprendizaje para el alumno. Esta dificultad es mayor en aquellos alumnos con algún tipo de minusvalía visual, puesto que además suele contribuir el hecho que estos alumnos no reciben la formación suficiente para desarrollar los contenidos relacionados con esta parte con la consiguiente incapacidad de poder interiorizarlos. El estudiante debe aprender a establecer las relaciones existentes entre una forma concreta y una representación gráfica de la misma. La no existencia de materiales adaptados por la dificultad que conlleva la elaboración de los mismos, promueve que el aprendizaje de estos tópicos se convierta en puros verbalismos o con significados irrelevantes para el estudiante.

Los medios gráficos son trascendentales en la comprensión de los conceptos geométricos, por ejemplo memorizar el Teorema de Pitágoras, expresar las propiedades de las figuras geométricas, o exclamar a la perfección la fórmula del cálculo del área de un círculo no tienen sentido sin una comprensión gráfica de la situación.

La enseñanza de todos estos contenidos ha sido hasta hace muy poco una labor muy compleja para el docente puesto que no existía suficiente documentación ni acceso a tecnologías que nos permitieran desarrollar los contenidos y permitir a estos alumnos la posibilidad de experimentar un aprendizaje significativo y tener un nuevo desarrollo cognitivo óptimo y eficiente con respecto a la geometría.

El sólo hecho de generar alguna figura geométrica de forma rudimentaria (utilizando alguna rueda dentada que permita perforar el papel) se convierte en una tarea tediosa y presenta la inconveniencia de ser un trabajo complicado para un único estudiante.

Una buena combinación y aplicación de software como por ejemplo Quick Tac 3.1 y Quick Tac 4.0 permiten la elaboración de materiales digitales con presencia de figuras geométricas de tal forma que facilitan o agilizan la comprensión de contenidos. Una de las propiedades que tienen estos archivos digitales después de su elaboración es que bastaría con un simple comando de impresión para producir el número de ejemplares que se necesiten.

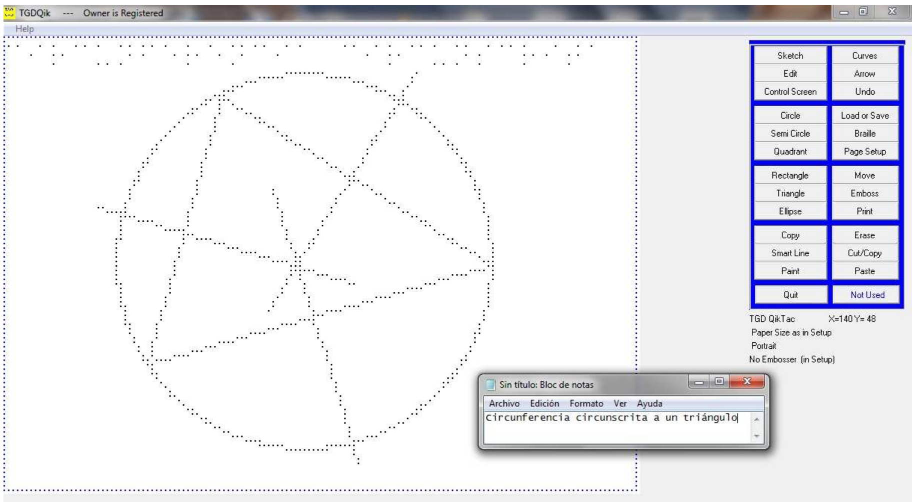


Figura 11. Circunferencia circunscrita a un triángulo con Quick Tac 3.1

5. Adaptaciones en Contenidos de Cálculo

Uno de los contenidos en los cuales se refuerza su aprendizaje por medio de representaciones gráficas, es el de las funciones. La carencia de materiales adaptados que formalicen el concepto de función imposibilita un aprendizaje significativo por parte del estudiante. La utilización de software específico para la formación matemática, promueve ambientes de aprendizaje accesibles que propician el desarrollo académico idóneo de los alumnos con ceguera, lo que posteriormente repercutirá de manera positiva en su desarrollo personal.

En este sentido se deben conocer las tareas que cumplen todas estas herramientas tecnológicas de forma individual, que al final combinadas producen experiencias pedagógicas muy positivas. Las impresoras braille, el software de transliteración al sistema puntiforme, la edición de gráficos en relieve, o aquellos que permiten generar representaciones gráficas de funciones en pantalla y su respectivo estudio por medio del sonido y por algún lector de pantalla, contribuyen en la actualidad a experimentar múltiples estrategias pedagógicas y a la formación matemática de un estudiante no vidente con grandes garantías de éxito.

Un ejemplo de lo expresado anteriormente es el siguiente: Se pretende enseñar al estudiante funciones trigonométricas y en particular hacer un estudio de la función $y = \operatorname{sen}(x)$. Supongamos que contamos con las siguientes herramientas tecnológicas; computadora, impresora braille, Quick Tac 3.1, Math Trax, Jaws y Quick Tac 4.0. La estrategia metodológica puede ser la siguiente:

1. Por medio de Quick Tac 4.0 creamos la representación gráfica de la función.

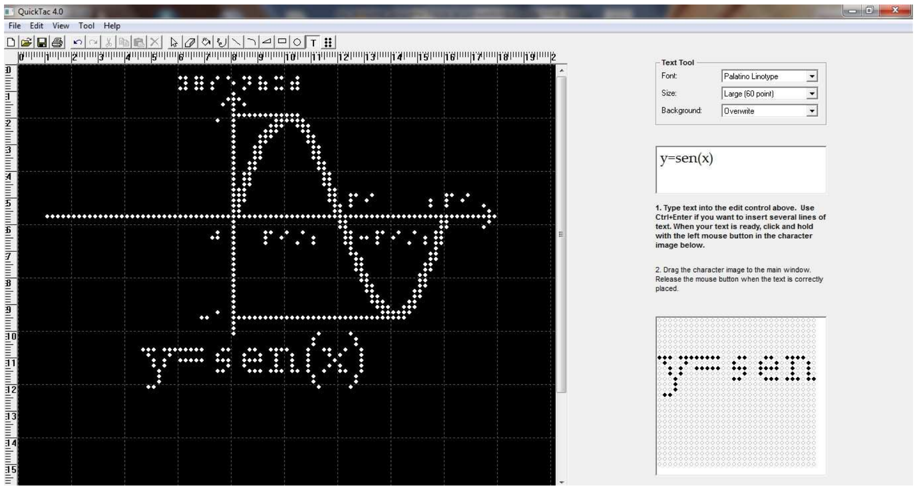


Figura 12. Representación de $y = \operatorname{sen}(x)$ con Quick Tac 4.0

2. Con la ayuda de Quick Tac 3.1 transcribimos a Braille la teoría de la función (puntos de corte con el eje de abcisas, máximos y mínimos,...)

El material está listo para ser reproducido en alguna de las impresoras braille y ser entregado al estudiante. Esta labor de construcción de material con ayuda de las herramientas tecnológicas citadas, es efectuada por los docentes (educación especial en coordinación con el respectivo profesor de apoyo específico). De esta forma el estudiante no vidente cuenta con un material adaptado de alta calidad, aumentando las posibilidades de acceso al estudio de dicho contenido.

5.1. Tareas que realiza el estudiante

El alumno estudia el material que se le brinda con explicación del docente. Con ayuda de Math Trax construye la representación gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(x)$ en el ordenador y explora la misma en busca de sus características expuestas en teoría. Al ser Math Trax un programa diseñado específicamente para el estudio de las funciones por medio de sonidos, la exploración se convierte en un trabajo motivador. El estudiante tiene la posibilidad de explorar por medio de sonidos y del tacto de manera paralela los intervalos de crecimiento de la función, signos, intersección con ejes coordenados, o máximos y mínimos entre otros.

La utilización de Math Trax en los procesos de formación y aprendizaje de las funciones se convierte en una herramienta de gran valor, que puede ser combinada con Jaws o NVDA.

6. Adaptaciones en Contenidos de Estadística

La enseñanza de la estadística a estudiantes con ceguera debe ir mas más allá de simples aprendizajes memorísticos de definiciones que no trascienden en la formación de nuestra población, es necesario presentar al estudiante gráficos que complementen esta información y lo lleven a crear sus propias conclusiones. Es atrevido decir que la mayoría de personas no videntes involucradas en un ambiente académico desconocen o nunca en sus vidas han experimentado los maravillosos gráficos que son consecuencia de un proceso de investigación.

Mediante la utilización del ordenador, la impresora braille y el programa Quick Tac 4.0 ha sido posible diseñar gráficos estadísticos como histogramas, pastel, bastones, o polígonos de frecuencia entre otros, que en definitiva son de fácil lectura y una comprensión aceptable por parte de los estudiantes. Los mismos hoy día pueden servir para interiorizar la información y trasmitirla a su vida cotidiana, además de poder estudiar situaciones en donde se retomen contenidos estadísticos y describir los resultados que los mismos arrojan.

6.1. ¿Cómo fomentar la accesibilidad de la Estadística para el estudiante con discapacidad visual?

1. Por medio de Quick Tac 4.0 creamos la representación gráfica de la función.

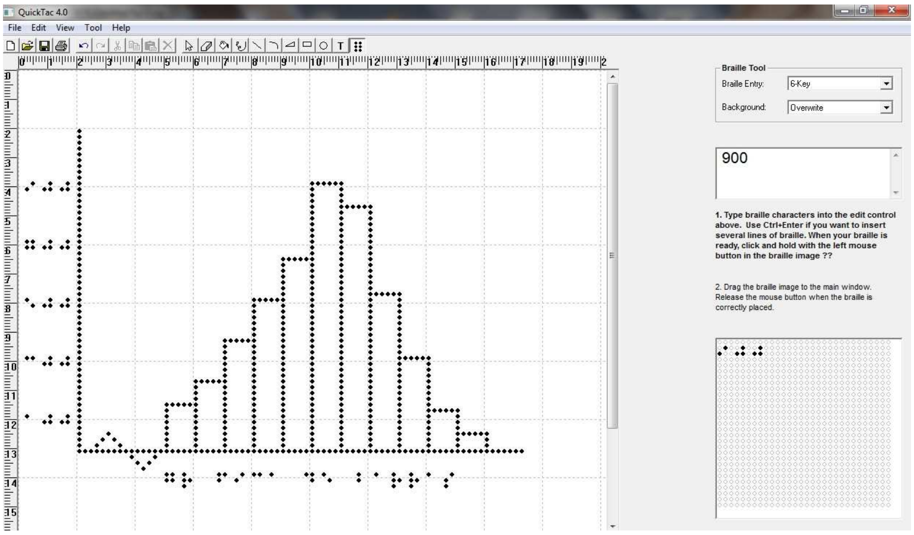


Figura 12. Representación de gráfico de barras con Quick Tac 4.0

2. Impresora braille con capacidad de generar gráficas. El estudiante con entrenamiento en "lectura" de gráficos estadísticos interpreta los distintos comportamientos de las variables.

Figura 14. Impresora braille imprimiendo

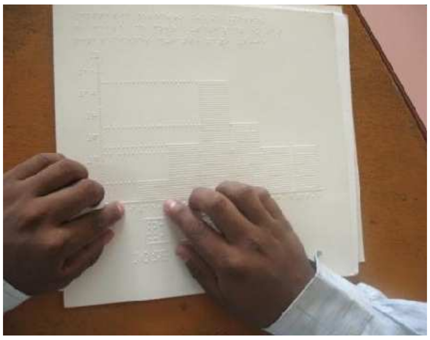


Figura 15. Lectura de gráfico de barras por estudiante no vidente

7. Conclusiones

El trabajo contribuirá a una mejor valoración acerca del proceso pedagógico de las matemáticas de los estudiantes con discapacidad visual, animando a algunos a seguir por si mismos la experimentación de nuevos horizontes y comprobar la múltiples posibilidades para la enseñanza de las matemáticas.

La metodología que se utiliza para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas mediante estos recursos didácticos debe ser práctica y eminentemente interactiva con el fin de obtener mayor comprensión y un abordaje pedagógico más inclusivo.

Es conveniente realizar algunas modificaciones pedagógicas al momento de desarrollar alguna explicación de contenidos o ejecución de actividades, las cuales deben ser consideradas por el mismo docente. Además se debe considerar la dificultad que el alumno ciego presenta para integrarse en igualdad de condiciones en actividades grupales donde se utilicen lenguajes iconos y gráficos.

Es necesaria la capacitación de los profesionales que trabajan con esta población, tanto docentes de educación especial como profesores de matemática que atienden en sus aulas estudiantes en condición de ceguera.

Referencias

[1] BADILLA, J. E. *Tecnología en la enseñanza de la matemática con discapacidad visual*, VII Festival de la Matemática, Instituto Tecnológico Costa Rica, Sede San Carlos, Costa Rica, 2010.

[2] BADILLA, J. E. *Vídeos sobre Matemáticas y Braille*, Instituto de Rehabilitación y Formación Helen Keller de Costa Rica, 2010.

Presentación del alfabeto braille http://vimeo.com/7628414
Notaciones Matemáticas Braille Elementales http://dai.ly/hIn0iP
Braille y Matemática http://vimeo.com/7630755
Simbología Matemática Braille http://vimeo.com/7626451
Geometría Simbología Braille http://dai.ly/ekZY6G
Estadística y Representación funcional con Braille
http://vimeo.com/7549808

[3] DELLA, J. J. *Notación Matemática Braille*, Editorial TIPOLAC, S.A., San Lorenzo, Buenos Aires, Argentina, 1998.

[4] DUXBURY, *Algunas notas sobre Quick Tac 4.0*,
http://www.tactileaudio.com/doc.htm

[5] FERNÁNDEZ, I., MERCADO, A., PASTOR, P., *Discapacidad Visual. Materiales para el Aprendizaje*, Editorial ICEVI, Córdoba, Argentina, 1999.

[6] ONCE, *Actas del Congreso Estatal sobre prestación de servicios para personas ciegas y deficientes visuales*, Área de Educación 2. Editorial ONCE, Madrid, 1994.

[7] SÁNCHEZ MUÑOZ, J. M. *Actividades para la Adaptación Curricular de Alumnos con incapacidad visual en 4º E.S.O*, Mi Rincón Matemático www.mates.byethost4.com
Unidad Didáctica 1 - Números Reales - Actividad 1
http://www.box.net/shared/9j52k564gz
Unidad Didáctica 1 - Números Reales - Actividad 2
http://www.box.net/shared/6izq1a2om9
Unidades Didácticas 6, 7 y 8
http://www.box.net/shared/5zonfysxz0
Unidad Didáctica 10
http://www.box.net/shared/b4lvgg9z6a
Unidades Didácticas 11 y 12 - Actividad 1
http://www.box.net/shared/h4vjx4g76q
Unidades Didácticas 11 y 12 - Actividad 2
http://www.box.net/shared/gf3jcj7gcz

[8] UNESCO, *Foro Mundial sobre la Educación*, Dakar, Senegal, 2000.
http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001211/121147s.pdf

Sobre los autores:

Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: José Eduardo Badilla Mora
Correo Electrónico: josebadillas@yahoo.com
Institución: Instituto de Rehabilitación y Formación Helen Keller, Costa Rica.

Historias de Matemáticas
Brianchón y su Teorema

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

3 de mayo de 2011

Resumen

Este artículo versa sobre las investigaciones de un joven Charles Julien Brianchón cuando sólo contaba con 21 años y estaba aún en su época de estudiante del École Polytechnique de París. Estos resultados sirvieron para poner de manifiesto uno de los pilares fundamentales de la cada vez más importante Geometría Proyectiva, el Principio de Dualidad y su relación con el Teorema de Pascal sobre cónicas demostrado 167 años antes.

1. Charles Julien Brianchón (1785-1864)

Charles Julien Brianchón nació en Sévres, una pequeña localidad cercana a París, el 19 de Diciembre de 1785[1]. Desgraciadamente no tenemos constancia ni registro alguno de su vida hasta que en 1804 entra al École Polytechnique con la edad de 18 años.

En el École Polytechnique de París, Brianchón estudió bajo la supervisión de una de las figuras fundamentales de la geometría de su tiempo como fue Garpard Monge.

Brianchón se graduó en 1808 como el primero de su promoción. Lo más lógico y lo que se esperaba de él es que hubiera continuado con su carrera académica, pero Francia vivía para entonces momentos revueltos con contínuos cambios políticos y sociales. Napoleón Bonaparte se había autoproclamado Emperador del Imperio en 1804, y mantenía el control de prácticamente toda la Europa continental con la única oposición en su contra de los ingleses, ya que sin el control naval no pudo organizar una invasión. Los Británicos bajo el mando de Nelson vencieron en la batalla decisiva de Trafalgar, donde la flota

[1]Parece que hay disparidad en esta fecha dependiendo de la fuente. Hay autores que consideran 1783 como la correcta.

Franco-Hispánica sufrió un duro revés y quedó prácticamente destruida. Napoleón entonces intentó forzar la estrategia del bloqueo de las Islas, paralizando todas las relaciones comerciales con las mismas. Sin embargo, Portugal no era partidario de seguir esta estrategia, ya fuera por motivos económicos o políticos, lo que provocó que Napoleón decidiera enviar a sus ejércitos a Portugal para forzarles a cambiar su actitud. Para estos momentos Brianchón acababa de graduarse en el École Polytechnique y se convirtió en teniente de artillería del ejército de Napoleón.

Aunque España había autorizado a los ejércitos de Napoleón a cruzar el país, su afán anexionista le hizo tomar la decisión de romper su acuerdo invadiendo completamente la Península, ocupando Lisboa, e intentando instalar a su hermano José Bonaparte, rey de Nápoles, como rey de España, por lo que ésta se alzó en armas contra esta ocupación. Se dice que Brianchón luchó de forma brava tanto en la campaña de Portugal como la de España, pero se encontraba en el bando perdedor y las fuerzas de Napoleón sufrieron ambas derrotas. Brianchón no sólo se destacó por su braveza como soldado, sino por su eficiencia resultando ser uno de los más capacitados.

Brianchón se mantuvo en las tropas de Napoleón durante los siguientes años, pero a pesar de su prometedora carrera militar, la dura vida en el ejército afectó a su salud. En 1813, cuando Francia tenía multitud de frentes abiertos, presentó una solicitud para abandonar el servicio por motivos de salud y poder asumir un puesto de profesor. Tuvo que esperar cinco largos años para poder conseguir su objetivo, pero finalmente en 1818 se convirtió en profesor de la Escuela de Artillería de la Guardia Real en Vincennes.

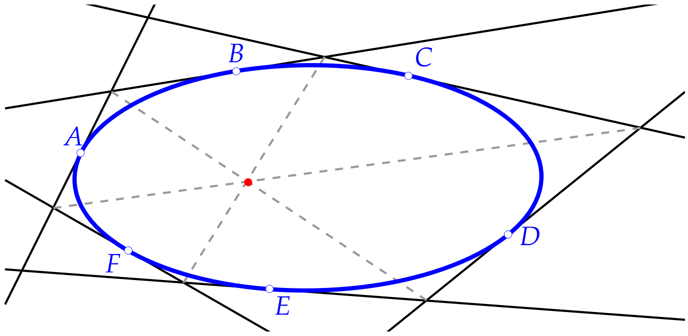
Entre 1816 y 1818 mientras intentaba convertirse en profesor, escribió una serie de trabajos centrados en la geometría. En ellos Brianchón demostró varios resultados importantes en el estudio proyectivo de las cónicas. Sin embargo, curiosamente, tras su nombramiento como profesor, abandonó poco a poco su labor investigativa, centrándose en otros intereses. Finalmente hacia 1823 se centró en su labor como profesor de Química. hasta 1825 publicó trabajos en ambas ramas, pero tras este año abandonó completamente su labor investigativa y editorial para centrarse única y exclusivamente en la docencia.

Poco más se puede resaltar de su persona, salvo que murió el 29 de Abril de 1864 en Versalles.

2. Sus Trabajos Matemáticos

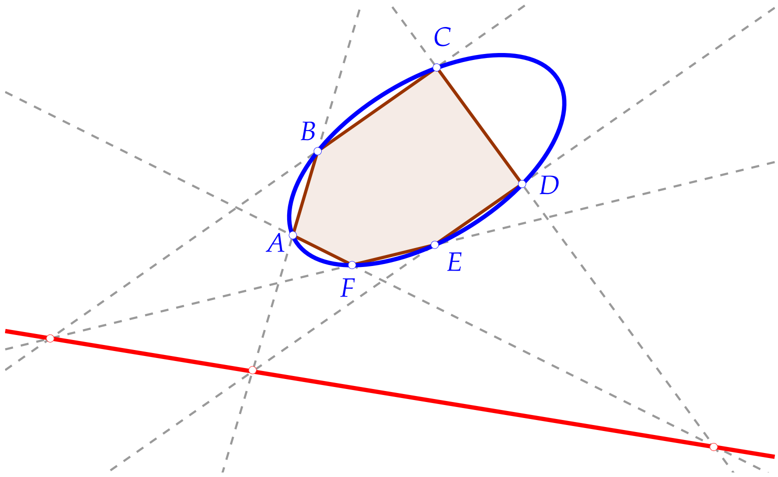
Su primera gran obra *"Sur les Surfaces Courbes du second degré"* es publicada en 1806, en el *Journal de l'École Polytechnique* cuando sólo era un estudiante de 21 años, y versa sobre las superficies curvas de segundo grado. En este estudio Brianchón "redescubre" las propiedades del Exavértice Mágico de Pascal, poniendo de manifiesto que:

> *"Dado un exalátero circunscrito a una cónica, es decir cuyos lados son tangentes a dicha cónica, las rectas que unen cada pareja de vértices opuestos se cortan en un punto."*



Teorema de Brianchón

Este resultado denominado “Teorema de Brianchón” puso de manifiesto uno de los resultados fundamentales de la Geometría Proyectiva que es el Principio de Dualidad, de tal modo que el “Teorema de Pascal”[2], demostrado 167 años antes en 1639, es el dual del de Brianchón.



Teorema de Pascal

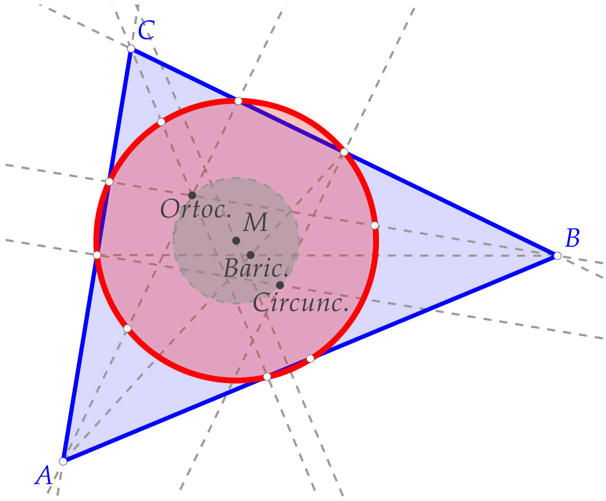
El trabajo que aquí se traduce sólo muestra la primera parte (de la página 297 a la 302), y resulta ser uno de los primeros en mostrar la importancia del Principio de Dualidad, y hacer uso de la Teoría de Polos y Polares para obtener nuevos resultados geométricos.

Brianchón publicó junto a Poncelet *“Recherches sur la détermination d’une hyperbole équilatère, au moyen de quatres conditions donnée”* en 1820, donde aparece una demostración del “Teorema de la Circunferencia de los Nueve Puntos”[3]. Aunque en realidad no fueran los primeros en descubrir este teorema, si que fueron los primeros en ofrecer una demostración apropiada del mismo y fueron ellos quienes usaron, por primera vez, el término de “Circunferencia de los nueve puntos”.

[2] *“Dado un exavértice inscrito en una cónica, los puntos de intersección de cada pareja de lados opuestos definen una recta.”*

[3] *“Sea un triángulo cualquiera. Los puntos definidos por los pies de sus alturas, los puntos medios de cada lado, y los puntos medios de los segmentos definidos por su ortocentro y sus vértices se encuentran sobre una circunferencia.”*

ISSN 2174-0410



Circunferencia de los Nueve puntos

3. El Teorema

Lema

Dada una recta AA' (Fig.A.) de longitud conocida, si sobre esta recta se considera un punto O arbitrario, que divida la recta en dos segmentos OA, OA', es siempre posible determinar sobre esta recta o sobre la recta prolongada un punto P que forme dos nuevos segmentos PA, PA' proporcionales a los dos primeros.

Es evidente que de los dos puntos O y P, uno estará situado sobre la recta AA', y el otro sobre la recta prolongada.

I

(Fig.1). Considérese en el espacio tres rectas arbitrarias AA', BB', CC', prolongadas si es necesario, que se encuentren en el mismo punto P[4].

$$\text{Llámese} \left\{ \begin{array}{c} L \\ l \\ M \\ m \\ N \\ n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{al punto de} \\ \text{intersección de} \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} AB & \text{y} & A'B' \\ AB' & & A'B \\ AC & & A'C' \\ AC' & & A'C \\ BC & & B'C' \\ BC' & & B'C \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{prolongados} \\ \text{si es necesario.} \end{array}$$

[4]Como ejemplo tomar tres aristas AA', BB', CC', de una pirámide triangular truncada.

Es evidente que los tres puntos:

L, M, N

L, m, n

l, M, n

l, m, N

están situados en la recta intersección del plano que pasa por los tres puntos:

A, B, C

A, B, C'

A, B', C

A', B, C

con el plano que pasa por los tres puntos:

A', B', C'

A', B', C

A', B, C'

A, B', C'

Ahora se observa que tomando dos cualesquiera de estas cuatro rectas de intersección, estas tienen un punto en común. Por lo tanto cada una de ellas cortará a las otras tres, y consecuentemente están todas situadas en el mismo plano, que designaré como XY.

II

Este plano XY en el cual están situados los seis puntos L, M, N, l, m, n, tiene la propiedad de que divide a cada una de las tres rectas AA', BB', CC', prolongadas si es necesario, en dos segmentos proporcionales a aquellos que el punto P forma en estas rectas.

Esta propiedad se basa en la siguiente proposición, tomada de *Géometrie de position*, p.282[5].

> *"En cualquier cuadrilátero completo[6] tomando sus tres diagonales, cada una de estas diagonales son cortadas por las otras dos en segmentos proporcionales."*

[5]El libro al que hace referencia es de L.M.N. Carnot, Paris, 1803. Es significativo que, habiendo escrito este artículo tan sólo tres años después de este libro, Brianchón considerase que el libro era ya tan conocido que al citarlo, no estimara necesario dar el nombre del autor.

[6]Un cuadrilátero completo es la composición de cuatro rectas prolongadas hasta que se corten; y la recta que une el punto de intersección de dos de estas rectas al punto de intersección de las otras dos se denomina diagonal.

Mémoire sur les surfaces du 2e Dégré.

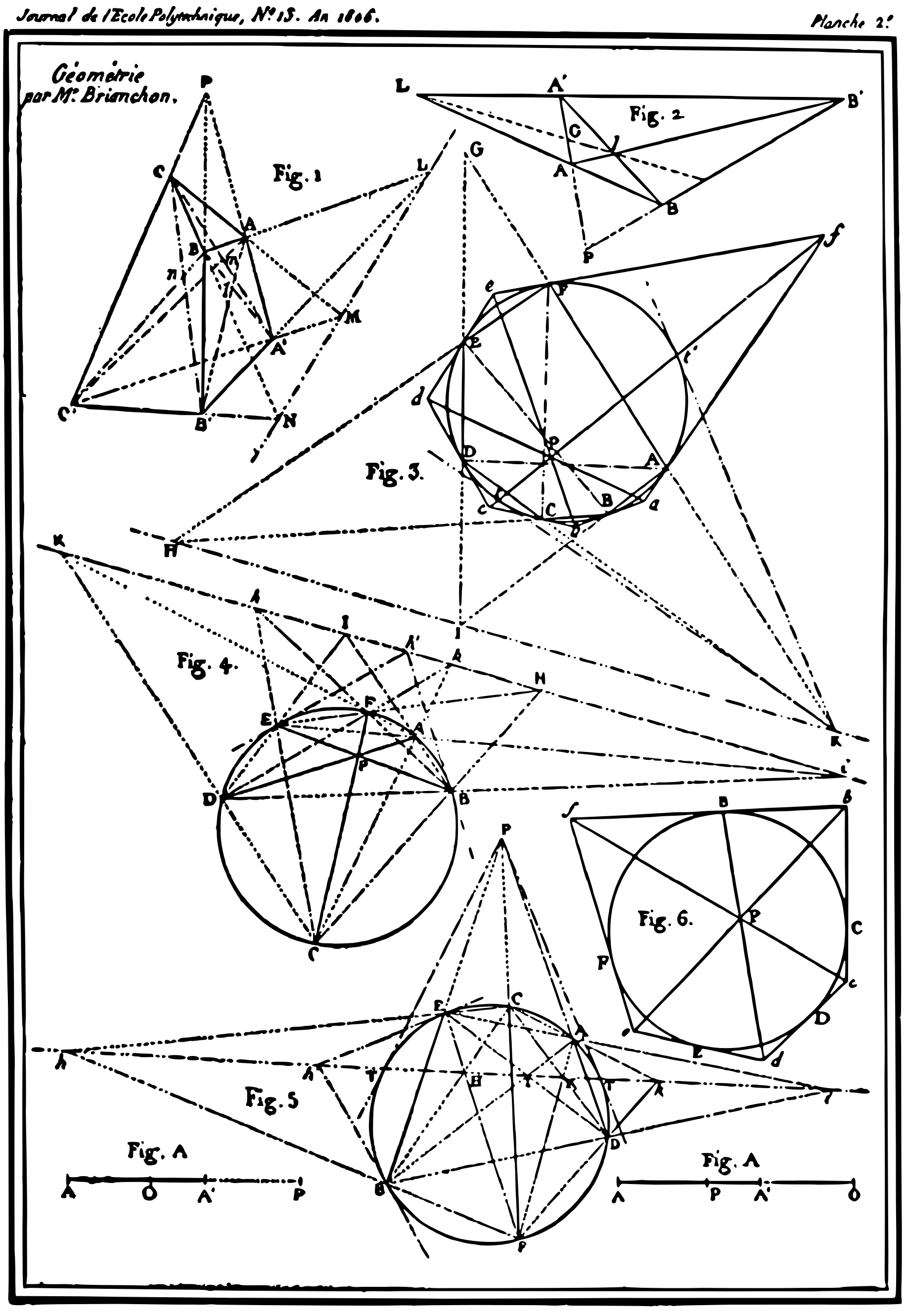


Lámina original

(Fig.2). Considérese, por ejemplo, qué sucede en el plano de las dos rectas AA', BB'; este plano se encuentra con el plano XY a lo largo de la recta Ll, y B, B' son los puntos de concurrencia de las caras opuestas del cuadrilátero $ALA'l$; por lo tanto las tres diagonales del cuadrilátero completo son BB', Ll, AA'.

Por lo tanto, de acuerdo al teorema anterior, cualquiera de las tres diagonales, digamos AA', es cortada por las otras dos, Ll y BB', en segmentos proporcionales OA, OA', PA, PA'; lo que nos dice, que estos cuatro segmentos satisfacen la relación

$$OA : OA' = PA : PA'$$

Imaginemos que proyectamos[7] sobre cualquier plano, el sistema de tres rectas AA', BB', CC', y todas las rectas de la construcción, y denotamos a la proyección de un punto con la letra invertida. De acuerdo a este convenio, ⅂ representa la proyección del punto L, y de igual forma lo haremos para el resto.

Esto supone que los seis puntos L, M, N, l, m, n, que se encuentran sobre la misma recta, tendrán sus proyecciones también sobre la misma recta, por lo que los seis puntos ⅂, W, N, l, ɯ, u, estarán dispuestos sobre cuatro rectas, de la misma manera que están dispuestos, en el espacio, los puntos de los que son proyección.

III

Se deduce de lo anterior que cuando las tres rectas AA', BB', CC' están dispuestas en el mismo plano, los seis puntos L, M, N, l, m, n, se encuentran dispuestos sobre este plano de tal forma que cuando son tomados de tres en tres en el orden indicado (I), cada uno de estos grupos de tres puntos pertenece a la misma recta.

IV

Debería suceder que tres de los seis puntos ⅂, W, N, l, ɯ, u, (por ejemplo l, ɯ, u, los cuales, en general, no se encuentran sobre una recta, ya que si lo hicieran, esto indicaría que el plano de proyección es perpendicular al plano XY, y se concluiría que los seis puntos se encuentran sobre la misma recta, y entonces (II) esta última recta cortaría a cada una de las tres rectas AA', BB', CC', prolongadas si es necesario, en dos segmentos proporcionales a aquellos que forman el punto P sobre las mismas rectas.

V

Uno puede, con la ayuda de las consideraciones anteriores, demostrar varias propiedades notables que pertenecen a las curvas de segundo grado. Con la intención de conseguirlo, recordaremos la siguiente proposición:

> (Fig. 3). *"En cualquier hexágono ($ABCDEF$) inscrito en una sección cónica, los tres puntos de intersección (H, I, K) de lados opuestos se encuentran siempre sobre una recta."*

[7] Se entiende que "ortogonalmente".

O de forma más general:

> *"Si sobre el perímetro de cualquier sección cónica se consideran seis puntos arbitrarios A, B, C, D, E, F, y si las rectas AB, AF se prolongan lo necesario hasta que se encuentren a las rectas DE, DC, en I, y K respectivamente, las tres rectas IK, BC, FE se cortan en el mismo punto."*(*Geómetrie de position*, p.452.)

VI

(Figs. 4 y 5). De nuevo sean tres rectas AD, BE, CF, inscritas en una curva de segundo grado de tal forma que concurren o se cortan unas a otras en el mismo punto P, si desarrollamos la construcción indicada en la figura, vemos, de acuerdo con el último teorema, que los puntos H, I, K se sitúan sobre una recta; ahora esto no sucede cuando las tres rectas AD, BE, CF, estando sujetas a cortarse unas a otras en el mismo punto P, no tienen relación entre ellas: por lo tanto (IV) los seis puntos H, I, K, h, i, k están todos sobre la misma recta que divide a cada una de las tres cuerdas AD, BE, CF, prolongadas si es necesario, en dos segmentos proporcionales a aquellos que el punto P forma en las mismas cuerdas.

VII

Supóngase ahora que una de estas tres cuerdas, por ejemplo CF, cambia de longitud, pero de un modo tal que mantiene al punto P en su dirección; los dos puntos I, i se mantendrán fijos, y los cuatro restantes H, h, K, k estarán aún situados en una recta indefinida Ii. Por lo tanto cuando la cuerda variable CF coincida con otra, digamos BE, de las que se mantienen fijas, las rectas BF, CE serán tangentes a la curva y tendrán sus puntos de intersección h' situados sobre Ii.

VIII

Cuando el punto P esté fuera del área de la sección cónica, hay un instante cuando los dos extremos de la cuerda movible se unan en un punto T, situados en el perímetro de la curva y sobre la línea Ii.

IX

(Fig. 3). Sea $abcdef$ un hexágono arbitrario circunscrito en una sección cónica, y B, C, D, E, F, A, los puntos de contacto respectivamente de los lados ab, bc, cd, de, ef, fa:

1º. Los puntos de intersección H, I, K de los lados opuestos del hexágono inscrito $ABCDEF$, son tres puntos situados sobre la misma recta (V);

2º. Si dibujamos la diagonal que se encuentra a la curva en los dos puntos t, t', las rectas KT, Kt', serán tangentes a t, t' respectivamente (VIII) e igualmente para las otras diagonales.

3º. Si desde cualquier punto K de la recta HIK se trazan las dos tangentes Kt, Kt' a la sección cónica, la cuerda tt', que une los dos puntos de contacto, pasa constantemente por el mismo punto P. (VIII).

Por lo tanto las tres diagonales fc, be, ad se cortan unas a otras en el mismo punto P, es decir:

> *"En cualquier hexágono circunscrito sobre una sección cónica, las tres diagonales se cortan unas a otras en el mismo punto."*

Este último teorema surge con consecuencias curiosas; aquí se tiene un ejemplo.

X

(Fig. 6.) Supóngase que dos de los seis puntos de contacto, digamos A y B se unan en un único punto B, el vértice a también coincidirá con B, y la figura se reducirá a un pentágono circunscrito $bcdef$; entonces aplicando el teorema precedente a este caso especial, vemos que las tres rectas fc, be, db deben cortarse unas a otras en el mismo punto P, es decir:

> *"Si en un pentágono arbitrario ($bcdef$), circunscrito en una curva de segundo grado, si trazamos las diagonales (be, cf), tal que no sean trazadas desde el mismo ángulo, estas se encuentran en un punto (P) sobre la recta (db) que se une al quinto ángulo (d) a el punto de contacto (B) del lado opuesto."*

Esta proposición da de una vez la solución al siguiente problema...Determinar los puntos donde cinco rectas conocidas son tangentes a una curva de segundo grado...Estos puntos una vez encontrados, nos permiten obtener todos los otros puntos de la curva mediante una construcción muy sencilla, lo que no requiere, tal como al inicio, ningún instrumento más salvo una regla (VI).

Construida la sección cónica, podríamos proponernos trazar sobre ella una tangente a través de un punto tomado fuera o sobre el perímetro de la curva. La construcción se desarrolla del mismo modo que las dos precedentes, sin la intervención de ningún compás, e incluso, sin ser necesario conocer el trazado de la curva (VII), (VIII).

Referencias

[1] AYRES, Frank. *Teoría y Problemas de Geometría Proyectiva*, pp. 102–109, McGraw-Hill, México, 1971.

[2] GODFREY, Charles, y SIDDONS, A. W. *Modern Geometry*, pp. 136–148, Cambridge University Press, London, 1912.

[3] Méndez Valentín, Luis; Martínez Simón, José Manuel; González Gámez, Francisco; Gordo Murillo, Carlos y Martínez Marín, Rubén. *Geometría Proyectiva. Tomo I. Formas Geométricas Fundamentales*, Colección Escuelas. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, pp. 147–155, 1ª ed, Madrid, 1995.

[4] O'Connor, John J., y Robertson, Edmund F. *Charles Julien Brianchon Biography*, The MacTutor History of Mathematics Archive, Universidad de St. Andrews, Escocia. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Brianchon.html

[5] Smith, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 331–336, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1929.

[6] Tabak, John. *Geometry. The language of the Space and Form*, pp. 66–84, The History of Mathematics, Facts on File,Inc., New York, 2004.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Esta obra está registrada
safecreative
1105039133008
INFORMACIÓN SOBRE DERECHOS

Historias de Matemáticas
Euler y la Conjetura de Fermat sobre Números Triangulares

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

11 de abril de 2011

Resumen

Este artículo describe la historia de como Euler demostró la existencia de infinitos números triangulares bicuadráticos, desde su correspondencia con su amigo Christian Goldbach hasta la publicación de sus resultados en la Academia de San Petesburgo.

1. La Conjetura

Podemos considerar sin lugar a equívocos que el gran genio matemático francés Pierre de Fermat fue quizás junto a su amigo y coterráneo René Descartes una de las principales figuras de las matemáticas de la primera mitad del siglo XVII.

Fermat acostumbraba a estudiar problemas sobre propiedades de números. En sus lecturas de la *Arithmetica* de Diofanto, a menudo realizaba anotaciones, desafortunadamente muchas de ellas sin demostración, que en multitud de ocasiones se convertirían en conjeturas unas veces, y en teoremas otras.

En una de estas anotaciones se presenta el problema que más adelante, ya en el segundo cuarto del siglo XVIII, el prolífico matemático suizo Leonhard Euler, animado por su gran amigo y confidente Christian Goldbach, refutaría. Fermat conjeturó que

"Ningún número triangular entero es un bicuadrado"

es decir

$$\frac{x(x+1)}{2} \neq n^4$$

2. Euler y su correpondencia con Goldbach

A lo largo de la historia de las matemáticas hay personajes que escribieron con letras de oro la evolución y los nuevos descubrimientos y avances de la misma, a los que admiramos por el ingenio de sus demostraciones o la efectividad que nos revelan sus aplicaciones. Desafortunadamente Christian Goldbach no se encuentra dentro de este grupo de elegidos, pero no por ello deja de tener importancia y significado dentro de la historia de las matemáticas.

Euler y Goldbach se conocieron en 1727, tras la llegada del segundo a San Petesburgo, poco antes de su nombramiento como tutor del zar Pedro II, siendo Euler un joven de tan sólo 20 años, y Goldbach, 17 años mayor que él, Secretario de la Academia de Ciencias. Comenzaron entonces una relación de amistad y confidencialidad que duraría hasta la muerte de Goldbach, y que dió como fruto multitud de los resultados que Euler presentó a lo largo de toda su vida. Goldbach comprendía mejor que nadie las implicaciones de los aportes de Fermat a la teoría de números, y sería injusto no reconocer el mérito que tuvo sobre la figura de Euler estimulándole en multitud de investigaciones que este llevó a cabo, apuntando certeramente hacia donde debían centrarse sus esfuerzos.

Para ser justo, debemos decir que las conjeturas que Goldbach presentaba a Euler en su correspondencia no siempre eran válidas. Precisamente el problema que tratamos en este artículo es uno de estos casos. En una de las multitudes cartas de su correspondencia mutua, Euler expone que podía probar que existen infinitos números raciones x para los cuales $\frac{x(x+1)}{2} = n^4$, en particular le expuso a Goldbach el caso $x = \frac{32}{49}$, para el que:

$$\frac{x(x+1)}{2} = n^4 = \left(\frac{6}{7}\right)^4$$

Goldbach respondió enseguida que había enviado a Daniel Bernoulli desde Moscú una carta con una demostración del mencionado teorema de Fermat, y de su *demostración* se podía afirmar que los números triangulares enteros diferentes del 1 y del 36 no podían ser cuadrados. A Euler este hecho le resultó muy chocante y se puso a trabajar en una demostración que lo refutara. Tras pocos días Euler había dado con la demostración que buscaba. Llegó a ella mediante el estudio profundo de las soluciones enteras de las ecuaciones diofánticas del tipo $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y^2$ y el importantísimo caso estudiado por Fermat y Wallis $x^2 - dy^2 = 1$ donde d no es un cuadrado (*).

3. Los números triangulares bicuadrados

Aparentemente la existencia de infinitos números triangulares que son cuadrados perfectos no resulta tan evidente como Euler nos puede haber hecho creer. Se trata de probar que existen infinitos pares de enteros (m, n) que solucionan la ecuación:

$$m^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

transformemos la ecuación, de tal forma que lleguemos a una ecuación que injustificadamente Euler llamó *Tipo Pell*, y decimos injustificamente puesto que el matemático inglés John Pell[1] a quien Euler alude, no trató este asunto jamás.

$$\begin{aligned} m^2 = \tfrac{n(n+1)}{2} &\Leftrightarrow 2m^2 = n^2 + n \\ &\Leftrightarrow 8m^2 = 4n^2 + 4n \\ &\Leftrightarrow 8m^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \\ &\Leftrightarrow 8m^2 + 1 = (2n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow (2n+1)^2 - 8m^2 = 1 \end{aligned}$$

Podemos observar que esta última es la ecuación de Pell con $x = 2n+1$, $y = m$, y $d = 8$. Se puede comprobar que una solución se obtiene para $n = m = 1$, es decir $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

Con respecto a esta última ecuación, ya anteriormente Brahmagupta en el siglo VII la había estudiado, y al parecer había aparecido por primera vez en la historia con el problema de los bueyes de Arquímedes. Esta ecuación fue resuelta en algunos casos particulares por el matemático Bashkara, hindú como Brahmagupta, en el siglo XII.

Respecto a la ecuación de Pell, se conoce un resultado, no fácilmente demostrable, que expresa lo siguiente:

> Sea d un número entero que no es cuadrado perfecto. Si el par de enteros (x_0, y_0) es una solución de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$, entonces existen infinitas soluciones (x_n, y_n) de la ecuación, dadas por la fórmula:
> $$x_n + \sqrt{d}y_n = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n$$

Si aplicamos este resultado a nuestro caso, y consideramos como solución inicial $(x_0, y_0) = (3, 1)$:

$$x_n + 2\sqrt{2}y_n = (3 + 2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k =$$

$$= \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k =$$

$$= \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k} (2\sqrt{2})^{2k} + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k-1} (2\sqrt{2})^{2k+1} =$$

$$\sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k}\, 8^{2k} + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k-1}\, 8^{2k}$$

[1] John Pell fue un matemático inglés que vivió durante el siglo XVII. El caso es que no está muy claro por qué este tipo de ecuaciones llevan su nombre. Al parecer el error lo cometió Euler al asociar un método de resolución de este tipo de ecuaciones a Pell en vez de a William Brouncker, el verdadero propietario de dicho método de resolución, que fuera presidente de la Royal Society. En su época Euler era un escritor muy leído, por lo que la inclusión de este fallo en alguna de sus popularísimas obras, provocó que esta asociación errónea se propagara con gran rapidez.

entonces se obtienen las infinitas soluciones (x_n, y_n) tales que:

$$x_n = \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k}\, 8^{2k}$$

$$y_n = \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k-1}\, 8^{2k}$$

4. La publicación de Euler y sus resultados

La demostración dada por Euler de la conjetura de Fermat sobre los números triangulares bicuadráticos fue presentada parcialmente en varias asambleas de la Academia de Ciencias de San Petesburgo. El artículo de Euler *"Regla simple para resolver fácilmente ecuaciones diofánticas en enteros"* fue presentado a la Academia el 15 de mayo de 1778. Euler dedicó muchos esfuerzos al análisis particular de la ecuación diofántica (*) y más tarde convenció a Lagrange para que continuara sus estudios, que condujeron a la teoría general de las ecuaciones binarias cuadráticas con coeficientes enteros:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Euler y Lagrange comprendieron que la solución de este problema general estaba ligada a la representación de enteros en formas cuadráticas:

$$n = ax^2 + bxy + cy^2$$

lo que dió mayor atractivo al problema, tan ingenuamente tratado por Goldbach. La existencia siempre de solución en enteros de la ecuación (*) fue demostrada por Lagrange en 1770.

Referencias

[1] BOYER, Carl Benjamin. *Historia de la Matemática*, pp. 241, 286, 485, Alianza Editorial, Madrid, 2010.

[2] ESCANDÓN MARTÍNEZ, Covadonga. *Historia de la ecuación de Pell*, http://astroseti.org/articulo/3594/historia-de-la-ecuacion-de-pell

[3] SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, Carlos, y ROLDÁN INGUAZO, Rita. *Goldbach. Una conjetura indomable*, Colección: La matemática y sus personajes, pp. 62–66, 1ª ed. Nívola, Madrid, 2009.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Esta obra está registrada
safecreative
1102018390582
INFORMACIÓN SOBRE DERECHOS

Historias de Matemáticas
¡Qué *Historia* esto de la Estadística!

Raquel Caro Carretero

Fernando García Jiménez

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

El desarrollo y el nivel de aplicación de la Estadística como herramienta útil y rigurosa en el campo de la investigación en todas las Ciencias han sido espectaculares en los últimos años. Este progreso ha venido estrechamente vinculado al que ha experimentado el área de la computación, que nos ha llevado a una sociedad absolutamente informatizada. Un segundo factor asociado a este progreso del conocimiento en el ámbito estadístico, ha sido el cambio de actitud experimentado por todos los profesionales.

Todo tiempo pasado, fue anterior.

Les Luthiers

Palabras Clave: Teoría de la probabilidad, análisis de datos, investigación empírica.

1. Introducción

De una sociedad en la que los roles y el desempeño de toda una gama de profesiones estaban ajustados a la mera aplicación de los conocimientos adquiridos, hemos evolucionado a una sociedad científica donde la investigación ha pasado a formar parte esencial de su labor diaria. El interés por descubrir nuevos procedimientos a través de la experiencia acumulada, ha sido determinante en la necesidad de que todos los profesionales se vean inmersos en la formación y aprendizaje de técnicas básicas de metodología de la investigación y de algunas más concretas como el análisis de datos.

Este cambio en la dimensión del ejercicio profesional, determina que los planes de estudio de todas las licenciaturas incluyan la Estadística[1], como materia troncal con entidad propia y de auténtica necesidad. Se pretende, con ello, que un profesional de cualquier Ciencia, que se apoye en la cuantificación y en el estudio empírico de lo que observa a diario, entienda y conozca los conceptos básicos de la Ciencia que le va a permitir, abandonando conductas pragmáticas, profundizar y comprender el fundamento científico de su área de trabajo.

El principal objetivo de los docentes de esta materia se centra en generar, en los discentes, una actitud crítica ante cualquier lectura científica y conocer a priori los pasos y los elementos imprescindibles en cualquier investigación empírica que se apoye en el manejo de volúmenes grandes de datos y cuyo propósito final sea condensar dicha información para que pueda ser transmitida o extrapolar las conclusiones a las poblaciones de las que fueron tomadas las medidas.

En general, a lo largo de nuestra formación académica, estudiamos las asignaturas científicas de una manera lineal y aséptica, como un cuerpo doctrinal fuera de cualquier contexto histórico, desligado de la vida de personas reales que contribuyeron a su desarrollo, así como de las circunstancias históricas y sociales que propiciaron la aparición de nuevas teorías y conocimientos; lo cual contrasta de forma sorprendente con el auge y éxito de ventas de las novelas históricas, de las biografías, ensayos sobre la historia de la Ciencia y libros en los que se mezclan la Matemática y la ficción. Pero por otro lado hay un sector importante de la población que desarrolla una auténtica hostilidad hacia las cuestiones científicas, considerando la Ciencia como una especie de gran enemigo de la humanidad.

Es por ello que creemos que resulta de gran interés centrar la evolución histórica de la Estadística, como una pequeña parcela de la Ciencia, así como conocer algo más sobre los esfuerzos de las personas que, para bien o para mal, contribuyeron a su desarrollo.

De este modo, el contenido de este trabajo abarca de manera resumida el proceso histórico que ha seguido la Estadística hasta su formación como cuerpo propio de generación de conocimiento.

[1] La Ley de Instrucción Pública de 9 de septiembre de 1857 establece que la Estadística será una disciplina académica. La Estadística entra en la Universidad.

2. ¿Qué es la Estadística?

La acepción vulgar del término Estadística hace referencia a una determinada información numérica, es decir, Estadística como método de descripción cuantitativa que utiliza el número como soporte objetivo. Se opone a los métodos de descripción cualitativos, más ricos y matizados en el detalle pero limitados por su carácter impreciso y subjetivo.

Esta primera definición tiene orígenes históricos y cada día se encuentra más arraigada en la sociedad actual inmersa en un mundo de cifras, como consecuencia del concepto popular que existe sobre el término. Hoy día es casi imposible que cualquier medio de difusión, periódico, radio, televisión, etc. no nos aborde diariamente con cualquier tipo de información estadística.

De hecho y durante mucho tiempo la Estadística ha sido la aritmética del Estado, un proceso de cálculo con el que se eliminan las diferencias individuales[2]. Así, sobre todo, se utiliza en los momentos de crisis económica o social, momentos en los que nos apabullan con cifras, gráficos, conceptos y expresiones que, incluyendo al que las dice, no comprende, tales como tasa de inflación, datos sobre el producto interior bruto, variaciones de los índices de precios, etc. Y aun suponiendo que lo que se le dice es correcto, la información puede estar manipulada o proporcionada solo parcialmente[3].

Pero la Estadística no puede entenderse simplemente como un conjunto de valores numéricos, ya que, sobre todo hoy día, la Estadística es una Ciencia que facilita no sólo los métodos precisos para la obtención de la información numérica de base sino que también proporciona métodos objetivables de análisis de esa información recogida y, en general, métodos de investigación aplicables al resto de las Ciencias.

La realidad es que la Estadística es un arma de impresionante potencia y utilidad que tiene a su disposición el investigador, el matemático, el sociólogo, el economista, el ingeniero, el médico y toda una variada gama de profesionales. Ahora, bien, como todas las armas es peligrosa y puede llegar a ser utilizada de manera incorrecta para la defensa de argumentos

[2] Filológicamente, el término Estadística tiene su raíz en la palabra estadista, y ésta a su vez en el latín "status".

[3] La creación de la Comisión de Estadística del Reino marca el comienzo de la Estadística oficial en España. El 3 de noviembre de 1856, el general Narváez, presidente del Consejo de Ministros de Isabel II, firma un Decreto por el que se crea una Comisión, compuesta por personas de reconocida capacidad, para la formación de la Estadística General del Reino. La Ley de 31 de diciembre de 1945 crea el Instituto Nacional de Estadística, que tiene como misión la elaboración y perfeccionamiento de las estadísticas demográficas, económicas y sociales ya existentes, la creación de otras nuevas y la coordinación con los servicios estadísticos de las áreas provinciales y municipales.

particulares.

Aún siendo difícil y arriesgado dar una definición genérica de Estadística, se acepta como definición más extendida la siguiente:

Es la ciencia cuya finalidad es estudiar los procedimientos destinados a la recogida, resumen, análisis e interpretación de un conjunto de datos, así como los conducentes a la obtención de inferencias científicas a partir de ellos.

Esta doble vertiente que tiene la Estadística es la consecuencia del proceso histórico seguido hasta su formación como cuerpo propio de generación de conocimiento. Para entenderlo mejor hablaremos sucintamente de esta génesis histórica.

3. Génesis histórica

Como Ciencia aplicada la Estadística cuenta su edad por milenios: las sociedades humanas más primitivas enumeraban sus características más relevantes: familias, utensilios de caza, cabezas de ganado, etc. Ya en el Pentateuco[4] se cita un censo de personas. No obstante, las referencias arqueológicas e históricas nos proporcionan las primeras evidencias de recuentos en el censo del emperador Yao en la China del año 2.238 a.C. y en documentos asirios, egipcios y griegos, que preceden a los más cercanos del Imperio Romano, en el que la preocupación por la actividad censal de los individuos y bienes del Estado tenía una clara finalidad tributaria y militar.

No obstante el avance general del conocimiento generado a lo largo de los siglos XVI, XVII y XVIII se refleja en la Estadística desde dos vertientes diferentes como ya veníamos apuntando. La primera de ellas, el conocimiento cuantitativo de las cosas del Estado en sus facetas de recogida de información, descripción y análisis de la misma, adquirió una base más científica a través de las mejoras introducidas por dos escuelas estadísticas: la alemana representada por F.H. Seckendorff (1673-1763), H. Conring (1606-1681) y G. Achenwall (1719-1772, a quien se le atribuye la introducción del término Estadística en una de sus obras, 1749) y la de los aritmético-políticos ingleses J. Graunt (1620-1674), W. Petty (1623-1687), etc., con sus trabajos demográficos sobre la mortalidad, preocupados por el problema del conocimiento exacto de la población, que en la ciudad de Londres disminuía considerablemente por efecto de sucesivas epidemias.

Es entonces cuando la Estadística comienza a tener un significado que se refiere al material numérico obtenido de la observación del mundo real. Precisamente esto justifica la primera parte de la definición que

[4] *O "Libro de Moisés": formado por los cinco libros de la Biblia (Antiguo Testamento).*

anteriormente hemos presentado.

Pero la gran transformación de la Estadística, que la ha convertido en una Ciencia susceptible no solamente de describir la realidad, sino de modelarla utilizando los métodos del análisis matemático, surge de su vinculación a éste a través del cálculo de probabilidades.

La imposibilidad de encontrar una causa o conjunto de causas que permitieran predecir el resultado, por ejemplo, al tirar un dado, hizo que las culturas antiguas atribuyeran los resultados de fenómenos aleatorios a la voluntad divina[5]. Y no es hasta el Renacimiento cuando, con un nuevo enfoque, se abandonan las interpretaciones teológicas del azar y se produce una reconsideración de los fenómenos aleatorios, haciendo que los matemáticos italianos de principios del siglo XVI comenzaran a interpretar los resultados de experimentos aleatorios simples. Aunque a partir del siglo XV algunos matemáticos notables como Kepler (1571-1630) y Galileo (1564-1642) habían esbozado unas primeras formalizaciones de algunos esquemas aleatorios. En 1526 Cardano establece, bajo condiciones de simetría, la equiprobabilidad de aparición de las caras de un dado a largo plazo, y Galileo, respondiendo a un jugador que le preguntó por qué es más difícil obtener un 9 tirando 3 dados que obtener un 10, razonó que de las 216 combinaciones posibles, 25 conducen a 9 y 27 conducen a 10.

Sin embargo el origen del cálculo de probabilidades se suele situar en el siglo XVII, con las aportaciones de los matemáticos franceses B. Pascal (1623-1662) y P. Fermat (1601-1665) sobre problemas clásicos de los juegos de azar, junto con el holandés C. Huygens (1629-1695), quien generaliza la media aritmética introduciendo el concepto de esperanza matemática. Esta nueva Ciencia fue tomando cuerpo a lo largo de los siglos XVIII, XIX, y comienzos del XX, merced a los logros de figuras tan notables como T. Bayes (1702-1761), Pierre Simon, Marqués de Laplace (1749-1827) y K.F. Gauss (1777-1855), entre otros muchos. Thomas Bayes establece el célebre teorema de Bayes, introduciendo los conceptos de probabilidad "a priori" y "a posteriori". Estas innovaciones, desarrolladas por el Marqués de Laplace, desembocan en la denominada Inferencia Bayesiana. Laplace establece por primera vez una definición explícita de probabilidad de un suceso, como el cociente entre el

[5] *La abundante presencia del hueso astrágalo de oveja o ciervo (que constituye el antecedente inmediato del dado) en las excavaciones arqueológicas más antiguas, parecen confirmar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40.000 años, y la utilización del astrágalo en culturas más recientes (Grecia, Egipto, y, posteriormente, Roma) ha sido ampliamente documentada. En las pirámides de Egipto se han encontrado pinturas que muestran juegos de azar que provienen de la primera dinastía (3.500 a.C) y Herodoto se refiere a la popularidad y difusión en su época de los juegos de azar, especialmente mediante la tirada de astrágalos y dados. Los dados más antiguos que se han encontrado se remontan a unos 3000 años a.C y se utilizaron tanto en juegos como en ceremonias religiosas.*

número de casos favorables y el de casos posibles, siempre que todos los resultados tengan igual probabilidad. Además, Gauss estudió, junto con Laplace, las aplicaciones de la Teoría de la Probabilidad al análisis numérico de los errores de medida en las observaciones físicas y astronómicas, dando lugar a la Teoría de errores.

La fusión de estas dos vertientes de mejora del conocimiento se ha plasmado en una nueva rama de esta disciplina, la Estadística Matemática, y cuyo fruto ha sido la disponibilidad de eficaces instrumentos que permiten poner en relación los datos recogidos con algún modelo ideal de probabilidad, ayudando a descubrir en la evidencia empírica algún tipo de regularidad estocástica.

Una contribución importante en 1846 a dicha síntesis se debió a A. Quetelet (1796-1874), que sostuvo la importancia del cálculo de probabilidades para el estudio de datos humanos y demostró que la estatura de los reclutas de un reemplazo seguía una distribución normal, e introdujo el concepto de "hombre medio".

Destacar también que los estudios sobre la evolución de poblaciones animales realizados por Darwin llevaron a F. Galton (1822-1911) a resaltar la necesidad de acudir a métodos estadísticos para contrastar tal teoría. Galton estudió exhaustivamente la distribución normal e introdujo el concepto de línea de regresión comparando las estaturas de padres e hijos. La importancia de su trabajo radica no solamente en el nuevo enfoque que introduce en el problema de la dependencia estadística, sino también en su influencia directa sobre W.R.F. Weldon (1860-1906), K. Pearson (1857-1936) y R.A. Fisher (1890-1962) entre otros. El primer departamento de Estadística, en el sentido actual de la palabra, fue patrocinado por él y llevó su nombre.

El enfoque estadístico propugnado por Galton para el estudio de la evolución, es aceptado con entusiasmo por Weldon, entonces catedrático de Zoología en la universidad de Londres, quien abandona el camino de los estudios embriológicos y morfológicos como medio de contrastar las hipótesis de Darwin y comienza a investigar en la aplicación de los métodos estadísticos a la biología animal.

La resolución de nuevos problemas enunciados por Weldon le obliga a buscar la colaboración de un filósofo matemático, Pearson. W.S. Gosset (1876-1937), que trabajaba en la firma cervecera Guinness de Dublín acude a Londres a estudiar bajo el patrocinio de Pearson. Los trabajos de Gosset, publicados bajo el seudónimo de Student (ya que Guinness no permitía divulgar las investigaciones de sus empleados) se centraban en el estudio de muestras pequeñas y dieron lugar a la conocida distribución de probabilidad t de Student.

Los fundamentos de la Estadística actual y muchos de los métodos de inferencia, son debidos a Fisher, quien inicialmente se interesó en la Ciencia que estudia la mejora, desde un punto de vista biológico, de los individuos de una especia vegetal o animal (eugenesia). Esto le conduce, siguiendo los pasos de Galton, a la investigación estadística. En sus trabajos aparece ya claramente el cuerpo metodológico básico que constituye la Estadística actual, es decir, el problema de elegir un modelo a partir de datos empíricos, la deducción matemática de las propiedades del mismo, la estimación de los parámetros condicionados a la bondad del modelo y la validación final del mismo mediante un test de significación.

La historia más reciente de la Estadística nos sitúa entre 1920 y finales de la segunda guerra mundial. Cuando aparecen múltiples técnicas estadísticas motivadas por la aplicación de la Estadística a áreas tan diversas como la biología, la física, la ingeniería, la psicología o la medicina.

A partir de 1950 comienza la época moderna de la Estadística, claramente diferenciada por la aparición del ordenador, que revoluciona la metodología estadística y abre enormes posibilidades para la construcción de modelos más complejos, con la creciente importancia de los modelos dinámicos y multivariantes.

4. El papel de la Estadística

Cuando coloquialmente se habla de Estadística, se suele pensar en una relación de datos numéricos presentada de forma ordenada y sistemática. Esta idea es la consecuencia del concepto popular que existe sobre el término y que cada vez está más extendido debido a la influencia de nuestro entorno.

Sin embargo, la Estadística constituye una poderosa herramienta para generar conocimiento y ha experimentado un vigoroso desarrollo a lo largo de este siglo. Actualmente se aplica en todas las áreas del saber y, de manera muy determinante en las Ciencias Sociales.

Por ejemplo, los fenómenos reales que interesan en Ingeniería son con frecuencia demasiado complejos para ser previstos utilizando sólo los principios físicos que los rigen en condiciones ideales. Así, por ejemplo, se utiliza la estadística para conocer con suficiente confianza si un procedimiento de fabricación es más recomendable que otro o para el estudio de la fiabilidad de sistemas. Incluso un investigador en el campo de la Medicina, interesado en la efectividad de un nuevo medicamento, considera la estadística una aliada imprescindible. En el área de Técnicas de Mercado la Estadística es útil para evaluar la aceptación de un producto antes de comercializarlo; en Economía, para evaluar las oportunidades de inversión por parte de asesores financieros, para medir la evolución de los precios o para estudiar los hábitos de los consumidores; en Ciencia Política, para conocer las preferencias de los electores antes de una votación mediante sondeos y así orientar las estrategias de los candidatos; en Sociología, para estudiar las opiniones de los colectivos sociales sobre temas de actualidad; en Psicología, para elaborar las escalas de los tests y cuantificar aspectos del comportamiento humano. En general, en las Ciencias Sociales para medir las relaciones entre variables y hacer predicciones sobre ellas.

5. Conclusion

A medida que aumenta la complejidad de nuestro mundo, se hace cada vez más difícil tomar decisiones inteligentes y bien documentadas. Con frecuencia tales decisiones deben tomarse con mucho menos que un conocimiento adecuado y experimentando una gran incertidumbre.

De esta manera, y con este trabajo, solo queremos constatar, en la medida de lo posible, que realmente la Estadística puede ser un elemento eficaz de ayuda, apoyo y consulta. Así, podríamos, desde un punto de vista más amplio, definir la Estadística como Ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y cómo dar una guía de acción en situaciones prácticas que entrañan incertidumbre.

La Estadística, hoy por hoy, permite dar luz y obtener resultados, y por tanto beneficios, en cualquier tipo de estudio, cuyos movimientos y relaciones, por su variabilidad intrínseca, no puedan ser abordados desde la perspectiva de las leyes deterministas.

En definitiva, históricamente la Estadística comenzó siendo esencialmente descriptiva, pero ha sido necesario acumular información, analizarla y sintetizarla. De manera que, gracias al cálculo de probabilidades, la Estadística ha pasado a ser explicativa, proporcionando potentes herramientas para la toma de decisiones.

Todo conocimiento es, en último término, historia
Todas las ciencias son, en lo abstracto, matemáticas
Todos los juicios son, en su lógica, estadísticos
C. Radhakrishna Rao

Referencias

[1] Asociación de la Sociedad Española de Hipertensión: http://www.seh-lelha.org/historiastat.htm

[2] Instituto Nacional de Estadística: http://www.ine.es/ine/historia.htm

[3] *Los matemáticos y su historia*: http://mat.usach.cl/histmat/html/ia.html

[4] MARTÍN PLIEGO, F.J. *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial,* Editorial AC, Madrid, 1995.

[5] SALSBURG, D. *The lady tasting tea. How statistics revolutionized science in the twentieth century*, Owl Books, New York, 2002.

[6] WALPOLE, R.E, MYERS, R.H y otros. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*, 8ª Edición, Pearson Educación, Prentice Hall, 2007

[7] WEIINBERG, S.L. Y GOLDBERG, K.P. *Estadística Básica para las Ciencias Sociales*, Nueva Editorial Interamericana, México, 1982.

Sobre los autores:

Nombre: Raquel Caro Carretero
Correo Electrónico: rcaro@doi.icai.upcomillas.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Pontificia Comillas, España.

Nombre: Fernando García Jiménez
Institución: Instituto de Enseñanza Secundaria Antonio Nebrija, Móstoles, Madrid, España.

Historias de Matemáticas
Hermite y la trascendencia de *e*

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

26 de abril de 2011

Resumen

Este artículo es en parte una traducción de los trabajos que llevó a cabo el francés Charles Hermite para determinar la trascendencia del número e, considerado éste como base de los logaritmos neperianos. Se han realizado algunas simplificaciones en dicha demostración para hacerla más asequible al lector. Se presenta además una introducción del número e a través de quien inventó su notación, Leonhard Euler.

1. El Origen del Número *e*

Si tuviéramos que destacar un matemático sobre todos los demás en cuanto a sus contribuciones para el desarrollo de nueva notación matemática, sin lugar a duda tendríamos que considerar al suizo Leonhard Euler. Una de sus precoces sugerencias la realizó siendo un joven de 21 años en la corte de San Petesburgo, cuando hizo uso de la letra e como valor 2,718..., que servía de base del sistema de logaritmos naturales. Este hecho ocurre en un manuscrito que Euler tituló *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta*. Este manuscrito fue impreso por primera vez en 1862 como parte de la obra *Opera postuma mathematica et physica*. En este artículo Euler describe varios experimentos, considerando la letra e para representar el valor 2,718....

En una de las más de 200 cartas que Euler mantuvo con su amigo y confidente Christian Golbach fechada el 25 de Noviembre de 1731 (y publicada por primera vez en 1843), Euler resolvía la ecuación diferencial:

$$dz - 2z\,dv + \frac{z\,dz}{v} = \frac{dv}{v}$$

> *...si multiplicamos la ecuación anterior por $e^{\ln v - 2v}$, o lo que es lo mismo, $e^{-2v}v$ (e representa el número, cuyo logartimo hiperbólico es igual a*

1), se obtiene

$$e^{-2v}v\,dv - 2e^{-2v}zv\,dv + e^{-2v}z\,dv = e^{-2v}dv,$$

que integrada resulta

$$e^{-2v}vz = Const. - \frac{1}{2}e^{-2v}$$

$$2vz + 1 = ae^{2v}\cdots$$

Pero la más temprana ocurrencia que Euler tuvo para considerar la letra e como representante del valor 2,718... se produjo en su *Mechanica*, en 1736. En el Vol.I, página 68 entre otras y también en el Vol.II, página 251 y en muchas de las 200 páginas siguientes. Traducimos aquí parte de lo extraido en el Vol.I, página 68, donde c representa la velocidad de un punto considerado:

Corolario II

171. Aunque en la ya mencionada ecuación la fuerza p no tiene lugar, su dirección todavía se mantiene, lo que la hace depender de la relación de los elementos dx y dy. Dada por lo tanto la dirección de la fuerza que se mueve a lo largo de un punto de la curva, uno puede, sólo con estos datos, derivar la velocidad de el punto en cualquier lugar. Se tendrá $\frac{dc}{c} = \frac{dy\,ds}{z\,dx}$ *o* $c = e^{\int \frac{dy\,ds}{z\,dx}}$*, donde e representa el número cuyo logaritmo hiperbólico es 1.*

El uso de la letra e como base de los exponentes imaginarios en expresiones analíticas que era totalmente novedoso para los matemáticos, sucedió en una disertación de Euler llamada *De summis serierum reciprocarum ex protestatibus numerorum naturalium ortarum*. En ella describe a s como el arco circular y desarrolla $\operatorname{sen} s$ con las ahora conocidas series infinitas. En la página 177, Euler sin dar explicación alguna, representa la expresión exponencial para $\operatorname{sen} s$ y el límite fundamental para e^z.

En este punto soy capaz de expresar todas las raíces de los factores de la siguiente expresión infinita

$$S - \frac{S^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{S^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{S^7}{1\cdot2\cdot3\cdots7} - \frac{S^9}{1\cdot2\cdot3\cdots9} - \&c.$$

Esta expresión es equivalente a esta $\frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$*, donde e representa el número cuyo logaritmo es igual a 1, y, como* $e^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$*, donde n representa un número infinito, la expresión infinita se reduce a esta:*

$$\frac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

ISSN 2174-0410

Se puede encontrar un desarrollo más sistemático en su obra *Introductio in analysin infinitorum*, Vol.I, Lausanne 1748, donde la letra i hace referencia a un número infinitamente grande:

...Sustituyendo tenemos

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

y

$$\operatorname{sen} v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$$

En el capítulo anterior vimos que

$$\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$$

e representa la base de los logaritmos hiperbólicos; expresando para z primero $+v\sqrt{-1}$*, y después* $-v\sqrt{-1}$*, tendremos:*

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

y

$$\operatorname{sen} v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

De estos se deducen como se reducen al seno y coseno de arcos reales las expresiones exponenciales imaginarias. Para ello

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\operatorname{sen} v$$
$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\operatorname{sen} v$$

Si en la fórmula para $e^{+v\sqrt{-1}}$ se sustituye v por π, entonces resulta la famosa fórmula $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, que indica la "extraña" relación entre π y e. Euler estableció esta relación en forma logarítmica y generalizada en su obra *De la Controverse entre Mrs.Leibnitz* & *Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires*, Real Academia de Historia de las Ciencias y Bellas Artes, 1749, Berlin 1751, donde en la página 168 hace referencia a:

...esta fórmula $\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\operatorname{sen}\varphi$*, cuyos logaritmos están incluidos en la siguiente fórmula general*

$$\ln(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\operatorname{sen}\varphi) = (\varphi + p\pi)\sqrt{-1},$$

donde p indica cualquier número entero par, o positivo o negativo o incluso cero. De esto deducimos...

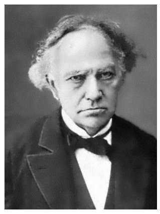
$$\ln -1 = (1+p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1},$$

considerando q cualquier número entero impar. Por lo tanto se puede tener:

$$\ln -1 = \pm\pi\sqrt{-1};\ \pm 3\pi\sqrt{-1};\ \pm 5\pi\sqrt{-1};\ \pm 7\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

ISSN 2174-0410

2. Charles Hermite (1822-1901)



Charles Hermite

Tras la muerte de Cauchy, Charles Hermite se erigió en lider indiscutible de las matemáticas francesas. Recogió el testigo de Gauss y Cauchy sobre Aritmética y Análisis. Pudo adentrarse en los trabajos de Wierstrass y Riemman sobre Funciones Abelianas y en los de Kronecker y Smith acerca de las misteriosas relaciones que surgían entre la Teoría de Números y las funciones elípticas.

Siendo el sexto de siete hijos de Ferdinand y Madeleine Hermite, nació el 24 de Diciembre de 1822. Tenía antepasados tanto franceses como alemanes ya que el pequeño pueblo donde nació, Dieuze, en el distrito de Lorraine, fue una vez reclamado tanto por Francia como por Alemania. Sin embargo, el futuro matemático siempre se consideró así mismo como francés. Su padre, un hombre de fuertes inclinaciones hacia el arte que había estudiado ingeniería en sus tiempos de juventud, era un comerciante de ropas en Dieuze. Se trataba de un negocio de la familia de su mujer, a quien más tarde confiaría con el fin de dar rienda suelta y dedicarse por entero a sus inquietudes artísticas. En torno a 1829, trasladaron su negocio a la ciudad de Nancy.

Ni Ferdinand ni Madeleine mostraron nunca gran interés por la educación de sus hijos, quienes únicamente asistieron al Collège de Nancy. Sin embargo su hijo Charles continuó con sus estudios en Paris, primero en el Collège Henri IV, más tarde llamado Collège Napoleon, y después, en 1840/1, en el famoso Lycée Louis-le-Grand, donde recibió clases de Richard, el mismo instructor que había supervisado el trabajo de Galois tan sólo hacía quince años. Richard le llamó "un petit Lagrange" (un pequeño Lagrange), porque el joven Hermite pasaba la mayoría de su tiempo leyendo clásicos de Lagrange como *Traité sur la résolution des équiations numériques*. Ajeno a los estudios de Ruffini y Abel, intentó probar la imposibilidad de resolver ecuaciones de quinto grado por medio de radicales. Los dos primeros trabajos de investigación de Hermite, se publicaron en las *Nouvelles annales de mathématiques*, siendo aún estudiante.

En 1842, Hermite fue admitido en el prestigiosísimo École Polytechnique, ocupando un modesto puesto 68 en los exámenes de acceso debido a su dificultad con la geometría. Tras su primer año se le retiró el permiso para seguir allí, ya que se le diagnosticó un defecto congénito en su pie derecho, lo que significó que necesitara de un bastón para poder caminar. Debido a la intervención de gente influyente, la decisión pudo ser desestimada pero bajo unas condiciones que Hermite consideró inaceptables. Como resultado, pasó del École Polytechnique a conformarse con uno de los Ecoles d'Applications para realizar una carrera académica, realizando los exámenes de acceso en 1847. A lo largo de su carrera, Hermite adquirió cierta animadversión por los exámenes, por lo que desde el punto de vista pedagógico prefería utilizar vías alternativas a la de los exámenes finales.

Fue su trabajo sobre funciones elípticas lo que le sirvió para ser considerado como un experto en análisis. Tendría poco más de treinta años cuando Jacobi había comenzado a investigar las funciones inversas obtenidas de las integrales hiperelípticas, cuyas propiedades esenciales eran aún desconocidas. Entre otros logros, Hermite generalizó el Teorema de Abel sobre la división del argumento de las funciones elípticas al caso de las hiperelípticas. A comienzos de 1843 Hermite escribió a Jacobi sobre lo que había estudiado, lo que impresionó gratamente a este último. Jacobi le contestó:

> *No ceje en su empeño, Señor, si alguno de sus descubrimientos coincide con antiguos resultados mios. Como usted debe comenzar donde yo terminé, habrá irremediablemente ciertas coincidencias. En el futuro, si me hace el honor de comunicarme sus progresos, sólo me quedará aprender de ellos.*

De este modo Hermite comenzó a enviar periódicamente sus resultados, publicándolos a menudo en el *Crelle's Journal* entre otras publicaciones. Cuando finalmente retomó la teoría de funciones elípticas tras un periodo en el que había tratado con mayor afinidad la teoría de números, consiguió llegar con exito a una síntesis de las teorías de Abel y Jacobi en su "magnun opus"[1], *Sur quelques applications des functions elliptiques*[2], la cual hizo su aparición en 1877. Poco después de 1880 comenzó a dar clases sobre los estudios de Weierstrass, y podría decirse que este hecho hizo calar en él las ideas del gran berlinés. Los libros de texto que Hermite escribió durante esta época fueron ampliamente utilizados y apreciados.

En 1848 Hermite llegó a ser tutor orientador y examinador de admisiones en el École Polytechnique. Dos años más tarde sería elegido miembro de la Academia de Paris. En 1862 promocionó al puesto de profesor, y a examinador de graduación el siguiente año. En 1869 llegó a ser profesor de análisis en el École Polytechnique, combinando este puesto con el mismo en la Sorbona. La siguiente cita de Haddamard ofrece una idea del trabajo de Hermite como profesor:

> *No considero que aquellos que nunca le escucharan puedan darse cuenta de cuan magnífica fue la enseñanza de Hermite, rebosante de entusiasmo por la ciencia, que parecía tomar vida en su voz y cuya belleza nunca dejó de comunicarnos, ya que así lo sentía en lo más hondo de su ser.*

Aunque tan sólo después de siete años dejó su puesto en el École Polytechnique en 1876, continuó en la Sorbona durante otros veintiun años.

Bajo la influencia de Cauchy, Hermite se convirtió en un devoto católico tras haber haber enfermado de viruela en 1856. Su filosofía matemática fue influenciada por el idealismo platónico. Consideraba que los matemáticos nunca inventan nada pero que a veces se les concede la virtud de descubrir la armonía del mundo matemático que existe independientemente de la razón humana. Hadamard en sus recuerdos de antiguas conferencias impartidas por Hermite decía:

> *Cuando era un joven estudiante, alguna feliz circunstancia me permitía visitar al maestro de forma asidua durante algunos minutos. Al*

[1] Del latín "magnun opus" u "opus magnun"; *Gran obra*.
[2] *Sobre varias aplicaciones de funciones elípticas*.

> *momento, causaba una profunda impresión en nosotros, no sólo con sus métodos, sino con su entusiasmo y amor por la ciencia. En nuestras breves pero productivas conversaciones, a Hermite le gustaba dirijirse a mi diciendo "El que se desvía del camino de la Providencia se bloquea". Estas eran las palabras de un hombre profundamente religioso. Pero un ateo como yo le comprendía perfectamente, especialmente cuando en otras ocasiones añadía "En matemáticas nuestro papel es mas de sirvientes que de maestros".*

La vida familiar de Hermite refleja su posición de privilegio dentro del mundo matemático francés. Su mujer era hermana del matemático Joseph Bertrand, y una de sus hijas se casó con Emile Picard, quien se encargó de recopilar y publicar sus obras tras su muerte. Durante su época en el École Polytechnique, Hermite dedicó un gran esfuerzo a trabajar con los estudiantes a todos los niveles. En contraste con Weierstrass, le daba un gran valor a la intuición y no consideraba necesario utilizar demasiado rigor en la enseñanza de materias elementales.

En investigación, Hermite llevó a cabo formidables progresos en análisis, lo que le convirtió en especialista en la materia. Como ejemplo, la solución de la ecuación general cuadrática había sido conocida desde tiempos inmemoriables. Las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas en términos similares a la anterior habían sido elaboradas durante el Renacimiento italiano. Cuando Galois demostró la imposibilidad de resolver mediante métodos algebraicos comunes la ecuación general de quinto grado (o quíntica), este hecho pareció dejar por zanjado el asunto. Sin embargo, Hermite demostró que la ecuación general quíntica, podía ser resuelta mediante el uso de funciones modulares elípticas.

Pero el resultado por el que Hermite es más conocido, es la demostración de la trascendencia del número e (considerado éste último como base de los logaritmos naturales) o lo que es lo mismo, la imposibilidad de que resulte ser la raíz de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. Los Números Trascendentales habían sido estudiados ya por Lioville, quien había demostrado que tales números existían, además de demostrar que e no podía resultar ser la raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes racionales, pero hasta Hermite, no se había demostrado que ninguna de las constantes aparecidas de forma natural resultara ser trascendental. De hecho el método usado por Hermite en el caso de e publicado en 1873 sirvió unos años después (en 1882) mediante ciertas adaptaciones a Carl Louis Ferdinan von Lindemann, un matemático menor si lo comparamos con Hermite, para demostrar la trascendencia de π. Este hecho fue sin duda alguna la única ocasión en que las ideas de Hermite fueron desarrolladas por otros.

Hermite fue galardonado en gran cantidad de ocasiones con honores académicos tanto en Francia, convirtiéndose en Gran Oficial de la Legión de Honor, como en el extranjero, llegando a serle otorgado por ejemplo la Gran Cruz de la Estrella Polar de Suecia. A los setenta años, gozaba de admiración por toda Europa, reflejada en su reputación, no sólo como el más longevo de los matemáticos franceses, sino también por su costumbre de mantener una vasta red de correspondencia con los líderes matemáticos de su época. En investigación sus intereses fueron amplios. Fue fundamentalmente un estudioso del álgebra y el análisis más que de la geometría, aunque por ejemplo le encantaba la geometría de números de Minkowski. Sin embargo, al igual que el matemático británico Sylvester, con el que compartía correspondencia más asiduamente, nunca asimiló completamente la profundidad de ideas desarrolladas en la Alemania del siglo XIX, nación abanderada de la geometría durante este siglo. Hermite murió el 14 de Enero de 1901, a la edad de setenta y ocho años.

Muchos de los principales matemáticos franceses de finales del siglo XIX recibieron clases de Hermite. Entre ellos puede destacarse Appel, Borel, Darboux, Hadamard, Jordan, Painlevé, y Poincaré.

3. Introducción a la demostración

La investigación que Hermite llevó a cabo para probar la trascendencia de e se desarrolló en una memoria de no más de una treintena de páginas. Esta memoria puede ser dividida fundamentalmente en tres partes. En las dos primeras partes, se muestran dos demostraciones de la trascendencia de e, aunque Hermite admite que la segunda es la más rigurosa de las dos. En la tercera, Hermite obtiene aplicando el método sugerido en la segunda demostración, las siguientes aproximaciones para e y e^2:[3]

$$e = \frac{58291}{21444}; \quad e^2 = \frac{158452}{21444}$$

La traducción que aquí se presenta, muestra aún con alguna omisión, la parte referida anteriormente como la segunda de la memoria. Desde el momento que la demostración apareció publicada por primera vez, se han realizado muchas simplificaciones, por lo que ahora uno raramente, si no es nunca, puede valorar la existencia e importancia de esta demostración. Sin embargo, el llamado *Teorema de Hermite* es aún asociado al hecho de que e es un número trascendental.

La siguiente sección pretende mostrar una traducción lo más fiel posible de la investigación realizada por Hermite con su puño y letra.

4. El Teorema de Hermite y la trascendencia de e

... Pero, como un caso más general, tomamos

$$F(z) = (z - z_0)^{\mu_0}(z - z_1)^{\mu_1} \cdots (z - z_n)^{\mu_n}$$

para cualquier valor entero cualquiera que sean los exponentes, integrando ambos miembros de la identidad

$$\frac{d\,[e^{-z}F(z)]}{dz} = e^{-z}[F'(z) - F(z)],$$

[3]La fracción da el valor de $e = 2,718289$, siendo la cifra de seis decimales correcta $e = 2,718282$. La corrección del error numérico fué puntualizado por Picard, en su publicación *Oeuvres de Charles Hermite* donde aumenta la precisión de esta aproximación.

se obtiene

$$e^{-z}F(z) = \int e^{-z}F'(z)\,dz - \int e^{-z}F(z)\,dz,$$

de la cual resulta que[4]

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} e^{-z}F'(z)\,dz$$

Ahora la fórmula

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\mu_0}{z-z_0} + \frac{\mu_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{\mu_n}{z-z_n}$$

lleva a la siguiente descomposición,

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = \mu_0 \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_0}dz + \mu_1 \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_1}dz + \cdots$$

$$\cdots + \mu_m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_n}dz, \ldots$$

...Demostraremos que es siempre posible determinar dos integrales polinómicas de grado n, $\theta(z)$ y $\theta_1(z)$, tales que representando una de las raíces $z_0, z_1, \ldots, z_n$ por la letra ζ, se llega a la siguiente relación[5]:

$$\int \frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz = \int \frac{e^{-z}F(z)\theta_1(z)}{f(z)}dz - e^{-z}F(z)\theta(z)$$

...E incluso, si se expresa $\theta(z,\zeta)$ en lugar de $\theta(z)$, para enfatizar la presencia de ζ, tenemos[6]

$$\theta(z,\zeta) = z^n + \theta_1(\zeta)z^{n-2} + \theta_2(\zeta)z^{n-3} + \ldots + \theta_n(\zeta)$$

De esto se deduce, para el polinomio $\theta_1(z)$, la fórmula

$$\frac{\theta_1(z)}{f(z)} = \frac{\mu_0\theta(z_0,\zeta)}{z-z_0} + \frac{\mu_1\theta(z_1,\zeta)}{z-z_1} + \cdots + \frac{\mu_n\theta(z_n,\zeta)}{z-z_n}.$$

...Es suficiente considerar las integrales entre los límites z_0 y Z en la relación

$$\int \frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz = \int \frac{e^{-z}F(z)\theta_1(z)}{f(z)}dz - e^{-z}F(z)\theta(z),$$

[4]Donde Z representa cualquiera de las raíces $z_0, z_1, \cdots, z_n$

[5]$f(z) = (Z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. La demostración de esta afirmación se hace en en detalle en el texto de Hermite pero aquí está omitida

[6]Se demuestra en el texto que $\theta_i(\zeta)$ es un polinomio de grado i en ζ, teniendo por funciones integrales con coeficientes las raíces $z_0, z_1, \ldots, z_n$.
$\theta_i(\zeta)$ para $i=1$ no debe confundirse con $\theta_1(z)$, mencionado en el texto en relación con $\theta(z)$.

y por lo tanto obtener la ecuación

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz &= \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)\theta_1(z)}{f(z)}dz \\
&= \mu_0\theta(z_0,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_0}dz \\
&+ \mu_1\theta(z_1,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_1}dz \\
&+ \cdots \\
&+ \mu_n\theta(z_n,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_n}dz.
\end{aligned}$$

Usamos esta ecuación en particular en el caso

$$\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_n = m;$$

en este caso si se expresa

$$m\theta(z_i, z_k) = (ik)$$

y se considera ζ sucesivamente igual a $z_0, z_1, \cdots, z_n$, y las anteriores expresiones se convierten evidentemente en

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m+1}(z)}{z-z_i}dz &= (i0)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_0}dz \\
&= (i1)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_1}dz \\
&+ \ldots \\
&+ (in)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_n}dz.
\end{aligned}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Pero para el caso general, debemos demostrar aún el siguiente teorema.

Sean Δ y δ los determinantes

$$\begin{vmatrix}
\theta(z_0,z_0) & \theta(z_1,z_0) & \cdots & \theta(z_n,z_0) \\
\theta(z_0,z_1) & \theta(z_1,z_1) & \cdots & \theta(z_n,z_1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta(z_0,z_n) & \theta(z_1,z_n) & \cdots & \theta(z_n,z_n)
\end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\
{z_0}^2 & {z_1}^2 & \cdots & {z_n}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
{z_0}^n & {z_1}^n & \cdots & {z_n}^n
\end{vmatrix};$$

entonces [7] $\Delta = \delta^2$

[7] Una demostración simple y corta de esta afirmación se presenta en el texto.

Consideremos ahora

$$\varepsilon_m = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots m} \int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz,$$

$$\varepsilon_m^i = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots m-1} \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_i}\, dz,$$

la relación demostrada anteriormente

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz = m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0}\, dz + m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1}\, dz + \ldots$$

$$\ldots + m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n}\, dz$$

se transforma de forma simple en

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1 + \ldots + \varepsilon_m^n,$$

y la relación

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^{m+1}(z)}{z - \zeta} dz &= m(z_0, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0} dz \\
&= m(z_1, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1} dz \\
&+ \ldots \\
&+ m(z_n, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n} dz
\end{aligned}$$

considerando ζ igual sucesivamente a $z_0, z_1, \ldots, z_n$, nos da la siguiente expresión, que representaremos por S_m, a saber

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{m+1}^0 &= \theta(z_0, z_0)\varepsilon_m^0 + \theta(z_1, z_0)\varepsilon_m^1 + \ldots + \theta(z_n, z_0)\varepsilon_m^n, \\
\varepsilon_{m+1}^1 &= \theta(z_0, z_1)\varepsilon_m^0 + \theta(z_1, z_1)\varepsilon_m^1 + \ldots + \theta(z_n, z_1)\varepsilon_m^n, \\
&\cdots \\
\varepsilon_{m+1}^n &= \theta(z_0, z_n)\varepsilon_m^0 + \theta(z_1, z_n)\varepsilon_m^1 + \ldots + \theta(z_n, z_n)\varepsilon_m^n.
\end{aligned}$$

Si ahora, se construye a su vez $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$, se determina a partir de estas, expresiones para $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \ldots, \varepsilon_m^n$ en términos de $\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_1^n$ lo que expresaremos como sigue.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m^0 &= A_0\varepsilon_1^0 + A_1\varepsilon_1^1 + \ldots + A_n\varepsilon_1^n, \\
\varepsilon_m^1 &= B_0\varepsilon_1^0 + B_1\varepsilon_1^1 + \ldots + B_n\varepsilon_1^n, \\
&\cdots \\
\varepsilon_m^n &= L_0\varepsilon_1^0 + L_1\varepsilon_1^1 + \ldots + L_n\varepsilon_1^n,
\end{aligned}$$

y el determinante de esta nueva sustitución, siendo igual al producto de determinantes de las sustituciones parciales, será $\delta^{2(m-1)}$. Esto nos lleva a reemplazar $\varepsilon_1^0 \varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_1^n$, por sus valores lo que nos dará expresiones para las cantidades ε_m^i adecuadas a nuestro propósito. Estos valores son fácilmente obtenidos como se verá.

Para este propósito, aplicamos la fórmula general

$$\int e^{-z} F(z)\, dz = -e^{-z} \gamma(z),$$

tomando

$$F(z) = \frac{f(z)}{z - \zeta}$$

que resulta

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(z) & = & z^n & + & \zeta & \big| \, z^{n-1} & + & \zeta^2 & \big| \, z^{n-2} & + & \ldots \\ & & & + & p_1 & \big| & + & p_1 \zeta & \big| & & \\ & & & & & \big| & & p_2 & \big| & & \end{array}$$

Se puede ver fácilmente que $\gamma(z)$ será una expresión integral de z y ζ, totalmente similar a $\theta(z, \zeta)$, tal que si se representa por $\Phi(z, \zeta)$ se tiene

$$\Phi(z, \zeta) = z^n + \varphi_1(\zeta) z^{n-1} + \varphi_2(\zeta) z^{n-2} + \ldots + \varphi_n(\zeta),$$

donde $\varphi_i(\zeta)$ es un polinomio en ζ de grado i, en el que el coeficiente de ζ^i es la unidad... y en analogía a la forma $\theta(z, \zeta)$, demuestra que el determinante

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \cdots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \cdots & \Phi(z_n, z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \cdots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

también es igual a δ^2. Por consiguiente, concluimos de la expresión

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f(z)}{z - \zeta}\, dz = e^{z_0 \Phi(z_0, \zeta)} - e^{-Z \Phi(Z, \zeta)},$$

considerando $\zeta = z_i$, el valor deseado

$$\varepsilon_1^i = e^{z_0 \Phi(z_0, z_i)} - e^{-Z \Phi(Z, z_i)}.$$

Consecuentemente tenemos las expresiones dadas para ε_m^i.

Sean

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= A_0 \Phi(Z, z_0) + A_1 \Phi(Z, z_1) + \ldots + A_n \Phi(Z, z_n), \\ \mathfrak{B} &= B_0 \Phi(Z, z_0) + B_1 \Phi(Z, z_1) + \ldots + B_n \Phi(Z, z_n), \\ &\cdots \\ \mathfrak{L} &= L_0 \Phi(Z, z_0) + L_1 \Phi(Z, z_1) + \ldots + L_n \Phi(Z, z_n), \end{aligned}$$

y sean $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{L}_0$ los valores obtenidos para $Z = z_0$; se obtiene

$$\varepsilon_m^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{-Z}\mathfrak{A}$$
$$\varepsilon_m^1 = e^{-z_0}\mathfrak{B}_0 - e^{-Z}\mathfrak{B}$$
$$\ldots$$
$$\varepsilon_m^n = e^{-z_0}\mathfrak{L}_0 - e^{-Z}\mathfrak{L}.$$

En estas fórmulas, Z representa cualquiera de las cantidades $z_0, z_1, \ldots, z_n$, ahora si se desea afirmar el resultado para $Z = z_k$, se expresará por un lado por $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \ldots, \mathfrak{L}_k$, y por otro lado por $\eta_k^0, \eta_k^1, \ldots, \eta_k^n$, los valores que asumen estos en este caso para los coeficientes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{L}$, y las cantidades $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \ldots, \varepsilon_m^n$. De este modo se obtienen las ecuaciones

$$\eta_k^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_k}\mathfrak{A}_k$$
$$\eta_k^1 = e^{-z_0}\mathfrak{B}_0 - e^{z_k}\mathfrak{B}_k$$
$$\ldots$$
$$\eta_k^n = e^{-z_0}\mathfrak{L}_0 - e^{z_k}\mathfrak{L}_k$$

lo que nos lleva a la segunda demostración ya mencionada de la imposibilidad de tener una expresión de la forma

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \ldots + e^{z_n}N_n = 0,$$

donde tanto los exponentes $z_0, z_1, \ldots, z_n$, como los coeficientes $N_0, N_1, \ldots, N_n$ son considerados números enteros.

Obsérvese en primer lugar, que ε_m^i puede llegar a ser más pequeño que cualquier cantidad dada para un valor suficientemente grande de m. Para la exponencial e^{-z} esta será siempre positiva, resultando como se sabe,

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = F(\xi)\int_{z_0}^{Z} e^{-z}\,dz = F(\xi)(e^{z_0} - e^{Z}),$$

siendo $F(z)$ cualquier función, y ξ una cantidad tomada entre z_0 y Z, límites estos de la integral. Tomando ahora

$$F(z) = \frac{f^m(z)}{z - Z_i},$$

se obtiene la expresión

$$\varepsilon_m^i = \frac{f^{m-1}(\xi)}{1 \cdot 2 \cdots m-1}\,\frac{f(\xi)}{\xi - z_i}(e^{-z_0} - e^{-Z}),$$

lo que demuestra la propiedad antes mencionada. Ahora, se obtiene de las ecuaciones

$$\eta_1^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_1}\mathfrak{A}_1,$$
$$\eta_2^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_2}\mathfrak{A}_2,$$

$$\cdots$$
$$\eta_n^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_n}\mathfrak{A}_n,$$

la siguiente relación

$$e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \ldots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n =$$
$$= e^{-z_0}(e^{z_1}N_1 + e^{z_2}N_2 + \ldots + e^{z_n}N_n) - (\mathfrak{A}_1 N_1 + \mathfrak{A}_2 N_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n N_n).$$

Si se sustituye la condición

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \ldots + e^{z_n}N_n = 0$$

en la anterior expresión, se llega a

$$e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \ldots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n = -(\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n N_n).$$

Sin embargo, se asume que $z_0, z_1, \ldots, z_n$ son enteros, al igual que las cantidades $\theta(z_i, z_k)$, $\Phi(z_i, z_k)$ y consecuentemente también $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$. Entonces tenemos un número

$$\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n N_n,$$

que disminuye indefinidamente con $\eta_1^0, \eta_1^1, \ldots, \eta_1^n$ cuando m decrece; a esto se le añade que para cierto valor de m y para todos los valores mayores,

$$\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n N_n = 0,$$

y como de igual manera se obtienen las expresiones

$$\mathfrak{B}_0 N_0 + \mathfrak{B}_1 N_1 + \ldots + \mathfrak{B}_n N_n = 0,$$
$$\cdots$$
$$\mathfrak{L}_0 N_0 + \mathfrak{L}_1 N_1 + \ldots + \mathfrak{L}_n N_n = 0.$$

la relación

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \ldots + e^{z_n}N_n = 0$$

establece que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{A}_1 & \cdots & \mathfrak{A}_n \\ \mathfrak{B}_0 & \mathfrak{B}_1 & \cdots & \mathfrak{B}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{L}_1 & \cdots & \mathfrak{L}_n \end{vmatrix}$$

será igual a cero. Pero, debido a las expresiones de $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{L}_0$,resulta que Δ es el producto de estos dos otros determinantes

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_0 & L_1 & \cdots & L_n \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \cdots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \cdots & \Phi(z_n, z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \cdots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

de los cuales el primero vale $\delta^{2(m-1)}$, y el segundo δ^2. Resulta entonces $\Delta = \delta^{2m}$, y se muestra de forma sencilla de manera rigurosa que la relación asumida es imposible[8], y por lo tanto, el número e no puede ser un número irracional algebraico.

Referencias

[1] BECKMANN, Petr. *A History of π*, pp. 148-157, St. Martin's Press, New York, 1971.

[2] JAMES, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 173-177, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[3] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pág. 664, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[4] SMITH, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 95-106, McGraw-Hill Book Company,Inc., New York, 1929.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Esta obra está registrada
safecreative
1103308846277
INFORMACIÓN SOBRE DERECHOS

[8]Se puede demostrar que

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0^n & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{vmatrix} = \pm(z_n - z_{n-1})(z_n - z_{n-2})\cdots(z_n - z_0)(z_{n-1} - z_{n-2})\cdots(z_1 - z_0)$$

y por lo tanto δ es distinto de cero, asumiendo, como de hecho se hace, que los exponentes $z_0, z_1, \ldots, z_n$ son distintos.

Historias de Matemáticas
Aproximación del diseño arquitectónico a la fractalidad

Juana María Sánchez González

Ascensión Moratalla de la Hoz

Agripina Sanz Pérez

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

12 de abril de 2011

Resumen

En el último siglo los avances de la Matemática han sido espectaculares. Nuevas aplicaciones y nuevas necesidades han demandado "nuevas matemáticas" y la necesidad de dar respuesta a esas demandas han propiciado nuevos descubrimientos como los objetos fractales. Por otro lado, el gran desarrollo producido en los medios informáticos ha potenciado su utilización en diversas ramas del arte y la técnica en general.

Palabras Clave: Geometría, informática, objeto fractal, arte, arquitectura.

1. Introducción

La reciente aparición de las geometrías no-euclidianas, entre las que se encuentra la Geometría Fractal, está influyendo de un modo u otro en muchas disciplinas y la Arquitectura, como la Pintura, la Escultura, el Urbanismo y muchas otras, no podía quedar fuera de esa influencia.

El origen de la Geometría Fractal puede encontrarse en el estudio de una serie de conjuntos irregulares que surgieron a finales del siglo XIX y comienzos del XX con unas propiedades geométricas ajenas y distintas a las encontradas hasta entonces en otros conjuntos. Esas formas extrañas tenían como único propósito poner de manifiesto las limitaciones del análisis clásico. La reacción de las matemáticas tradicionales fue la de calificarlos de patológicos, de monstruos. Su característica común podría establecerse como la capacidad de, mediante una acción sencilla y repetitiva, poder dar lugar a objetos complejos y difíciles de medir con los métodos establecidos hasta ese momento.

Si bien los primeros conjuntos que plantearon el problema, los de Cantor, Sierpinski, la curva de Koch[1], de Peano... fueron los que despertaron la curiosidad por esta disciplina, su presentación en sociedad se hace de la mano de Benoit Mandelbrot[2] quien, desde su puesto de investigador de IBM en Nueva York, se da cuenta de que esa curvas, llamadas por algunos monstruosas, son la clave para una teoría muy general de las irregularidades de la Naturaleza.

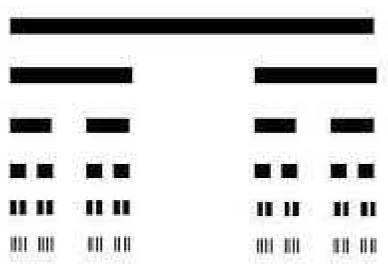


Figura 1. Generación del Conjunto de Cantor

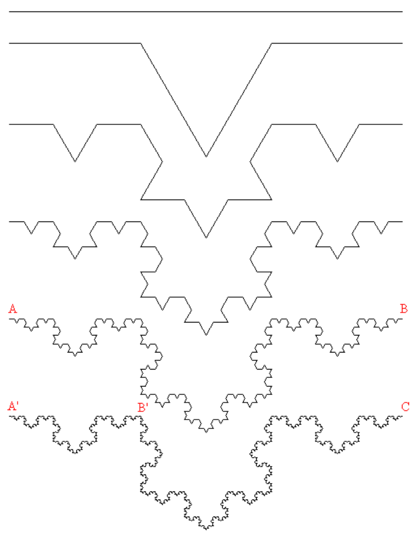


Figura 2. Generación de la Curva de Koch

[1] La curva la inventa el matemático sueco en 1906. El autor de la imagen es M. Romero Schmitke.

[2] Benoit Mandelbrot investigador de IBM en el Centro de Investigación Thomas J. Watson. Ingeniero y Matemático dictó conferencias, entre otros centros, en el Collège de France. La recopilación de esas lecciones dieron lugar a la publicación de su libro *La geometría fractal de la naturaleza*. Dicha obra se considera el texto más importante sobre geometría fractal.

A finales de los "70" y, como resultado de las lecciones que imparte desde 1973 en el Collège de France, escribe sobre la universalidad de esa geometría pasando, unos años más tarde, a dar una definición de conjunto fractal capaz de acoger a los descubiertos hasta entonces y a muchos de los que pudiesen aparecer en el futuro. Para él un fractal es, fundamentalmente, **"**un conjunto en que las partes son similares al total, en algún sentido**".** Con esa afirmación incluye como objetos fractales no sólo a los conjuntos mecánicamente obtenidos por sus antecesores, sino a muchas imágenes naturales, repetitivas y autosemejantes, fáciles de observar en nuestro entorno más cotidiano.

Figura 3. Imagen del Coto de Doñana

2. Antecedentes

La Geometría Fractal nace, como otras geometrías en otros momentos de la historia, de un intento de entender, describir y medir la Naturaleza. Una Naturaleza que no es extraña ni rara, es, sencillamente, irregular. Y esa irregularidad exige una forma de representación y de medida que ahora, con los medios informáticos y tecnológicos con los que se cuenta, puede acercarse más a la realidad. La Geometría Fractal puede, hoy, describir mejor el mundo que la Geometría Euclidiana y esa es la gran ventaja que aporta al diseño de cualquier objeto.

No se puede ignorar que, cada vez con más frecuencia los algoritmos que se utilizan en informática para modelizar un diseño, derivan de las nuevas matemáticas. Pero lo normal es que esa matemática no se utilice como un componente más en el proceso de diseño. Que su misión se reduzca a facilitar y potenciar la visualización de un objeto, arquitectónico o no, que ha surgido de la imaginación del diseñador.

La Matemática en su larga y complicada historia, siempre se ha apoyado en dos pilares: la realidad que ha rodeado al hombre y su imaginación. Combinadas, sin que una pueda prescindir de la otra, la han llevado adelante. En sus comienzos, con aportaciones extraordinarias. Más adelante con momentos de actividad, que se desplazaban por el mundo conocido, mezclados con estancamientos de cientos de años, en función del auge o declive de determinadas culturas.

De esos avances la selección natural de los distintos modelos matemáticos que pudieron surgir, ha hecho que hayan llegado hasta nosotros principios potentes que con el transcurrir de los años han adquirido vida propia. No sabemos los que han podido quedarse por el camino.

3. Propiedades de un objeto fractal

Oficialmente un fractal es un conjunto que presenta alguna de las siguientes propiedades:

-Tiene los mismos detalles a todas las escalas de forma que, si lo ampliamos o reducimos la estructura que presente será parecida. Estaría formado por fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar. A esta propiedad responden, como se ha indicado anteriormente, tanto objetos comunes en la naturaleza como objetos artificiales construidos con un determinado fin como pueden ser las obras de Zvi Hecker[3] autor de una obra conocida por su énfasis en la geometría y su acentuada asimetría.

Figura 4 . Fractal natural.

[3] Zvi Hecker. Arquitecto polaco nacido en Israel, en 1931, donde tiene gran parte de su obra.

Figura 5. Conjunto de viviendas. Zvi Heckuer

-Es autosemejante, tienen la propiedad de parecerse a sí mismo, de contenerse a sí mismo.

La figura más aludida por los textos que tratan de objetos fractales al referirse a esta propiedad, es la de la espiral áurea. Una figura que se expande hasta el infinito repitiendo siempre un mismo patrón. Son numerosos los ejemplos que, en la Naturaleza y a todas las escalas, se pueden encontrar con este comportamiento y esa universalidad es también la que la ha hecho referencia de muchas obras de arte. Posiblemente las que mejor la representan sean las de Hannsjörg Voth[4] y especialmente su vivienda espiral, Goldene Spirale, en el desierto de Mara en Marruecos.

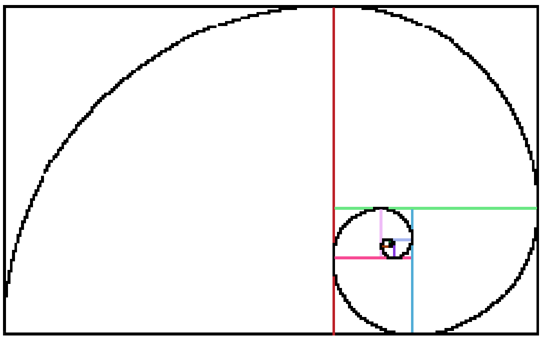


Figura 6. Espiral áurea

[4] Voth es un artista alemán nacido en 1940. En las últimas décadas ha llevado a cabo su obra en el desierto de Marruecos.

Figura 7. Goldene Spirale

-Tiene una definición algorítmica sencilla o lo que es lo mismo, tiene un resultado como consecuencia de un proceso simple que se repite un número muy alto de veces.

Esta característica la hace propicia para representar a objetos fractales obtenidos con la ayuda de ordenadores, ya que los avances informáticos han permitido desarrollar, con unos resultados plásticos espectaculares, obras imposibles de imaginar sin la asistencia de esos medios.

Son paradigmáticas, en este sentido, las clásicas imágenes del triángulo de Sierpinski o el cuadrado de Menger.

En ellas se han inspirado una gran cantidad de diseños de todo tipo y a todas las escalas.

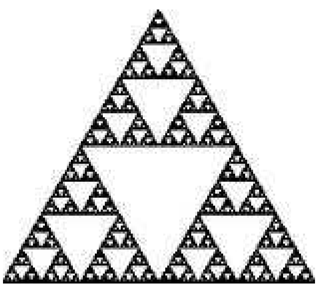


Figura 8. Triángulo de Sierpinski

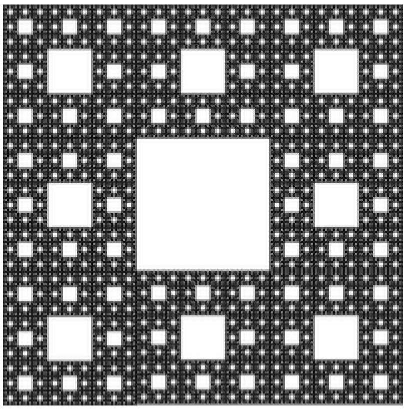


Figura 9. Cuadrado de Sierpinski- Menger

Con esta filosofía se pueden considerar llevadas a cabo obras plásticas como las de Escher[5] o bien de arquitectura como el Pabellón de Bruselas de Corrales y Molezún y las más recientes del anteriormente citado Zvi Hecker.

A Maurits C. Escher se le considera el padre de las "teselaciones" o divisiones regulares del plano, entendiendo por teselaciones la posibilidad de rellenar el plano con figuras que ni se superpongan ni dejen espacios vacíos. La genialidad del artista residía en su capacidad para explorar conceptos matemáticos como la lógica del espacio, las divisiones regulares del plano, las paradojas y las figuras imposibles.

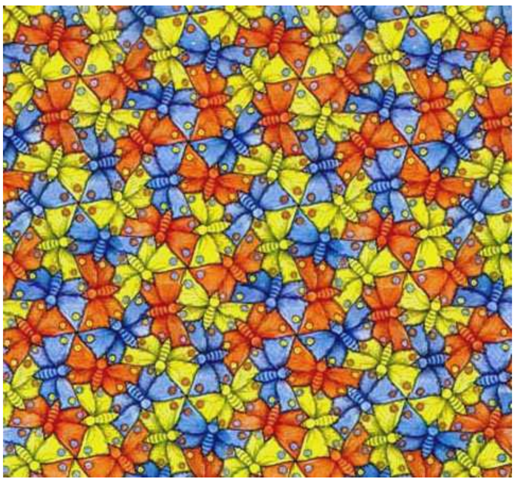


Figura 10. Escher

[5] Maurits C. Escher (1898-1972). Natural de Leeuwarden (Países Bajos)

Corrales y Molezún[6] fueron los arquitectos que ganaron el Concurso de Arquitectura convocado con el fin de diseñar el pabellón que representaría a España en la Exposición Universal que se celebraría en Bruselas en 1958.

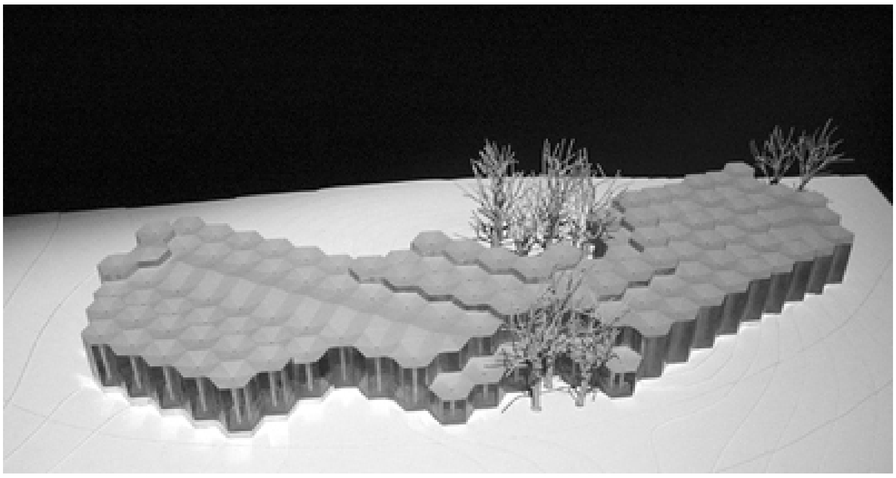


Figura 11. Maqueta del Pabellón de Bruselas

Figura 12. Interior del Pabellón de Bruselas

El edificio, considerado desde su nacimiento una obra maestra de la arquitectura, responde con un diseño en planta dibujado sobre una red de hexágonos que se multiplican, a diversas escalas, no sólo en el edificio

[6] Juan Antonio Corrales y Ramón Vázquez Molezún ganan el Concurso organizado por el Ministerio de Asuntos Exteriores Español y al que se presentan ocho propuestas.

propiamente dicho, sino en todos los elementos, incluso decorativos y de equipamiento, que componen toda la construcción. La obra, capaz de adaptarse a cualquier perímetro, hubiera podido extenderse hasta el infinito siempre igual y siempre distinta.

Jean Nouvel gana el concurso que se convoca en 1981 para llevar a cabo un centro dedicado a la cultura árabe en París.

El edificio, que se inaugura en 1987, tiene la particularidad de ofrecer al espectador fachadas, completamente distintas, aunque todas de traza ortogonal. Una de ellas, la sur, está compuesta por figuras geométricas que recuerdan los dibujos de las celosías tradicionales de los edificios árabes.

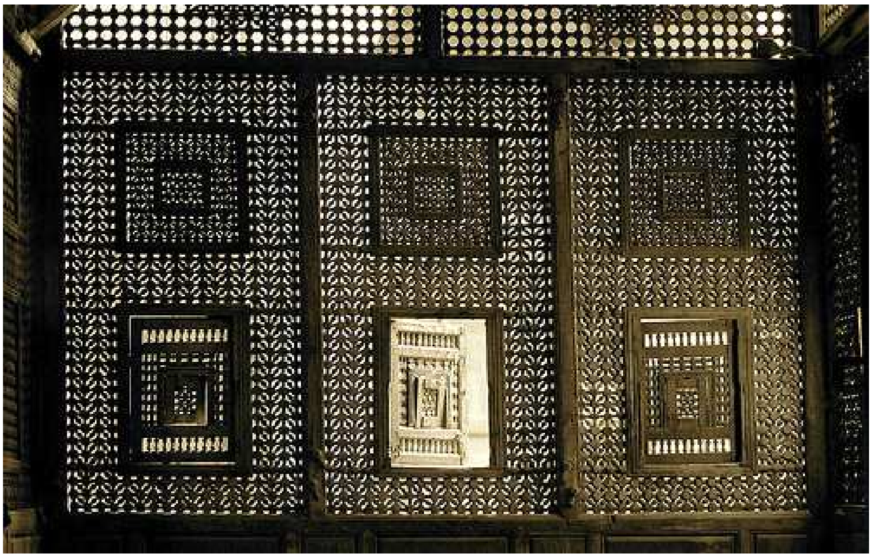


Figura 13. Interior del Instituto del Mundo Árabe.

-Tiene dimensión fractal mayor que su dimensión topológica.

A esta característica, menos comprensible que otras para las personas no iniciadas en las Matemáticas, se le dedica una atención especial aunque ciñéndonos a un ejemplo fácil de asimilar: La figura autosemejante del Triángulo de Sierpinski.

A esta propiedad, característica de todos los conjuntos fractales más tradicionales o más modernos, como la conocida Curva de Hilbert, podríamos asociar las obras del ya citado Hecker o las llevadas a cabo con anterioridad por el neerlandés Aldo van Eyck[7].

---

[7] Aldo van Eyck (1918-1999) tiene una producción constructiva en la que destacan sus obras dedicadas a la infancia. Sus parque infantiles han sido un

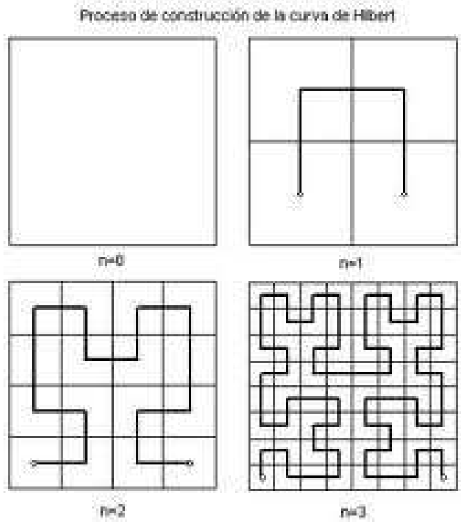


Figura 14. Curva de Hilbert

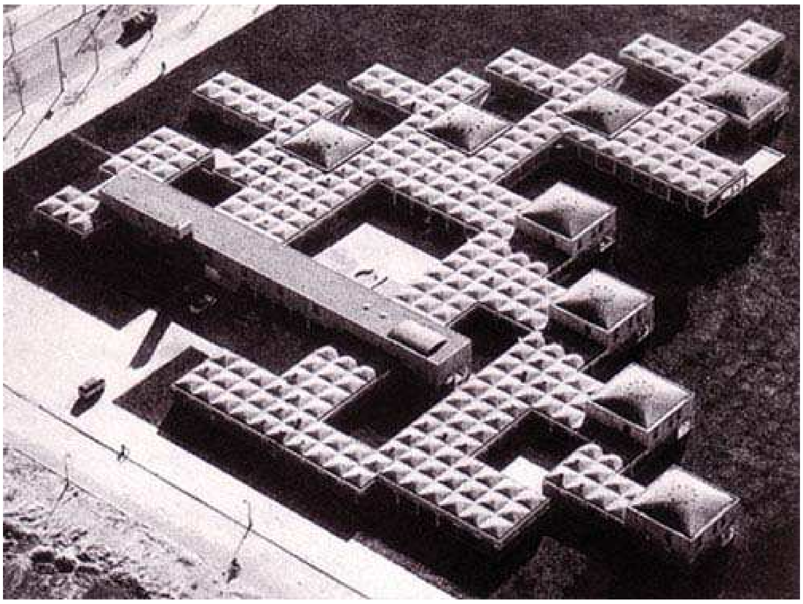


Figura 14. Orfanato municipal de Ámsterdam de A. van Eyck

modelo a seguir en épocas posteriores.

Figura 15. Zvi Hecker

El hecho de poder obtener a partir de estos conjuntos unas imágenes que, potenciadas con el uso del ordenador, ofrezcan resultados sorprendentes y de una gran plasticidad, ha hecho que se pongan de moda y que, concretamente en Arquitectura, se vengan "rastreando" obras en las que pueden reconocerse alguna de las propiedades de la nueva matemática, sin tener en cuenta si el autor de esas obras conocía con anterioridad y aplicaba conscientemente alguna de las propiedades que hacen a un objeto fractal.

4. Dimensión fractal

El Triángulo de Sierpinski es un conjunto fractal autosemejante que se puede generar por sucesivas homotecias.

Dichas homotecias pueden considerar como centro cualquiera de los vértices del triángulo equilátero de partida. Cada uno de los nuevos triángulos que se generen, tendrán un lado que mida la mitad del inicial

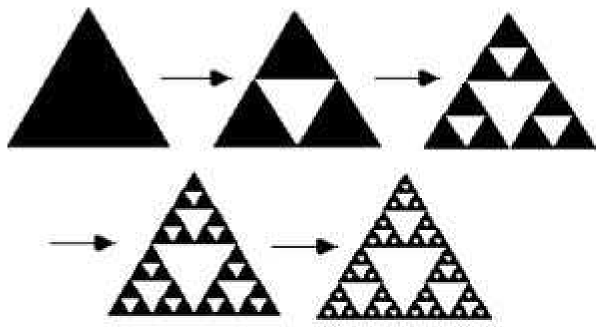


Figura 16. Generación sucesiva del Triángulo de Sierpinski

Si analizamos desde el punto de vista Euclídeo la figura, F, es decir, midiendo longitudes y áreas, obtenemos el siguiente resultado: si en el primer paso, del triángulo equilátero de partida se obtienen tres triángulos semejantes al primero y de lado la mitad del inicial; en el paso k-ésimo, F, tendrá 3^k triángulos, lo que nos permite obtener como expresión general del lado correspondiente a los triángulos que se van obteniendo en pasos sucesivos:

$$\text{Longitud del lado: } \left(\frac{1}{2}\right)^K$$

De forma análoga se puede escribir como expresión genérica para la altura correspondiente a los sucesivos triángulos obtenidos de las sucesivas homotecias:

$$\text{Longitud de la altura: } \left(\frac{1}{2}\right)^K \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Con estas condiciones:

Si definimos el área de F como la suma de las áreas de todos los triángulos que componen F, el conjunto tiene el área:

$$A(F) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^K \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^K 3^K$$

que es 0 cuando $K \to \infty$.

Si definimos la longitud de F como la suma de los perímetros de todos los triángulos que componen F, este conjunto tiene de longitud:

$$L(F) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{K} 3^{K}$$

que es infinita cuando $K \to \infty$

La consecuencia es, por lo tanto, que tenemos un conjunto de longitud infinita y área cero sobre un triángulo equilátero.

Este conjunto no se puede definir adecuadamente, en términos de dimensiones, con la geometría Euclídea. ¿Qué dimensión topológica tiene, pues, este conjunto?

Para dar respuesta a esta cuestión podemos recurrir a la definición de la llamada Dimensión de Hausdorff que nos permite determinar la dimensión de un conjunto cualquiera autosemejante en el plano.

Hausdorff nos dice que para un conjunto, F, autosemejante del plano, resultando F:

$$F = g_1(F) \cup \ldots \cup g_n(F)$$

con $g_1, \ldots, g_n$ semejanzas de razones $k_1, \ldots, k_n$ menores que 1, se define su dimensión fractal F como la solución de la ecuación

$$k_1^d + \ldots + k_n^d = 1$$

Si las razones de semejanza son todas iguales a k entonces la dimensión es :

$$d = -\frac{\log n}{\log k}$$

Analizando las semejanzas que dan lugar al triángulo de Sierpinski se ve que partiendo de un triángulo T_0 definimos homotecias de razón ½ con centro en cada uno de los vértices de T_0 y obtenemos tres triángulos semejantes al inicial que forman una figura que llamamos T_1.

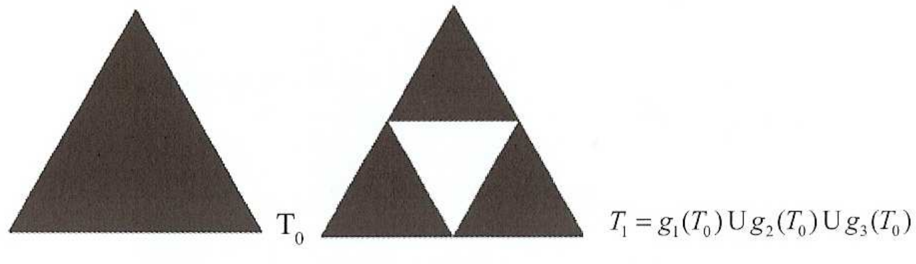


Figura 17. Aplicación de homotecia de k = 1/2

Para el caso del triángulo de Sierpinski, donde las semejanzas son tres homotecias de razón ½, la expresión correspondiente es:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D = 1$$

de donde se obtiene que : $3 = 2^D$
despejando D:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58496$$

4. Conclusiones

En el último siglo los avances de la Matemática han sido espectaculares. Nuevas aplicaciones han demandado nuevas matemáticas y las respuestas a esas demandas han generado nuevos descubrimientos como los objetos fractales. Su uso se ha universalizado. El diseño los ha hecho suyos no siempre con el debido rigor.

Pero lo cierto es que su inmediatez no permite analizarlos de forma objetiva. Falta perspectiva histórica. Aún está por ver cuáles de esos objetos y esos principios que hoy manejamos para diseñar sobrevivirán a sus semejantes. Pero eso ya es otra historia.

Referencias

[1] CÁNOVAS, Andrés y otros. *Pabellón de Bruselas ´58 Corrales y Molezún.*, Ministerio de la Vivienda y DPA. ETSAM, Madrid, 2004.

[2] EXPOSICIÓN, Catálogo de. *Jean Nouvel*, Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. Madrid, 2002.

[3] LOCHER, J. L. y otros. *La magia de M.C. Escher*, TASCHEN, Londres, 2000.

[4] MANDELBROT, Benoit. *Los Objetos Fractales*, Tusquets Editores, Barcelona, 2000.

[5] MORATALLA, A. y SANZ, A. *Actas de las II Jornadas de Experiencia de Innovación Docente*. UCAV, Ávila, 2009.

[6] SÁNCHEZ , J. *La Espiral en la Arquitectura: Espacios pictóricos y arquitectónicos.* Mairea Libros. Madrid, 2007.

[7] HISTORIA DE LA ARQUITECTURA. Página del Departamento. http://www.ETSAC.es

[8] ROMERO SCHMITKE, M. http://www.enciclopedia.us.es

Sobre las autoras:

Nombre: Juana María Sánchez González
Correo Electrónico: juanmaria.sanchez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Ascensión Moratalla de la Hoz
Correo Electrónico: ascension.moratalla.delahoz@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Agripina Sanz Pérez
Correo Electrónico: asanz@caminos.upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Cuentos Matemáticos
Plani-ficación familiar

Mariló López González

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

11 de abril de 2011

Resumen

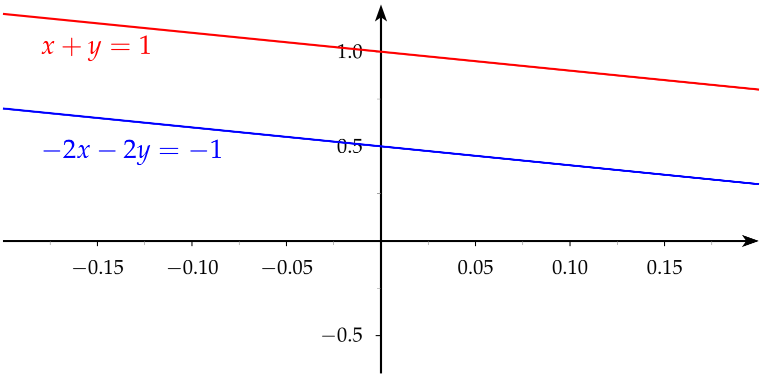
Este cuento trata de introducir al lector de una manera informal y divertida en el mundo de la geometría plana y de los movimientos o isometrías. Con la medicina como metáfora conductora, son presentados conceptos geométricos como las rectas, sus intersecciones, o giros y traslaciones de las mismas.

Palabras Clave: recta, plano, paralelismo, intersección, traslación, giro,

El doctor Isometri era un médico especializado en tratar y solucionar los problemas de descendencia entre las parejas de rectas del plano. A él acudían los pares de rectas que por un motivo u otro necesitaban de sus consejos y tratamientos para cambiar su situación en relación a sus puntos en común; o bien no tenían puntos-hijos, o bien querían más de los que ya tenían o bien querían dejar de tenerlos.

Relataremos a continuación algunos de los casos que el Doctor Isometri trató con éxito:

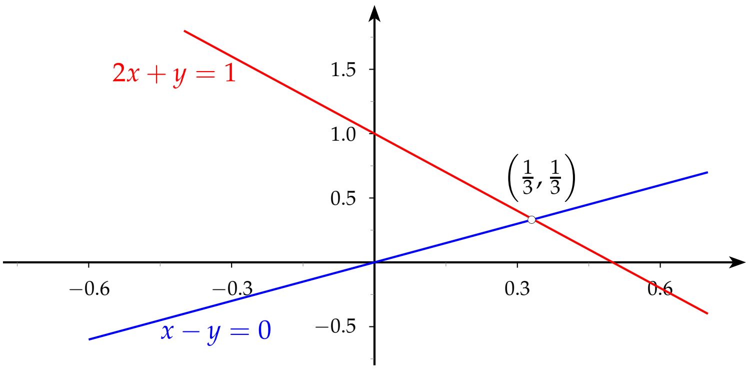
a) El caso de la pareja $x + y = 1$, $2x + 2y = 1$
Un día del pasado mes de Febrero llegaron a mi consulta estas dos rectas realmente compungidas. Habían probado todos los tratamientos del mercado para tener descendencia pero no conseguían tener un punto en común. Mi primer paso fue hacerles una radiografía plana para conocer sus peculiaridades. Estos fueron los resultados de la prueba:



Les diagnostiqué un paralelismo severo. La situación era complicada, y tras varias consultas y deliberaciones decidí aplicarles un tratamiento de giro. La cosa tenía su riesgo ya que las características del miembro de la pareja al que se le aplicara cambiarían, perdería así su dirección pasando a tener otra distinta. Ellos asumieron el riesgo y apliqué a $x + y = 1$ un giro de base el punto (0,1) y ángulo $\frac{\pi}{4}$. El resultado fue casi inmediato y en cuestión de segundos tuvieron su primer punto en común.

Pocas veces he tenido unos pacientes tan agradecidos, además de haber hecho realidad su sueño de ser padres de un precioso punto, $x + y = 1$ estaba encantada con su nuevo aspecto, decía que ver el mundo desde esa perspectiva era mucho más divertido.

b) El caso de la pareja $x - y = 0, 2x + y = 1$
A comienzos de la primavera de ese mismo año apareció por mi consulta esta otra pareja de rectas. Su problema era que durante toda su vida en común sólo habían tenido un hijo, el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Me traían una foto de familia:

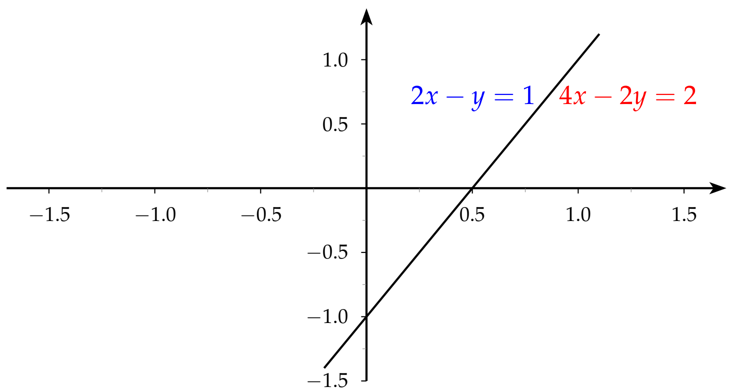


En este caso tenía muy claro los pasos a seguir pero encerraban ciertas condiciones que podían ser duras de aceptar. Les comenté que existían dos tipos de tratamientos, o bien un tratamiento de giro en la línea del aplicado a la pareja del primer caso, o bien un tratamiento de traslación. Por mi parte yo les aconsejaba el segundo ya que implicaba menos cambios para el miembro de la pareja que se sometiera al mismo (no alteraría su dirección). El problema residía que debían someterse al tratamiento cuando su primer hijo ya estuviese crecido y dispuesto a emprender una vida por su cuenta ya que probablemente después del tratamiento no volvieran a verlo. Decidieron aceptar las condiciones ya que $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ se incorporaba a trabajar en Australia, al otro lado del mundo, con lo que de todas formas serían contadas las veces que podrían verle.

Apliqué el tratamiento de traslación de vector $(1, 1)$ a la recta $2x + y = 1$ y al poco tiempo tuvieron a su pequeño, el puntito $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ muy parecido a su hermano.

Se despidieron de mí muy satisfechos diciéndome que no sería la última vez que nos viéramos ya que pensaban someterse al mismo tratamiento cuando $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ se independizara.

c) El caso de la pareja $2x - y = 1$, $4x - 2y = 2$
El último caso que quiero relatar se trata de esta pareja. Su problema era doble, por un lado no paraban de tener hijos. Cada vez que se daban cuenta, encontraban un nuevo punto en común. Su economía estaba ya seriamente resentida. Por otro, existía el problema añadido de que ni siquiera sus propios hijos conseguían diferenciarlos. Como primer paso realicé las pruebas rutinarias y el escáner plano arrojó lo siguiente:



Era evidente que la pareja sufría de coincidencia aguda. Si no poníamos remedio continuarían teniendo hijos toda su existencia.

Para este caso propuse de nuevo un tratamiento de giro, eso haría que la pareja tuviera un punto de descendencia y además cambiaría radicalmente el aspecto entre un miembro y otro de la pareja.

Decidieron que $2x - y = 1$ se sometiera a un giro de base el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ su punto en común preferido, y ángulo $\frac{\pi}{6}$.

De nuevo la pareja quedó encantada.

Sobre la autora:
Nombre: Mariló López González
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Investigación
¿Es el coeficiente de Hurst un buen indicador de extinción de especies?

Alfonso Garmendia Salvador

Luis Garmendia Salvador

Adela Salvador Alcaide

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

2 de abril de 2011

Resumen

La dimensión fractal de las fluctuaciones de los tamaños poblacionales se puede utilizar como un estimador del riesgo de extinción de una especie. El problema en la medición de esta dimensión fractal suele ser la longitud de la serie temporal, normalmente demasiado corta para que los resultados sean concluyentes. En este trabajo se ha analizado esta hipótesis con los datos obtenidos a partir de un modelo iterativo de competencia en diferentes regímenes de perturbación entre dos estrategias de germinación diferentes: germinación de todas las semillas vs. dormición de la mitad de las semillas. Esto permite disponer de series temporales largas, de mil años y de diferentes riesgos de extinción.

Palabras Clave: Homocarpia, heterocarpia, dimensión fractal, extinción, series temporales, coeficiente de Hurst.

1. Introducción

Este artículo es continuación de dos anteriores, [17] y [18]. En "Fractal Dimension of Birds Population Sizes Time Series" [17] el coeficiente de Hurst se utilizó en series temporales de poblaciones de paseriformes para analizar su utilidad como indicador del peligro de extinción de especies. El principal problema que dicho estudio encontró es que las series temporales utilizadas tenían una longitud de unos veinte años, longitud que podría considerarse larga para series temporales de poblaciones reales, pero demasiado corta para utilizar el coeficiente de Hurst, por lo que se comprobó que para estudiar la capacidad del coeficiente de Hurst como indicador de la extinción de especies era necesario tener series temporales de mayor longitud. El segundo artículo, "The importance of the intensity and frequency of perturbations on the germination delay", [18], estudia un modelo en el que dos poblaciones de plantas, con diferentes estrategias de reproducción, compiten por el territorio. En dicho modelo las plantas son perennes y la única causa de muerte son las perturbaciones. Existe una probabilidad de perturbación OP y la intensidad de la perturbación PI. Se trabaja con series temporales largas, de mil años, series temporales suficientemente largas como para obtener una medida fiable del coeficiente de Hurst. En este trabajo se analiza el coeficiente de Hurst de series temporales obtenidas mediante las técnicas utilizadas en [18] (ó en [18]) para comprobar si realmente puede ser utilizado como un estimador del riesgo de extinción de las especies.

El coeficiente de Hurst ha sido utilizado como medida de la dimensión fractal [1 – 5] para el estudio de muy distintos problemas en ecología [13-16] y de biología [6, 8 – 12]. Valores grandes del coeficiente de Hurst pueden interpretarse como peligro de extinción de especies [7, 19]. Hastings y Sugihara [19] sugieren que el incremento del rango al crecer el intervalo de tiempo indican que las fluctuaciones son grandes por lo que aumenta la probabilidad de extinción.

En este trabajo se pretende analizar si el coeficiente de Hurst es un buen indicador de la extinción de especies basándonos en:

1. Series temporales largas (1000 – 100 = 900 años)

2. Diferentes entornos definidos por distintas frecuencias de perturbación e intensidad de la perturbación.

Por lo tanto los objetivos de este trabajo son, por un lado analizar cómo varía el coeficiente de Hurst para las dos estrategias de germinación en diferentes regímenes de frecuencias de perturbaciones y de intensidad de las mismas. En segundo lugar, comparar las series temporales previas a la extinción con las series sin extinción, para comprobar si las diferencias en el coeficiente de Hurst hubiesen permitido predecir que esa especie se iba a extinguir.

2. Material y métodos

2.1. Breve resumen del modelo iterativo utilizado

El modelo utilizado para obtener las series temporales es el mismo que en

[18] donde está la explicación completa del mismo. Es un modelo iterativo que se utilizó para comparar el efecto de la perturbación para dos distintas estrategias reproductivas, plantas homocárpicas y plantas heterocárpicas que compiten por un territorio, y para conocer la adaptabilidad de dichas estrategias a los diferentes regímenes de perturbación.

Todas las semillas de las plantas homocárpicas germinan al primer año, mientras que las plantas heterocárpicas forman un banco de semillas de las cuales sólo la mitad germinan en el año. Las semillas que germinan deben encontrar y ocupar un lugar vacío en su celda y así convertirse en una planta adulta, y en caso contrario, muere.

La única causa de muerte de una planta adulta es la producida por las perturbaciones, utilizando variables aleatorias con una cierta probabilidad, OP que indica la probabilidad de la frecuencia en que puede ocurrir una perturbación y PI que es la probabilidad de la intensidad de esa perturbación.

En [18] se concluyó que la heterocarpia es una estrategia competitiva en entornos perturbados, ya que las plantas heterocárpicas dominan para valores altos de intensidad de perturbación (PI). En [18] se observó que la extinción de las plantas homocárpicas depende más de la intensidad de la perturbación (PI) que de la frecuencia de la perturbación (OP), por lo que en este trabajo nos centraremos en analizar el coeficiente de Hurst para diferentes valores de PI.

En este trabajo el territorio consta de cien celdas distribuidas en una cuadrícula de (10 x 10) toroidal, es decir, sin bordes, y las otras variables independientes se han fijado para todas las series temporales, tomando como 3 el número de semillas que cada planta adulta produce cada año las cuales se dispersan de forma aleatoria entre la propia celda de la planta y las ocho celdas próximas, como 5 el número máximo de plantas adultas que puede haber en cada celda, y como 8 el valor inicial de semillas que se dispersan.

2.2. Programas

En este estudio se han utilizado dos programas de ordenador, el primero (H) para obtener los coeficientes de Hurst, que ya se utilizó en [17], y el segundo (TS), el utilizado en [18], para obtener las largas series temporales de mil años. Para cada valor de PI y cada valor de OP, desde 0,1 hasta 0,9, de 0,1 en 0,1, se han obtenido con el programa TS 10 series temporales de mil años de longitud y se han calculado, utilizando el programa H sus coeficientes de Hurst.

Se ha hecho correr el programa reiteradamente obteniendo en todos los casos series temporales de mil años para distintos valores de OP y PI. Estas series temporales se han introducido en el programa [17] y se han obtenido los coeficientes de Hurst por los distintos métodos. Para añadir claridad al trabajo entre todos los métodos para calcular el coeficiente de Hurst se ha seleccionado uno, el método del incremento del rango aunque el programa (H) utilizado ha calculado estos coeficientes por los otras técnicas, y se ha comprobado que aunque los valores obtenidos son diferentes para las distintas técnicas, sin embargo las tendencias observadas son las mismas.

El programa (H) está implementado en Pascal y puede descargarse gratuitamente desde:

http://www.bi.upv.es/~algarsal/hurst/hurst.zip.

El segundo programa (TS) [18] que simula la competición por el espacio de plantas con dos estrategias reproductivas distintas, homocárpicas y heterocárpicas, fue implementado usando el lenguaje C++ y puede verse en:

http://www.bi.upv.es/~algarsal/plantas/plantas.zip.

Para medir el coeficiente de Hurst se han utilizado las series temporales del programa (TS) iterativo, con longitud de 1000 años, eliminando los 100 primeros años, para que la serie represente sólo la fase en que las poblaciones han alcanzado una cierta independencia de las condiciones iniciales, por lo que quedan series temporales de 900 años en los casos en que la especie no se ha extinguido y menos (hasta el año de extinción) en los casos en que la especie se extingue.

Para calcular la variabilidad de las mediciones, se ha corrido el programa 10 veces para cada valor de OP y PI, obteniendo la media y la desviación estándar de la medida del coeficiente de Hurst de las 10 series temporales resultantes. Para observar los cambios que produce la PI (factor que aumenta el riesgo de extinción) en el coeficiente de Hurst se han realizado medidas desde PI igual a 0.1 hasta 0.9, con intervalos de 0.1.

2.3. Coeficiente de Hurst

En [17] se define un objeto fractal como aquel cuya dimensión topológica no coincide con su dimensión de Hausdorff, por lo que se comenta qué se entiende por dimensión de Hausdorff y por dimensión de similaridad. Se trabaja la dimensión de series temporales, ofreciendo distintos métodos para obtener el coeficiente de Hurst.

A la hora de comparar el coeficiente de Hurst de diferentes poblaciones, es importante que el método de medida sea el mismo en todas ellas, porque diferentes métodos pueden producir resultados diferentes. Aún así, los resultados de los diferentes métodos están relacionados de forma lineal [17, 7] por lo que las conclusiones finales no deberían variar sea cual sea el método utilizado.

Para mostrar los resultados de este trabajo se ha utilizado el método del incremento del rango debido a que es el que más relación tiene con la base teórica por la que se utiliza el coeficiente de Hurst para estimar el riesgo de extinción [7]. El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie temporal en un intervalo de tiempo dado. En el método del incremento del rango se obtiene el coeficiente de Hurst, H, mediante la expresión: $R(\Delta t) = c\ \Delta t\ H$, donde Δt es un intervalo de tiempo dado, $R(\Delta t)$ denota la media de los valores del rango del proceso $\{y(t)\}$, en todos los intervalos de tiempo de duración Δt.

Con este método hay que fijar el incremento de tiempo, Δt, que se va a utilizar para las diferentes medidas. Este incremento de tiempo, Δt, se ha fijado en dos valores 10 y 100.

El coeficiente de Hurst medido por el método del incremento del rango proporciona una medida de las fluctuaciones de la población, lo que significa que una población con un coeficiente de Hurst alto tiene grandes fluctuaciones lo que puede ser un indicador del peligro de extinción [7]. Hastings y Sugihara [19] sugieren que si crece el rango, aumentan las fluctuaciones y se incrementa el peligro de extinción. Observan también que el coeficiente de Hurst calculado por este método en series temporales cortas puede ser mayor que el real.

Como en ocasiones se produce la extinción de una especie en las series temporales utilizadas en un periodo de 200 años, no es posible calcular el coeficiente de Hurst por el método del incremento del rango usando $\Delta t = 100$, y por ello se analizan los resultados obtenidos utilizando el método del incremento del rango con $\Delta t = 10$.

3. Resultados

3.1. Análisis de las fluctuaciones del rango

En [18] se comprobó que los valores del rango estaban afectados por la intensidad de la perturbación, mientras que la frecuencia de la perturbación no influía.

El comportamiento de la amplitud de las oscilaciones de plantas homocárpicas y heterocárpicas en series temporales de mil años con OP = 0.5 y para diferentes valores de PI se muestran en la figura 1.

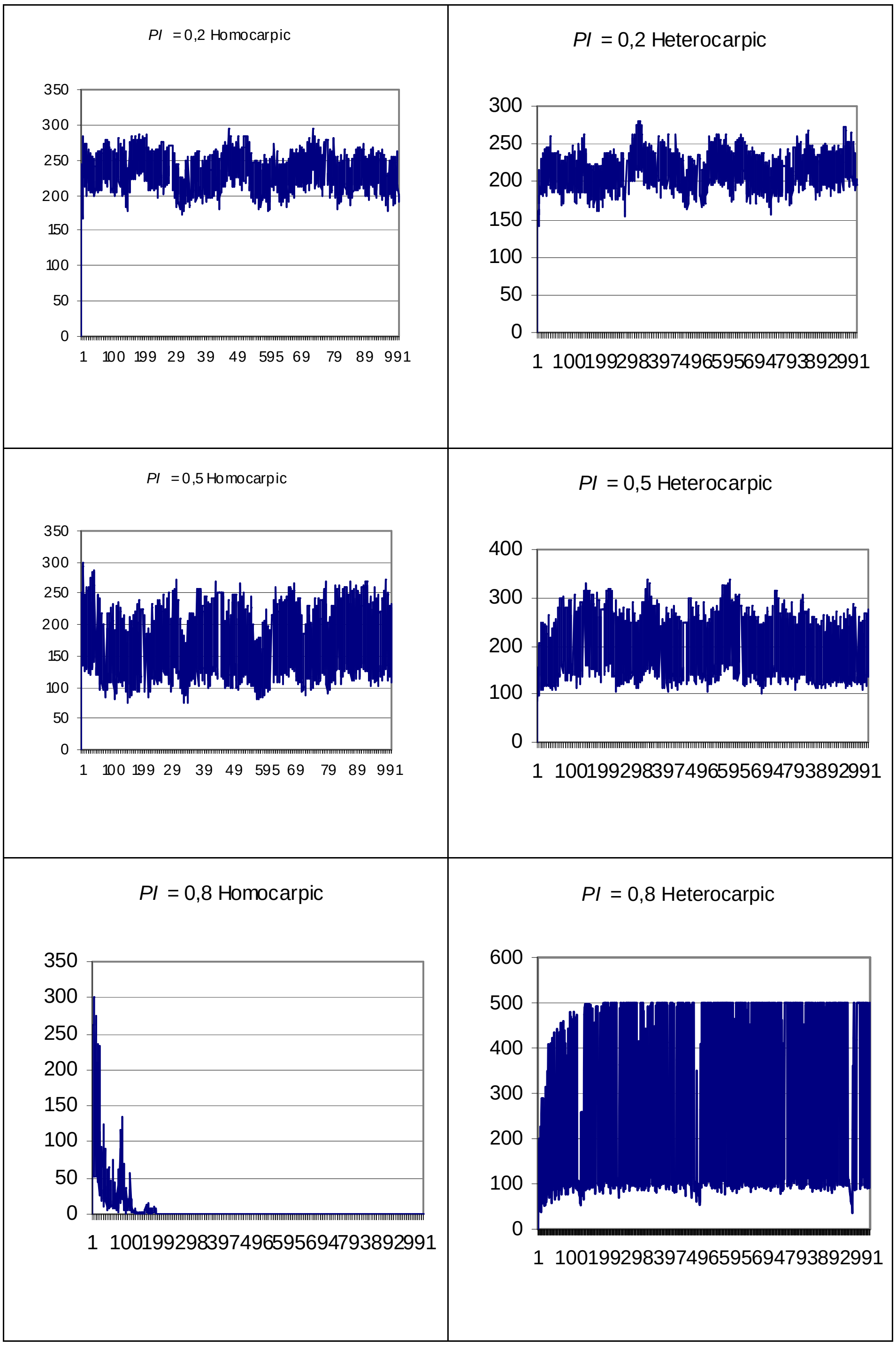


Figura 1: Series temporales

Para PI = 0.2 la amplitud de las oscilaciones es de unas 100 plantas. El número de plantas homocárpicas oscila entre 200 y 300 plantas, mientras que las plantas heterocárpicas oscilan aproximadamente entre 150 y 250 plantas.

Para PI = 0.5 la amplitud de las oscilaciones es aproximadamente de unas 200 plantas. El número de plantas homocárpicas oscila entre 100 y 250 plantas y las heterocárpicas entre 100 y 300 plantas.

Para PI = 0.8 las plantas homocárpicas se extinguen en unos 200 años, por lo que al no tener competencia el número de plantas heterocárpicas aumenta con oscilaciones de gran amplitud, de entre 100 y 500 plantas. El banco de semillas resulta ser una estrategia que favorece a las plantas en entornos de gran probabilidad de perturbación PI.

3.2. Coeficientes de Hurst medidos por el método del incremento del rango para distintos valores de OP y de PI.

En la tabla 1 se recogen la media y la desviación típica de los coeficientes de Hurst de 10 series temporales, de plantas homocárpicas y heterocárpicas durante 900 (1 000 – 100) años de competición con diferentes intensidades de perturbación (PI) y distintas probabilidades de que ocurra dicha perturbación (OP).

Así por ejemplo, para PI = 0.2 y OP = 0.2 el coeficiente de Hurst por el método del incremento del rango, para un $\Delta t = 100$, se ha obtenido que la media de 10 series temporales de novecientos años es de 0.27 con una desviación típica de 0.01.

Se observa que el coeficiente de Hurst es muy homogéneo en cada una de las diez series temporales usadas en cada caso, ya que las desviaciones típicas son muy pequeñas, todas ellas menores que 0.05. El comportamiento es el mismo para $\Delta t = 10$ y para $\Delta t = 100$.

Para PI = 0.8 y OP = 0.5, las plantas homocárpicas se extinguen en unos 200 años y el coeficiente de Hurst de la serie temporal antes de la extinción, crece (H = 0.4), y para OP = 0.8, y PI = 0.8 se tiene que H = 0.52, es decir, el coeficiente de Hurst crece al crecer PI.

Al analizar los valores de H ($\Delta t = 10$) para las plantas homocárpicas se comprueba que los valores más altos se alcanzan con OP = 0.5, para PI = 0.8 (H = 0.40) y con OP = 0.8, para PI = 0.8 (H = 0.52), es decir, esto parecería indicar que H puede ser un buen indicador del peligro de extinción. Sin embargo, al analizar la tabla se comprueba que esto no puede asegurarse ya que para OP = 0.2, PI = 0.2, el valor de H = 0.52 y entonces no existe peligro de extinción. Observación similar puede hacerse con un $\Delta t = 100$.

Plantas homocárpicas (Δt = 100)

	OP = 0.2	OP = 0.5	OP = 0.8
PI = 0.2	0.27 ± 0.01	0.20 ± 0.00	0.27 ± 0.01
PI = 0.5	0.23 ± 0.01	0.15 ± 0.01	0.20 ± 0.01
PI = 0.8	0.25 ± 0.01	Extinct	Extinct

Plantas heterocárpicas (Δt = 100)

	OP = 0.2	OP = 0.5	OP = 0.8
PI = 0.2	0.29 ± 0.01	0.21 ± 0.00	0.28 ± 0.01
PI = 0.5	0.23 ± 0.01	0.15 ± 0.01	0.19 ± 0.01
PI = 0.8	0.23 ± 0.01	0.08 ± 0.01	0.22 ± 0.01

Plantas homocárpicas (Δt = 10)

	OP = 0.2	OP = 0.5	OP = 0.8
PI = 0.2	0.52 ± 0.016	0.366 ± 0.03	0.456 ± 0.02
PI = 0.5	0.488 ± 0.02	0.328 ± 0.04	0.448 ± 0.02
PI = 0.8	0.506 ± 0.02	0.40 ± 0.03 Extinct	0.52 ± 0.02 Extinct

Plantas heterocárpicas (Δt = 10)

	OP = 0.2	OP = 0.5	OP = 0.8
PI = 0.2	0.52 ± 0.014	0.366 ± 0.03	0.462 ± 0.02
PI = 0.5	0.488 ± 0.02	0.326 ± 0.04	0.456 ± 0.02
PI = 0.8	0.482 ± 0.02	0.296 ± 0.04	0.48 ± 0.02

Tabla 1: Coeficientes de Hurst medidos por el método del incremento del rango.

3.2. Estudio de H para IP variable.

En vista de los resultados obtenidos en la tabla 1, se presentan en la figura 2 los valores medios de 10 series temporales del coeficiente de Hurst por el método del incremento del rango para Δt = 10 y para Δt = 100, para distintos valores de PI y para OP = 0.5.

Se observa que cuando PI aumenta, H disminuye ajustándose a una recta en las plantas heterocárpicas, pero tiene una forma muy distinta con las plantas homocárpicas, que primero disminuye, alcanzando un valor mínimo para PI = 0.5, para luego crecer.

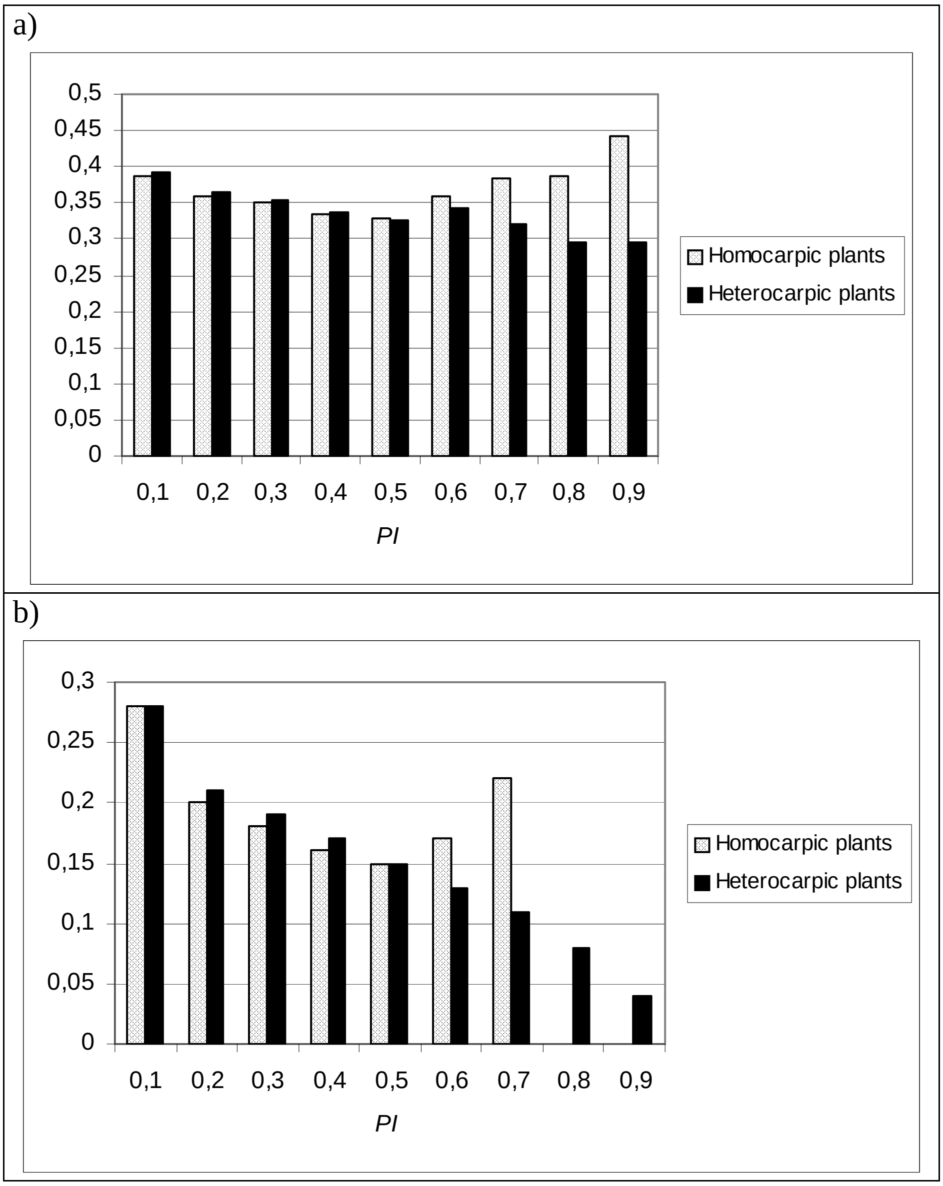


Figura 2: Gráfico del comportamiento del coeficiente de Hurst. a) Medido con Δt = 10 años. b) Medido con Δt = 100 años. H para PI = 0.8 y para PI = 0.9 no puede medirse en las plantas homocárpicas porque se extinguen en unos 200 años.

Cuando las plantas homocárpicas presentan un peligro de extinción, el valor de H crece. Pero no se puede asegurar que sea un buen indicador ya que para una perturbación pequeña, PI = 0.1, se alcanzan valores muy altos del coeficiente de Hurst tanto para plantas homocárpicas como heterocárpicas, y entonces no existe peligro de extinción.

4. Conclusión

Contrariamente a lo esperado, y a lo que se comenta en la bibliografía consultada, no puede afirmarse que el coeficiente de Hurst sea un buen indicador del peligro de extinción de una especie, y no porque las series temporales sean cortas, pues en este trabajo se han utilizado series temporales largas, de mil años. Se observa una fuerte relación con la intensidad de la perturbación, pues la dimensión fractal de las series temporales, y sus fluctuaciones decrecen (H disminuye) con la intensidad de la perturbación en las especies más resilientes, más adaptadas, las plantas heterocárpicas, pero en las plantas homocárpicas (más sensible a las perturbaciones) alcanza valores altos del coeficiente y de su dimensión fractal tanto para valores altos de la perturbación (cuando existe peligro de extinción) como para valores bajos en los que no existe riesgo de extinción.

Referencias

[1] B. B. MANDELBROT, *Fractals: Form, chance and dimension*, Freeman, San Francisco, 1977.

[2] B. B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, 2nd. ed. W. H. Freeman & Co. San Francisco, 1982.

[3] A. GARMENDIA, A. SALVADOR, *Fractal: Punto fijo de aplicaciones contractivas*, VI JAEM, Badajoz (1993) 37-47.

[4] M. F. BARNSLEY, *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc. Boston, 1988.

[5] K. J. FALCONER, *The Geometry of fractal sets*, C.U.P. Cambridge, 1988.

[6] J. M. PACHECO, *Fractales y Oceanografía*, Epsilon 28 (1994) 99-108.

[7] G. SUGIHARA, R. M. MAY, *Applications of Fractal in Ecology*, Trends Ecol. Evol. 5, 3 (1990) 79-86.

[8] T. GISIGER, *Scale invariante in biology: coincidence or footprint of a universal mechanism?*, Biol. Rev. 76 (2001) 161-209.

[9] R. E. PLOTNICK, J. J. SEPKOSKI, *A multiplicative multifractal model for originations and extinctions*, Paleobiology 27 (2001) 126-139.

[10] J. HUISMAN, F. J. WEISSING, *Fundamental unpredictability in multispecies*

competition, Am. Nat. 157 (2001) 488-494.

[11] J. J. LENNON, W. E. KUNIN, S. HARTLEY, *Fractal species distributions do not produce power-law species–area relationships*, Oikos 97 (2002) 378-386.

[12] L. BORDA-DE-ÁGUA, S. P. HUBBELL, M. MCALLISTER, *Species–area curves, diversity indices and species abundance distributions: a multifractal analysis*, Am. Nat., 159 (2002) 138-155.

[13] R. H. BRADBURY, R. E. REITSCHELT, D. G. GREEN, *Fractals in ecology: methods and interpretation*, Marine Ecol. Prog. Ser. 14 (1984) 295-6.

[14] C. D. CUTLER, *A review of the theory and estimation of fractal dimension*, in: H. L. TONG, (Ed.), Nonlinear Time Series and Chaos, Vol. I, Dimension Estimation and Models, World Scientific, Singapore, 1993.

[15] J. M. GARCÍA-RUÍZ, F. OTÁLORA, *El uso de la geometría fractal en las ciencias naturales*, Epsilon 28 (1994) 109-126.

[16] D. R. MORSE, J. H. LAWTON, M. M. DODSON, M. H. WILLIANSON, *Fractal dimension of vegetation and the distribution on anthropod body lengths*, Nature 314 (1985) 731-733.

[17] A. GARMENDIA, A. SALVADOR, *Fractal Dimension of Birds Population Sizes Time Series*, Mathematical Biosciences 206 (2007) 155-171.

[18] A. GARMENDIA, A. SALVADOR, *The importance of the intensity and frequency of perturbations on the germination delay*, Mathematical Biosciences. To be published.

[19] H. M. HASTINGS, G. SUGIHARA, *Fractals, a user's guide for the natural sciences*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

Sobre los autores:

Nombre: Alfonso Garmendia Salvador
Correo Electrónico: algarsal@upvnet.upv.es
Institución: Universidad Politécnica de Valencia.

Nombre: Luis Garmendia Salvador
Correo Electrónico: lgarmend@fdi.ucm.es
Institución: Universidad Complutense de Madrid.

Nombre: Adela Salvador Alcaide
Correo Electrónico: ma09@caminos.upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España

Investigación
Política y Geometría

Mª Dolores López González

Sagrario Lantarón Sánchez

Isabel Lillo Villalobos

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

En este trabajo se aplican conceptos matemáticos al planteamiento de un problema de competición política. Se desarrolla y se implementa además un método que usa herramientas relacionadas con la geometría computacional para la resolución de dicho problema, probándose dicho método en un ejemplo basado en la política española.

Palabras Clave: Geometría Computacional, Competición Política, Algoritmos de búsqueda.

1. Introducción

Las matemáticas, independientemente de su doble vertiente de disciplina teórica y aplicada están, hoy en día, presentes en casi todas las actividades humanas, desde las ciencias experimentales hasta el arte, pasando por la medicina, la informática, la economía, etc., por lo que no es de extrañar que también algunos aspectos de la actividad política estén muy ligados a las matemáticas.

Pese a parecer sorprendente, existen conexiones entre la política y las matemáticas en no pocas líneas entre las que cabe destacar por ejemplo, la utilidad de la estadística o de la teoría de juegos aplicadas a procesos de competición política, elección social, votación, etc. El trabajo que aquí se presenta tiene como finalidad poner de manifiesto que una vez más, las matemáticas más elementales como son las ideas geométricas pueden aplicarse, en este caso al mundo de la política, concretamente a los procesos electorales, con buenos resultados. Con ello se evidencia que la cultura matemática es importante en prácticamente todos los campos de la vida cotidiana y profesional.

2. Los procesos electorales

La economía política hace un balance entre los intereses de los diferentes votantes y los partidos políticos. Estudia las preferencias políticas de la distribución de los votantes de una población atendiendo a factores socioeconómicos que se incorporan a la política pública. Estos se derivan de las diferencias de renta, edad, situación laboral, etc. En este trabajo abordamos la resolución de problemas de economía política por medio de herramientas geométricas sencillas.

Si asumimos que las diferentes opciones políticas acerca de dos temas distintos, a concretar en cada caso, se representan por las coordenadas de los puntos del plano, que llamaremos plano de políticas, la distancia entre ellos dará idea de la afinidad de las posturas relativas a dichos temas. Como en la actualidad en la mayoría de los países democráticos la lucha por el poder se lleva a cabo entre dos partidos mayoritarios, consideraremos el problema con dos partidos políticos en campaña electoral. Con estas consideraciones, el problema es el siguiente:

Tomamos, dentro del plano de políticas, dos partidos políticos p y q dados por sus coordenadas (p1,p2) y (q1,q2) y la localización de los n votantes. La mediatriz del segmento que los une divide al plano en dos partes (semiplanos) y así es posible calcular cuál es el número de votantes que elige a cada partido por proximidad a cada propuesta. Aquellos que están en el semiplano que contiene a uno de los partidos, votará a dicho partido.

Con el objetivo de conseguir el mayor número posible de adeptos, los partidos políticos van adaptando sus propuestas y pueden alterar sus políticas dentro de unos límites (por supuesto no es lógico que se alejen demasiado de su idea inicial). La finalidad reside en encontrar las posiciones óptimas (propuestas políticas) para ellos dentro del entorno marcado por esas limitaciones, es decir, aquéllas para las que el semiplano correspondiente anteriormente citado, contiene mayor número de votantes.

Por supuesto, todo esto tiene sentido si se conocen las preferencias de los votantes que a su vez deben conocer los programas electorales de los partidos y sus propuestas en cada momento. La idea entonces es resaltar, por un lado la importancia de las encuestas de opinión realizadas con rigurosidad en periodos cercanos a las elecciones, así como la difusión clara por parte de los partidos de sus propuestas y de las diversas matizaciones que de ellas se vayan proponiendo.

Con los resultados de las encuestas de opinión pueden detectarse los dos temas de mayor importancia para los ciudadanos en cada momento y aplicar el modelo geométrico que aquí se presenta, permitiendo a los políticos elegir una estrategia adecuada.

3. Planteamiento geométrico del problema

Si caracterizamos, por ejemplo, la inversión en educación y sanidad, por medio de dos parámetros (coordenadas de un punto del plano), tendremos determinado el plano de políticas. De esta forma, una política determinada vendrá dada por una posición en el plano, es decir por sus dos coordenadas.

Sean los partidos políticos p y q situados en los puntos (p1, p2) y (q1, q2) y (vi1 ,vi2) con i=1,…, n, las coordenadas de los n puntos que representan las preferencias de n votantes de una cierta población.

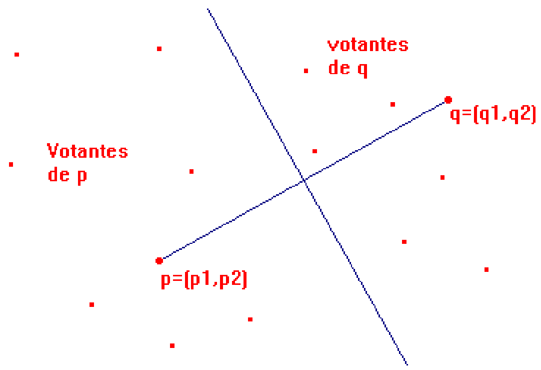


Figura 1. Región de captación de votantes para los partidos según sus propuestas

El conjunto de votantes del partido p estará más cerca de la posición de p que de la de q, por ello utilizamos la construcción de geometría computacional que se llama diagrama de Voronoi. Para nuestro caso, el diagrama de Voronoi consta de las dos regiones en que queda dividido el recinto al trazar la mediatriz del segmento pq. Ver figura 1.

Como en política es habitual que se admita una ligera variación en los programas de los partidos con el fin de conseguir un mayor número de votos, admitimos en este caso que sólo el partido p flexibilize sus opciones, es decir, que se mueva en un cierto entorno, representado por un disco centrado en su postura inicial y de radio r marcado por su grado de flexibilidad. Buscamos la mejor situación para p dentro de este entorno, aquélla desde la que consigue acercarse a un mayor número de votantes. Ver figura 2.

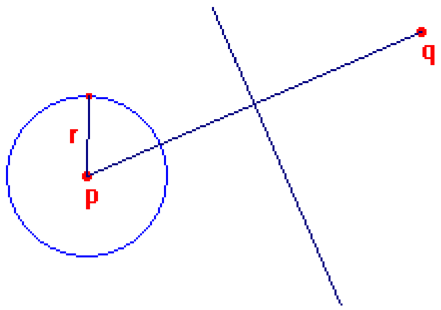


Figura 2: Entorno de flexibilidad para el partido p

La geometría nos aporta los siguientes resultados:

a) Siempre hay una situación óptima para p sobre la frontera de dicho entorno, y en el arco más próximo a q situado entre las dos tangentes trazadas desde q a la circunferencia (parte visible del entorno de p desde q). Ver figura 3.

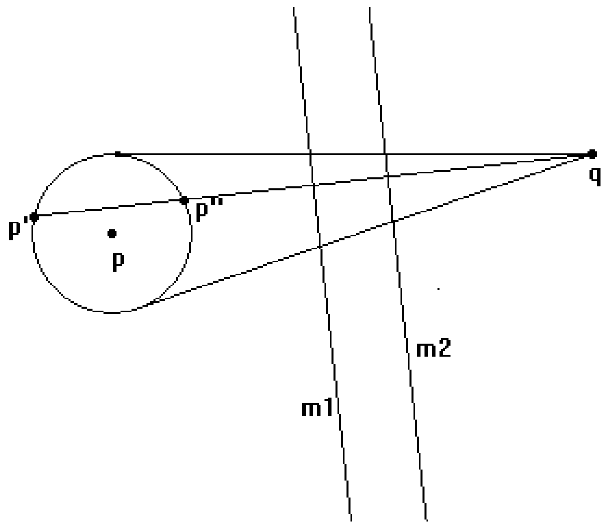


Figura 3: Primera aproximación de la zona óptima para p en su entorno de flexibilidad

Esto es porque si consideramos un punto del interior p' y trazamos la mediatriz m1 correspondiente a p' y q, cualquier punto situado en la línea que une p' y q tendría su mediatriz correspondiente paralela a la anterior, es decir, cuanto más nos acerquemos a la frontera del entorno cercana a q, la región de Voronoi (el semiplano) contendrá a las anteriores. Como consecuencia hay más posibilidad de captar más puntos.

Igualmente, si consideramos un punto p' de la frontera situado fuera de la parte visible desde q y trazamos la mediatriz m2 correspondiente a p' y q, el punto p'' intersección de la recta que une p' y q con la parte visible, cumple que la mediatriz p''q es paralela a la calculada. Comprobamos así que su región de Voronoi contendrá a la anterior. Ver figura 3.

b) Clasificación de los votantes.

Los puntos de la nube de votantes se clasifican en tres conjuntos según puedan o no ser capturados por las posibles localizaciones o posturas tomadas por el partido p:

1.- Votantes que nunca pueden atrapar p:

Los puntos (v_{i1}, v_{i2}) que pertenecen al conjunto siguiente:

$$\{(x,y)/d[(x,y),\text{circunferencia}] > d[(x,y),q]\}$$, es decir,

$$\{(x,y)/d[(x,y),p]-r > d[(x,y),q]\} = \{(x,y)/d[(x,y),p]-d[(x,y),q] > r\}$$

La frontera del conjunto es : $\{(x,y)/d[(x,y),p]-d[(x,y),q]=r\}$ la rama de la hipérbola de focos p y q y distancia 2a=r, más próxima a q. (Zona 1 en figura 4).

2.- Votantes que siempre atrapa p:

Los puntos (v_{i1}, v_{i2}) que pertenecen al conjunto:

$$\{(x,y)/\textit{máximo}\{d[(x,y),(c_1,c_2)\ \textit{con}\ (c_1,c_2)\in \text{circunferencia}]\} < d[(x,y),q]\}$$ es decir,

$$\{(x,y)/d[(x,y),p]+r < d[(x,y),q]\}$$

Así:

$$\{(x,y)/d[(x,y),q]-d[(x,y),p] > r\}$$

La frontera del conjunto es $\{(x,y)/d[(x,y),q]-d[(x,y),p]=r\}$, la rama de la hipérbola de focos p y q y distancia 2a=r, más próxima a p. Esta zona se puede ampliar ya que la posición óptima de p se restringe al arco visible y, en realidad, se amplía a la limitada por las mediatrices. (Zonas 2 y 4 en figura 4).

3.- Votantes que p puede ganar. Los dudosos:

Sólo se podrán coger como votantes dudosos de la nube los situados en la región limitada por las dos mediatrices de qp' y qp'' y el arco de hipérbola más cercano a q. (Zona 3 en figura 4).

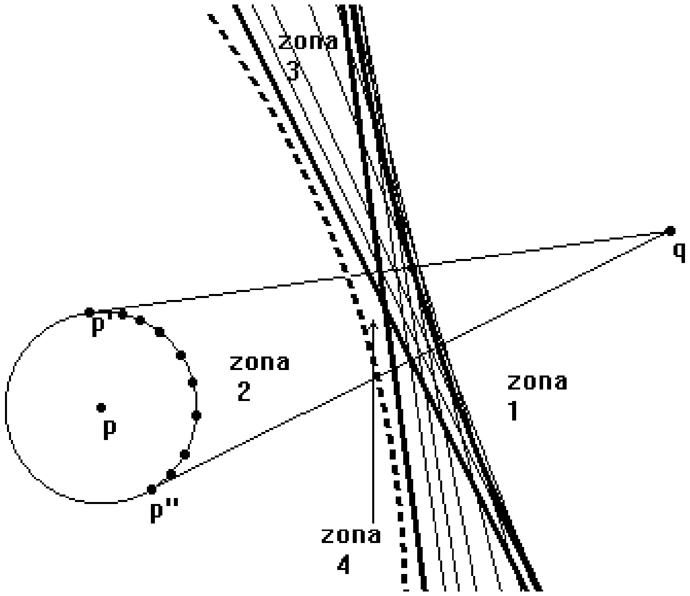


Figura 4: Clasificación de los votantes

De esta manera, la idea es encontrar la posición o posiciones óptimas (propuestas políticas del partido p) dentro del entorno que le garantice la captación del mayor número de votantes de entre los dudosos.

c) Solución geométrica al problema. Calculo de las posiciones óptimas:

El proceso que describimos a continuación se basa en la localización de intersecciones de circunferencias. Buscamos posiciones dentro del entorno de p que tengan más cerca la posición de un votante que la posición adoptada por el partido q.

Por un lado, tomamos la circunferencia centrada en p que nos indica el entorno de flexibilidad para el partido político correspondiente, por otro, para cada votante vi la circunferencia centrada en dicho punto y que pasa por q, ya que si la distancia a p es menor que a q, el primer partido podrá contabilizar a vi como votante propio. El arco marcado en la figura 5 (a) representa las posiciones que hacen que el partido p capte al votante. Si realizamos este proceso para todos los votantes, la zona de máxima intersección de estos arcos garantizará la posición adecuada para el partido. Eligiendo una postura en esa zona se asegurará el mayor número de votantes.

Ver figura 5 (b).

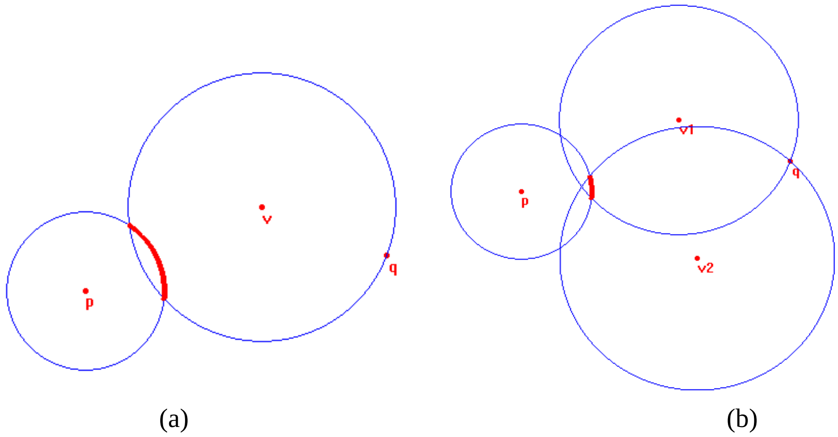


Figura 5: Arcos que representan: la zona de captación por parte del partido p de: un votante v (figura a) y la de dos votantes v1, v2 (figura b), al variar su posición en el entorno

4. Ejemplo práctico en el caso de la política en España

En esta sección se pone en práctica el proceso geométrico presentado a través de la simulación de un estudio de opinión relativo a temas presupuestarios basado en el Estudio de Opinión Pública y Política Fiscal nº 2615 (Julio de 2005) realizado por el CIS (Centro de Investigaciones Sociológicas).

4.1. Las encuestas de opinión

En España existen numerosos estudios estadísticos y encuestas sobre gran número de tópicos llevados a cabo por entidades como el CIS (Centro de Investigaciones Sociológicas), el INE (Instituto Nacional de Estadística) o el CEACS (Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales). Como un típico estudio de encuestas de opinión relevantes realizadas en la actualidad en nuestro país, hemos decidido trabajar con el estudio nº 2615 del CIS. Por un lado, sus resultados nos permitirán simular de forma más real la información que necesitamos y que no se encuentra a nuestra disposición por las carencias de este tipo de estudios, por otro lado, nos servirá para poner en práctica la teoría presentada avalándola como una buena posibilidad de planteamiento político y poniendo de manifiesto la necesidad de otras encuestas y estudios más completos. Esta encuesta contiene cuestiones sobre temas como los siguientes:

- El grado de demanda de ciertos servicios públicos por parte del encuestado.
- Opinión de los servicios que se reciben a cambio de los impuestos que se pagan.
- Evaluación sobre la cantidad de recursos que se destinan a los diferentes servicios.
- La necesidad de incrementar los impuestos para la mejora de los servicios.
- Buena distribución de los impuestos.

Todas estas cuestiones se presentan con respuestas multiopcionales como "no", "poco", "mucho".

4.2. Simulación a través de un ejemplo de política nacional

Usaremos el modelo presentado para simular unas estrategias electorales en un caso de política en España con datos parcialmente basados en los resultados de la encuesta del CIS anteriormente citada. Estos datos nos permitirán ejecutar una búsqueda de la política más adecuada en dos temas específicos, y evaluar los beneficios de tener esta información antes de un proceso electoral. Saber el número de las personas entrevistadas y sus respuestas a las preguntas del estudio, nos ha permitido simular el problema al nivel nacional.

Para poder llevar a cabo este tipo de trabajos se hace necesario contar con información adicional de tipo cuantitativo. Por ello añadiríamos a las encuestas preguntas del tipo:

1. Elija, de la lista siguiente, dos servicios que usted considera de alta prioridad: Educación, Defensa, Salud, Vivienda, Justicia, Trabajo y Materias Sociales, Transporte y Comunicaciones, Medio Ambiente.
2. Sabiendo el porcentaje de recursos que el gobierno ha dedicado en 2005 a cada uno de ellos, ¿qué porcentaje dedicaría usted?
3. ¿Afectaría a su actitud y decisión de voto el saber con antelación el dinero que dedicaría un partido si llegara al poder a cada uno

de los servicios anteriormente citados? En ese caso, ¿cuánto margen de diferencia con sus prioridades le permitiría a un candidato para darle su voto?

Preguntas como éstas nos permiten escoger dos temas que son importantes para los ciudadanos. Nos proporcionan además información cuantitativa sobre sus opiniones y los posibles efectos de sus decisiones de voto. Este ejemplo pone de manifiesto que es necesaria alguna preparación de los ciudadanos en ciertos temas para poder responder a las preguntas. Es muy importante para ellos tener información sobre los compromisos políticos de los partidos en temas presupuestarios y otros asuntos de interés. Nos gustaría comentar que estos elementos juegan un papel en las decisiones de la votación de los ciudadanos.

Para poner en práctica el ejemplo, escogimos evaluar las inversiones en educación y salud (temas detectados de interés en la encuesta del CIS), y generamos de forma aleatoria las respuestas a las tres preguntas propuestas usando los porcentajes reales de respuestas en dicha encuesta. Las políticas iniciales de los partidos se tomaron como sigue:

- Partido q el PP (Partido Popular). q=(1.6,8.9) que es la media de los porcentajes del presupuesto total de los recursos invertidos en Educación y Sanidad durante sus 8 años de mandato (1997, 2004).
- Partido p, el PSOE (Partido Socialista Obrero Español). p=(0.6,1.4) resulta la media de los porcentajes del presupuesto total de los recursos, invertidos en educación y sanidad durante los 2 últimos años de mandato que hasta ese momento llevaban (2005, 2006).

Estas cantidades se extrajeron de los capítulos 1 al 8 de los Presupuestos Generales del Estado Consolidados (1997-2006).

Cabe destacar que, como el trabajo se basa en encuestas reales, los elementos a evaluar pueden ser otros, en cada caso los detectados como más preocupantes para la sociedad en cada momento, ya que son esos los que más pueden influir en su decisión de voto.

4.3. Aplicación del proceso de cálculo de las posiciones óptimas

El proceso geométrico estudiado puede implementarse como un algoritmo eficiente y se ha programado en el lenguaje C. Los datos de entrada serán las localizaciones de los dos partidos mayoritarios: p y q (sus posturas políticas ante los dos ítems), el radio de flexibilidad para los partidos: r, y las localizaciones de los diferentes votantes encuestados (sus preferencias políticas sobre los temas considerados) vi, i=1,...,2276 (numero de encuestados). Las salidas son el número de votantes que votaría a cada partido según sus propuestas iniciales y el número de votantes que capturaría cada partido después de alterar su posición hacia una posición óptima dentro del entorno de flexibilidad.

De esta forma consideramos lo siguiente:

- El plano de políticas se define con el porcentaje de los presupuestos dedicados a educación y a sanidad.
- Las políticas seguidas por los dos partidos políticos, el primero el PSOE y el segundo el PP, determinados como ya mencionamos anteriormente: p=(0.6,1.4), q=(1.6,8.9).
- La flexibilidad política, que se va variando en cada estudio.
- Las preferencias de los votantes generadas a partir de la encuesta del CIS como explicamos en la sección 3.2.

Una representación gráfica de cuál sería la situación en ese momento viene dada en la figura 6

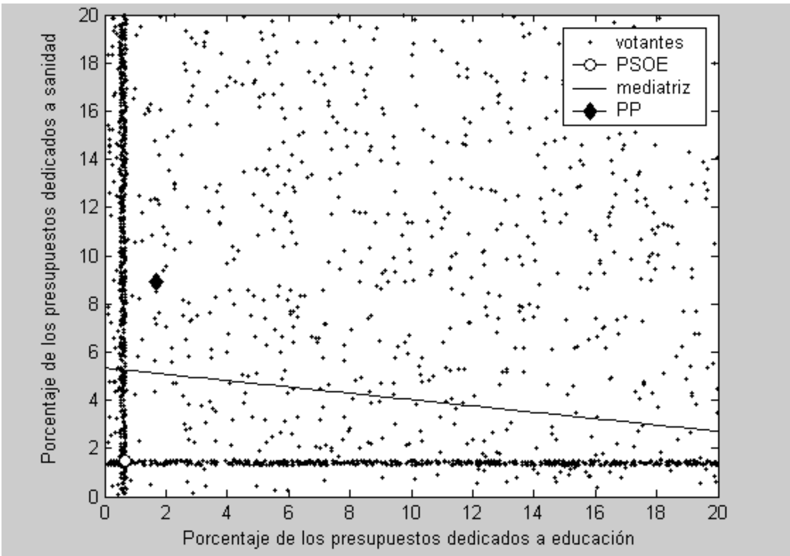


Figura 6: Representación gráfica de la situación de los votantes y de los partidos en la simulación

Para estudiar el efecto de una variación de la política a ofrecer en estos campos, permitiremos una flexibilidad para uno de los partidos (figura 7). La ejecución del proceso demuestra, como cabe esperar, que existen votantes que son captados por el partido por el cambio ofrecido y que existen votantes que, aun con la variación, no son captados (figura 8).

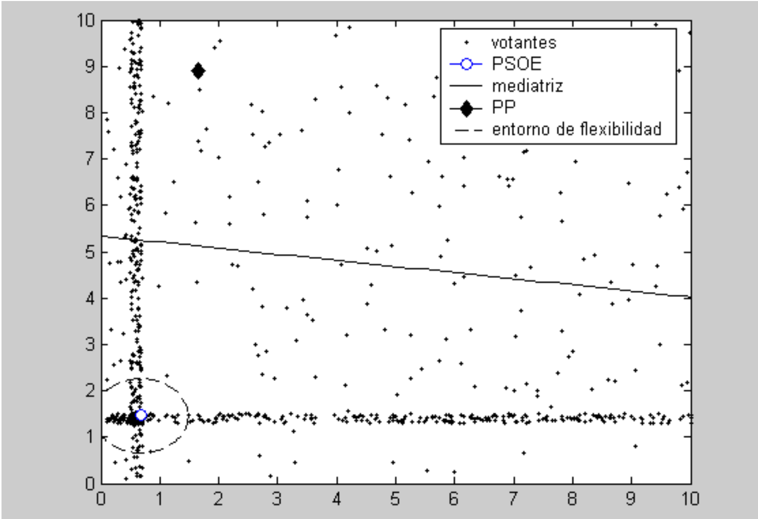


Figura 7: Entorno de flexibilidad para el primer partido p

Sin considerar flexibilidad política sobre las propuestas iniciales, los resultados del algoritmo arrojan que la intención de voto daría la victoria al PSOE (1277 votos) en lugar de al PP (999 votos).

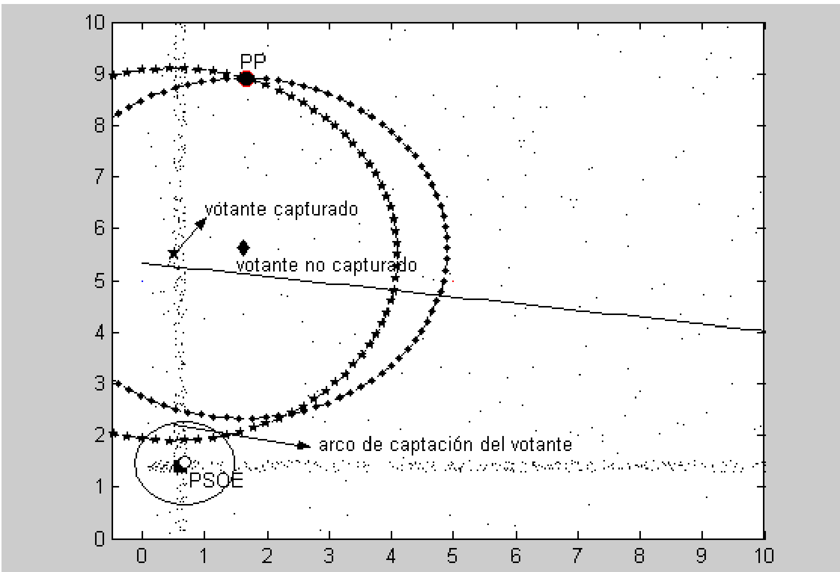


Figura 8: Posible captación de votantes tras la flexibilidad o cambio de política

A continuación pasamos a simular cómo cambiarían los resultados si los partidos alterasen sus propuestas en el margen de flexibilidad:

Estudio 1: Flexibilidad para el partido vencedor PSOE

En esta simulación permitimos una flexibilidad política del 0.8% al primer partido PSOE. Esto le supone un aumento de votos a 1312. Para ello la política óptima a ofrecer debe situarse en el arco de la circunferencia que marca el entorno de flexibilidad definido por los puntos (x1,x2)=(1.32,1.73) y (x1,x2)=(1.37,1.59). Esto es, una inversión en educación: x1, entre el 1.32% y el 1.37%; y en sanidad: x2, entre el 1.59% y el 1.73%; verificando la pertenencia al entorno, es decir: $(x1-0.6)^2+(x2-1.4)^2=(0.8)^2$.

Estudio 2: Flexibilidad para el partido perdedor PP

Hemos considerado distintos márgenes de flexibilidad:

- Cuando la flexibilidad política es de un 0.6%, el partido aumenta el número de posibles votantes a 1078 posicionándose en la zona óptima, lo que no le supone todavía la victoria sobre el PSOE.
- Una flexibilidad del 0.8% le es suficiente para garantizar la victoria, tendría 1138 votantes. La política óptima a ofrecer debe situarse en el arco de la circunferencia que marca el entorno de flexibilidad definido por los puntos (x1,x2)=(2.25,8.44) y (x1,x2)=(2.28,8.48), con $(x1-1.66)^2+(x2-8.91)^2=(0.8)^2$.

5. Conclusiones

Con este trabajo hemos querido dejar constancia de que hay conceptos de la geometría que permiten resolver problemas en el área de la economía política, concretamente en el área de la competición política. Se comprueba cómo, en el caso de escoger un modelo bipartidista con una población discreta de votantes, los modelos de la geometría aportan procesos de cálculo que obtienen soluciones óptimas para la captación de votos marcando unas estrategias adecuadas a los políticos.

Con este modelo presentado también se pone de manifiesto que la cultura política, económica y matemática de los ciudadanos puede marcar diferencias a la hora de las elecciones. Si conocen información sobre ciertos temas de interés para la sociedad, pueden tomar decisiones importantes que alterarían las votaciones. Además, el conocimiento de las preferencias de los votantes y de teorías como las aquí presentadas, pueden ser de gran utilidad a los políticos a la hora de preparar sus campañas y marcar sus estrategias políticas.

En general, los estudios de intención de voto se han encontrado tradicionalmente con dificultades como las que nosotros hemos resaltado en nuestro estudio. Destacamos las siguientes:

- Usualmente, existen muy pocos estudios cuantitativos sobre la opinión de los ciudadanos.
- Los partidos políticos son muy reacios a comprometerse claramente y a dar información cuantitativa precisa sobre ciertos temas, sobre los que destacan los presupuestos.
- Algunas veces la falta de preparación de los ciudadanos hace que no sean capaces de entender y dar su opinión a ciertas preguntas de tipo económico.

Teniendo en cuenta estas limitaciones, el presente trabajo resalta que una mayor preparación tanto de los ciudadanos como de los políticos puede influenciar de forma relevante sobre los resultados electorales.

En el ejemplo desarrollado los resultados pueden resumirse como sigue:

Al preparar una campaña electoral, el conocimiento cuantitativo previo sobre las opiniones de los ciudadanos podría ayudar a los partidos a escoger su oferta óptima. Esta idea ha quedado reflejada en el ejemplo presentado, ya que si suponemos el gasto en educación y sanidad como una prioridad para los ciudadanos (algo apoyado parcialmente por el estudio de CIS), encontramos que una variación de sólo 0.8% en las inversiones propuestas de la política del partido que perdió las elecciones podría cambiar el resultado de la elección a su favor.

Este ejemplo puede extenderse fácilmente a los numerosos campos de la economía y de los ambientes políticos

Por supuesto, no hemos intentado analizar todos los factores que pueden influir en una votación porque sería prácticamente imposible. La idea es restringirse a aquellos que resultan de gran importancia en cada momento. A pesar de este análisis, comprendemos que crear un modelo realista de decisiones del votante es una tarea difícil, la naturaleza contingente de las consideraciones políticas y la incertidumbre del ciudadano hace complicada la tarea. No obstante, creemos que este estudio apoya la influencia de la preparación y el conocimiento técnico de votantes y políticos en la toma de decisiones y en los resultados electorales.

Referencias

[1] LÓPEZ, M., RODRIGO, J., LANTARÓN, S. (2009). *Un algoritmo para evaluar la influencia de la cultura política de los votantes en las decisiones de voto en España*. Revista de Estudios Políticos, 144, pp. 195:210.

[2] LILLO, I., LÓPEZ M., RODRIGO, J. (2007). *Competición política bipartidista. Estudio geométrico del equilibrio en un caso ponderado. Documento de trabajo nº 321/2007*. Fundación de las cajas de ahorros (FUNCAS).

[3] LILLO, I., LANTARÓN, S., LÓPEZ M., RODRIGO J. (2006). *Study of the influence of the voters' political culture on vote decision through the simulation of a political competition problem in Spain*. Documento de trabajo nº 275/2006. Fundación de las cajas de ahorros (FUNCAS).

[4] ABELLANAS M., LILLO, I., LÓPEZ, M., RODRIGO, J. (2006). *Electoral strategies in a dynamical democratic system. European Journal of Operational Research* , Vol 175, pp.870-878.

Sobre las autoras:

Nombre: Mª Dolores López González
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Sagrario Lantarón Sánchez
Correo Electrónico: sagrario.lantaron@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Isabel Lillo Villalobos
Correo Electrónico: sabelillo@mixmail.com
Institución: Instituto de Enseñanza Secundaria Satafi, Getafe (Madrid), España.

Investigación
Luz y gravedad
(Reflexiones geométricas sobre cáusticas y lentes gravitacionales)

José Rojo Montijano
Juan Carlos Garro Garro
Elena Ortiz García
Gonzalo Cañadas Echagüe

Revista de Investigación

G.I.E
Pensamient
Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de Abril de 2011

Resumen

Cuando los rayos de luz iluminan una taza de café en una tarde soleada, podemos observar la curva que más brilla sobre la superficie del líquido. Quizá sea ésta una oportunidad para plantearse el siguiente experimento mental: ¿cómo juegan los rayos de luz al reflejarse en diferentes "tazas" geométricas? Esta comunicación pretende proseguir esta discusión con algunas consideraciones sencillas que nos sitúen ante el fenómeno de las lentes gravitacionales, allí donde los efectos de la gravedad afectan, incluso, a la manera de propagarse de la luz, mostrando un sistema dinámico idealizado que resulta, a la vez, sencillo y (matemáticamente) caótico.

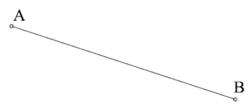
Palabras Clave: Cáusticas; envolventes; singularidades; lentes gravitacionales; grado topológico**.**

1. Sobre la geometría de los rayos de luz

Vamos, primero, a discutir un poco la geometría de los rayos de luz, destacando cómo éstos se focalizan formando cáusticas (ver la sección 2). Este comportamiento puede ser estudiado tanto en el marco de la geometría euclídea como en el de la riemanniana, semirriemanniana, e incluso finsleriana.

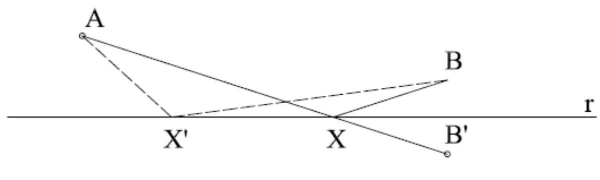
Vamos a desarrollar estas ideas progresivamente, encadenándolas mediante una serie numerada de etapas, que buscan explicar finalmente por qué la existencia de cáusticas asociadas con lentes gravitacionales es, hoy en día, motivo de especulación y fuente de conjeturas en el estudio de la gravitación:

1. Según el *Principio de Fermat*, la luz se propaga entre dos puntos *A* y *B* usando el mínimo tiempo posible.



En una geometría euclídea, o sea, en un medio homogéneo e isótropo, esto implica que la luz elige viajar en línea recta entre *A* y *B*.

2. Consideremos ahora una reflexión en un espejo, que supondremos que es una recta *r*, en el plano.

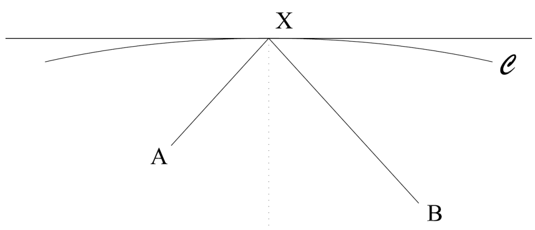


Estamos buscando una línea quebrada *A X B*, cuya longitud resulte mínima entre las quebradas $A\,X'\,B$ tales que $X' \in r$. Para hallar X reflejemos B en B' respecto del espejo y conectemos mediante un segmento A y B'. El punto X buscado está en la intersección de r con AB'.

Esta construcción implica la conocida *ley del billar*: "el ángulo que forma con r el rayo que llega, AX ,coincide con el ángulo que forma con r el rayo reflejado, XB". Esta ley se sigue, por tanto, de un principio variacional, el aludido principio de Fermat.

3. Supongamos ahora que el espejo es una curva regular, C, en un plano.

El mismo principio variacional también produce la misma conclusión en este nuevo marco: el punto de reflexión, X, optimiza las longitudes de las quebradas $A\ X'\ B$, para $X' \in C$ (donde la reflexión tiene como espejo a la tangente a C en X).



Recurramos a unas nociones del cálculo diferencial para justificar esta generalizada ley de reflexión:

Sea $f = f_A + f_B$, donde $f_P(X)$ es la distancia euclídea entre los puntos X y P del plano.

Como el gradiente de f_P en un punto X es el vector PX normalizado, el gradiente de f en X es la suma de los vectores AX y BX normalizados.

Nos interesamos por los puntos críticos de f que estén sujetos a la condición de pertenecer a C. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, podemos afirmar que los puntos buscados tienen su vector gradiente ortogonal a C.

Esto prueba nuestra ley de reflexión del billar con borde curvilíneo, pues la suma de los vectores AX y BX normalizados resulta ser perpendicular a C en X si y sólo si estos vectores forman el mismo ángulo con la tangente a C en X.

4. Naturalmente, este tipo de argumentación sigue funcionando también cuando el espejo es alguna hipersuperficie regular en el espacio

multidimensional, y cuando la geometría subyacente, en lugar de la euclídea, es la geometría riemanniana.

5. Consideremos que, como ocurre en la naturaleza, los rayos emergen en diferentes direcciones. Si tomamos una fuente de luz puntual y reflejamos los rayos que lanza sobre un espejo, la envolvente de la familia de rayos reflejados (fig.1 y fig.2*)* es una cáustica (véase la sección 2*).*

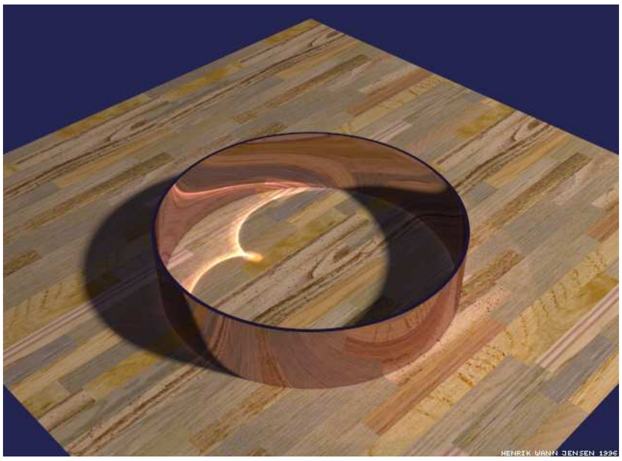
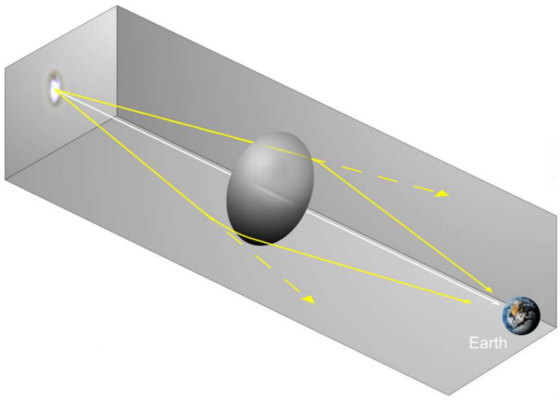


Figura 1

La existencia de tales cáusticas explica los nacimientos y desapariciones de puntos brillantes en los patrones que el juego de la luz ofrece a nuestro alrededor. Al ser envolvente de la familia de rayos reflejados, una cáustica es muy brillante, pues la energía que se concentra entre pares de rayos se va contrayendo y concentrando más y más al llegar a sus puntos.

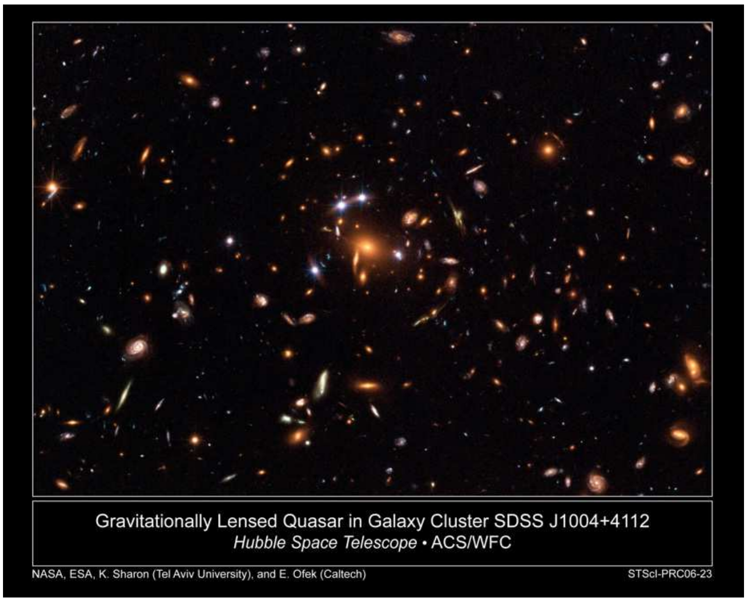
Figura 2

6. Usando la teoría de la relatividad , Raychaudhari [9] dedujo el ángulo de deflexión de la luz en la métrica de Schwarzschild, recurriendo al mismo principio variacional para geodésicas nulas.



Durante muchos años, el estudio teórico sobre lentes gravitacionales se realizó casi exclusivamente en el marco de estas dos hipótesis: los campos gravitacionales considerados eran "débiles" y los ángulos deflectados eran "pequeños". El citado trabajo de Raychaudhuri abrió el camino a la consideración de campos gravitatorios muy intensos, en los que las aproximaciones anteriores pierden sentido. El descubrimiento en los últimos años de que existe un agujero negro en la zona central de nuestra galaxia ha suscitado un enorme interés por investigar la deflexión de la luz cerca de un agujero negro. El ángulo de deflexión de tales rayos de luz puede hacerse arbitrariamente grande, pues los rayos pueden ser violentamente obligados a dar vueltas alrededor del horizonte de sucesos del agujero negro.

En estas situaciones, los rayos de luz se describen matemáticamente como geodésicas nulas de una variedad lorentziana. Cuando la ecuación de las geodésicas no es completamente integrable, cobran un papel primordial los métodos cualitativos de la topología diferencial para estudiar el comportamiento de las geodésicas. En la sección 2 se prueba un conocido teorema de Burke [4] (sobre el número de imágenes que produce una lente gravitatoria, en un modelo sencillo de lente gravitacional), como aplicación de la teoría del grado topológico.



7. Sin embargo, hasta hace pocos años [6] [12], escasa atención se había prestado a las propiedades de los frentes de ondas ópticas y las superficies cáusticas asociadas con las lentes gravitatorias.

Como el punto de vista de los frentes de ondas resulta muy natural en la relatividad general, recientemente se ha logrado un enorme progreso en esta área: Petters [12] ha estudiado las ecuaciones que gobiernan la formación de superficies cáusticas sobre conos de luz relacionándolos con el potencial de la lente.

8. Especulaciones con modelos de universos con dimensiones extra, que contribuyen a esclarecer problemas cosmológicos, han atraído gran interés en los últimos años. Se considera, en particular, la posibilidad de producir mini-agujeros negros en choques entre partículas elementales en (futuros) colisionadores. Cabe esperar que la mayoría de estos agujeros negros estén en rotación.

El reciente trabajo de Frolov [7] analiza el movimiento de la luz en un espacio-tiempo de un agujero negro pentadimensional en rotación (*la métrica de Myers-Perry)* , y demuestra que esta métrica posee tres campos vectoriales Killing y un campo tensorial Killing. Usando las integrales primeras asociadas a éstos, Frolov propone las ecuaciones de movimiento y prueba que no existen órbitas circulares estables en los planos ecuatoriales de esta métrica. De hecho, una conjetura abierta en este campo afirma que la inexistencia de órbitas acotadas estables es propia de los agujeros negros de dimensión superior.

9. Mediante observaciones que exploren la dinámica del disco de acreción en el entorno del horizonte de sucesos, se planea verificar algunas propiedades del espacio-tiempo. En el contexto de las teorías de la gravedad con alta energía en las que se recurre a dimensiones extra, la existencia o no de éstas podría verificarse por sus efectos de lente gravitatoria en nuestra *brana* (la sección espacio-temporal de dimensión 4 en la que están las interacciones que se experimentan).

2. Cáusticas por reflexión

Una superficie cáustica es la envolvente de una familia de rayos reflejados por una superficie. Así pues, inicialmente es un concepto asociado a la óptica. La palabra "cáustica" proviene del griego *kaustikós*, quemar, y hace referencia a que la intensidad de la luz se hace mayor cerca de una cáustica: allí donde la luz "brilla más".

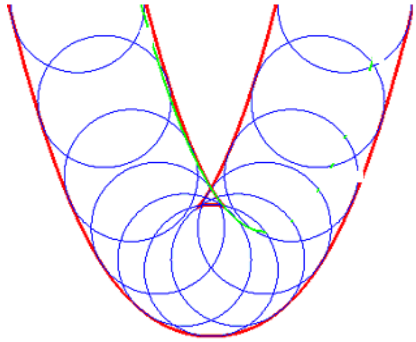
En el plano, una cáustica (por reflexión) es:

- La envolvente de los rayos que emitidos por una fuente de luz desde un punto, son reflejados por un "espejo" (una curva regular del plano) .

- La envolvente de las normales a la ortotómica del "espejo" respecto del punto de luz, es decir, la evoluta de la ortotómica.

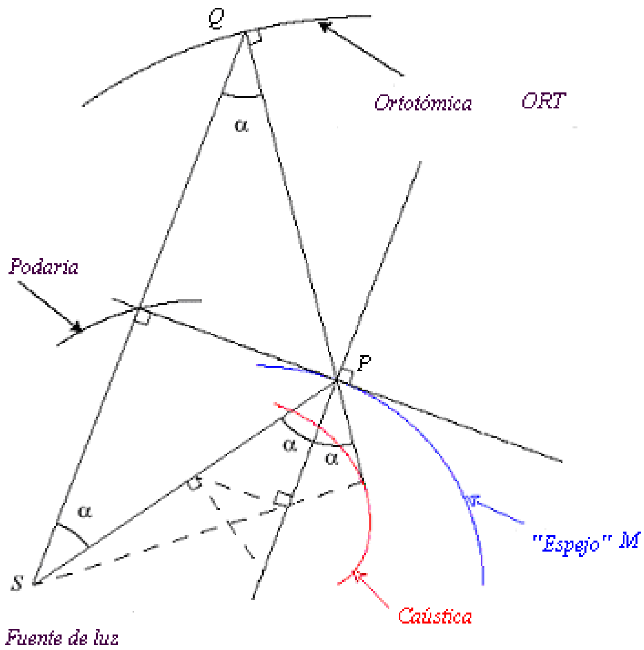
¿Qué es una envolvente? ¿Y una evoluta? ¿Y una ortotómica?

- Envolvente de una familia de curvas: es una "curva" tal que cada uno de sus puntos está en una curva de la familia y además en éstos la tangente a la curva de la familia y la tangente a la envolvente coinciden.



- Evoluta de una curva es el lugar geométrico de los centros de curvatura o, equivalentemente, la envolvente de la familia de normales a la curva.

- Ortotómica de una curva respecto a un punto (fuente de luz) es el lugar geométrico de las reflexiones del punto (f. de luz) respecto de las tangentes a la curva (espejo) o, equivalentemente, la envolvente de la familia de circunferencias que pasan por la fuente de luz, centradas en los puntos de la curva.



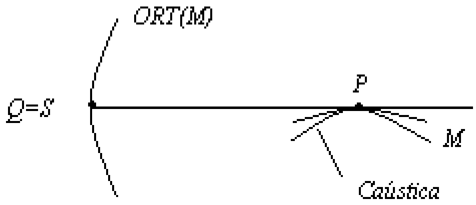
El siguiente resultado establece una relación entre la regularidad o la existencia de **singularidades de una cáustica** con la posición de la fuente de luz *S* .

Proposición.-

Si *S* está sobre la tangente a la curva "espejo", *M*, en un punto *P* entonces:

a) S coincide con el punto *Q* sobre la ortotómica de *M* respecto de *S* (*ORT(M))*asociado a *P* y el radio de curvatura de *ORT(M)* en *Q* coincide con la distancia desde *P* hasta *Q* , de modo que el punto de la cáustica asociado a *P* es él mismo.

b) La cáustica es una curva regular en *P* y "toca" a *M* en *P*



La localización de singularidades de una cáustica tiene que ver con la búsqueda de cónicas que tengan uno de sus focos en la fuente de luz *S* y el otro foco, si la correspondiente cónica es una elipse o una hipérbola, en un punto de la cáustica.

Proposición.-

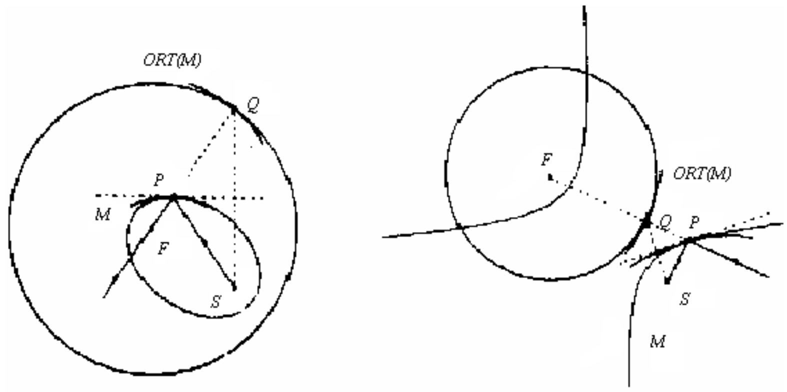
Si *S* no está sobre la tangente a *M* en *P* entonces:

a) La cónica con foco en *S* que tiene como ortotómica respecto de *S* (si *Q* no es punto de inflexión de *ORT(M)*), a la circunferencia osculatriz de *ORT(M)* en *Q* , o, si *Q* es punto de inflexión (la cónica es una parábola en este caso y la circunferencia degenera en recta), la recta tangente en *Q* , tiene orden de contacto al menos 3 con *M* en *P*.

b) El otro foco de la cónica anterior es el punto de la cáustica correspondiente a *P*. Si la cónica es una parábola , el foco está en "el infinito" en el rayo reflejado *QP* (el orden de contacto entre la cónica y *M* en *P* coincide con el orden de contacto entre sus ortotómicas en *Q*)

c) Si la cónica y *M* tienen orden de contacto 3, entonces cerca del foco, si éste es finito, la cáustica es regular

d) Si la cónica y *M* tienen orden de contacto 4 y el foco es finito, *ORT(M)* tiene un vértice en *Q* y la cáustica una cúspide en el foco.



Teniendo en cuenta este resultado, la pregunta que se plantea es: ¿Qué posición habrá de ocupar la fuente de luz *S*, para que la cáustica tenga en el punto asociado a $P \in M$ una singularidad? Habrá que buscar entre las cónicas con uno de sus focos en *S* y que tengan orden de contacto 4 con *M* en *P* (el otro foco de la cónica será el punto sobre la cáustica o el "infinito").

Proposición.-

Si se elige un sistema de referencia que tiene como origen a *P* y como ejes a las rectas tangente y normal a *M* en *P*, el lugar geométrico de los focos de las cónicas que tienen orden de contacto al menos 4 con *M* en *P* es la cúbica

$$(x^2 + y^2)(2a^2 x + by) = axy$$

con a y b tales que

$$\alpha(t) = (t, at^2 + bt^3 + t^4 f(t)), \quad t \in \Re .$$

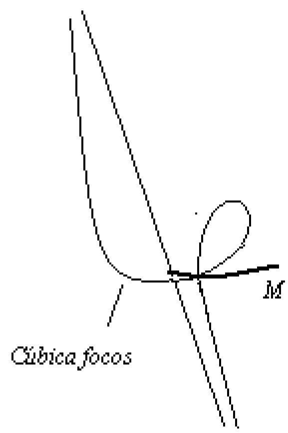
es una trayectoria que describe M

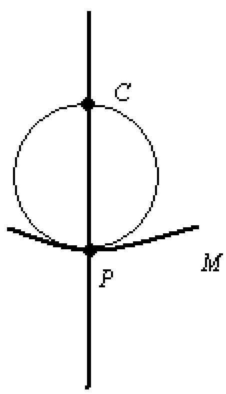
- La cúbica anterior es una curva nodal, con nodo en P y las tangentes de la misma en P son los ejes.

- La cúbica es irreducible (no contiene ninguna recta como componente) si y sólo si P no es un vértice de M. En caso contrario la cúbica se factoriza como

$$x\left(x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{1}{16a^2}\right) = 0$$

esto es, la normal a M en P y la circunferencia que pasa por P y por el centro de curvatura de M en P, $C = \left(0, \frac{1}{2a}\right)$.





Como consecuencia si el "espejo" M es una circunferencia, en la que todos los puntos son vértices, la correspondiente cúbica nodal en cada punto P se compone de un diámetro y de la circunferencia que tiene al segmento que une el centro del espejo con el punto P. Si S es un punto interior a M (no siendo C) hay cuatro posiciones de P de modo que la cúbica contiene a S.

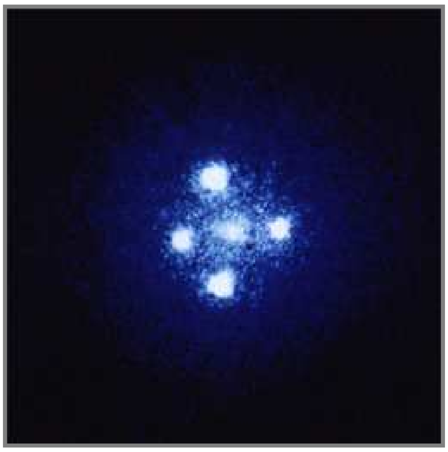
Como no hay otra cónica salvo la propia M que tenga orden de contacto 4 con M, la correspondiente cáustica tiene exactamente cuatro cúspides, todas ordinarias. Este mismo razonamiento es válido si M es cualquier otra cónica, de modo que se puede inferir que las cáusticas de cualquier cónica son cúspides ordinarias. Si M fuera una elipse, la correspondiente cáustica tiene cuatro cúspides, si S está en el interior de M, y dos, si S estuviera en el exterior.

3. Una aplicación del grado topológico a la teoría de lentes gravitacionales.

El siguiente teorema establece, esencialmente, que una lente gravitacional con una distribución de masa regular produce un número impar de imágenes de una fuente puntual. Simplificando: consideremos una masa que deflexiona los rayos de luz que pasan cercanos a su centro, mientras que no interacciona significativamente con los más alejados; supongamos, además, que colocamos una fuente puntual sobre un plano -"el plano fuente"- perpendicular a la línea de visión. Consideremos la siguiente "lente" L: la función que asigna la posición real, "y", en el plano fuente a un punto observado en la posición "x". Supondremos también que L es una función de clase 1 (lo que se justifica con la hipótesis de que la distribución de masa es "regular"). L es sobreyectiva, pero no necesariamente inyectiva (un punto fuente puede tener varias imágenes). Con estas convenciones, enunciamos el siguiente

Teorema (de no paridad):

Una lente gravitacional L produce (para casi todo punto fuente) un número impar de imágenes.



La demostración se basa en el siguiente

Lema: "Sea f una función continua entre B (la bola abierta de centro el origen y radio R del n-espacio euclídeo E) y E. Supongamos que existe d (real positivo menor que R) tal que la distancia entre x y $f(x)$ no llega a d para cada x de la frontera de B. Entonces deg(f, B, y) = 1 para cualquier y de la bola centrada en el origen de radio R-d (donde deg es el grado topológico)".

Dem. del tma.:

A causa de que $L(x) = x + o(1)$ para x con módulo grande, podemos aplicar el lema para bolas de radio R suficiente, de modo que

$$\deg(L,y) = 1 \quad \text{para todo y.}$$

Según el teorema de Sard, el conjunto de valores singulares de L tiene medida de Lebesgue nula. Por las propiedades del grado [10], podemos asegurar que la anti-imagen por L de y no sólo es un conjunto finito, sino que tiene la misma paridad que el grado topológico de L en y, es decir, es un número impar.

Referencias

[1] ARNOLD, V.I. *"Singularities of wavefronts and caustics"*, Kluwer A.P., 1991.

[2] BERRY,M. *"Catastrophe optics"*, Progress in Optics, 18, 1980.

[3] BRIËT, J. y otros, *"Determining the dimensionality of space-time by gravitational lensing"*, preprint, 2008.

[4] BRUCE, J.W.; Giblin, P.J. *"Curves and singularities"*, Cambridge U.P., 1992.

[5] BURKE, W.L. *"Multiple gravitational imaging by distributed masses"*, Astrophysical Journal Letters 244, 1981.

[6] FRITELLI, S.; PETERS, A.O. *"Wavefronts, caustic sheets and caustic surfing in gravitational lensing"*, ArXiv: astro-ph/020813, 2002.

[7] FROLOV, V.; GOODING, C. *"Five-dimensional black holes capture cross-sections"*, 2004.

[8] GARRO, J.C.;ROJO, J. *"¿Dónde brilla más la luz?"* Terceras Jornadas Internacionales de Matemática y Diseño, Argentina, 2008.

[9] KAR, S.; SENGUPTA, S. *"The Raychaudhuri equations: a brief review"*, Pramana Journal of Physics, 2008.

[10] LLOYD, N.G. *"Degree theory"*, Cambridge Tracts on Mathematics, 1979.

[11] OUTERELO, E.; RUIZ, J. *"Mapping degree theory"*, A.M.S., 2009.

[12] PETERS, A.O. *"Singularity theory and gravitational lensing"*, Birkhäuser, 2001.

Sobre los autores:

Nombre: José Rojo Montijano
Correo Electrónico: jrojo.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.

Nombre: Juan Carlos Garro Garro
Correo Electrónico: garro.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.

Nombre: Elena Ortiz García
Correo Electrónico: ortiz.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.

Nombre: Gonzalo Cañadas Echagüe
Correo Electrónico: gcanadas.eps@ceu.es
Institución: Universidad CEU San Pablo Madrid, España.

Juegos Matemáticos
La caja de botellas de vino

Revista de Investigación

G.I.E
Pensamient
Matemátic

ISSN 2174-0410

11 de abril de 2011

Resumen

¿Alguna vez te ha tocado ordenar dentro de una caja todas las viejas botellas de vino que había por casa?. Este problema pretende que formules su solución con herramientas puramente matemáticas, como son la geometría o la aritmética.

Enunciado. La sección transversal de una caja rectangular destinada a almacenar botellas de vino tiene la característica de que es suficientemente ancha para colocar tres botellas quedando espacio entre ellas, pero no es lo suficiente para poder colocar 4 botellas. Todas las botellas que se coloquen en esta caja tienen el mismo diámetro. La *Figura 1* muestra la disposición de las botellas en la caja. Las botellas A y C se encuentran apoyadas en los laterales de la caja, y la segunda fila de botellas, formada por dos botellas (D, E), mantienen a B entre A y C. Ahora se puede colocar la tercera fila de tres botellas (F, G, H), con F y H contra los laterales de la caja. Después una cuarta fila con dos botellas (I, J).

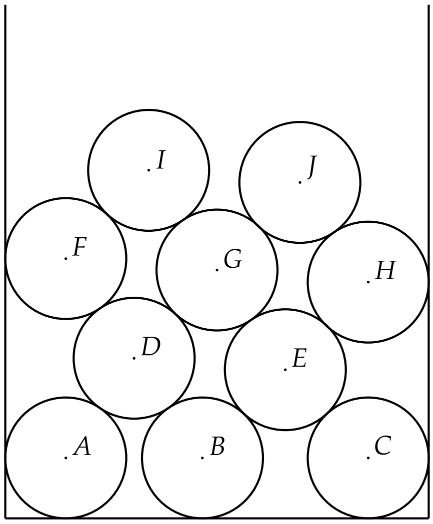


Figura 1

Si las botellas de la primera fila (A, B, C) no están separadas a la misma distancia, entonces la segunda, tercera y cuarta fila no se encuentran en el mismo plano horizontal. Demostrar en qué fila las botellas se encontrarán alineadas cualquiera que sea el espaciamiento que exista entre las botellas de la primera fila.

Juegos Matemáticos
La caja de botellas de vino

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

11 de abril de 2011

Resumen

¿Alguna vez te ha tocado ordenar dentro de una caja todas las viejas botellas de vino que había por casa?. Este problema pretende que formules su solución con herramientas puramente matemáticas, como son la geometría o la aritmética.

Enunciado. La sección transversal de una caja rectangular destinada a almacenar botellas de vino tiene la característica de que es suficientemente ancha para colocar tres botellas quedando espacio entre ellas, pero no es lo suficiente para poder colocar 4 botellas. Todas las botellas que se coloquen en esta caja tienen el mismo diámetro. La *Figura 1* muestra la disposición de las botellas en la caja. Las botellas A y C se encuentran apoyadas en los laterales de la caja, y la segunda fila de botellas, formada por dos botellas (D, E), mantienen a B entre A y C. Ahora se puede colocar la tercera fila de tres botellas (F, G, H), con F y H contra los laterales de la caja. Después una cuarta fila con dos botellas (I, J).

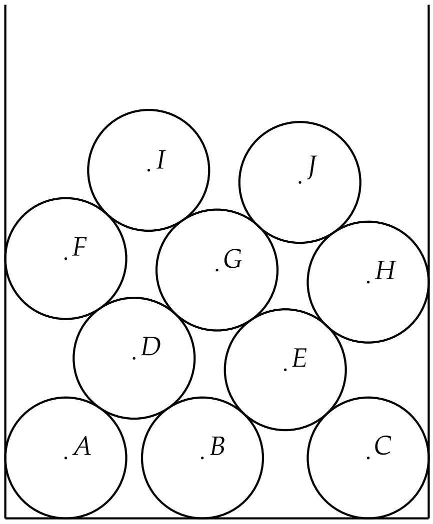


Figura 1

Si las botellas de la primera fila (A, B, C) no están separadas a la misma distancia, entonces la segunda, tercera y cuarta fila no se encuentran en el mismo plano horizontal. Demostrar en qué fila las botellas se encontrarán alineadas cualquiera que sea el espaciamiento que exista entre las botellas de la primera fila.

Solución. Veamos que en la quinta fila las botellas de vino se alinean en el mismo plano horizontal tal y como muestra la *Figura 2*.

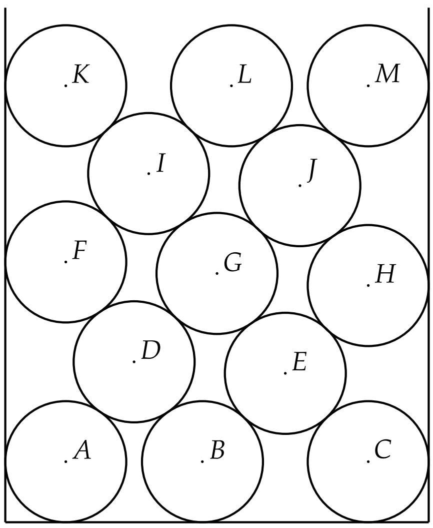


Figura 2

Demostremos la anterior afirmación mediante consideraciones geométricas. En la *Figura 3*, podemos ver que KF es vertical, y necesitamos demostrar que $\angle FKL = 90°$.

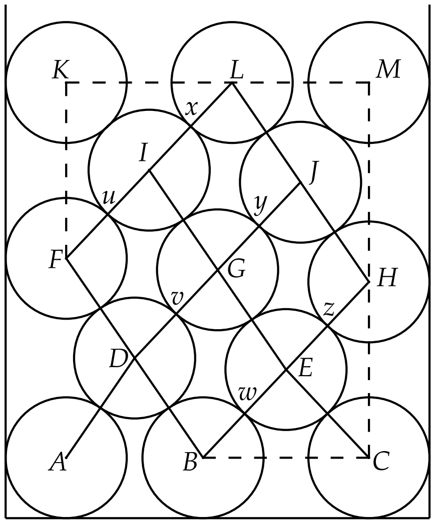


Figura 3

La distancia entre los centros de dos botellas que se "tocan" una a otra es cláramente igual al diámetro de un botella. Por lo tanto I equidista de F, K y L, por lo que resulta ser el circuncentro del triángulo $\triangle\ FKL$. Si I se encuentra sobre FL, entonces FL sería el diámetro de la circunferencia circuncéntrica del triángulo $\triangle\ FKL$, y por lo tanto el ángulo $\angle FKL$ será recto como deseábamos. Sólo queda demostrar que I se encuentra sobre FL.

Al otro lado opuesto de la figura, sabemos que el triángulo $\triangle\ BCH$ es recto en C, y que E es su circuncentro, y por lo tanto E es el punto medio del segmento BH.

Claramente, los cuatro cuadriláteros en torno al punto G son rombos y paralelogramos, cuyos lados opuestos u, v y w son paralelos. De igual forma, los lados opuestos x, y, y z son paralelos. Por lo tanto u, y x, y por consiguiente FI e IL, son paralelos a la dirección BEH, como buscamos.

De igual forma el triángulo $\triangle\ LMH$ es recto y llegamos a la conclusión deseada.

Críticas
La aventura del saber. Más Por Menos. Entiende las Matemáticas

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

Recién salido del horno nos encontramos con el libro de Antonio Pérez Sanz “Más Por Menos. Entiende las Matemáticas”. Antonio es catedrático de matemáticas y aparte de la docencia, su gran pasión es la divulgación de las matemáticas.

Se presenta una reseña de esta obra con la finalidad de hacerla conocer a todos los interesados en las matemáticas y sus aplicaciones en la vida cotidiana.

Palabras Clave: Textos matemáticos, divulgación matemática

1. Antecedentes

El libro a comentar se trata de un texto sobre la magnifica serie de televisión "Más Por Menos", dirigida y presentada por Antonio Pérez Sanz. Esta serie, emitida en diversas ocasiones por la 2 de Televisión Española dentro del programa de Televisión Educativa “La Aventura del Saber”, nos enseñó a buscar las matemáticas en las cosas más cotidianas y sencillas de la vida.

El libro incluye un CD con los 12 episodios. A pesar de ser emitidos en el marco de la Televisión Educativa, los programas no presentan un enfoque académico, es decir, no son clases de Matemáticas por televisión. Su objetivo más bien se centra en acercar al gran público aquellos aspectos de las matemáticas que convierten a esta materia científica en algo atractivo, interesante y útil en nuestra actividad cotidiana.

Los contenidos y el enfoque divulgativo de los temas tratados en los diversos episodios hacen que estos programas puedan servir como material didáctico aplicable en el aula para alumnos principalmente de enseñanza secundaria, pero también resultan interesantes para alumnos universitarios, profesores de todos los niveles y cualquier persona interesada en la materia.

2. Notas sobre el autor

Antonio Pérez Sanz nació el 11 de enero de 1954 en Valdeavero, un pueblo de la Comunidad de Madrid.

Es licenciado en matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid (1976). Profesor agregado de bachillerato en 1978. Catedrático de matemáticas de enseñanza secundaria en 1993 (IES Salvador Dalí, Madrid).

Persona activa y comprometida con las matemáticas y la docencia, ha sido jefe de departamento de matemáticas, jefe de estudios, vicedirector y director en los institutos Francisco de Goya y Salvador Dalí de Madrid. Vicepresidente y presidente de APUMA (Asociación de Profesores Usuarios de Medios Audiovisuales), vocal de prensa de las FESPM. Asesor de medios audiovisuales en el PNTIC – MEC y asesor de nuevas tecnologías en el CIDEAD - MEC. Actualmente es director del ITE (Instituto de Tecnologías Educativas).

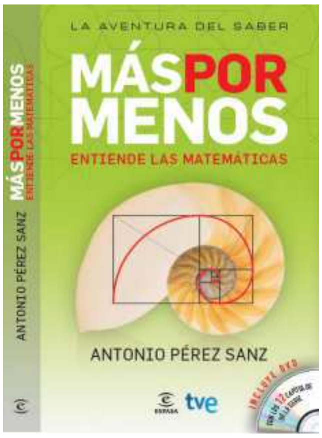
A lo largo de su carrera ha recibido diversos premios como el Premio Especial del Jurado en el Festival Internacional de Cine y Documentales Científicos de Pekín en 2002, por el documental "Pitágoras: mucho más que un teorema" de la serie Universo Matemático de TVE.

Sus pasiones son la historia de las matemáticas, la didáctica, las tecnologías de la información y la comunicación aplicadas a las matemáticas y la divulgación científica.

Es posible disfrutar de su trabajo y sus ideas en su página Web: http://platea.pntic.mec.es/aperez4/ .

ISSN 2174-0410

3. La obra: La Aventura del Saber. Más Por Menos. Entiende las Matemáticas



Ficha del libro:

Autor: ANTONIO PEREZ SANZ

Nº páginas: 256

Lengua: CASTELLANO

Encuadernación: Tapa blanda

ISBN: 9788467036367

Nº Edición: 1ª

Año de edición: 2011

Plaza edición: MADRID

Esta obra multimedia (texto y CD con documentales) recoge el contenido de los 12 capítulos de la serie "Más Por Menos" emitida en La Aventura de Saber por la 2 de TVE.

Está dividida en 12 capítulos (los 12 documentales):

- El numero áureo.
- Movimientos en el plano.
- La geometría se hace arte.
- El mundo de las espirales.
- Cónicas: del baloncesto a los cometas.
- Fibonacci. La magia de los números.
- Las leyes del azar.

- Números naturales, números primos.

- Fractales. La geometría del caos.

- Un número llamado *e*.

- El mundo de las gráficas.

- Matemáticas y realidad.

Se tratan de temas conocidos por todos los interesados en la divulgación de las matemáticas pero presentados de una manera clara, sencilla, cercana para los estudiantes y que engancha a la lectura.

La lectura puede hacerse en el orden que cada lector considera más interesante. Los capítulos son independientes y pueden seguirse sin necesidad de haber leído los anteriores (quizás el último si conviene dejarlo para el final). Además pueden combinarse en todo momento con el visionado del documental correspondiente.

Las páginas de este libro de divulgación matemática intentan facilitar a todos una aproximación amena a las matemáticas, por lo menos a unos cuantos temas interesantes y aplicados. La clave está en incitar a la curiosidad a los lectores, que se sientan atraídos por los conceptos y pueda suscitarles la necesidad de seguir investigando en el área. Con este libro se aprende que las matemáticas son una maravillosa herramienta lógica y el mejor instrumento creado por el hombre para describir los fenómenos naturales. Pero además, son un universo en el que pueden llevarse a cabo apasionantes aventuras.

Consideramos, sobre todo, que resulta una herramienta muy útil para los docentes de enseñanza secundaria y primeros cursos de universidad. Pueden extraer del texto ideas para presentar y motivar a sus estudiantes hacia ciertos temas de estudio así como recomendarles la lectura del libro o visionado de los videos.

En resumen la obra de Antonio resulta un texto esperado que queríamos tener en nuestras manos como complemento a unos videos que ya conocíamos y que agradecíamos al autor.

Te lo recomendamos

Entrevista a Ana Casaravilla Gil, Adjunta de Innovación Educativa y Profesora de la Universidad Politécnica de Madrid

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

Ana Casaravilla Gil es profesora en la Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica de la Universidad Politécnica de Madrid y Adjunta de Innovación Educativa. Es una persona comprometida con la docencia como puede comprobarse por los numerosos proyectos y trabajos que en esta línea ha venido desarrollando a lo largo de los años.

Hemos charlado con ella sobre la Innovación Educativa en la Universidad

Palabras Clave: Innovación Educativa en la Universidad

1. Entrevista

- Ana ¿qué hace una Adjunta de Innovación Educativa?

Ana Casaravilla Gil

La Adjuntía de Innovación Educativa se ha creado para dar apoyo a los departamentos y profesores, en mi caso de la Escuela de Arquitectura Técnica, para la adecuada implantación del Título de Grado en Ingeniería de Edificación y los estudios de postgrado, en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), así como para la adaptación a la nueva situación de los estudios del

Título de Arquitecto Técnico, que se encuentra en proceso de extinción.

En este sentido, se trabaja para mejorar la formación de los profesores en métodos de enseñanza/aprendizaje más activos y participativos, se organizan foros de encuentro para el intercambio de experiencias entre los profesores y estudiantes y se proponen a la Dirección de la Escuela aquellas actuaciones sobre adecuación de espacios o equipamiento que faciliten la implantación de los nuevos métodos docentes. Así mismo se fomenta y apoya la actividad de los profesores en Proyectos y Grupos de Innovación Educativa y la coordinación interdisciplinar entre las diferentes áreas de conocimiento.

La Adjunta de Innovación Educativa coordina la Comisión de Enseñanza-Aprendizaje (CEA), comisión asesora de la Dirección para todos los asuntos referentes a la docencia. También colabora con las Subdirecciones de Ordenación Académica, de Calidad y de Estudiantes para orientar su actividad en la línea de la mejora de la calidad docente.

- *¿Qué entendemos por Innovación Educativa?*

Innovar es realmente complicado. Cada día aparecen nuevos foros donde los profesores nos reunimos para compartir experiencias docentes bajo el lema de la *innovación educativa*, si bien muchas de estas actividades tienen ya muchos años de recorrido y no pueden considerarse, de hecho, novedosas. Creo más bien que con este nombre estamos haciendo referencia al conjunto de metodologías y herramientas de enseñanza y evaluación que toman más en consideración que los tradicionales el papel activo del estudiante, es decir, que fijan el rumbo de la docencia pensando más en *cómo se aprende* que en *cómo se enseña*.

- *¿Es posible realizar acciones de Innovación Educativa con los medios que cuenta y pone a disposición de los docentes la Universidad Española?*

Los medios son importantes sin duda pero son mucho más importantes, a mi modo de ver, las personas, su voluntad y empeño, cuando se trata de hacer un esfuerzo por renovar la actividad que se viene realizando durante años. Existe una inercia difícil de vencer, ya que en un camino muchas veces recorrido acaba por crearse un surco del que es difícil salir para explorar nuevas rutas. Por eso es necesaria la ayuda económica y de medios materiales pero, sobre todo, el apoyo de las instituciones y el reconocimiento del esfuerzo realizado para dar soporte a la voluntad del profesor que se plantea innovar.

- *¿Y la Universidad Politécnica de Madrid?*

La UPM, como el resto de universidades públicas, no dispone de grandes medios económicos en estos momentos. Sin embargo, su apuesta es firme a favor de la innovación metodológica y de la creación de entornos y escenarios de trabajo que favorecen la puesta al día de los profesores, el intercambio de experiencias y la formación. A este respecto es encomiable el trabajo realizado por el Servicio de Innovación Educativa del Vicerrectorado de Ordenación Académica y Planificación Estratégica.

Además, no se pueden olvidar las acciones que llevan a cabo los Centros y los propios Grupos de Innovación Educativa, como *Pensamiento Matemático* por ejemplo, que canalizan las iniciativas de muchos profesores, dotándoles del apoyo y los medios para llevarlas a cabo.

- ¿El alumno es receptivo a los enfoques y proyectos de Innovación Educativa? ¿Es posible innovar cuando el estudiante no está abierto a las nuevas metodologías o no responde a los estímulos?

Es cierto que nuestros alumnos no llegan a la universidad preparados para una enseñanza menos dirigida que la que han recibido en las etapas previas. Y ese es precisamente el reto al que nos enfrentamos: formar al estudiante para que se haga más responsable de su aprendizaje, que desarrolle plenamente las competencias previstas en la titulación que ha elegido, permitiéndole, al mismo tiempo, una mayor independencia de criterio.

La dificultad del objetivo no debe frenar la ilusión por alcanzarlo. Sabemos que requerirá tiempo, como todos los cambios importantes, y que la *innovación educativa* está poniendo las bases para lograrlo.

- Cuando se pone en práctica un proyecto ¿es fácil verificar su eficacia? ¿Se hace un seguimiento de comparación de resultados académicos o de rendimiento del estudiante que lo ha seguido?

Sinceramente he de decir que en muchos casos que conozco no se hace una valoración adecuada de los resultados que se obtienen realmente al implementar una nueva acción o proyecto educativo. Una de las causas puede ser la duración —un curso casi siempre— de las experiencias, que suele ser demasiado corta para obtener resultados verificables. Otras veces nos encontramos con falta de conocimientos sobre cómo hacer esa evaluación de manera adecuada e, incluso, con dificultades derivadas de falta de colaboración por parte de la administración académica (Departamentos, Secretaría del Centro, etc) que no siempre facilitan el acceso a los registros de los estudiantes.

- ¿Están valoradas las acciones en Innovación Educativa? No se encuentran en casi ningún aspecto, posibilidad de incluir estas acciones en los curriculums de los docentes. Normalmente no existen epígrafes relacionados con este tipo de proyectos en los curriculums I+D, en las peticiones de complemento retributivo de la comunidad,

en las memorias de los departamentos, en los formularios de petición de sexenios,…¿Es posible que si esto cambiara el número de profesores que se implicaría en este tipo de acciones aumentaría?

Estoy convencida de que sería así. Durante mucho tiempo la dedicación a las tareas de mejora de la calidad y de la innovación educativa no han sido reconocidas, salvo de forma puntual, no ya desde el punto de vista económico —casi ninguna actividad del profesor lo es— sino, ni siquiera, de promoción en su carrera docente. Sin embargo, en la vida profesional de un profesor que se dedica a esta tarea supone un tiempo y un esfuerzo considerable que, necesariamente, se realiza en detrimento de otras mejor valoradas, como la publicación de artículos y los trabajos de investigación.

Últimamente parece que hay un cambio de tendencia favorable y es posible que los profesores más jóvenes empiecen a encontrar atractivo, a nivel profesional, dedicarse en mayor medida a la innovación y a la investigación educativa en nuestra universidad. Al menos algunos de los más veteranos en estos temas estamos trabajando en este sentido.

- La incorporación al modelo de Bolonia, ¿ha supuesto un impulso para la Innovación Educativa?

Desde luego, los vientos que soplan de Europa siempre han supuesto en España una buena ocasión para poner al día lo que se estaba haciendo. En el caso particular de la enseñanza universitaria, *Bolonia* significa una oportunidad para reflexionar, para diagnosticar los puntos débiles de la formación que se estaba impartiendo a los alumnos y la ocasión ideal para tomar decisiones que fortalezcan el sistema universitario español. Entre ellas, sin duda, la renovación en metodologías de enseñanza y evaluación.

- La implantación de los nuevos grados y master ¿ha contado con el apoyo necesario para poder incorporar experiencias en Innovación Educativa? Los grupos, ¿tienen el número de alumnos adecuado? ¿Qué problemas has encontrado desde tu lugar de trabajo?

Estas cuestiones de carácter ya puramente práctico, del día a día, son quizá las de más interés. Porque de nada sirve hablar de las bondades de un proyecto si después las condiciones hacen imposible su implementación en el aula. Aquí tengo que hablar de mi experiencia concreta, en una escuela determinada, con un elevado número de alumnos de nuevo ingreso en la titulación de Grado, Curso de Adaptación y másteres, además de los alumnos matriculados en el título de Arquitecto Técnico *'a extinguir'*, y que hereda las características de las antiguas escuelas de ciclo corto. La ratio profesor/alumno y PAS/alumno es, además, muy baja, así como el espacio físico disponible, por lo que las condiciones no son las mejores para

ISSN 2174-0410

incorporar acciones innovadoras.

A pesar de ello, el entusiasmo de muchos profesores se mantiene y la Dirección de la Escuela apoya con todos los medios a su disposición las iniciativas que presentan. Un problema adicional que se detecta en ocasiones es lo que podemos llamar un *conflicto de intereses* entre distintas sensibilidades de los profesores de una misma asignatura o departamento. Existe a veces cierta dificultad en consensuar acuerdos sobre la forma de impartir y evaluar una asignatura, conjugando el derecho de todos los estudiantes a la igualdad de oportunidades con el diferente nivel de implicación de los profesores en la innovación educativa. En cierto modo, algunos compañeros han tenido que ralentizar el proceso renovador, ya que otros no se encontraban en disposición de avanzar al mismo ritmo.

-¿Facilitan este tipo de acciones las nuevas tecnologías, las redes sociales, las plataformas,…?

Las herramientas con las que hoy contamos facilitan, sin duda, incorporar técnicas que apoyan al profesor en su tarea de dinamizar el aprendizaje. Los alumnos las adoptan muy motivados, ya que se sienten cómodos con su utilización y les hacen integrarse con mayor facilidad en la comunidad universitaria, proporcionando así una sinergia que permite mejorar la transmisión de conocimientos.

Sin embargo, el uso de TICs, de plataformas virtuales, etc., puede llegar a convertirse en un *pozo sin fondo* que ahogue todo el tiempo disponible del profesor quien, al salir del aula, continua enviando-recibiendo mensajes, participando en debates, publicando nuevos materiales docentes… hasta llegar al agotamiento y acabar rechazando el sistema por insostenible. ¡Es preciso saber medir las fuerzas!

- ¿Representa la enseñanza on-line una ventaja en la enseñanza? ¿Llegará a imponerse a la enseñanza presencial?

Al hilo de la respuesta anterior, y sin caer en extremos no deseables, la enseñanza on-line es ya hoy imprescindible para complementar la actividad presencial. Incluso, en muchos casos, permite una enseñanza de gran calidad de forma exclusiva y resuelve, en parte, problemas como el del abandono universitario, de gran relevancia en nuestra universidad.

En mi caso personal, el contacto directo con el alumno es siempre muy gratificante y, por ello, me decidiría por la enseñanza on-line como complemento y apoyo a las clases tradicionales.

- Para finalizar, ¿Cuáles han sido y son los objetivos principales en tu etapa como Adjunta de Innovación? ¿Y las líneas futuras de actuación?

Si tuviera que resumir mis objetivos en uno solo diría que es básicamente *facilitar, apoyar e involucrar a los profesores de la Escuela de Arquitectura Técnica en la cultura de la Innovación Educativa, como herramienta eficiente para la mejora de la calidad de la enseñanza universitaria.*

Para el desarrollo de este objetivo me he comprometido a dialogar con todos los miembros de la comunidad académica en distintos foros, reuniéndome con Directores de Departamento, Coordinadores de Asignaturas y Curso, Delegados de Alumnos y PAS, transmitiendo el mensaje de que la renovación didáctica, más allá del esfuerzo que supone, es muy rentable en términos de resultados efectivos. Y, por supuesto, escuchando sus dificultades y atendiendo, en lo posible, sus sugerencias, de forma que ninguno se sienta ajeno al proceso de integración en el Espacio Europeo de Educación Superior, ni siquiera los menos convencidos inicialmente.

Llevamos ya dos cursos trabajando inmersos en el modelo de *Bolonia* y cada día aprendemos cómo debemos mejorar. Las previsiones que se hicieron en su momento no siempre se cumplen en la práctica y, por tanto, se necesita flexibilidad para superar los obstáculos que vamos encontrando, sin perder el horizonte de nuestra meta. Espero que la actuación de la Adjuntía de Innovación Educativa en el futuro próximo siga esta misma línea de trabajo, ya que aún queda mucho camino por recorrer. La formación alcanzada por los primeros graduados de la Escuela de Arquitectura Técnica que egresen en 2013 nos dirá si estuvimos acertados en nuestros planteamientos.

Este material está registrado bajo licencia Creative Commons 3.0 Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual, por lo que tienes que tener en consideración que:

Tu eres libre de:

Copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo la siguientes condiciones:

Atribución Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Licenciar Igual Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

Revista de Investigación. Edición Digital. ISSN 2174-0410

Número 0. Abril 2011

G.I.E

Pensamient Matemátic

EXPERIENCIAS DOCENTES

LAS COMPETICIONES TIPO OLIMPIADA COMO MOTIVACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: UNA EXPERIENCIA INTERNACIONAL

ACTIVIDADES ON-LINE PARA EL DESARROLLO DE LAS DESTREZAS MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS: AULA "PENSAMIENTO MATEMÁTICO"

EL GRUPO DE INVESTIGACIÓN MAIC, "MATEMÁTICAS APLICADAS A LA INGENIERÍA CIVIL" Y SU WEB DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A ALUMNOS CON MINUSVALÍA VISUAL

ENTREVISTA A:

ANA CASARAVILLA GIL, ACTUAL ADJUNTA A INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID Y PROFESORA

HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

BRIANCHÓN Y SU TEOREMA

EULER Y LA CONJETURA DE FERMAT SOBRE NÚMEROS TRIANGULARES

¡QUÉ *HISTORIA* ESTO DE LA ESTADÍSTICA!

HERMITE Y LA TRASCENDENCIA DE *e*

APROXIMACIÓN DEL DISEÑO ARQUITECTÓNICO A LA FRACTALIDAD

INVESTIGACIÓN

¿ES EL COEFICIENTE DE HURST UN BUEN INDICADOR DE LA EXTIENCIÓN DE ESPECIES?

POLÍTICA Y GEOMETRÍA

LUZ Y GRAVEDAD (REFLEXIONES GEOMÉTRICAS SOBRE CÁUSTICAS Y LENTES GRAVITACIONALES)

Y ADEMÁS:

CUENTOS Y JUEGOS MATEMÁTICOS, CRÍTICAS DE LIBROS...