

Investigación

Regla de la parábola asimétrica y cota de error para integración numérica de funciones en intervalos equiespaciados

Asymmetric parabolic rule and error bound for numerical integration of functions in equispaced intervals

José Manuel Recio-López

Revista de Investigación



Volumen XII, Número 1, pp. 005-016, ISSN 2174-0410
Recepción: 9 Oct'21; Aceptación: 10 Nov'21

1 de abril de 2022

Resumen

En este trabajo se presenta un método de integración numérica para una función definida en un intervalo $[a, b]$ equiespaciado con n subintervalos de longitud $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Además, se ha determinado una cota del error cometido entre la aproximación por dicho método y el valor exacto de la integral para una función de integral conocida.

Se compara este método con la regla de los trapecios analizando el error de la aproximación utilizando una función particular y se demuestra que el error es menor que el obtenido mediante la regla de los trapecios, proporcionando una cota para este error.

Palabras Clave: integración numérica, función discreta, regla de cuadratura, análisis modal de estructuras, mecánica experimental, integración de velocidades y aceleraciones, filtrado de señales.

Abstract

This work presents a method of approximated numerical integration of a function defined on an equispaced interval $[a, b]$ with n subintervals of length $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Furthermore, a bound of the error between the approximation by said method and the exact value of the integral has been determined for a function whose integral is known.

This method is compared with the trapezoidal rule analyzing the approximation error using a particular function demonstrating that this error is smaller than that obtained by the trapezoidal rule.

Keywords: numerical integration, discrete function, quadrature rule, modal analysis of structures, experimental mechanics, integration of velocities and accelerations, signal filtering.

1. Introducción

Uno de los intereses más frecuentes en investigación en mecánica de medios continuos es determinar la función integral de otra función, definida por un número finito de valores, por ejemplo, los valores del registro de datos de un acelerómetro; recogidas las aceleraciones la integración de dicho registro proporciona los valores de velocidad del móvil cuyas aceleraciones se han registrado.

Se utilizan frecuentemente la regla de los trapecios y la regla de Simpson para integración numérica de funciones, sin embargo las reglas de cuadratura de Durand [1] apenas se conocen. En 1894 el profesor e ingeniero mecánico W. F. Durand [1] sugirió una regla de integración denominada de la parábola asimétrica. Sin embargo, en el artículo de Walter W. Piegorsch [2] no queda claramente reflejada la obtención de dicha regla y, solamente es válida para el intervalo completo $[a, b]$, sin permitir obtener el valor de la función integral en un punto intermedio de dicho intervalo.

Con este artículo se pretende: la obtención de dicha regla de la parábola asimétrica en cada punto de integración y la acotación de su error –no determinadas por Durand–, así como poner de manifiesto que no se puede aplicar la regla de Simpson, si se desea obtener el valor de la función integral en puntos interiores del intervalo de integración.

La regla de los trapecios establece que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en el intervalo compacto $[a, b]$ y $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ que divide a este intervalo en n partes iguales, entonces el valor

$$IT = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right) \quad (1)$$

aproxima a la integral $I = \int_a^b f(t)dt$ con un error

$$e_t = |IT - I| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} K_t \quad (2)$$

siempre que la función $f(t)$ tenga derivada segunda continua y llamando K_t a una cota de la derivada segunda de la función $f(t)$, es decir $K_t = |f''(v)|$ para $v \in [a, b]$.

Además, permite obtener el valor de la integral en el punto de integración t_k de forma recursiva según

$$IT_k = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ IT_{k-1} + \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(t_{k-1}) + f(t_k)}{2} \right) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

La regla de Simpson aplicada a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada cuarta continua en el intervalo compacto $[a, b]$ y siendo $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ que divide a este intervalo en n partes iguales, siendo n un número par, establece que

$$IS = \frac{b-a}{3n} (f(a) + f(b) + 4(f(t_1) + f(t_3) + \dots + f(t_{n-1})) + 2(f(t_2) + f(t_4) + \dots + f(t_{n-2}))) \quad (4)$$

aproxima a la integral $I = \int_a^b f(t)dt$ con un error

$$e_s = |IS - I| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} K_s \quad (5)$$

siendo K_s una cota de la derivada cuarta de la función $f(t)$, es decir $K_s = |f^{IV}(\xi)|$ para $\xi \in [a, b]$.

Además, se verifica, únicamente para los puntos de integración con índice par t_{2k} , que el valor de la integral es

$$IS_{2k} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ IS_{2k-2} + \frac{b-a}{n} (f(t_{2k-2}) + 4f(t_{2k-1}) + f(t_{2k})) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \end{cases} \quad (6)$$

La regla de Simpson, solamente es válida si el número de particiones n es un número par y no permite obtener el valor de la integral en los puntos con índice impar del intervalo de definición $[a, b] = [t_0, t_n]$.

Nace, por tanto, el interés de obtener una regla de integración que permita calcular el valor de la integral numérica de la función integrando $f(t)$ en cualquier punto t_k de la partición $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n\}$, del intervalo de definición $[a, b] = [t_0, t_n]$, siendo $n \in \mathbb{N}^*$ ($n > 0$), considerando como función aproximante en el subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ una función parabólica $f_k^*(t)$, definida como

$$f_k^*(t) = \alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k} \quad (7)$$

La integral de la función $f(t)$ se puede calcular de forma recursiva, como suma de integrales en cada uno de los subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$, según

$$I_k = \int_{t_0}^{t_k} f(t)dt = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

Y sustituyendo la función $f(t)$ por la función aproximante $f_k^*(t)$ se obtiene la integral numérica

$$I_k^* = \int_{t_0}^{t_k} f_k^*(t)dt = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1}^* + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t)dt & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

2. Enunciado de la regla de la parábola asimétrica

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable cuatro veces y con derivada cuarta continua (es decir de clase C^4) en el intervalo $[a, b]$. Sea $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ que divide a este intervalo en n partes iguales de longitud $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ ($a = t_0$ y $b = t_n$) y $f(t_k) = f_k$, con $k = 0, 1, 2, \dots, n$, los valores de la función en los puntos de la partición. Se tienen pues n subintervalos y $n + 1$ puntos de integración.

El valor de la integral numérica en el punto t_k , $I^*(t_k) = I_k^*$, partiendo del punto t_0 , viene dado por la expresión siguiente:

$$I_k^* = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_k + 8f_{k-1} - f_{k-2}) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (10)$$

Además, el valor de la cuadratura de la integral de la función aproximante $f^*(t)$ evaluada en todo el intervalo $[a, b]$, I_n^* , que toma el valor:

$$I_n^* = \int_{a=t_0}^{b=t_n} f^*(t)dt = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t)dt \right) = \frac{b-a}{12} \sum_{k=0}^{k=n} (p_k f_k) \quad (11)$$

con:

$$p_k = \begin{cases} 5, & \text{si } k = 0 \\ 13, & \text{si } k = 1 \\ 12, & \text{si } k = 2 \\ 12, & \text{si } k = 3, \dots, n - 3 \\ 11, & \text{si } k = n - 2 \\ 15, & \text{si } k = n - 1 \\ 4, & \text{si } k = n \end{cases} \quad (12)$$

aproxima a la integral de la función $f(t)$ en el intervalo $[a, b]$, $I_n = \int_a^b f(t)dt$, con un error e_{pa} tal que:

$$e_{pa} = |I_n^* - I_n| = \left| \int_a^b f^*(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} B_1 + \frac{(b-a)^5}{90n^4} B_2 \quad (13)$$

siendo $B_1 = |f^{III}(\mu)|$ y $B_2 = |f^{IV}(\lambda)|$ con $\mu, \lambda \in [a, b]$ tales que: $|f^{III}(t)| \leq |f^{III}(\mu)|$ y $|f^{IV}(t)| \leq |f^{IV}(\lambda)| \forall t \in [a, b]$.

3. Demostración de la regla de la parábola asimétrica

Considérense los puntos: $(t_{k-1}, f_{k-1}), (t_k, f_k), (t_{k+1}, f_{k+1})$ y la función que pasa por esos puntos $f_k^*(t)$, que aproxima a la función $f(t)$ en el subintervalo $[t_{k-1}, t_{k+1}]$:

$$f_k^*(t) = \alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k} \quad (14)$$

Se definen las siguientes integrales de la función aproximante $f_k^*(t)$:

$$A_{1k} = \int_{t_k - \Delta t}^{t_k} f_k^*(t)dt = \int_{t_k - \Delta t}^{t_k} (\alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k})dt \quad (15)$$

$$A_{2k} = \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} f_k^*(t)dt = \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} (\alpha_{2k}t^2 + \alpha_{1k}t + \alpha_{0k})dt \quad (16)$$

de tal forma que $t_{k-1} = t_k - \Delta t$ y $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, cuya representación gráfica puede verse en la figura 1.

Figura 1. Representación de la función aproximante $f_k^*(t)$ en el intervalo $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ y las regiones A_{1k} y A_{2k}

Integrando (15) y (16) resulta:

$$A_{1k} = \left[\frac{\alpha_{2k}t^3}{3} + \frac{\alpha_{1k}t^2}{2} + \alpha_{0k}t \right]_{t_k - \Delta t}^{t_k} = \Delta t \left(\frac{\alpha_{2k}}{3}(3t_k^2 - 3\Delta t t_k + \Delta t^2) + \frac{\alpha_{1k}}{2}(2t_k - \Delta t) + \alpha_{0k} \right) \quad (17)$$

$$A_{2k} = \left[\frac{\alpha_{2k}t^3}{3} + \frac{\alpha_{1k}t^2}{2} + \alpha_{0k}t \right]_{t_k}^{t_k + \Delta t} = \Delta t \left(\frac{\alpha_{2k}}{3}(3t_k^2 + 3\Delta t t_k + \Delta t^2) + \frac{\alpha_{1k}}{2}(2t_k + \Delta t) + \alpha_{0k} \right) \quad (18)$$

Para determinar los coeficientes de la parábola se impone que debe pasar por los tres puntos que la definen:

$$\text{para } t = t_{k-1} : f_{k-1} = f(t_{k-1}) = \alpha_{2k}(t_k - \Delta t)^2 + \alpha_{1k}(t_k - \Delta t) + \alpha_{0k} \quad (19)$$

$$\text{para } t = t_k : f_k = f(t_k) = \alpha_{2k}t_k^2 + \alpha_{1k}t_k + \alpha_{0k} \quad (20)$$

$$\text{para } t = t_{k+1} : f_{k+1} = f(t_{k+1}) = \alpha_{2k}(t_k + \Delta t)^2 + \alpha_{1k}(t_k + \Delta t) + \alpha_{0k} \quad (21)$$

siendo $f_{k-1} = f(t_k - \Delta t)$, $f_k = f(t_k)$ y $f_{k+1} = f(t_k + \Delta t)$.

El conjunto de ecuaciones (19), (20) y (21) se puede reescribir en forma matricial de la forma:

$$\begin{bmatrix} (t_k - \Delta t)^2 & t_k - \Delta t & 1 \\ t_k^2 & t_k & 1 \\ (t_k + \Delta t)^2 & t_k + \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{2k} \\ \alpha_{1k} \\ \alpha_{0k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k-1} \\ f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (22) se obtiene:

$$\alpha_{2k} = \frac{f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}}{2\Delta t^2} \quad (23)$$

$$\alpha_{1k} = -\frac{(2t_k + \Delta t)f_{k-1} - 4t_k f_k + (2t_k - \Delta t)f_{k+1}}{2\Delta t^2} \quad (24)$$

$$\alpha_{0k} = \frac{(t_k^2 + \Delta t t_k)f_{k-1} - 2(t_k^2 - \Delta t^2)f_k + (t_k^2 - \Delta t t_k)f_{k+1}}{2\Delta t^2} \quad (25)$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes de (23), (24) y (25) en (17) y (18), se tiene:

$$A_{1k} = \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) = \frac{\Delta t}{12} (5f(t_k - \Delta t) + 8f(t_k) - f(t_k + \Delta t)) \quad (26)$$

$$A_{2k} = \frac{\Delta t}{12} (5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1}) = \frac{\Delta t}{12} (5f(t_k + \Delta t) + 8f(t_k) - f(t_k - \Delta t)) \quad (27)$$

Seguidamente, según la definición (9), la integral aproximada desde el punto t_0 hasta el punto t_k , con $k = 1, 2, \dots, n$, sabiendo que $I_0^* = 0$, viene dada por:

$$I_k^* = I_{k-1}^* + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t) dt \quad (28)$$

Teniendo en cuenta (26) y (27):

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t) dt = \begin{cases} A_{1k} = \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ A_{2(k-1)} = \frac{\Delta t}{12} (5f_k + 8f_{k-1} - f_{k-2}) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (29)$$

Por tanto, resulta, como se quería demostrar, que la aproximación de la integral en el intervalo $[t_0, t_k]$ es:

$$I_k^* = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = 0 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_{k-1} + 8f_k - f_{k+1}) & , \text{ si } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ I_{k-1}^* + \frac{\Delta t}{12} (5f_k + 8f_{k-1} - f_{k-2}) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (30)$$

Considerando todo el intervalo $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
 I_n^* &= \int_{a=t_0}^{b=t_n} f^*(t)dt = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k^*(t)dt \right) = \int_{t_0}^{t_1} f_k^*(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f_k^*(t)dt + \int_{t_2}^{t_3} f_k^*(t)dt + \\
 &+ \dots + \int_{t_{n-4}}^{t_{n-3}} f_k^*(t)dt + \int_{t_{n-3}}^{t_{n-2}} f_k^*(t)dt + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f_k^*(t)dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f_k^*(t)dt = \\
 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} + \dots + A_{1(n-3)} + A_{1(n-2)} + A_{1(n-1)} + A_{2(n-1)} = \\
 &= \frac{\Delta t}{12}(5f_0 + 8f_1 - f_2) + \frac{\Delta t}{12}(5f_1 + 8f_2 - f_3) + \frac{\Delta t}{12}(5f_2 + 8f_3 - f_4) + \dots + \\
 &+ \frac{\Delta t}{12}(5f_{n-4} + 8f_{n-3} - f_{n-2}) + \frac{\Delta t}{12}(5f_{n-3} + 8f_{n-2} - f_{n-1}) + \frac{\Delta t}{12}(5f_{n-2} + 8f_{n-1} - f_n) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{12}(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2})
 \end{aligned} \tag{31}$$

Agrupando términos en (31), el valor de la integral numérica aproximada en todo el intervalo $[a, b]$, como se quería demostrar, es:

$$I_n^* = \frac{\Delta t}{12}(5f_0 + 13f_1 + 12f_2 + 12f_3 + \dots + 12f_{n-3} + 11f_{n-2} + 15f_{n-1} + 4f_n) \tag{32}$$

Escrita, más resumidamente, en forma de sumatorio:

$$I_n^* = \frac{\Delta t}{12}(5f_0 + 13f_1 + 12 \sum_{k=2}^{k=n-3} f_k + 11f_{n-2} + 15f_{n-1} + 4f_n) \tag{33}$$

Si se compara la ecuación (33) con la obtenida por W. F. Durand [2] (pág. 332) puede observarse que es la misma cuadratura. La cuadratura de W. F. Durand debe considerarse en el cálculo numérico, como regla de integración parabólica, en detrimento de la regla de Simpson [3, 4, 5, 6, 7, 8], que como se ha comentado no permite la integración en los puntos con índice impar del intervalo de definición.

4. Acotación del error de la aproximación. Comparación con el error obtenido mediante la regla de los trapecios

Considérese la función $E_k(s) : [0, \Delta t] \rightarrow \mathbb{R}$, diferencia entre el valor de la integral de la función aproximante $f_k^*(t)$, parábola definida mediante los puntos $(t_{k-1}, f(t_{k-1}))$, $(t_k, f(t_k))$, $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$, y el valor de la integral de la función $f(t)$, en el intervalo $[t_{k-1}, t_{k-1} + s] \equiv [t_k - s, t_k]$, siendo $t_k = t_{k-1} + s$ y $t_{k+1} = t_k + s$ [9], con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$E_k(s) = \begin{cases} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f_k^*(t)dt - \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f(t)dt, & \text{si } k \neq n \\ \int_{t_k-s}^{t_k} f_k^*(t)dt - \int_{t_k-s}^{t_k} f(t)dt, & \text{si } k = n \end{cases} \tag{34}$$

Definiendo cada sumando de (34) como:

$$G_k^*(s) = \begin{cases} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f_k^*(t)dt, & \text{si } k \neq n \\ \int_{t_k-s}^{t_k} f_k^*(t)dt, & \text{si } k = n \end{cases} \tag{35}$$

$$G_k(s) = \begin{cases} \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+s} f(t)dt = F(t_{k-1}+s) - F(t_{k-1}), & \text{si } k \neq n \\ \int_{t_k-s}^{t_k} f(t)dt = F(t_k) - F(t_k-s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (36)$$

siendo $F(t)$ una primitiva de la función $f(t)$, resulta:

$$E_k(s) = G_k^*(s) - G_k(s) \quad (37)$$

Teniendo en cuenta (29):

$$G_k^*(s) = \begin{cases} \frac{s}{12}(5f(t_{k-1}) + 8f(t_{k-1}+s) - f(t_{k-1}+2s)), & \text{si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(5f(t_k) + 8f(t_k-s) - f(t_k-2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (38)$$

Las derivadas sucesivas de $G_k^*(s)$, primer sumando de (34), son:

$$\dot{G}_k^*(s) = \frac{d}{ds} (G_k^*(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8\dot{f}(t_{k-1}+s) - 2\dot{f}(t_{k-1}+2s)) + \frac{1}{12}(5f(t_{k-1}) + \\ + 8f(t_{k-1}+s) - f(t_{k-1}+2s)) & , \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(-8\dot{f}(t_k-s) + 2\dot{f}(t_k-2s)) + \\ + \frac{1}{12}(5f(t_k) + 8f(t_k-s) - f(t_k-2s)), & \text{ si } k = n \end{cases} \quad (39)$$

$$\ddot{G}_k^*(s) = \frac{d^2}{ds^2} (G_k^*(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8\ddot{f}(t_{k-1}+s) - 4\ddot{f}(t_{k-1}+2s)) + \\ + \frac{1}{12}(16\dot{f}(t_{k-1}+s) - 4\dot{f}(t_{k-1}+2s)), & \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(8\ddot{f}(t_k-s) - 4\ddot{f}(t_k-2s)) + \\ + \frac{1}{12}(-16\dot{f}(t_k-s) + 4\dot{f}(t_k-2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (40)$$

$$G_k^{*III}(s) = \frac{d^3}{ds^3} (G_k^*(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8f^{III}(t_{k-1}+s) - 8f^{III}(t_{k-1}+2s)) + \\ + \frac{1}{12}(24\ddot{f}(t_{k-1}+s) - 12\ddot{f}(t_{k-1}+2s)), & \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(-8f^{III}(t_k-s) + 8f^{III}(t_k-2s)) + \\ + \frac{1}{12}(24\ddot{f}(t_k-s) - 12\ddot{f}(t_k-2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (41)$$

Y las derivadas sucesivas de $G_k(t)$, segundo sumando de (34), son:

$$\dot{G}_k(s) = \frac{d}{ds}(G_k(s)) = \begin{cases} f(t_{k-1} + s) & , \text{ si } k \neq n \\ f(t_k - s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (42)$$

$$\ddot{G}_k(s) = \frac{d^2}{ds^2}(G_k(s)) = \begin{cases} \dot{f}(t_{k-1} + s) & , \text{ si } k \neq n \\ -\dot{f}(t_k - s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (43)$$

$$G_k^{III}(s) = \frac{d^3}{ds^3}(G_k(s)) = \begin{cases} \ddot{f}(t_{k-1} + s) & , \text{ si } k \neq n \\ \ddot{f}(t_k - s) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (44)$$

Por tanto, la derivada tercera con respecto del tiempo de la función $E_k(s)$ es:

$$E_k^{III}(s) = \frac{d^3}{ds^3}(E_k(s)) = \begin{cases} \frac{s}{12}(8f^{III}(t_{k-1} + s) - 8f^{III}(t_{k-1} + 2s)) + \\ + \frac{1}{12}(12\ddot{f}(t_{k-1} + s) - 12\ddot{f}(t_{k-1} + 2s)), \text{ si } k \neq n \\ \frac{s}{12}(-8f^{III}(t_k - s) + 8f^{III}(t_k - 2s)) + \\ + \frac{1}{12}(12\ddot{f}(t_k - s) - 12\ddot{f}(t_k - 2s)) & , \text{ si } k = n \end{cases} \quad (45)$$

Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange en (45):

$$E_k^{III}(s) = \frac{d^3}{ds^3}(E_k(s)) = \begin{cases} -\frac{12s}{12}(f^{III}(\mu_k)) - \frac{8s^2}{12}(f^{IV}(\lambda_k)), \text{ si } k \neq n \\ +\frac{12s}{12}(f^{III}(\mu_k)) - \frac{8s^2}{12}(f^{IV}(\lambda_k)), \text{ si } k = n \end{cases} \quad (46)$$

siendo $\lambda_k, \mu_k \in [t_k, t_k + s]$, si $k \neq n$ y $\lambda_k, \mu_k \in [t_{k-1} - s, t_{k-1}]$ si $k = n$.

Aplicando seguidamente la desigualdad triangular, $|x + y| \leq |x| + |y|$ en (46) se tiene que:

$$|E_k^{III}(s)| \leq \frac{12s}{12} |f^{III}(\mu_k)| + \frac{8s^2}{12} |f^{IV}(\lambda_k)|, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (47)$$

Integrando dos veces la función $|E_k^{III}(s)|$ entre 0 y s , se obtiene:

$$|\dot{E}_k(s)| \leq \frac{s^3}{6} |f^{III}(\mu_k)| + \frac{s^4}{18} |f^{IV}(\lambda_k)|, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (48)$$

Integrando ahora la función $|\dot{E}_k(s)|$ entre 0 y Δt , resulta:

$$|E_k(\Delta t)| \leq \frac{\Delta t^4}{24} |f^{III}(\mu_k)| + \frac{\Delta t^5}{90} |f^{IV}(\lambda_k)|, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (49)$$

Eligiendo $\lambda, \mu \in [a, b]$ tales que $|f^{III}(\mu_k)| \leq |f^{III}(\mu)|$ y $|f^{IV}(\lambda_k)| \leq |f^{IV}(\lambda)|$, se define $E(\Delta t)$ como una cota de los valores $|E_k(\Delta t)|$:

$$E(\Delta t) = \frac{\Delta t^4}{24} |f^{III}(\mu)| + \frac{\Delta t^5}{90} |f^{IV}(\lambda)| \quad (50)$$

Denotando $B_1 = |f^{III}(\mu)|$ y $B_2 = |f^{IV}(\lambda)|$, la cota de los valores $|E_k(\Delta t)|$ toma el valor:

$$E(\Delta t) = \frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \quad (51)$$

Calculando ahora la función error de la aproximación $e_{pa} = |I_n^* - I_n|$, se tiene:

$$\begin{aligned} e_{pa} &= \left| \int_a^b f^*(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} f^*(t) dt - \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+\Delta t} f(t) dt \right| + \\ &+ \left| \int_{t_n-\Delta t}^{t_n} f^*(t) dt - \int_{t_n-\Delta t}^{t_n} f(t) dt \right| = \\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1} |E_k(\Delta t)| + |E_n(\Delta t)| = \sum_{k=1}^{k=n} |E_k(\Delta t)| \end{aligned} \quad (52)$$

Y teniendo en cuenta $E(\Delta t)$, como una cota de los valores $|E_k(\Delta t)|$:

$$e_{pa} = \sum_{k=1}^{k=n} |E_k(\Delta t)| \leq nE(\Delta t) \quad (53)$$

Sustituyendo el valor de $E(\Delta t)$:

$$e_{pa} \leq n \left(\frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \right) \quad (54)$$

Teniendo en cuenta que $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ y sustituyendo en (54), resulta la cota del error que se quería demostrar:

$$e_{pa} \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} B_1 + \frac{(b-a)^5}{90n^4} B_2 \quad (55)$$

A continuación, se demuestra que esta cota de error obtenida para la regla de la parábola asimétrica es menor que la correspondiente a la regla de los trapecios. Para ello se consideran las cotas de error $C_{pa}(\Delta t)$ de (54), para la regla de la parábola asimétrica, y $C_t(\Delta t)$ de (2), para la regla de los trapecios:

$$C_{pa}(\Delta t) = n \left(\frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \right) \quad (56)$$

$$C_t(\Delta t) = n \frac{\Delta t^3}{12} K_t \quad (57)$$

Si el cociente $\frac{C_t(\Delta t)}{C_{pa}(\Delta t)}$ tiende asintóticamente a ∞ , cuando $\Delta t \rightarrow 0$, entonces se puede decir que el error de la regla de los trapecios es mayor que el error de la regla de la parábola asimétrica.

Efectivamente, fácilmente se observa que dicho límite tiende a ∞ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C_t(\Delta t)}{C_{pa}(\Delta t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{n \frac{\Delta t^3}{12} K_t}{n \left(\frac{\Delta t^4}{24} B_1 + \frac{\Delta t^5}{90} B_2 \right)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} K_t}{\left(\frac{\Delta t}{24} B_1 + \frac{\Delta t^2}{90} B_2 \right)} = \infty \quad (58)$$

Teniendo en cuenta que el paso de integración en los registros de datos Δt es típicamente $\ll 1$, se puede asegurar que el error de la regla de la parábola asimétrica es inferior al error de la regla de los trapecios, tanto más cuánto menor sea el paso de integración.

5. Aplicaciones. Resolución de un caso particular

Son muchas las aplicaciones que pueden hacerse de esta regla en las distintas ramas de la ingeniería y las ciencias. Se destacan entre ellas, por ser las que han motivado este trabajo, las siguientes: teoría de la señal, métodos experimentales en ingeniería, análisis modal de estructuras y filtrado de señales.

Seguidamente se va a aplicar la regla de la parábola asimétrica a la resolución de un problema típico con un función arbitraria, comparando el resultado con la resolución mediante la regla de los trapecios. Este problema podría ser perfectamente un problema de determinación de velocidades a partir del registro de aceleraciones, de un punto de un puente o estructura sometida a cargas externas, medidas por un acelerómetro.

Considérese la función de aceleraciones de un punto de una estructura $f(t) = \text{sen}(t)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 1]$ y paso de integración $\Delta t = 0.1$. La integral de esta función desde 0 hasta el instante t proporciona las velocidades del punto y viene dada por la función $F(t)$:

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt = 1 - \text{cos}(t) \quad (59)$$

Para esta función se tienen los siguientes resultados:

Tabla 1. Resultados para la función $f(t) = \text{sen}(t)$

t	I_{exacta}	$I_{\text{regla-t}}$	$I_{\text{regla-pa}}$	$e_{\text{regla-t}}$	$e_{\text{regla-pa}}$
0	0	0	0	0	0
0.1	$4.9958 \cdot 10^{-3}$	$4.9917 \cdot 10^{-3}$	$5.0000 \cdot 10^{-3}$	$4.1639 \cdot 10^{-6}$	$4.1486 \cdot 10^{-6}$
0.2	$19.9334 \cdot 10^{-3}$	$19.9168 \cdot 10^{-3}$	$19.9417 \cdot 10^{-3}$	$16.6140 \cdot 10^{-6}$	$8.2406 \cdot 10^{-6}$
0.3	$44.6635 \cdot 10^{-3}$	$44.6263 \cdot 10^{-3}$	$44.6757 \cdot 10^{-3}$	$37.2258 \cdot 10^{-6}$	$12.2349 \cdot 10^{-6}$
0.4	$78.9390 \cdot 10^{-3}$	$78.8732 \cdot 10^{-3}$	$78.9551 \cdot 10^{-3}$	$65.7935 \cdot 10^{-6}$	$16.0917 \cdot 10^{-6}$
0.5	$122.4174 \cdot 10^{-3}$	$122.3154 \cdot 10^{-3}$	$122.4372 \cdot 10^{-3}$	$102.0315 \cdot 10^{-6}$	$19.7725 \cdot 10^{-6}$
0.6	$174.6644 \cdot 10^{-3}$	$174.5188 \cdot 10^{-3}$	$174.6876 \cdot 10^{-3}$	$145.5779 \cdot 10^{-6}$	$23.2404 \cdot 10^{-6}$
0.7	$235.1578 \cdot 10^{-3}$	$234.9618 \cdot 10^{-3}$	$235.1843 \cdot 10^{-3}$	$195.9975 \cdot 10^{-6}$	$26.4609 \cdot 10^{-6}$
0.8	$303.2933 \cdot 10^{-3}$	$303.0405 \cdot 10^{-3}$	$303.3227 \cdot 10^{-3}$	$252.7865 \cdot 10^{-6}$	$29.4018 \cdot 10^{-6}$
0.9	$378.3900 \cdot 10^{-3}$	$378.0747 \cdot 10^{-3}$	$378.4221 \cdot 10^{-3}$	$315.3776 \cdot 10^{-6}$	$32.0336 \cdot 10^{-6}$
1	$459.6977 \cdot 10^{-3}$	$459.3145 \cdot 10^{-3}$	$459.7272 \cdot 10^{-3}$	$383.1453 \cdot 10^{-6}$	$29.4888 \cdot 10^{-6}$

En la tabla 1 se muestran para la función $f(t) = \text{sen}(t)$, los valores (redondeados al cuarto decimal en potencia 10^{-3}) de la integral exacta I_{exacta} , la integral aproximada obtenida mediante la regla de los trapecios $I_{\text{regla-t}}$, la integral aproximada obtenida mediante la regla de la parábola asimétrica $I_{\text{regla-pa}}$, el error de la aproximación mediante la regla de los trapecios $e_{\text{regla-t}}$ y

el error de la aproximación mediante la regla de la parábola asimétrica $e_{regla-pa}$. Se puede comprobar que el error obtenido mediante la regla de la parábola asimétrica en todo el intervalo $[0, 1]$ cumple la condición (13), tomando como cotas $B_1 = |-\cos(0)| = 1$ y $B_2 = |\sin(1)|$:

$$e_{regla-pa}(t = 1) = 29.4888 \cdot 10^{-6} \leq 42.6016 \cdot 10^{-6} \quad (60)$$

La figura 2 muestra los valores de la función integral de la función considerada como ejemplo $f(t) = \sin(t)$, en el intervalo $[0, 1]$.

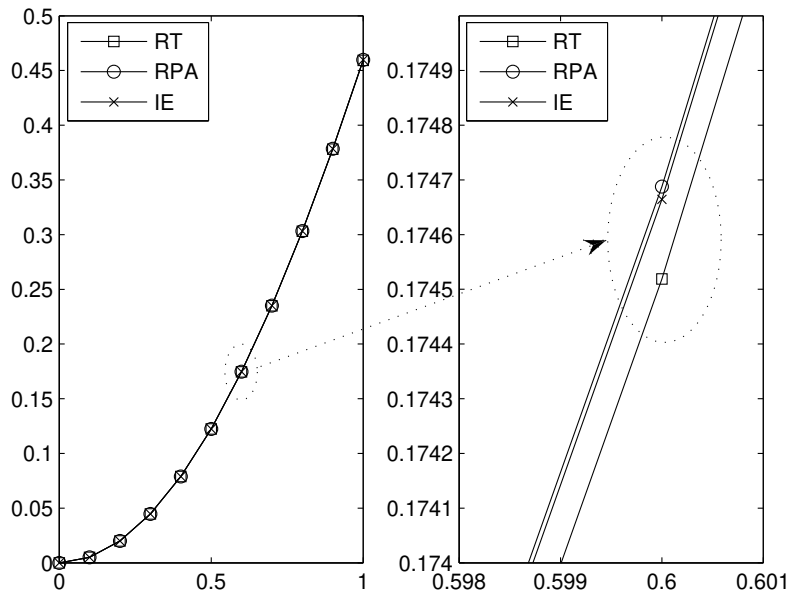


Figura 2. Función integral $F(t) = 1 - \cos(t)$ y sus aproximaciones: RT = regla de los trapecios, RPA = regla de la parábola asimétrica, IE = integral exacta.¹

6. Conclusiones

Mediante la regla de la parábola asimétrica, mostrada en este trabajo, se ha obtenido un método de integración numérica de funciones definidas en un intervalo equiespaciado de paso de integración Δt , con el que se obtiene un error, cuya cota superior se ha estimado en (13), menor que el que resulta al aplicar la regla de los trapecios, estimado por una cota superior dada en (2); de ahí su interés en incluirla como regla básica en cálculo numérico, sustituyéndola por la famosa regla de Simpson, pues se ha mostrado la limitación de esta última al no permitir obtener la función integral en cada uno de los puntos de integración.

7. Agradecimientos

El autor desea agradecer a la Dra. Carmen Sáez Agulló y al Dr. Jorge Galán Vioque, profesora titular y catedrático, respectivamente, del departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla, su muestra de interés y su apoyo para la realización de este trabajo; así como al Dr. Pedro Galvín Barrera, profesor titular del departamento de Mecánica de Medios

¹Figura obtenida con el programa MATLAB.

Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad de Sevilla, por la motivación transmitida para llevarlo a cabo.

Referencias

- [1] DURAND, W. F., *New rules for approximate integration*, Engineering News, N° 31, pp. 42–43, 1894.
- [2] PIEGORSCH, W. W., *Durand's rules for approximate integration*, Historia Mathematica, N° 16, pp. 324–333, 1989.
- [3] DEMIDOVICH, B. P., MARON, I. A., *Cálculo numérico fundamental*, Paraninfo, 1985.
- [4] DOUBOVA, A., GONZÁLEZ, G., *Un Curso de Cálculo Numérico: Interpolación, Aproximación, Integración y Resolución de Ecuaciones Diferenciales*, Universidad de Sevilla, 2007.
- [5] FAIRES, J. D., BURDEN, R., *Métodos numéricos*, Thomson, 2004.
- [6] MATHEWS, J.H., *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall International Editions, 1992.
- [7] RODRÍGUEZ GÓMEZ, F. J., *Cálculo y Métodos Numéricos: Teoría, Algoritmos y Problemas Resueltos*, Universidad Pontificia Comillas, 2003.
- [8] SAMARSKI, A. A., *Introducción a los métodos numéricos*, Editorial Mir, Moscú, 1986.
- [9] DE BURGOS, J., *Cálculo infinitesimal de una variable*, McGraw-Hill Interamericana, 2000.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: José Manuel Recio-López

Correo electrónico: josreclop@alum.us.es

Institución: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla.