Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"
Universidad Politécnica de Madrid
G.I.E. Pensamiento Matemático
MAIC
ISSN 2174-0410

# INVESTIGACIÓN

THE USE OF BÉZIER INTERPOLATION FOR NUMERICAL INTEGRATION OF UNEVEN DATA

EXPLICIT FORMULAS FOR THE EULER'S PHI FUNCTION AND THE COUNTING OF PRIMES

# HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA COMPRENDER LOS EFECTOS DE LOS TURISTAS SOBRE EL MEDIO AMBIENTE

# JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

UNA HISTORIA DE TRIÁNGULOS Y PROBABILIDAD. FICCIÓN CON TOQUES DE LAKATOS Y SANDERSON

PASOS HACIA UN CONOCIMIENTO FÍSICO-MATEMÁTICO NATURALIZADO

# EXPERIENCIAS DOCENTES

RSTUDIO® CLOUD COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

¿DÓNDE ESTÁ? UN CUENTO PARA EL ESTUDIO DEL PENSAMIENTO BORROSO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

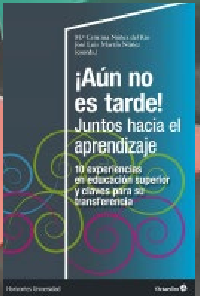
INNOVACIÓN EDUCATIVA EN MATEMÁTICAS MEDIANTE EL USO DE PLATAFORMAS VIRTUALES: EXPERIENCIAS DOCENTES EN LA EDUCACIÓN UNIVERSITARIA

# CUENTOS MATEMÁTICOS

MATE-AVENTURAS EN LA GRANJA: DESAFÍOS

# CRÍTICAS Y RESEÑAS

CUANDO MENOS ES MÁS


¡AÚN NO ES TARDE! JUNTOS HACIA EL APRENDIZAJE

# Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático

y

Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid

Volumen XV, ISSN 2174-0410





1 de abril de 2025

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 – 0410

Volumen XV, abril 2025

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Diseño de portada/ Sagrario Lantarón
Maquetación /Pablo Marcos, Sagrario Lantarón, Mariló López, Santiago Higuera

Universidad Politécnica de Madrid

# Índice de Artículos

# Editorial Volumen XV

Equipo Editorial

Revista de Investigación

Volumen XV, pp. 001–002, ISSN 2174-0410
Recepción: 31 Mar'25; Aceptación: 31 Mar'25

1 de abril de 2025

**Resumen**

Este es el número de Pensamiento Matemático del año 2025. En él se presentan, como es la característica de nuestra publicación, artículos muy variados de autores de diferentes países que encontraréis de gran interés.

Los trabajos están distribuidos en cada una de las secciones de la publicación.

**Abstract**

This is the number of Mathematical Thinking for the year 2025. As is the characteristic of our publication, various articles by authors from different countries are presented that you will find of great interest.

As usual, the works are distributed in each of the sections of the publication.

## Introducción.

En un mundo donde el cambio es la única constante, la educación y la investigación en matemáticas se presentan como pilares fundamentales para construir sociedades más equitativas, innovadoras y preparadas para los desafíos del futuro. Las matemáticas, lejos de ser únicamente un conjunto de algoritmos y reglas, son una herramienta poderosa para interpretar el mundo, resolver problemas complejos y estimular el pensamiento crítico.

En esta edición de Pensamiento Matemático, se explora a través de interesantes artículos, cómo la innovación educativa y la investigación en matemáticas se entrelazan para transformar el aula, empoderar a los docentes y capturar la curiosidad de los estudiantes. A medida que las metodologías tradicionales son reevaluadas, surgen enfoques dinámicos que aprovechan las tecnologías emergentes, el aprendizaje colaborativo y la interdisciplinariedad.

Estamos convencidos de que la clave para un aprendizaje significativo radica en tender puentes entre la teoría y la práctica, entre la abstracción matemática y su aplicación tangible. Por ello, invitamos a nuestros lectores a reflexionar sobre las investigaciones y experiencias aquí presentadas, y a contribuir con sus propias ideas para seguir construyendo una comunidad educativa vibrante y comprometida.

Con la mirada puesta en el futuro, renovamos nuestro compromiso con la excelencia y la relevancia, reconociendo que la innovación no es un destino, sino un viaje continuo que requiere colaboración y creatividad.

Agradecemos a nuestros colaboradores, revisores y lectores por su dedicación y entusiasmo.

Entre los temas destacados, encontramos investigaciones sobre una fórmula explícita que caracteriza los pares de enteros que son primos relativos. También un trabajo sobre interpolación numérica donde se presenta un método diferente que utiliza la interpolación de Bézier para aproximar la curva y calcular el área.

Preocupados por la sostenibilidad, se incluye un estudio sobre la modelación matemática para comprender los efectos de los turistas sobre el medio ambiente, un tema de gran actualidad.

La sección dedicada a experiencias docentes innovadoras, presenta casos prácticos tan interesantes como la utilización de la Inteligencia Artificial en las aulas o el RStudio® Cloud como herramienta didáctica para estadística en educación secundaria. Se puede también encontrar un trabajo de innovación educativa en matemáticas mediante el uso de plataformas virtuales a nivel de educación universitaria.

Relacionada con esta sección, dentro de curiosidades, se presenta una experiencia docente que guía hacia un conocimiento físico-matemático naturalizado.

Para el caso de educación primaria, se incluye un artículo que desarrolla un cuento para el estudio del pensamiento borroso en educación primaria.

En la peculiar y siempre llamativa sección de Juegos y Rarezas Matemáticas, este número incluye el original trabajo *Una historia de triángulos y probabilidad Ficción con unos toques de Lakatos y Sanderson*.

La sección de cuentos matemáticos presenta una narración breve, orientada a niños de entre 9 y 12 años, en la que se realizan operaciones aritméticas básicas.

Terminamos con unas reseñas, por un lado, a un interesante libro dedicado a experiencias docentes en educación universitaria: *¡Aún no es tarde! Juntos hacia el aprendizaje (10 experiencias en educación superior y claves para su transferencia).* Por otro, al libro *Cuando menos es más* un texto que en clave divulgativa muestra cómo la ingeniería y las matemáticas pueden llegar a conformar un excelente binomio.

Esperamos que todas las experiencias y trabajos presentados os resulten de interés.

Investigación

# The use of Bézier interpolation for numerical integration of uneven data

# El uso de la interpolación de Bézier para la integración numérica de datos irregulares

Stefan T Orszulik

Research Journal

Volumen XV, pp. 003–012, ISSN 2174-0410
Recepción: 22 Abri'24; Aceptación: 27 May'24

1 de abril de 2025

**Abstract**

One of the challenges in mathematics is to find the area under a curve when the usual methods of integration are not feasible. There are various approaches to deal with this problem, most of them relying on Newton-Cotes formulas, but they have some drawbacks and errors. This article presents a different method that uses Bézier interpolation to approximate the curve and calculate the area. This method has the advantage of being accurate and general, meaning that it can handle any kind of curve, even those that come from experimental data that may be irregular or noisy.

**Keywords:** Bézier interpolation, Simpson's rule, trapezoidal rule, numerical integration, estimation.

**Resumen**

Uno de los desafíos en matemáticas es encontrar el área bajo una curva cuando los métodos habituales de integración no son factibles. Existen varios enfoques para abordar este problema, la mayoría de ellos basándose en fórmulas de Newton-Cotes, pero tienen algunos inconvenientes y errores. Este artículo presenta un método diferente que utiliza la interpolación de Bézier para aproximar la curva y calcular el área. Este método tiene la ventaja de ser preciso y general, lo que significa que puede manejar cualquier tipo de curva, incluso aquellas que provienen de datos experimentales que pueden ser irregulares o ruidosos.

**Palabras Clave:** interpolación de Bézier, la regla de Simpson, regla trapezoidal, integración numérica, estimación.

# 1. Introduction

One way to approximate the integral of a function that is hard or impossible to integrate analytically is to use the trapezoidal rule [1]. This technique divides the area under the curve into several trapezoids (see Figure 1), and adds up the area of each trapezoid to get an estimate of the total area. The main benefit of this technique over other methods is its simplicity, especially when implemented in a spreadsheet, since the formulas can be easily copied and pasted, making it a popular alternative to direct integration; however, the technique also has some inherent errors that restrict its applicability.

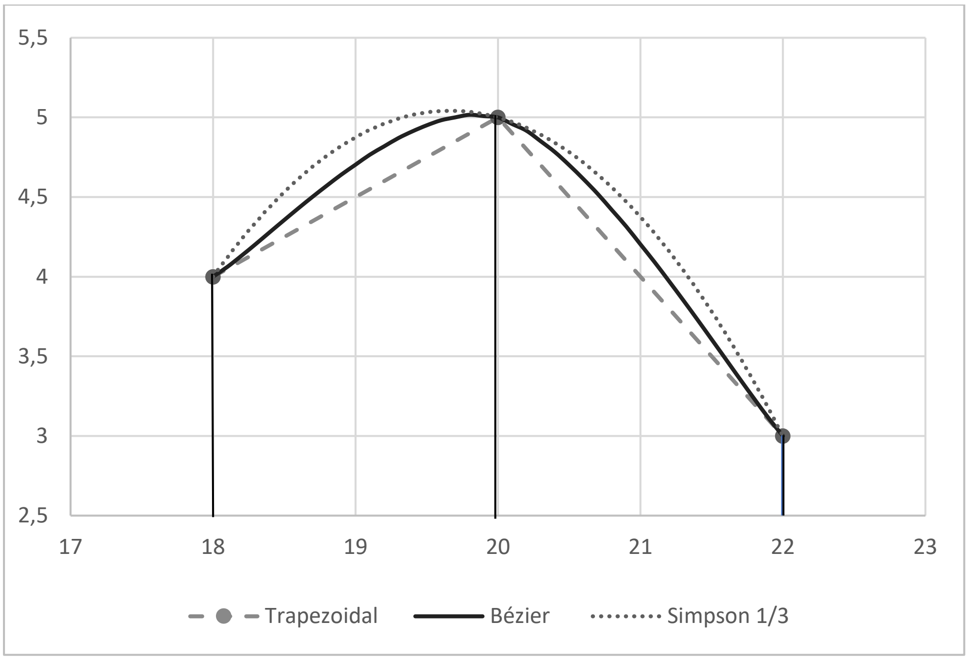



Figure 1. Bézier curve together with Trapezoidal Rule and Simpson's Rule for two segments.

In the standard trapezoidal method, the area under the curve (x = a to b) is:

$$I = (b - a) * [f(a) + f(b)]/2 \quad (1)$$

As can be seen in Figure 1, there is a section between the curve and the trapezoidal shape that is not included in the calculation, leading to error.

Simpson's rule overcomes much of this error by fitting two sections of the curve to a quadratic fit.

$$I = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \quad (2)$$

Simpson's rule is a numerical method for approximating the area under a curve that is smooth and continuous. It works well when the curve can be modelled by a quadratic function, or a polynomial of degree two. However, it may not be very accurate when the curve has a different shape, such as a sine or cosine function. To apply Simpson's rule to a curve that is divided into several subintervals, we can use the formula in Eq. (3), which sums up the areas of each subinterval using Simpson's rule.

$$I = \frac{(b-a)}{3n}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(b)] \quad (3)$$

The method requires an even number of equally spaced intervals ($n$ is even). When the function of the curve is known it is easy to arrange for an even number of intervals. Increasing the number of intervals increases the accuracy of both the Trapezoidal Rule and Simpson's 1/3 Rule (Eq. (3)); therefore, when there is a function describing the curve then it is relatively easy to increase the number of intervals, particularly when using the copy-and-paste facility in a spreadsheet.

There are other Newton–Cotes formulas such as Boole's Rule and Weddle's Rule which use higher number of intervals (n) but these have inherent drawbacks; firstly, they can only be applied to larger values of $n$ (or their multiples); secondly, use of larger values of $n$ can suffer from Runge's phenomenon where the errors grow significantly for large $n$. There have been several proposals for combining different Newton–Cotes formulas for various values of $n$ which have been shown to give good results [2, 3], but each value of $n$ has its own combination and therefore cannot be easily applied universally. In addition, these algorithms can only be applied to equally spaced intervals.

In practice there are many occasions when there is no function associated with the curve, and indeed where the data is not evenly distributed, as is the case with much experimental data. The trapezoidal rule can still be applied for data that are unevenly spaced, but this is not the case with Simpson's 1/3 Rule which usually requires equally spaced intervals. Furthermore, when the data is obtained experimentally and not easily associated with a mathematical function, it is not possible to increase the number of intervals.

More recently there have been reports of a modifies Simpson's 1/3 Rule that is applicable to irregularly spaced data [4, 5]. Particularly useful is Cartright's article [4] since it is easily applied using MS Excel. The equation for Simpson's 1/3 Rule with irregular spaced intervals is given in Eq. (4).

$$I = \frac{x_3 - x_1}{6}\left[\left\{2 - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\right\} f(x_1) + \frac{(x_3 - x_1)^2}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)} f(x_2) + \left\{2 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}\right\} f(x_3)\right] \quad (4)$$

Eq. (4) is for two subintervals. Once set up in Excel it is very straightforward to copy the equation to providing a numerical integration over the entire dataset.

Figure 1 shows a Bézier curve, which is a type of parametric curve that goes through all the datapoints using control points. The first and last control points are at the beginning and end of the curve. Other control points are placed such that the resultant parametric curve passes through the data points. The following shows a cubic Bézier function:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \quad (5)$$

where the parameter, t, has a value between 0 and 1, and $P_i$ are the control points.

You can find more information about Bézier curves and how they are used in the literature, for example, by Hosaka [6].

This article presents a method based on Bézier curve fitting that could be better than other numerical integration methods in many cases, especially when applied to unevenly spaced data.

# 2. Method

One way to calculate the area under a curve is to use integration, which can be done analytically if the curve has a known mathematical expression. However, many times the curve is obtained from experimental measurements that do not have a simple formula. In these cases, numerical methods such as the trapezoidal rule or Simpson's rule can be used to approximate the integral using the data points. To illustrate how these methods work, we will apply them to some curves that have known functions and compare the results with the exact values. Then we will show how a new method based on Bézier curves can be used to estimate the integral of experimental data and how it compares visually with the other methods.

# 3. Results

## 3.1 Examples with known integrals

The article by Ullah [3] compared several integration methods using equations with known integrands. One of these (Eq. (6)) is examined here, comparing the Trapezoidal and Simpson's 1/3 Rules with the proposed Bézier method.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \tag{6}$$

Table 1 is a portion of a spreadsheet showing the proposed integration method using Bézier interpolation.

*Table 1. Numerical Integration using Bézier interpolation (first 13 of 100 intervals shown for Bézier interpolation data).*

| | | Bézier Interpolation | | |
|---|---|---|---|---|
| *Known X values* | *Known Y values* | *X* | *Interpolated Y* | *Trapezoidal Rule* |
| 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0.0769 | 0.9970 | 0.01 | 0.9997 | 0.009999 |
| 0.1538 | 0.9881 | 0.02 | 0.9995 | 0.009996 |
| 0.2308 | 0.9730 | 0.03 | 0.9992 | 0.009993 |
| 0.3077 | 0.9515 | 0.04 | 0.9989 | 0.009990 |
| 0.3846 | 0.9231 | 0.05 | 0.9985 | 0.009987 |
| 0.4615 | 0.8871 | 0.06 | 0.9981 | 0.009983 |
| 0.5385 | 0.8427 | 0.07 | 0.9975 | 0.009978 |
| 0.6154 | 0.7882 | 0.08 | 0.9968 | 0.009971 |
| 0.6923 | 0.7216 | 0.09 | 0.9959 | 0.009964 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.7692 | 0.6390 | 0.1 | 0.9950 | 0.009955 |
| 0.8462 | 0.5329 | 0.11 | 0.9939 | 0.009945 |
| 0.9231 | 0.3846 | 0.12 | 0.9928 | 0.009933 |
| 1 | 0.0000 | 0.13 | 0.9915 | 0.009921 |

The data in Table 1 are as follows:

- Columns 1 and 2 are 13 equally spaced segments based on Eq. (6).
- Columns 3 and 4 are the Bézier interpolation based on the data in Columns 1 and 2. Thus column 3 consists of 100 equally spaced segments running from 0 to 1 (the integral limits) of which only the first of thirteen segments are shown in Table 1.
- The syntax for column 4 is "Bezier(KnownXValues, KnownYValues, XToInterpolate)". This MS Excel function is available from reference by Lépissier [7].
- Column 5 is the Trapezoidal Rule integral of the Bézier interpolation data. The sum of this column (not shown) is the numerical integration using the Bézier interpolation; this amounts to 0.781523, very close to the exact value.

Table 2 below presents some examples from Ullah [3] along with this result. The table shows that Bézier interpolation gives the most accurate results compared to Trapezoidal Rule and Simpson's 1/3 Rule in most cases. The only exception is the last example, which is still very close to the true value.

It is instructive to examine the last example more closely. The curve between 0 and 1 has a concave and convex region. When examined separately (before and after the point of inflection) the Bézier method proves to be more accurate than the other methods, including Simpson's 1/3 Rule. However, Simpson's Rule overestimates the integral on one section of the curve and underestimates it on the other section. Taken together, these partly cancel themselves leading to an apparent lower overall error in this case.

The data in Table 2 indicate that Bézier interpolation is a reliable method for numerical integration. Moreover, as Table 1 demonstrates, the method is easy to implement in a spreadsheet and can handle any dataset; it does not require a fixed number of intervals like Simpson's 1/3 Rule and most other Newton–Cotes formulas.

*Table 2. Comparison of numerical integration methods for n = 13*

| Integral | Exact Value | Trapezoidal | Simpson's 1/3 + Trapezoidal* | Bézier + Trapezoidal** |
|---|---|---|---|---|
| $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ | 0.78539816 | 0.779140612 | 0.780272 | 0.781523 |
| | Error | 0.006258 | 0.005126 | 0.003875 |
| $\int_0^2 (e^{x^2}-1)dx$ | 14.45262777 | 14.8797 | 14.6677 | 14.56846402 |
| | Error | 0.42707 | 0.21507 | 0.11584 |
| | 3.26107456 | 3.259873 | 3.260673 | 3.261264001 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\int_0^2 \sqrt{1+3\sin^2 x}\,dx$ | Error | 0.001202 | 0.000402 | 0.00019 |
| $\int_0^1 (1+e^{-x}\cos(4x))dx$ | 1.00745963 | 1.00862398 | 1.007536 | 1.007292649 |
| | Error | 0.00116 | 0.000076 | 0.000167 |

* Simpson's 1/3 rule for $n$ = 12 plus Trapezoidal Rule for the final segment.

** Bézier interpolation generating a curve with $n$ = *100* followed by Trapezoidal Rule.

## 3.2 Examples with unknown integrals and unequal intervals

### 3.2.1 Example 1

Figure 2 is a chart containing data that does not have a function associated with it, and indeed where the data are not equally distributed. Included in the chart is the Bézier curve fitting the datapoints as well as the trapezoidal rule. Figure 3 shows the same dataset but includes the Simpson's 1/3 Rule alongside the Bézier fit.

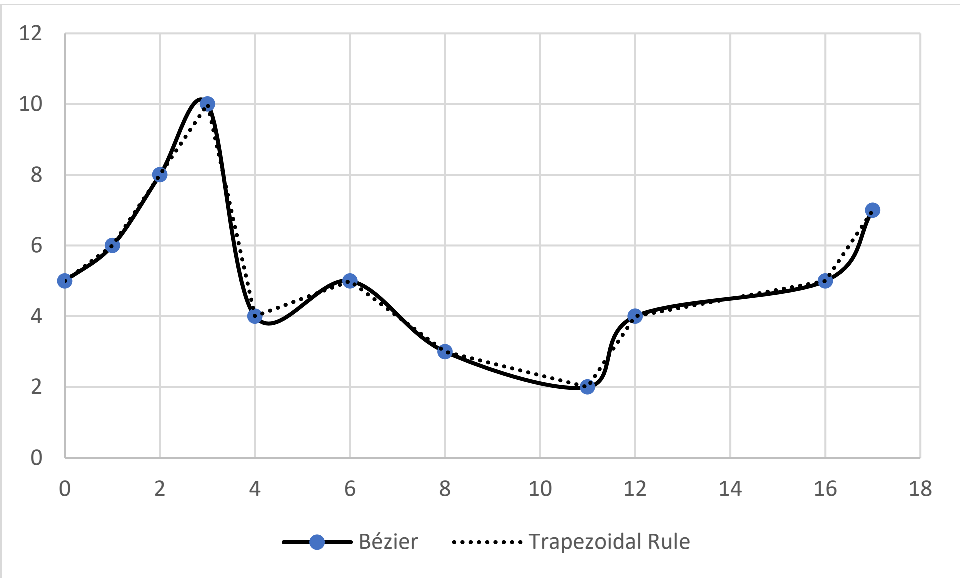



Figure 2. Chart demonstrating a Bézier fit and Trapezoidal rule for datapoints with unequal intervals.

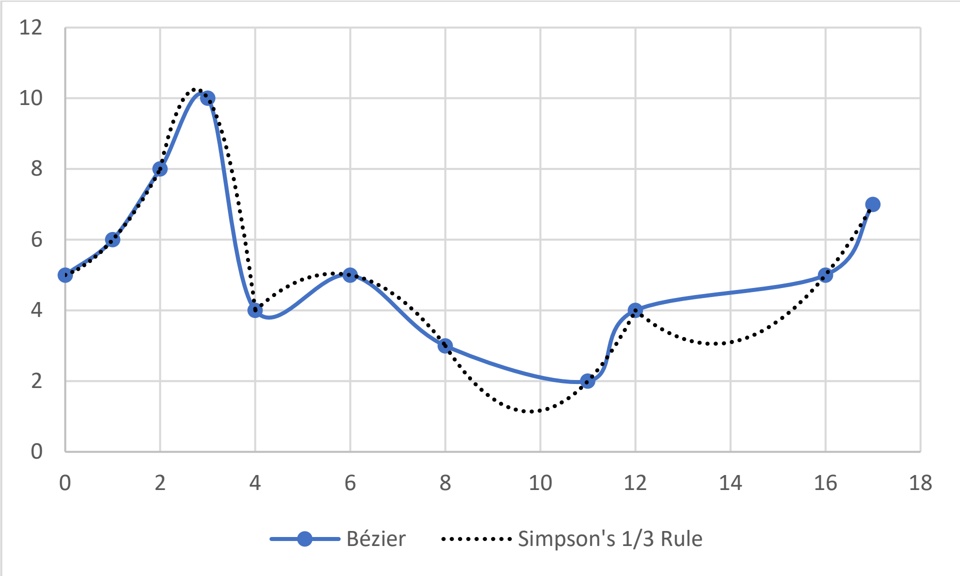



Figure 3. Chart demonstrating a Bézier fit and Simpson's Rule for datapoints with unequal intervals.

The data shown in Figures 2 and 3 are examples of what might be obtained from experiments; they do not follow any mathematical formula, and they have irregular intervals. To calculate the area under such curves, the Trapezoidal Rule or Simpson's Rule for unequal intervals are possible options. However, there is no objective criterion to choose between them, so the researcher has to rely on their own judgement. Looking at Figures 2 and 3, it seems that Bézier interpolation would give a better approximation than the other methods. Moreover, the Bézier method is easy to implement in a spreadsheet, can handle unequal intervals, and does not require an even number of intervals like Simpson's 1/3 Rule.

Figures 2 and 3 have both concave and convex parts, so the errors of the Trapezoidal and Simpson's Rules are partly offset, as seen on the graphs. The values of the integrals obtained by the three methods in this example are given in Table 3.

*Table 3. Comparison of Integrals generated by the three numerical integration methods for $n = 13$*

| Trapezoidal Rule | Simpson's Rule | Bézier Interpolation + Trapezoidal* |
|---|---|---|
| 80.00 | 75.65 | 79.51 |

* Bézier interpolation generating a curve with $n = 170$ followed by Trapezoidal Rule.

### 3.2.2 Example 2

Figure 4 illustrates the results of applying three different numerical integration methods to a set of experimental data from Google Documents [8]. The data points are not evenly distributed along the x-axis, which poses a challenge for estimating the area under the curve. The three methods are the Trapezoidal Rule, Simpson's 1/3 Rule, and the Bézier curve fitting.

The values of the integrals obtained by each method are shown in Table 4. The figure suggests that the Bézier curve provides a smoother and more accurate approximation of the original data than the other two methods.

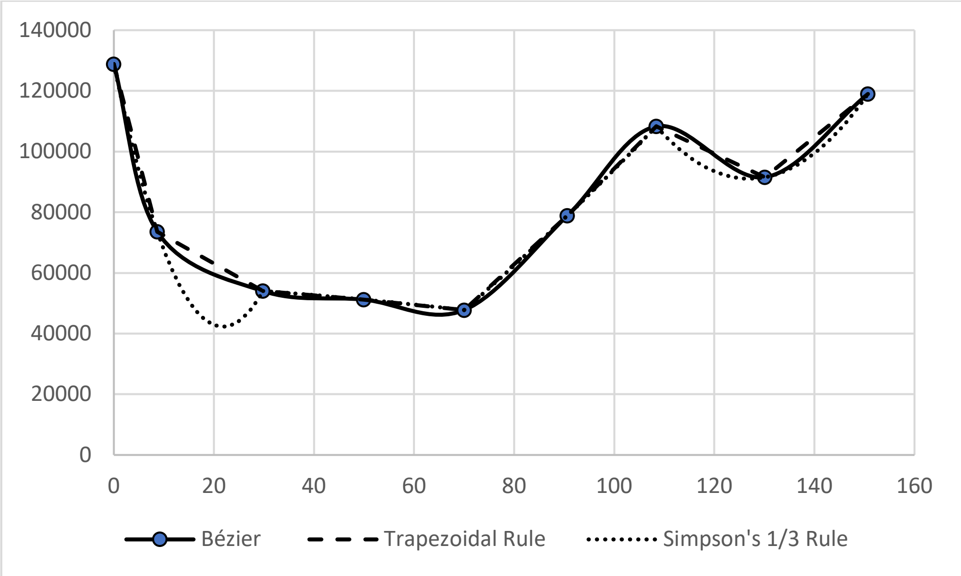



Figure 4. Chart demonstrating a Bézier fit, Simpson's Rule and Trapezoidal Rule for datapoints with unequal intervals.

*Table 4. Comparison of Integrals methods.*

| Trapezoidal Rule | Simpson's Rule | Bézier Interpolation + Trapezoidal* |
|---|---|---|
| 11585086 | 11115587 | 11439809 |

* Bézier interpolation generating a curve with $n = 100$ followed by Trapezoidal Rule.

## 4. Conclusions

This article presents a Bézier method for numerical integration, which is a process of finding the area under a curve when analytical integration is not feasible. Unlike many other numerical methods, such as those based on Newton-Cotes formulas, the Bézier method does not have limitations on the number or spacing of the intervals. It can handle any dataset, even if the intervals are uneven or irregular. The method is also accurate, as it has been shown to have a low error rate compared to other methods. Therefore, the Bézier method could be a useful tool for numerical integration, especially for experimental data that may not follow a regular pattern.

## References

[1] CHAPRA, S.C., CANALE. R.P., 2015. *Numerical methods for engineers. 7th ed.*, pp. 605-615.

[2] BHATTI, A.A, CHANDIO, M.S., MEMON, R.A., SHAIKH, M.M., 2019. *A Modified Algorithm for Reduction of Error in Combined Numerical Integration,* Sindh Univ. Res. Jour. Sci. Ser. 51(04), 745-750, doi.org/10.26692/sujo/2019.04.

[3] ULLAH, M., 2015. *Numerical Integration and a Proposed Rule,* Amer J Engineering Research, 4(9), pp-120-123

[4] CARTWRIGHT, K.V., 2016. S*impson's Rule Integration with MS Excel and Irregularly-spaced Data,* J Math Sci & Math Ed. 11(2), 34.

[5] SINGH, A.K., THORPE, G.R., 2023, *Simpson's 1/3 Rule of Integration for Unequal Divisions of Integration Domain,* https://www.researchgate.net/publication/265499536_Simpson%27s_13-rule_of_integration_for_unequal_divisions_of_integration_domainA.K. SINGH and G. R. THORPE. (Accessed 12-12-2023).

[6] HOSAKA, M., 1992. *Bézier Curves and Control Points. In: Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM. Computer Graphics — Systems and Applications.* Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-76598-8_9

[7] LÉPISSIER A, Coding - Dr. Alice Lépissier (alicelepissier.com), accessed 02/01/2024

[8] https://docs.google.com/spreadsheets/d/1qZZtCFRBzGmO8f6ZP1toFEagdAkTaejuj1CPKYpvX_8/edit#gid=0. (Accessed 01-01-2024).

**About the author:**
*Name:* Stefan T Orszulik
*Email:* s.orszulik@ntlworld.com
*Institution:* Dr Orszulik obtained a BSc and PhD from Royal Holloway College, University of London, followed by postdoctoral research at Strathclyde University, Glasgow.
Current address: 6, The Kestrels, Grove, Wantage, Oxfordshire OX12 0QA, UK.

*Orcid: orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0003-3176-4911*

# Investigación

# Explicit formulas for the Euler's phi function and the counting of primes

# Fórmulas explícitas para la función phi de Euler y el conteo de primos

Carlos Mañas Bastidas

Revista de Investigación

Volumen XV, pp. 013-022, ISSN 2174-0410
Recepción: 02 Mar'24; Aceptación: 22 Oct'24

1 de abril de 2025

**Abstract**

An explicit formula which characterizes the pairs of integers that are relatively prime is obtained. It doesn't require the knowledge of the prime factors of the arguments, what allows to construct other explicit formulas for the Euler's totient function and the Prime counting function.

**Keywords:** Prime counting function, Euler's totient function, Prime number, Relatively prime numbers, Explicit formula.

**Resumen**

Se obtiene aquí una fórmula explícita que caracteriza los pares de enteros que son primos relativos. No requiere del conocimiento de los factores primos de los argumentos, lo que permite construir otras fórmulas explícitas para la función phi de Euler y la contadora de primos.

**Palabras Clave:** Función contadora de primos, Función phi de Euler, Número primo, Primos relativos, Fórmula explícita.

# 1. Introduction

It is deduced in the first place a characteristic function for pairs of relatively prime numbers (that is, without common prime factors) which will be useful also to obtain later exact formulas for the known as Euler's phi function and Prime counting function.

For the first one, also called Totient function, that gives the amount of positive integers which are -relatively- prime with some given integer greater than them it is well known the Euler's formula

$$\varphi(n) \;=\; n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

meaning that (the primes) $p$ must be divisors of $n$, but obtaining these divisors is a different task; it is possible also to write $\varphi$ as the real part of the discrete Fourier transform of the *GCD* -greatest common divisor- evaluated at 1 (as reminded for instance in [6] by Schramm) but that formula requires all the *GCD* of the argument with the previous numbers:

$$\varphi(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} GCD(k,n)\;\cos\left(\frac{2\,\pi\,k}{n}\right)$$

Regarding the asymptotic behaviour of the function there are many articles but it is hard to find exact expressions like these. Here two formulas are deduced with the additional advantage that they don't need the prime factors of the argument nor auxiliary algorithms, so that they allow a direct evaluation by substitution (as long as the roundings to certain decimal order don't affect the correct values of the integer parts involved).

In relation to the Prime counting function, $\pi\,(x)$, which gives the amount of primes not greater than a given number, asymptotic formulas have also been found and some other exact ones with mainly a theoretical interest, given that they don't provide very efficient methods for big numbers due to speed or precision. Involving only elementary functions for a direct calculation, as the ones shown here, there is one quite known by Willans [9], based directly on the characterization of primes by the 'Wilson's theorem' and its inverse, although it includes factorials in the arguments, or gamma function in Connes' version [1], both with the inconvenient of their fast growth. The formulas obtained here provide a different approach with arguments that maybe can help also to clarify relations among primes, modular arithmetic and trigonometric functions.

# 2. Characterizing relative primes

**Definition.** For every integer $i > 1$, the real (*i-th*) function *rp-wave* (of a real variable $x$) is defined in the next way:

$$v_i(x) \;\equiv\; \prod_{k=1}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left| \sin^{-1}\left(\frac{k\,\pi}{i}\right) \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{i}\right) \right| \;=\; \alpha_i \prod_{k=1}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left| \sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{i}\right) \right| \tag{2.1}$$

where $\alpha_i \equiv \left( \prod_{k=1}^{\lfloor i/2 \rfloor} \sin\left(\frac{k\,\pi}{i}\right) \right)^{-1}$, $\lfloor\;\rfloor$ means floor function and the bars, absolute value.

Each factor $\left|\sin\ (k\ \pi\ x\ /\ i)\right|$ will be referred to as the *k component* of the rp-wave.

It will be enough to focus on positive integer -natural- values of $x$. Next, we prove that, at every integer $x = j > 0$, the rp-waves can take only the value 0 or 1 (this, when they are relatively prime numbers). So we have a way to characterize the pairs of integers without prime factors in common: it will suffice to take also $i$ as a variable in (2.1), allowing for $x$ only natural values.

**Proposition 1.** For $1 < i \in \mathbb{Z}$ and $0 < j \in \mathbb{Z}$:

$$v_i(j)\ =\ 0 \quad \Leftrightarrow \quad GCD\ (i\ ,\ j)\ >\ 1 \tag{2.2}$$

*Proof.* Remind that the *LCM* -least common multiple- equals the product of two positive integers if and only if their *GCD* is 1.

From left to right, if the product of sines vanishes in (2.1), it means that at least one of the fractions $k \cdot j\,/\,i$ in the arguments has an integer value, which implies for some $k$ that $i$ is divisor of $k \cdot j$. But then $GCD(i, j) = 1$ would lead to a contradiction because $i$ should in fact be a divisor of $k$, which is not greater than $i\,/\,2$ according with (2.1). Conversely, when $GCD(i, j)$ is greater than 1, then $LCM(i, j)$ is less than $j \cdot i$, what means that the product of $j$ by some integer $k$ not greater than $i\,/\,2$ is a multiple of $i$ and the fraction $k \cdot j\,/\,i$ with such value of $k$ in (2.1) is an integer and the corresponding sine vanishes. □

**Proposition 2.** For $1 < i \in \mathbb{Z}$ and $0 < j \in \mathbb{Z}$:

$$v_i(j)\ =\ 1 \quad \Leftrightarrow \quad GCD\ (i\ ,\ j)\ =\ 1 \tag{2.3}$$

*Proof.* Using proposition 1 it is enough to prove the implication from right to left, but this will require several steps; so we make first some observations relating these functions.

Leaving apart the constant $\alpha_i$ (a normalizing one, as we see later), the *i-th* rp-wave is a product of components which are absolute values of sine functions and, due to their arguments, have periods (for $x$) that are all fractions of $i$. So their product is another periodic non negative function with period $i$, which is precisely the period of the component $k = 1$, and it vanishes -at least- at the extremes of the interval $[0, i]$. It is also true that each component is a symmetric function on that interval with respect to its central abscissa $i\,/2$ (independently of the parities of $i$ and $k$) and in the same way it is also symmetric the rp-wave, with same images at same distances of that center.

Besides, the rp-wave is injective at most on intervals of amplitude $i\,/\,2$ as $[0, i\,/\,2]$, due to the combination of symmetry and periodicity. So, it can take at most $\lfloor i\ /\ 2 \rfloor + 1$ different values for integer abscissas in general because on $[0,\ i\ /\ 2]$ there are only $\lfloor i\ /\ 2 \rfloor + 1$ different integer values for $x$. Therefore, as $\alpha_i$ is the inverse of the product of the components at $x = 1$, it is enough to check that the *i-th* rp-wave has the same value at any other positive integer that, as 1, is relatively prime with $i$ (what means that it is normalized at natural abscissas because at the ones not prime with $i$ it must vanish, according to the first proposition).

For $x = 1$ the arguments of the sines of the components are the successive multiples of the quotient $\pi / i$, until $\lfloor i / 2 \rfloor \cdot \pi / i$, so that the sines take positive increasing values, all different. And that $\pi / i$ is the minimum possible increment for the arguments in general when $x$ is a positive integer, so that at each other natural $x$ every component must vanish or equal one of those same $\lfloor i / 2 \rfloor$ values of the sine function, thanks to the symmetry and periodicity of its absolute value. As a result, in order to check the coincidence of values at all $x$ that are prime with the index $i$ of the considered rp-wave, it will suffice to show that all the components take different values at each of those integers $x$ ($\equiv j$). This is enough because -according to the first proposition- none of the components can vanish there and so each one of them must take one of those distinct $\lfloor i / 2 \rfloor$ positive values, which means that if the components are all different, necessarily each of those values will be a factor in the total product (2.1) of the rp-wave, because it has precisely $\lfloor i / 2 \rfloor$ components, so that it must have the same value as for $x = 1$.

It is worth noting also that none of the components can equal the value 1 for integer $x$ if $i$ is odd because all $k$ are then less than $i / 2$. But 1 is the value of the last component, the one with $k = i / 2$, if the index $i$ of the rp-wave is even for an integer $x = j$ that is prime with $i$ (and necessarily odd). This is obvious not only for $x = 1$, and no other component can equal 1 at these abscissas because $i / 2$ in these cases is also prime with $j$, so that there is no other integer less than $i / 2$ which gives a multiple of $i / 2$ when multiplied by that $j$ (what we need to have a value 1 or -1 of the sine). We will remind this later and focus for the moment on the other components, those with $k < i / 2$ independently of the parity of $i$ (components with sine's arguments not multiples of $\pi / 2$ for any integer $x$ prime with the index $i$, what we assume until the last paragraph).

Now, in relation with the fact that the minimum possible increment for the arguments of the sines for integer $x$ is the quotient $\pi / i$, we will use the known as 'cancellation property' in modular arithmetic: for $i > 1$, prime with $j$, $a \cdot j = b \cdot j$ $(Mod\ (i))$ implies $a = b$ $(Mod\ (i))$, where all numbers are supposed to be integers. Next we distinguish two cases for each natural $x$: components $k$ with sine's arguments which belong to odd angular quadrants (these are the arguments between $0$ and $\pi / 2$ except for maybe a difference of a multiple of $\pi$, that is, with even value of $\lfloor 2 k x / i \rfloor$) and components with sine's arguments in even angular quadrants (so, with odd value of $\lfloor 2 k x / i \rfloor$), being the first quadrant $(0, \pi / 2)$, as usual.

It is clear that two different components with sine's arguments $(k' \pi j / i)$ and $(k'' \pi j / i)$ both in odd quadrants take different values, not only when $j = 1$, because their respective $k$ are distinct numbers which must give distinct results $Mod(i)$ when multiplied by that $j$, according to the cited property under the assumptions, and this implies different arguments also after any difference of a multiple of $\pi$ in one of them. As the absolute value of the sine is strictly increasing with the argument in those quadrants, also the values of the components must differ. In a similar way we can deduce that two distinct components with arguments both in even quadrants have different values (now the absolute value of the sine decreases strictly with the argument).

For the moment we have used the fact that the first positive integers until $\lfloor i / 2 \rfloor$ are part of a 'complete residue system' modulo $i$, but the absolute value of the sine is injective at most in intervals of amplitude $\pi / 2$. In the case of two components with arguments $(k' \pi j / i)$ and

($k'' \pi j / i$) that belong to quadrants with different parities, we will make use of the identity $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, reasoning by reductio ad absurdum. If we suppose that two such components are equal for that $x = j$, relative prime with $i$, then there would be two possibilities for the pair of arguments, because the corresponding sines -before absolute values- would be either equal or opposite numbers. But both of them lead then to a contradiction; being for instance $k' < k''$ ($< i / 2$ as we still exclude the value 1 for the components) without loss of generality, the two possibilities are:

a) If $\sin(k' \pi j / i) \equiv \sin A = \sin(k'' \pi j / i) \equiv \sin B$ then, due to the opposite parities of the quadrants, it is also $\cos B = -\cos A$ and $\sin(A+B) = \sin A \cdot (-\cos A + \cos A) = 0$, so that the argument $A + B = (k' j + k'' j) \cdot \pi / i$ must be an integer multiple of $\pi$.

b) If $\sin(k' \pi j / i) \equiv \sin A = -\sin(k'' \pi j / i) \equiv -\sin B$, then it must be $\cos B = \cos A$ and $\sin(A+B) = \sin A \cdot (\cos A - \cos A) = 0$, reaching the same conclusion.

Both cases are impossible because if $(k'j + k''j) / i$ is integer then it is $(k' + k'') \cdot j = q \cdot i$, with $q$ being also an integer, but $j$ is supposed to be relative prime with $i$, so that all the prime factors of $i$ (including possible repetitions) should be included in the factor ($k' + k''$), which is false because it is smaller than $i$ due to the assumption $k' < k'' < i / 2$.

Now we only have to remind, as stated previously, that for an even $i$ the component $k = i / 2$ is the only one which can equal 1 for integer $x$, only when it is odd. So, including also this component it is clear that at any $x$ that is prime with $i$, where the $\lfloor i / 2 \rfloor$ components can't vanish, their values must be all different and so they form necessarily the same set as for $x = 1$. Hence, according to the previous reasoning, the rp-wave also equals 1 there. □

## 3. Formulas for the Euler's $\varphi$ function

**Lemma.** Let $i, j$ be integers greater than 1. Then: $v_i(j) = v_j(i)$

*Proof.* Straightforward from propositions 1 and 2 and the symmetry of the *GCD* with respect to its arguments. □

Using (2.1) and this symmetry we obtain two distinct expressions for the Totient function, which counts the positive integers that are relatively prime with another greater one.

**Theorem 1.** For $2 < n \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi(n) = 1 + \sum_{i=2}^{n-1} \prod_{k=1}^{\lfloor i / 2 \rfloor} \left| \sin^{-1}\left(\frac{k \pi}{i}\right) \sin\left(\frac{n k \pi}{i}\right) \right| \tag{3.1}$$

*Proof.* Straightforward from propositions 1 and 2 and the definition of the function $\varphi$ (with the sum of the successive rp-waves evaluated at that $n$, adding 1 because they are defined from index 2). □

*Examples.* We can check for instance these first values:

$$\varphi(3) \;=\; 1+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right| = 1+1 = 2$$

$$\varphi(4) \;=\; 1+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)\right|+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right| = 1+0+1 = 2$$

$$\varphi(5) \;=\; 1+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right|+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right|+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{10\pi}{4}\right)\right|$$
$$= 1+1+1+1 = 4$$

$$\varphi(6) \;=\; 1+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{2}\right)\right|+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right|+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{12\pi}{4}\right)\right|$$
$$+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{12\pi}{5}\right)\right| = 1+0+0+0+1 = 2$$

**Theorem 2.** For $2 < n \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi(n) \;=\; 1 \;+\; \sum_{j=2}^{n-1}\prod_{k=1}^{\lfloor n\,/\,2\rfloor}\left|\sin^{-1}\left(\frac{k\;\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{j\;k\;\pi}{n}\right)\right| \tag{3.2}$$

*Proof.* Straightforward from propositions 1 and 2 and the definition of the function $\varphi$ (now with the sum of the n-th rp-wave evaluated at the successive natural numbers, from 2, adding 1, which is the value of any rp-wave at 1). □

*Examples.* Now we will obtain in this way the first two previous values:

$$\varphi(3) \;=\; 1+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| = 1+1 = 2$$

$$\varphi(4) \;=\; 1+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right|+\left|\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right|$$
$$= 1+0+1 = 2$$

It is clear that for an even $n$ we could skip the addends with smaller even indexes, but this would make the expressions less general. As we announced, in principle they have mainly a conceptual interest. A bit more about this is said after the next section.

# 4. Identifying and counting primes

**Proposition 3.** Let $j > 3$ be an integer:

$$\prod_{i=2}^{\lfloor\sqrt{j}\rfloor} v_i(j) \quad \text{and} \quad \prod_{i=2}^{\lfloor\sqrt{j}\rfloor} v_j(i) \quad \text{equal 1 when } j \text{ is prime and 0 when it is composite}$$

*Proof.* From the previous lemma and propositions 1 and 2: in each of this two products the factors are themselves products that equal 0 or 1, where those with value 1 stand for the relative primes ( $i$ ) with the corresponding $j$ . So only with a prime value of $j$ -with no divisors different from 1 and $j$ - can the total product be 1 instead of 0. There is no need to exceed the square root because divisors distinct from that root always form couples with one of the numbers smaller than it. □

So, if $j$ is seen as a variable, both products can be seen as 'indicator functions' for the set of primes above 3. Now, according to the usual notation, the Prime counting function is $\pi(x) \equiv \#\{p \le x\}$ for real abscissas in general, where the numbers $p$ are primes and # is cardinality.

**Proposition 4.** For $10 < n \in \mathbb{Z}$ :

$$\pi(n) = 4 + \sum_{j=11}^{n} \prod_{i=2}^{\lfloor \sqrt{j} \rfloor} v_i(j) \tag{4.1}$$

$$\pi(n) = 4 + \sum_{j=11}^{n} \prod_{i=2}^{\lfloor \sqrt{j} \rfloor} v_j(i) \tag{4.2}$$

*Proof.* It is obvious from the previous proposition 3, given that there are only four primes before 11. □

**Theorem 3.** Let $O$ be the set of odd integers and $10 < n \in O$ :

$$\pi(n) = 4 + \sum_{\substack{j=11 \\ j\in O}}^{n} \prod_{i \in O \cap [3,\sqrt{j}]} \prod_{k=1}^{\lfloor i/2 \rfloor} \left| \sin^{-1}\left(\frac{k\,\pi}{i}\right) \sin\left(\frac{k\,\pi\, j}{i}\right) \right| \tag{4.3}$$

$$\pi(n) = 4 + \sum_{\substack{j=11 \\ j\in O}}^{n} \prod_{i \in O \cap [3,\sqrt{j}]} \prod_{k=1}^{\lfloor j/2 \rfloor} \left| \sin^{-1}\left(\frac{k\,\pi}{j}\right) \sin\left(\frac{k\,\pi\, i}{j}\right) \right| \tag{4.4}$$

*Proof.* It is clear using proposition 3 if we remind that only odd integers can be prime above 2 and that it is enough to check each *GCD* with smaller odd integers, from 3 until the square root, to confirm if a new odd number is prime. We have substituted the rp-waves with (2.1). □

# 5. Basic practical considerations

As the whole idea is clearly based on the arguments of the sines, it is also possible to design a short equivalent algorithm to evaluate the Phi function that avoids the calculation of sines and the products. For instance, with (3.1) we can evaluate directly and successively the quotients $n \cdot k / i$ in the arguments, for each $i$ from 2 until $n-1$ and each $k$ from $\lfloor i/2 \rfloor$ until 1, so as to check if they are integer using for instance the floor function -as long as the computer's roundings are reliable for numbers of the required sizes-. So not all quotients need to be evaluated because once one of them is integer it is possible to skip the next ones (with lower $k$) for the same $i$ and test the ones for the next $i$, without adding 1 in that case (of an integer quotient) to a total sum that must begin from 1 -which is relatively prime with every other $n$- before evaluating quotients for $i = 2$.

This method can be optimized or combined with other more or less elementary technics to be compared with others, beginning with the direct testing of common divisors with smaller integers, although it is in principle faster to combine the Euler's formula (in the introduction) with the previous factorization of the number to obtain its prime divisors, because for any natural $n$ we can check if it is prime doing not more divisions than its square root. Anyway the basic algorithm described is of course useful for not very big numbers.

Simple adaptations for the Prime counting function can also be done from that algorithm and section 4: without refinements the same speed inconvenient arises for big numbers, but it is not quite different from the problems related with other elementary formulas also discussed in the introduction, like Willans'.

Nevertheless, algorithms in general and of course the more sophisticated ones available today don't allow a short and direct display of an exact way to count primes or to evaluate the Totient function as the previous formulas do, as claimed previously. In this sense, maybe the more compact expressions that would arise by simply replacing (2.1) in (4.1) are also of some illustrative or didactical interest.

## Acknowledgments

I wish to thank Professors Fernando Chamizo and Raúl Sánchez for the reading of a first version and some formal suggestions.

## References

[1] CONNES A., *Around Wilson's theorem,* Journal of Number Theory 194, 1 – 7, 2019.

[2] KLUYVER J. C., *Some formulae concerning the integers less than n and prime to n, KNAW,* Proceedings 9, 408 – 414, 1906.

[3] MARTÍN RUIZ S., SONDOW J., *Formulas for $\pi$ (x) and the nth Prime,* International Journal of Mathematics and Computer Science 9, 95 – 98, 2014.

[4] LÓPEZ F., TENA J., *Introducción a la teoría de números primos,* Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Valladolid, 13 – 42, 1990.

[5] ROSSER J. B., SCHOENFELD L., *Approximate formulas for some functions of prime numbers,* Illinois J. Math. 6, 64 – 94, 1962.

[6] SCHRAMM W., *The Fourier Transform of Functions of the Greater Common Divisor,* Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 8, A50, 2008.

[7] TENENBAUM G., MENDÈS F., *The Prime Numbers and Their Distribution,* Student Mathematical Library 6, 5 – 8, 2000.

[8] VASSILEV-MISSANA M., *Exact formulae for the prime counting function,* Notes on Number

Theory and Discrete Mathematics 19, 77 – 85, 2013.

[9] WILLANS C. P., *On Formulae for the Nth Prime Number,* The Mathematical Gazette 48, 413 – 415, 1964.

**Sobre el/los autor/es:**

*Nombre:* Carlos Mañas Bastidas
*Correo Electrónico:* carlosmb79@gmail.com
*Institución:* Junta de Andalucía, España.

# Experiencias Docentes

# RStudio® Cloud como herramienta didáctica para estadística en educación secundaria

# RStudio® Cloud as didactic tool for teaching statistics in high school

Francisco López-Martínez

Antonio Ramón López-Martínez

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XV, pp. 023−040, ISSN 2174-0410

Recepción: 23 Jun'24; Aceptación: 03 Jul'24

1 de abril de 2025

**Resumen**

Durante las últimas décadas, las herramientas digitales han adquirido un protagonismo fundamental dentro del ámbito educativo. En consecuencia, este trabajo valora la incorporación del programa RStudio® Cloud como una herramienta didáctica adecuada para la docencia de la materia de matemáticas, concretamente, para el bloque de estadística. Como resultado se obtuvo que el programa es una plataforma de aprendizaje factible de la etapa de educación secundaria, pues permite integrar los distintos perfiles competenciales y curriculares. Además, junto con el interés y valoración positiva del alumnado, cabe destacar la capacidad del mismo para integrar el programa y realizar las tareas propuestas.

**Palabras Clave:** Educación Estadística; Educación Secundaria Obligatoria; Herramientas Digitales; RStudio® Cloud; Software Libre

**Abstract**

For the last decades, digital tools have acquired a fundamental role in education. Consequently, this work evaluates the incorporation of the RStudio® Cloud program as a suitable teaching tool for the teaching of mathematics, specifically, for the statistics block. As a result, it was found that the program is a feasible learning platform for the secondary education stage, since it allows the integration of the different competency and curricular profiles. In addition, together with the interest and positive assessment of the students, it is worth highlighting their ability to integrate the program and perform the proposed tasks.

**Keywords:** Digital Tools; High School; Open-source Software; RStudio® Cloud; Statistic Education

# 1. Introducción

Al contrario que en el sistema educativo anglosajón (Holmes, 2000), la estadística constituye una disciplina científica de relativa reciente incorporación en la mayoría de los currículos europeos de enseñanza primaria, secundaria e, incluso, universitaria (Batanero, 2001; Moreira, 2011). Dentro del marco español, desde la década de los noventa (Batanero et al., 2011; López Centella, 2019) y con inherentes diferencias de diseño (Batanero et al., 2011; Burrill y Biehler, 2011; de Puelles Benítez, 2016), esta disciplina aparece incluida en los currículos no universitarios como parte complementaria de la materia de matemáticas. En este sentido, la Ley Orgánica de Educación[1] (LOE) promovió el mayor impulso a la cultura estadística (Gea et al., 2016), pues esta normativa, de manera opuesta a sus predecesoras, integró la probabilidad en todas las etapas e itinerarios académicos (Gea et al., 2016; López Centella, 2019). Afortunadamente, esta tendencia fue consolidada y ampliada con la recientemente derogada Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa[2] (LOMCE), legislación que introdujo un bloque específico dedicado a estadística y probabilidad (López Centella, 2019) cuyo desarrollo está íntimamente relacionado con el novedoso enfoque competencial de la misma (Coll Salvador y Martín Ortega, 2021; Ezquerro, 2016).

Sin embargo, pese a los múltiples beneficios (Holmes, 1980; López Centella, 2019; Moreira, 2011) y finalidades (Batanero, 2001; Galindo Alba, 2017; Holmes, 2000) relacionadas con el estudio de la estadística a lo largo de las distintas etapas no universitarias, así como los notorios intereses políticos que rodean la derogación, modificación o aprobación de cada reforma educativa (de Puelles Benítez, 2016), el auténtico cambio de paradigma introducido por la LOE y heredado por la LOMCE estuvo relacionado, fundamentalmente, con dos aspectos básicos. En primer lugar, la relevancia concedida a la estadística por el Informe PISA 2003 (Ministerio de Educación y Cultura, 2003), donde literalmente se indica que el pensamiento estadístico "debería ser parte del equipamiento mental de todo ciudadano inteligente". Posteriormente, los deficientes resultados obtenidos en el Informe PISA 2009 (Ministerio de Educación, 2010), cuyos datos pusieron en evidencia el insuficiente nivel del alumnado español, muy alejado del promedio de los países de la OCDE para los niveles más altos de comprensión lectora, competencia matemática y científica (Cadenas Sánchez y Huertas-Delgado, 2013). Lamentablemente, los resultados expresados en el último Informe Español elaborado por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP, 2019) revelan que los efectos de la LOMCE tampoco han sido los deseados, pues las puntuaciones medias obtenidas por el alumnado español para matemáticas y ciencias son inferiores tanto a la media de los países de la OCDE como de la Unión Europea.

Por otro lado, además de la incuestionable relevancia que posee la cultura estadística para el alumnado (Arteaga et al., 2016; Batanero, 2001; Burrill y Biehler, 2011; Holmes, 1980; Galindo Alba, 2016; 2017), la normativa encargada de desarrollar académicamente la LOMCE, el Real Decreto 1105/2014[3], reconoce que, dentro del currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato debe potenciarse el desarrollo de las competencias comunicación lingüística, matemática y básica en ciencia y tecnología (art. 2.2). Es decir, la

[1] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

[2] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

[3] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

propia legislación refuerza, directamente, la comprensión y razonamiento que debe alcanzar el alumnado a nivel estadístico, pues múltiples son las fuentes de información que precisan la lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos (Batanero et al., 2011; Holmes, 1980; Galindo Alba, 2017; López Centella, 2019; Moreira, 2011). Sin embargo, esta prioridad competencial se aleja ligeramente de las orientaciones establecidas por la Unión Europea, donde según su Marco de Referencia (Unión Europea, 2007) la competencia digital debería adquirir idéntico nivel de referencia que las anteriores, pues representa una capacidad clave para el uso de las tecnologías de la sociedad de la información para el trabajo, el ocio y la comunicación (Unión Europea, 2007).

Por consiguiente, es indudable que la competencia digital sustenta el uso e inclusión de una herramienta de relevancia histórica (Batanero, 2001; Vidal Puga, 2006), fundamental (Barberá Cebolla y Fuentes Agustí, 2012; Galindo Alba, 2017; Jiménez Palmero et al., 2016) y multidimensional (Colás Bravo et al., 2018; Daza Pérez et al., 2009; Estévez Carmona, 2012) durante el proceso de enseñanza-aprendizaje: las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). No obstante, pese a que sus antecedentes se remontan a la segunda década del s. XX (Vidal Puga, 2006), su uso constructivo sobre el conocimiento se ha impuesto en las últimas tres décadas (Adell Segura, 1997; Estévez Carmona, 2012; Villarraga et al., 2012) debido a sus aplicaciones (Daza Pérez et al., 2009) y ventajas sobre los tradicionales sistemas docentes (Barberá Cebolla y Fuentes Agustí, 2012; Colás Bravo et al., 2018; Domingo Coscollola y Marqués Graells, 2011; Jiménez Palmero et al., 2016). De hecho, las TIC han sido utilizadas o consideradas para multitud de materias en ESO como biología (Herráez, 2011; Torres Payá, 2011), química (Daza Pérez et al., 2009; Martínez-Arguello et al., 2018), lengua (Estévez Carmona, 2012; Ezquerro, 2016), inglés (Ramírez Orellana et al., 2016) o español para extranjeros (Jiménez Palmero et al., 2016). Sin embargo, aunque este tipo de herramientas han sido desplazadas a un segundo plano (Ramírez Orellana et al., 2016), especialmente en disciplinas no científicas (Barberá Cebolla y Fuentes Agustí, 2012; Estévez Carmona, 2012), a finales del siglo pasado Adell Segura (1997) destacó la importancia de las TIC en los futuros escenarios educativos ya que, según el mismo, cómo son tratadas en el aula representa un fiel reflejo del grado de innovación y calidad alcanzado por el modelo didáctico, modelo que, incluso, ha llegado a ser categorizado (Coll et al., 2008).

En cuanto a la materia de matemáticas, multitud son los trabajos publicados en la literatura científica relativos tanto a la inclusión de las TIC para su docencia en general (p. ej., Cruz Pichardo y Puentes Puente, 2012; Martín Vaquero et al., 2009; Villarraga et al., 2012) en diversos ámbitos en particular, tales como, geometría (Hernández Gómez et al., 2016), álgebra (Calles Burgos, 2015), tasa de variación (Ticse et al., 2023) o trigonometría (García López y Romero Albadalejo, 2009). A su vez, dentro de esta materia, en cuanto a la parte del currículo destinada a la estadística se refiere, aunque constituye una disciplina escasamente valorada por el profesorado (Arteaga et al., 2016; Betancourt et al., 2009; Del Pino Ruiz, 2013; Galindo Alba, 2017), pueden encontrarse diversos trabajos relacionadas con las TIC y su aplicabilidad mediante bancos de recursos (Batanero, 2001; Núñez Rojo, 2009), para calcular y representar variables (Del Pino Ruiz, 2013; Mora, 2014; Segovia y Khaled, 2007), mejorar la comprensión de contenidos (Belfiori, 2014; García López y Romero Albadalejo, 2009; Ticse et al., 2023) o desarrollar la competencia matemática (Cruz Pichardo y Puentes Puente, 2012). En consecuencia, es en este último aspecto donde se centra el presente trabajo, pues pretende reflejar los beneficios didácticos, versatilidad, potencialidad y opinión del alumnado tras introducir durante la etapa de ESO un programa estadístico, concretamente RStudio® Cloud.

## 1.1 ¿Qué es RStudio® Cloud y por qué debería utilizarse en secundaria?

Desde hace varias décadas, diversos han sido los programas utilizados como herramientas didácticas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística en las distintas etapas de educación no universitaria (Batanero et al., 2011; Núñez Rojo, 2009; Villarraga et al., 2012). En este sentido, tomando como referencia el trabajo realizado por Batanero (2001), estos programas pueden agruparse en dos grandes bloques: i) los destinados específicamente al análisis estadístico, donde destacan SPSS (Betancourt et al., 2009; Segovia y Khaled, 2007) y R (Alemany Palomo, 2015; Galindo Alba, 2016; 2017) y ii) aquellos de aspecto más genérico, cuya finalidad no versa, exclusivamente, sobre esta disciplina, tales como GeoGebra (Álvarez Luis y Solís Avelino, 2019; Del Pino Ruiz, 2013; Hernández Gómez et al., 2016; Ticse et al., 2023), OpenOffice Calc (García López y Romero Albadalejo, 2009), Excel® (López Noriega et al., 2006) o PowerPoint® (Mora, 2014).

Dentro del primer bloque, es decir, programas estadísticos per se, se encuadra RStudio® Cloud, un entorno de desarrollo integrado en la nube y que utiliza R como lenguaje de programación (RStudio Team, 2021). Esta plataforma web (Figura 1) se lanzó en el año 2019 para obtener una herramienta que permita hacer, compartir, enseñar y aprender ciencia de datos en línea de una forma más ligera y sin necesidad de instalación (solo necesita un registro), pero manteniendo todos los procedimientos, técnicas y opciones gráficas de su predecesor, RStudio® (RStudio Team, 2021).

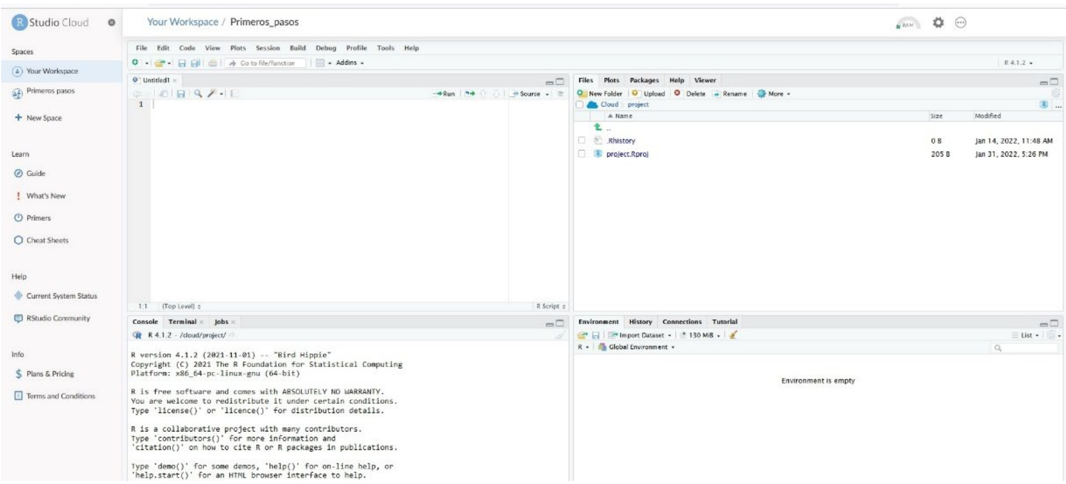



*Figura 1. Interfaz de RStudio® Cloud.*

Debido a su relativa complejidad inicial, pues dispone de un lenguaje de programación propio (lenguaje S) ejecutado mediante línea de comandos (Galindo Alba, 2016; 2017), RStudio® no ha sido considerado por parte de algunos autores para la docencia de la estadística (Del Pino Ruiz, 2013; López Noriega et al., 2006; Mora, 2014). Sin embargo, RStudio® presenta una amplia batería de ventajas que lo convierten en una alternativa idónea pues, según Maurandi López et al. (2013) supera, con creces, los beneficios aportados por otros programas debido a que:

- Es libre, está distribuido bajo licencia pública general, pudiendo descargarse gratuitamente desde la página web del proyecto[4].
- Es multiplataforma, existen versiones para los principales sistemas operativos (Windows, Linux y Mac).
- Permite analizar y leer cualquier formato de datos (.csv, .xls, .xlsx, .sas, …).
- Es muy potente, responde, prácticamente, cualquier necesidad del usuario.
- Posee una capacidad gráfica muy superior al resto de paquetes estadísticos.
- La versión base tiene instaladas multitud de técnicas estadísticas.
- Sus opciones pueden ampliarse libremente.

Por su lado, además de las ventajas indicadas anteriormente, RStudio® Cloud también posee otra serie de facetas resaltables como:

- Es una versión más ligera que permite acceder[5] online y desde el ámbito doméstico sin necesidad de configurar ni instalar nada.
- Puede utilizarse en cualquier navegador.
- La curva de aprendizaje es acusada en los primeros estadios, pero relativamente sencilla en comparación a otros lenguajes.
- La plataforma permite autocompletar el código utilizado.
- Existen multitud de paquetes, tutoriales y datos en abierto para ayudar o profundizar en su manejo.
- Está respaldado por una importante comunidad científica.
- Permite realizar investigaciones reproducibles, pues el código puede compartirse y/o adaptarse.
- Proporciona los primeros esbozos para un lenguaje de programación, introduciendo al alumnado ante una nueva faceta de alta demanda laboral pero escaso desarrollo curricular.

En resumen y, atendiendo a todo lo expuesto anteriormente, la plataforma RStudio® Cloud se postula como una herramienta didáctica idónea durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística que, según Galindo Alba (2017), puede llegar a considerarse fundamental.

## 1.2 Objetivos

Por consiguiente, una vez comprobada la importancia de la estadística dentro de la etapa de educación secundaria, su relación con las distintas competencias curricularmente establecidas, así como los multifacéticos beneficios que rodean la plataforma RStudio® Cloud, para esta investigación se han planteado los siguientes objetivos:

- Comprobar si la plataforma RStudio® Cloud constituye una alternativa didáctica válida para el proceso de enseñanza-aprendizaje de estadística en ESO.

[4] https://www.rstudio.com/
[5] https://rstudio.cloud/

- Analizar la versatilidad de RStudio® Cloud para responder a los diferentes requisitos curriculares y diversidad del alumnado.
- Evaluar la opinión e interés del alumnado en la plataforma para la adquisición de contenidos, así como su posible implementación en la materia de matemáticas y en otras de la etapa.

# 2. Metodología

Tomando como premisa los objetivos ya indicados, a lo largo de los siguientes apartados se recogen las principales características y fases que componen la investigación.

## 2.1 Población y muestra

En un primer momento, la investigación fue planteada para las distintas asignaturas que componen la materia de matemáticas durante la etapa de ESO en un centro de la Región de Murcia (N = 110). Sin embargo, debido a problemas relacionados tanto con la compatibilidad de horarios como formativos del equipo docente, solo participaron estudiantes de primer curso (n = 27). El grupo (Tabla 1) estaba compuesto por 15 mujeres (55,55%) y 12 hombres (44,44%) con edades comprendidas entre los 11 y 13 años, se trataba de un grupo bastante estable y homogéneo cuya calificación promedio, según secretaría del centro, ronda el 7,5. Además, entre el alumnado participante, aparecía un estudiante repetidor (3,7%) y cuatro con necesidades específicas de apoyo educativo (14,81%). Cabe indicar que durante el desarrollo de la investigación se consideró a todo el estudiantado, pero realizando las respectivas adaptaciones para responder a la diversidad del aula.

*Tabla 1. Número y características del alumnado participante.*

| Total centro | Participantes | Ordinario | Apoyo educativo |
|---|---|---|---|
| 110 | 27 | 23 | 4 |

## 2.2 Desarrollo de la investigación

Toda la investigación se realizó en el aula de informática durante la sesión dedicada a la asignatura de matemáticas según el calendario y horario académico. Para su puesta en práctica se utilizaron los ordenadores de sobremesa disponibles en el centro que, debido a su cantidad, permitieron a cada participante disponer de acceso individual a un equipo y a su propia cuenta de RStudio® Cloud, tal y como recomienda Galindo Alba (2017). Respecto a su secuenciación (Tabla 2), el estudio ocupó un total de seis sesiones didácticas de 55 minutos cada una (tiempo de una clase ordinaria) que fueron programadas para coincidir temporalmente con el bloque de estadística, es decir, en la tercera evaluación.

*Tabla 2. Secuenciación y contenido de las sesiones.*

| Sesión | Denominación | Contenidos | Recursos |
|---|---|---|---|
| 1 | Introducción a RStudio® Cloud | Registrarse en RStudio® Cloud<br>¿Qué es RStudio® Cloud y qué puede hacer? | Presentación en clase y documentación digital |

| Sesión | Denominación | Contenidos | Recursos |
|---|---|---|---|
| | | Asignar variables a caracteres<br>Operadores lógicos<br>Vectores<br>Scripts<br>Ejercicios prácticos | enviada al alumnado por e-mail |
| 2 | Aprender a explotar los datos | Introducir datos manualmente<br>Cargar un fichero<br>Obtener una tabla<br>Extraer datos de una columna<br>Ejercicios prácticos | |
| 3 | Algunos cálculos básicos | Valor máximo<br>Valor mínimo<br>Cuartiles<br>Número de datos<br>Suma de datos<br>Ejercicios prácticos | |
| 4 | Funciones estadísticas elementales | Medidas de centralización<br>Medidas de dispersión<br>Ejercicios prácticos | |
| 5 | Representando los datos | Gráficos bidimensionales (puntos, líneas y barras)<br>Gráfico de sectores<br>Histogramas<br>Ejercicios prácticos | |
| 6 | Práctica final | Cargar una tabla<br>Medidas de dispersión y centralización<br>Representar los datos<br>Cuestionario sobre el proyecto | Cuestionario online y remisión del código |

Por otro lado, cada sesión fue debidamente planificada por el profesor responsable de la actividad, quien elaboró una serie de materiales didáctico-prácticos (Figura 2) progresivamente enriquecidos en base a las competencias curriculares, objetivos curriculares de la etapa, contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la asignatura (Tabla 3), así como algunos de los aspectos estadísticos considerados fundamentales (Arteaga et al., 2016; Burrill y Biehler, 2011; Galindo Alba, 2017; Gea et al., 2016).

# Sesión 4: Funciones estadísticas elementales



## Introducir los datos

### Cargar una tabla

Salvo que introduzcamos los datos de manera manual (recuerda los vectores), el primer paso que tenemos hacer es cargar nuestros datos, para ello el fichero tiene que estar en extensión `.csv`, que la hacemos desde Excel.

Para que RStudio lea la tabla de datos usaremos la función `read.table` con los siguientes atributos:

```
datos <- read.table ("datos.csv", # Nombre del fichero que buscamos
                     head = TRUE, # Si la tabla tiene encabezado, sino ponemos "FALSE"
                     sep = ";", # Cómo están separados los datos, por defecto será ;
                     dec = ".") # Cómo están separados los decimales, si fuera una , se sustituye
```

A continuación comprobamos si la tabla se ha cargado bien.

```
datos
```

```
##     Alumno Nota1 Nota2 Nota3
## 1  Antonio     5     4     9
## 2     Juan     6     9     5
## 3     Pepe     9     3     1
## 4    Maria     4     2     3
## 5 Cristina     2     5     6
## 6     Paco     6     4     4
## 7    Elena     8     8     8
## 8  Agustin     6     8     7
```

## Medidas de centralización

### Media

La función `mean()` nos devuelve la media de todos nuestros datos.

Figura 2. *Ejemplo de los materiales digitales proporcionado al alumnado durante una de las sesiones.*

*Tabla 2. Elementos curriculares considerados para el diseño de la investigación.*

| Competencias |
| --- |
| b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.<br>c) Competencia digital.<br>d) Aprender a aprender.<br>f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. |
| **Objetivos** |
| e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.<br>f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.<br>g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades. |
| **Contenidos** |

| |
|---|
| Población e individuo. Muestra.<br>Variables estadísticas. Variables cualitativas y cuantitativas.<br>Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.<br>Medidas de tendencia central<br>Medidas de dispersión |
| Criterios |
| 1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.<br>2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada. |
| Estándares de aprendizaje |
| 1.2. Reconoce y propone ejemplos de distintos tipos de variables estadísticas, tanto cualitativas como cuantitativas.<br>1.4. Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo mediano), la moda (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas.<br>2.1. Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficos estadísticos y calcular las medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas.<br>2.2. Utiliza las tecnologías de la información y de la comunicación para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada. |

En último lugar, debido a la dimensión más académica de la etapa (Ramírez Orellana et al., 2016), en las cinco primeras sesiones se siguió un modelo didáctico alternativo (García Pérez, 2000) y metodológicamente activo (Galindo Alba, 2017) compuesto por cuatro fases: i) repaso de contenidos, ii) explicación teórico-práctica, iii) realización de ejercicios reales de investigación y iv) corrección en el aula. Sin embargo, en la última sesión, el alumnado debía realizar y entregar individualmente un fichero donde respondía a distintas tareas planteadas en base a los aspectos teórico-prácticos curriculares y hábitos mentales estadísticos (Burrill y Biehler, 2011). A este respecto, tanto los ejercicios prácticos como la tarea final fueron adaptados en función de las necesidades docentes del alumnado, siguiendo para ello las recomendaciones realizadas por el departamento de orientación del centro y consistentes en aumentar el tiempo de realización y anticipar las tareas a realizar. Posteriormente, siguiendo lo establecido por el Real Decreto 1105/2014, la tarea final fue corregida por el profesor responsable del estudio y calificada entre 1-10 puntos, siendo necesaria una puntuación mínima de 5 para superarla.

## 2.3 Valoración del alumnado

En la última sesión y tras la entrega de la práctica final, cada participante debía rellenar una encuesta cerrada realizada ad hoc y con 10 ítems medidos en una escala dicotómica de dos valores: "Sí" y "No" (Tabla 4). En la misma se incluyeron cuestiones relacionadas con aspectos didácticos, teóricos y personales de la investigación realizada para, tras el posterior análisis de la misma, responder al tercer objetivo planteado.

*Tabla 4. Ítems de la encuesta planteada al alumnado.*

| Cuestión |
| --- |
| 1.- ¿Te ha parecido interesante RStudio® Cloud? |
| 2.- ¿Ha sido complicado utilizar RStudio® Cloud? |
| 3.- ¿Consideras positivo el uso de RStudio® Cloud en matemáticas? |
| 4.- ¿Te ha permitido afianzar conocimientos de estadística? |
| 5.- ¿Usarías RStudio® Cloud en otra parte del temario de matemáticas? |
| 6.- ¿Lo recomendarías a otros compañeros/as? |
| 7.- ¿El sistema de autoaprendizaje ha sido beneficioso? |
| 8.- ¿Prefieres este sistema al tradicional? |
| 9.- ¿Crees recomendable introducir programas en otras asignaturas? |
| 10.- ¿Te gustaría seguir aprendiendo RStudio® Cloud? |

# 3. Resultados y discusión

A continuación, se detallan y abordan los distintos resultados obtenidos en función de los objetivos planteados. En este sentido, mientras que en el primer punto se valoran el trabajo y nivel alcanzado por el alumnado para conocer la adecuada implementación de la plataforma (objetivos 1 y 2), en el segundo se muestran las respuestas del mismo a los distintos ítems de la encuesta (objetivo 3).

## 3.1 La posibilidad de utilizar RStudio® Cloud en ESO y su versatilidad didáctica

Debido a las distintas limitaciones de la investigación, los resultados demuestran el nivel alcanzado por la cohorte del primer curso de ESO. Sin embargo, este escenario didáctico planteado debe considerarse bastante satisfactorio, pues previamente nunca había sido contemplado en las escasas investigaciones que han utilizado (Alemany Palomo, 2015) o, simplemente considerado, tanto RStudio® Cloud como alguna de sus variantes (Galindo Alba, 2016; 2017) en niveles no universitarios. Por lo tanto, si el alumnado de este curso ha sido capaz de solventar satisfactoriamente las exigencias académicas establecidas en la práctica final, se puede asumir que, en etapas superiores, también podrá hacerlo debido, entre otros elementos, al mayor nivel cognitivo e intelectual alcanzado, motivos por el que la mayoría de autores desarrollaron o plantearon sus investigaciones para ciclos o niveles educativos superiores (p. ej., Alemany Palomo, 2015; Álvarez Luis y Solís Avelino, 2019; Betancourt et al., 2009; Galindo Alba, 2017; García López y Romero Albadalejo, 2009; Segovia y Khaled, 2007; Ticse et al., 2023).

Tras corregir los ficheros remitidos por el alumnado donde aparecían sus respuestas a las diferentes tareas planteadas en la práctica final, se comprobó que solo dos alumnos del grupo ordinario y uno de apoyo educativo (11,11%) no superaron la práctica al mostrar total desinterés y no entregar el fichero. Sin embargo, el resto de participantes (88,89%) sí obtuvieron una calificación satisfactoria, es decir, igual o superior a 5 puntos, alcanzado el grupo una nota media de 6,4 y una desviación estándar de 1,7 (Figura 3). Cabe indicar que dichos valores incluyen las puntuaciones conseguidas por el resto del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo, para quienes solo fue necesario incrementar el tiempo de realización de la práctica (entre 5 y 15 minutos), proporcionar un archivo con las variables para introducirlas en la plataforma de modo manual y reducir el volumen de las mismas. En general, estos resultados están en consonancia con lo obtenido en otros trabajos de índole similar como los de Alemany Palomo (2015), Álvarez Luis y Solís Avelino (2019), Domingo Coscollola y Marqués Graells (2011), García López y Romero Albadalejo (2009) o Pichardo y Puentes Puente (2012), entre otros, donde se aprecia un alto índice de aprobados tras incluir las TIC durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística.

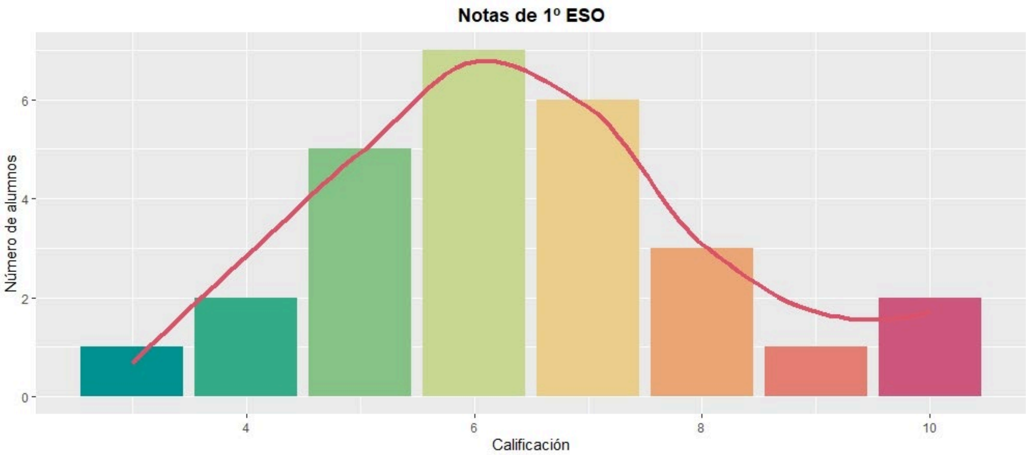



*Figura 3. Distribución de las calificaciones del alumnado en la prueba final.*

Por otro lado, en cuanto a la calidad de los códigos entregados, se pudo comprobar cómo, prácticamente la totalidad del alumnado, fue capaz de comprender el lenguaje de la plataforma y su dinámica, así como sus principales funciones (Tabla 5). De hecho, algunas de las prácticas entregadas reflejaban un código perfectamente desarrollado y estructurado (Figura 4). Paradójicamente, los resultados de la práctica final contradicen lo expuesto por Del Pino Ruiz (2013), pues se ha demostrado que RStudio® Cloud no es una herramienta que pueda ser utilizada, exclusivamente, durante los últimos niveles de bachillerato o enseñanzas universitarias, sino que con las respectivas adaptaciones didácticas y curriculares es perfectamente accesible tanto para el alumnado ordinario de secundaria como aquel con necesidades específicas de apoyo educativo (Daza Pérez et al., 2009; Domingo Coscollola y Marqués Graells, 2011).

*Tabla 5: Porcentaje del alumnado que superó cada tarea incluida en la práctica final. * Las diferencias numéricas entre la segunda y la tercera tarea se deben a que no todo el alumnado accedió a los datos de la misma manera, pues mientras que el grupo ordinario debía cargar una tabla, los de apoyo tuvieron que introducir manualmente los datos.*

| Tarea | Nº de alumnado | %* |
|---|---|---|
| Cargar datos | 27 | 100 |
| Obtener una variable de la tabla | 23 | 85 |

*Tabla 5: Porcentaje del alumnado que superó cada tarea incluida en la práctica final. * Las diferencias numéricas entre la segunda y la tercera tarea se deben a que no todo el alumnado accedió a los datos de la misma manera, pues mientras que el grupo ordinario debía cargar una tabla, los de apoyo tuvieron que introducir manualmente los datos.*

| Tarea | Nº de alumnado | %* |
|---|---|---|
| Calcular estadísticas de una variable | 24 | 89 |
| Representar gráficamente la variable | 19 | 78 |


*Figura 4. Ejemplo del código elaborado por una alumna*

## 3.2 Valoración del alumnado de RStudio® Cloud

Finalmente, tras la realización y entrega de la práctica final, la totalidad del alumnado participante en el estudio rellenó una encuesta cuyos resultados aparecen reflejados en la Figura 5.

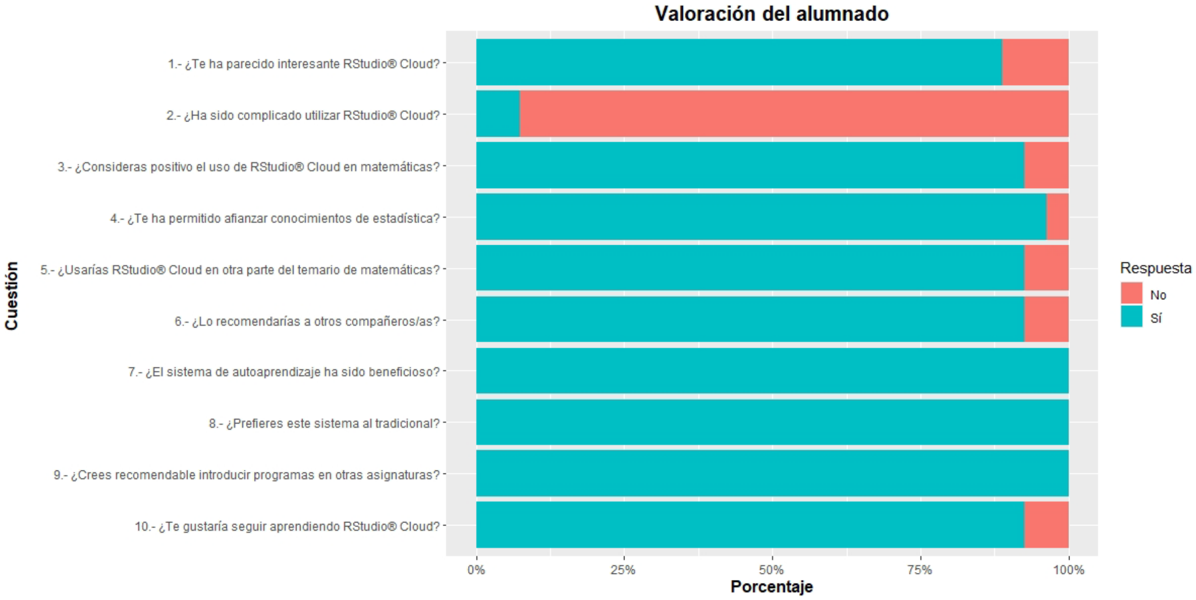



*Figura 5. Respuestas del alumnado a las distintas cuestiones planteadas.*

Como demuestra la figura anterior, las respuestas mayoritarias del alumnado ante la complejidad de RStudio® Cloud y su uso docente (cuestiones 1 y 2), además de reforzar los resultados expuestos por Alemany Palomo (2015), presentan una doble lectura: i) desecha la plausible desconfianza del alumnado en utilizar programas controlados mediante una consola de comandos y ii) realmente ensalza a RStudio® Cloud como un recurso didáctico perfectamente integrable dentro de la materia de matemáticas. Es decir, independientemente del elemento utilizado, una adecuada formación discente pero, fundamentalmente docente, permite solventar aquellas dificultades relacionadas con el desconocimiento de programas estadísticos detectadas en el profesorado (Arteaga et al., 2016; Betancourt et al., 2009; Mora, 2014; López Noriega et al., 2006; Villarraga et al., 2012). Además, el uso de la plataforma ha sido una actividad interesante y beneficiosa para, prácticamente, la totalidad del alumnado, de hecho, en consonancia con lo obtenido en trabajos previos (Alemany Palomo, 2015; Cruz Pichardo y Puentes Puente, 2012; García López y Romero Albadalejo, 2009; Hernández Gómez et al., 2016), el uso de las TIC tuvo una valoración bastante positiva tanto dentro de la asignatura (cuestión 3 y 4), como del contexto académico, pues los encuestados consideran que debería extrapolarse a otra parte del temario (cuestión 5), asignaturas (cuestión 9) e, incluso, compañeros (cuestión 6). Por consiguiente, puede afirmarse que el alumnado no solo aprovecha las potencialidades que ofertan este tipo de herramientas, sino que demanda su incorporación durante el transcurso de la práctica docente ordinaria (Barberá Cebolla y Fuentes Agustí, 2012).

Por otro lado, también se ha comprobado cómo esta metodología didáctica fundamentada en enriquecer el conocimiento del alumnado (García Pérez, 2000, Galindo Alba, 2017) y donde el autoaprendizaje adquiere un protagonismo esencial (cuestión 7), ha sido valorada muy positivamente por el mismo (Alemany Palomo, 2015; Colás Bravo et al., 2018; García López y Romero Albadalejo, 2009; Hernández Gómez et al., 2016). En este sentido, las puntuaciones registradas indican la preferencia de este modelo didáctico alternativo (cuestión 8) al considerado "tradicional" (García Pérez, 2000) sistema de docencia expositivo (Alemany Palomo, 2015; Calles Burgos, 2015; Cruz Pichardo y Puentes Puente, 2012). Por consiguiente, estos datos denotan que, efectivamente, las TIC representan un aspecto multifacético básico dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Calles Burgos, 2015; Cruz Pichardo y Puentes Puente, 2012; Hernández Gómez et al., 2016) que, adicionalmente, permite trabajar aquellas competencias destacadas por la Unión Europea (2007) y la LOMCE como son la digital, matemática y básicas en ciencia y tecnología. No obstante, tampoco debe obviarse que las TIC también imbrican la integración de otras competencias como aprender a aprender, autonomía e iniciativa personal (Domingo Coscollola y Marqués Graells, 2011; Jiménez Palmero et al., 2016), comunicación lingüística y literaria, tratamiento de la información (Ezquerro, 2016; Jiménez Palmero et al., 2016) o social y ciudadana (Jiménez Palmero et al., 2016). En definitiva, como ya indicó Adell Segura (1997), las TIC aportan al proceso de enseñanza-aprendizaje tanto contenidos como destrezas.

En último lugar, también cabe destacar la respuesta de, prácticamente, la totalidad del alumnado a la última cuestión, pues la misma revela su predisposición a seguir integrando y avanzado con RStudio® Cloud. En definitiva, el interés suscitado por el programa confirma una de las premisas establecidas por Ramírez Orellana et al. (2016), Daza et al. (2009), Ezquerro (2016) y Ticse et al. (2023) respecto al adecuado uso de las TIC: la correlación de la actividad con el patrón docente. Además, dicha respuesta despliega tres nuevas líneas de investigación para garantizar la inserción efectiva de la plataforma: i) su aplicación en otra serie de contenidos de la materia, ii) su aplicación en el resto de asignaturas y iii) su extensión a la totalidad del alumnado con independencia de sus dificultades durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

# 4. Conclusiones

La investigación surgió con los objetivos de constatar, analizar y valorar la percepción del alumnado sobre la implementación de la plataforma RStudio® Cloud como herramienta didáctica para la etapa de ESO, concretamente, para aquellos contenidos curriculares de la asignatura de matemáticas relacionados con la estadística. Básicamente, con estas premisas se pretende responder, por un lado, a los distintos requerimientos competenciales y curriculares establecidos, como ayudar al profesorado en su labor docente al comprobar la validez de la herramienta para el desarrollo de los contenidos didácticos. En consecuencia, considerando los distintos resultados obtenidos en la misma, pueden establecerse las siguientes conclusiones.

Primeramente, pese a lo arriesgado de la propuesta y posibles prejuicios derivados de utilizar un programa controlado mediante interfaz de comandos, los resultados configuran a RStudio® Cloud como una potente herramienta didáctica gratuita que puede ser perfectamente integrada y adaptada durante el desarrollo ordinario de los distintos contenidos curriculares. Dicha situación aparece fielmente reflejada en las calificaciones obtenidas en la práctica final realizada por el alumnado participante, pues el 89% de los mismos fueron capaces de superarla y con una puntuación bastante alta (media = 7, desviación estándar = 1,7). Además, también se verificó que, con las adaptaciones didácticas pertinentes, prácticamente todo el alumnado puede asimilar el lenguaje de programación utilizado por la plataforma, pues tanto los ejercicios prácticos como la tarea final entregada incluían los comandos adecuados para las distintas tareas solicitadas.

Por otro lado, pese a no constituir un elemento achacable al alumnado aunque sí detectable (Barberá Cebolla y Fuentes Agustí, 2012), cabe resaltar la nula o escasa alfabetización estadística del profesorado (sugiero suavizar esta frase, aunque quizás la refuerce las referencias) tanto a nivel procedimental (Arteaga et al., 2016; Batanero et al., 2011; Galindo Alba, 2017; Gea et al., 2016), coordinativo (Colás Bravo et al., 2018; Ramírez Orellana et al., 2016), instrumental (Colás Bravo et al., 2018; Daza Pérez et al., 2009), cultural (Arteaga et al., 2016; Batanero et al., 2011; Colás Bravo et al., 2018; Gea et al., 2016) e, incluso, actitudinal (Daza Pérez et al., 2009; Villarraga et al., 2012). Desafortunadamente, esta serie de circunstancias, unidas a las limitaciones intrínsecas a los propios centros educativos como ausencia de recursos materiales y/o digitales, escaso respaldo administrativo, problemas de horario o desinterés del alumnado (p. ej., Barberá Cebolla y Fuentes Agustí, 2012; Colás Bravo et al., 2018; Domingo Coscollola y Marqués Graells, 2011; Galindo Alba, 2017; Jiménez Palmero et al., 2016), conforman un escenario bastante nefasto para garantizar la implementación, eficacia y persistencia de este tipo de herramientas. No obstante, este escenario puede solventarse perfectamente a través de dos vías: i) por iniciativa propia del profesorado en aprender este tipo de herramientas didácticas y ii) por los servicios formativos de las comunidades autónomas, cuya oferta pueden incluir cursos relacionados con las mismas.

En tercer lugar, se ha comprobado el protagonismo fundamental e indispensable que adquieren las TIC durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues el alumnado respalda el cambio didáctico, conductual y motivacional introducido por las mismas para determinadas materias de base científico-técnica. Concretamente, estos enormes beneficios didácticos han sido constatados para el bloque de estadística, elemento curricularmente presente en la materia de matemáticas y cuyos contenidos, con mayor o menor nivel de profundidad, están presentes en todos los cursos de ESO. No obstante, tal y como se desprende de los resultados reflejados en la encuesta realizada al alumnado, las TIC son una herramienta fundamental que debe estar presente, con las respectivas adaptaciones necesarias, a cualquier materia presente durante la etapa de secundaria.

Por consiguiente, puede confirmarse que la plataforma RStudio® Cloud representa una alternativa perfectamente viable para la etapa de ESO que, además, facilita el desarrollo y comprensión de los contenidos curriculares y competenciales. Asimismo, con una simple adaptación metodológica enfocada tanto en las particularidades de la materia como del alumnado, puede ser utilizado en otros bloques de la materia e, incluso, en cualquier asignatura de base científico-técnica.

## Referencias

[1] ALEMANY PALOMO, N. (2015). La estadística de 1º de Bachillerato a través de proyectos y el software R. [TFM, Universidad Jaime I]. http://hdl.handle.net/10234/128865

[2] ÁLVAREZ LUIS, L. V. y Solís Alvino, K. (2019). Uso de GeoGebra y el aprendizaje de la estadística descriptiva para estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Daniel Alcides Carrión de Cerro de Pasco. [Tesis, Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión]. http://repositorio.undac.edu.pe/handle/undac/1543

[3] ARTEAGA, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 19(1), 15-40. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1911

[4] BARBERÁ CEBOLLA, J. P. y Fuentes Agustí, M. (2012). Estudios de caso sobre las percepciones de los estudiantes en la inclusión de las TIC en un centro de educación secundaria.

Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado, 16(3), 285-305

[5] BATANERO, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Universidad de Granada.

[6] BATANERO, C., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. EM TEIA, Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 2(2), 1-20.

[7] BETANCOURT, M., Rivas, Y. y Sarmiento, M. (2016). Desarrollo de una Unidad Didáctica para la Enseñanza Aprendizaje de la Estadística Descriptiva y el SPSS Como Refuerzo Innovador. [Tesis doctoral, Universidad de Los Andes]. http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/44396

[8] BURRILL, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burril, G y C. Reading, (Eds.) Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education (pp. 57-69). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

[9] CALLES BURGOS, M. D. M. (2015). Symbaloo como puerta de acceso a las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza de álgebra. Espiral. Cuadernos del Profesorado, 8(17), 35-45.

[10] COLÁS BRAVO, M. P., de Pablos Pons, J. y Ballesta Pagán, J. (2018). Incidencia de las TIC en la enseñanza en el sistema educativo español: una revisión de la investigación. Revista de Educación a Distancia (RED), 18(56), 1-23. http://dx.doi.org/10.6018/red/56/2

[11] CRUZ PICHARDO, I. M. y Puentes Puente, Ángel. (2012). Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica. EDMETIC, 1(2), 127-144. https://doi.org/10.21071/edmetic.v1i2.2855

[12] DAZA PÉREZ, E. P., Gras-Marti, A., Gras-Velázquez, À., Guerrero Guevara, N., Gurrola Togasi, A., Joyce, A., Mora-Torres, E., Pedraza, Y. Ripoll, E. y Santos, J. (2009). Experiencias de enseñanza de la química con el apoyo de las TIC. Educación química, 20(3), 320-329.

[13] DE PUELLES BENÍTEZ, M. (2016). Reflexiones sobre cuarenta años de educación en España o la irresistible seducción de las leyes. Historia y Memoria de la Educación, 3, 15-44. https://doi.org/10.294.5668.0997.5135760

[14] DEL PINO RUIZ, J. (2013). El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, 2, 243-250.

[15] DOMINGO COSCOLLOLA, M. y Marqués Graells, P. (2011). Aulas 2.0 y uso de las TIC en la práctica docente. Comunicar, 19(37), 169-175. https://doi.org/10.3916/C37-2011-03-09

[16] ESTÉVEZ CARMONA, M. E. (2012). Análisis y beneficios de la incorporación de las TIC en el área de Lengua Castellana y Literatura: un caso práctico. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, 40, 21-34.

[17] EZQUERRO, A. M. (2016). Las TIC en lengua castellana y literatura: criterios de calidad y recursos didácticos. DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia, 34, 1-10.

[18] GALINDO ALBA, A. (2016, 4-6 julio). Didáctica de la estadística con R [comunicación]. XVI Congreso de Educación y Aprendizaje de las Matemáticas, Jerez de la Frontera.

[19] GALINDO ALBA, A. (2017). Didáctica con R. Menos cuentas y más pensamiento crítico. Pensamiento Matemático, 7(1), 53-73.

[20] GARCÍA LÓPEZ, M. M. y Romero Albaladejo, I.M. (2017). Influencia de las nuevas tecnologías en la evolución del aprendizaje y las actitudes matemáticas de estudiantes de secundaria. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7(1), 369-396. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1346

[21] GARCÍA PÉREZ, F. F. (2000). Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. Biblio 3w: Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales, 207, 1-12.

[22] GEA, M. M., Batanero Bernabeu, M. C., Fernández Sánchez, A. J. y Arteaga Cezón, J. P. (2016). Interpretación de resúmenes estadísticos por futuros profesores de educación secundaria. Journal of Research in Mathematics Education, 5(2), 135-157. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1902

[23] HERNÁNDEZ GÓMEZ, E., Briones Peñalver, A. J., Serdeira Azevedo, P. y Medina Vidal (2016). Geogebra y TIC en matemáticas de enseñanza secundaria. IX Anuario de jóvenes investigadores, 9, 212-215.

[24] HOLMES, P. (1980). Teaching Statistics 11-16. Sloug: Foulsham Educational.

[25] HOLMES, P. (2000) What sort of statistics should be taught in schools — and why? En C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Eds.), Ensino e aprendizagem da Estatística (pp. 49-56). Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.

[26] JIMÉNEZ PALMERO, D., Mora Núñez, M. y Cuadros Muñoz, R. (2016). La importancia de las nuevas tecnologías en el proceso educativo. Propuesta didáctica TIC para ELE: mELEndien7dias. Revista Fuentes, 18(2), 209-223. http://dx.doi.org/10.12795/revistafuentes.2016.18.2.07

[27] LÓPEZ CENTELLA, E. (2019, 21-24 febrero). Breve análisis de las consideraciones curriculares sobre la educación en estadística y probabilidad en España desde 1970 a la actualidad [comunicación]. Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística, Granada.

[28] MARTÍNEZ-ARGÜELLO, L. D., Hinojo-Lucena, F. J. y Díaz, I. A. (2018). Aplicación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en los Procesos de Enseñanza-Aprendizaje por parte de los Profesores de Química. Información tecnológica, 29(2), 41-52. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642018000200041

[29] MAURANDI LÓPEZ, A., del Río Alonso, L. y Balsalobre, C. (2013). Fundamentos estadísticos para investigación. Introducción a R. Bubok Publishing. https://gauss.inf.um.es/files/Fundamentos-estadisticos-para-investigacionIntroduccion-a-R.pdf

[30] MEFP. (2019). PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español. Ministerio de Educación y Formación Profesional, Gobierno de España. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2018/pisa-2018-informes-es.html

[31] MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2010). PISA 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. OCDE. Informe Español. Ministerio de Educación, Gobierno de España.

http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa-2009-con-escudo.pdf?documentId=0901e72b808ee4fd

[32] MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA. (2003). Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Gobierno de España. http://thales.cica.es/~epsilon/debate/PISA2004/pisa2003resumenespana.pdf

[33] MORA, R. (2014, 1-5 diciembre). Uso del software Power Point a través de la metodología de proyectos: una aplicación para la enseñanza de la estadística en secundaria [comunicación]. IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

[34] MOREIRA, C. (2011, 3-5 noviembre). La estadística en la enseñanza secundaria en Europa [comunicación]. X Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións, Universidad de Vigo.

[35] RAMÍREZ ORELLANA, E., Martín-Domínguez, J. y Madail Santin, M. (2016). Análisis comparativo de las prácticas docentes con recursos TIC. Estudio de casos con profesores de Infantil, Primaria y Secundaria. RELATEC: Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 15(1), 11-29. https://doi.org/10.17398/1695-288X.15.1.11

[36] RSTUDIO CLOUD (2021). Integrated Development for R. RStudio Cloud, PBC, Boston, MA. URL https://rstudio.cloud/

[37] TICSE, M., Flores Salazar, J. V., & Vivas-Pachas, J. (2023). Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas sobre tasa de variación con el uso de GeoGebra. PNA, 17(4), 425-452. https://doi.org/10.30827/pna.v17i4.24258

[38] TORRES PAYÁ, I. (2011, 16-17 abril). El laboratorio de Biología con TIC. I Congreso de Docentes de Ciencias de la Naturaleza, Museo Nacional de Ciencia y Tecnología.

[39] UNIÓN EUROPEA. (2007). Competencias clave para el aprendizaje permanente: Un Marco de Referencia Europeo. Dirección General de Educación y Cultura. Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas.

[40] VILLARRAGA, M. E., Saavedra, F., Espinosa, Y., Jiménez, C., Sánchez, L. y Sanguino, J. (2012). Acercando al profesorado de matemáticas a las TIC para la enseñanza y aprendizaje. EDMETIC, 1(2), 65-87. https://doi.org/10.21071/edmetic.v1i2.2852

**Sobre los autores:**

*Nombre:* Francisco López Martínez
*Correo Electrónico:* francisco.lopez@uma.es
*Institución:* Universidad de Málaga, España.

*Nombre:* Antonio Ramón López Martínez
*Correo Electrónico:* antonioramon.lopez@murciaeduca.es
*Institución:* Consejería de Educación de la Región de Murcia, España.

Experiencias Docentes

# ¿Dónde está? Un cuento para el estudio del pensamiento borroso en educación primaria

# Where is it? A story for the study of fuzzy thinking in primary education

Queralt Viladevall, Ángel Alsina, Joan Carles Ferrer-Comalat

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XV, pp. 041−062, ISSN 2174-0410
Recepción: 19 Ene'24; Aceptación: 19 Jul'24

1 de abril de 2025

**Resumen**

El objetivo de este artículo es recabar información sobre el conocimiento que tienen los alumnos de 6 a 8 años acerca de la parcialidad en situaciones no binarias mediante la presentación del cuento ¿Dónde está? A partir de la lectura del cuento, se realizaron dos actividades exploratorias para evaluar el nivel de comprensión que los alumnos poseen de la parcialidad y de los cuantificadores relacionados con ella: 'nada', 'algo', 'bastante', y 'muchísimo'. Los resultados parecen indicar que los niños de estas edades tienen un buen dominio del uso de estos términos en contextos no binarios. Además, el cuento también puede servir para repasar los primeros cinco números ordinales y para establecer una relación uno a uno entre diferentes niveles de diversión y expresiones faciales de risa.

**Palabras clave:** pensamiento borroso, grado, cuento, matemáticas, educación infantil, educación primaria.

**Summary**

The aim of this article is to gather information about the knowledge that 6 to 8-year-old students have regarding partiality in non-binary situations through the presentation of the story Where is he? Based on the reading of the story, two exploratory activities were conducted to evaluate the students' level of understanding of partiality and the quantifiers related to it: 'nothing', 'something', 'quite a bit', and 'a lot'. The results seem to indicate that children of these ages have a good command of using these terms in non-binary contexts. Additionally, the story can also be used to review the first five ordinal numbers and to establish a one-to-one correspondence between different levels of fun and various facial expressions of laughter.

**Keywords:** fuzzy thinking; degree; partiality; story; mathematics, preschool school children, primary school children.

# 1. Introducción

La lógica borrosa fue elaborada por Zadeh a mediados del siglo pasado (Zadeh, 1965). Dicha lógica acepta que los elementos de un conjunto pueden pertenecer a él parcialmente. Kosko (1995) denomina al pensamiento que acepta esta premisa "pensamiento borroso", el cual amplía el pensamiento binario, dominado por la creencia de que todo objeto o pertenece a un conjunto o no.

En 2015 se celebraron 50 años del nacimiento de la lógica borrosa. Para celebrar dicho evento se creó una muestra expositiva en el museo de la Ciencia de Barcelona "CosmoCaixa" (Linares *et al*., 2018a; 2018b; Ferrer *et al*., 2018) al que fueron invitadas a colaborar diversas universidades, entidades y artistas relacionadas con la investigación y difusión de esta lógica. La unidad de matemáticas de la Universidad de Girona recibió el encargo de comisariar la muestra y coordinar con ello el trabajo de todas las personas implicadas en el proceso.

Fruto de aquel encargo, la unidad empezó a trabajar con la primera autora del artículo en el diseño de actividades infantiles relacionadas con la lógica borrosa. Una de estas actividades consistía en la búsqueda de objetos en una casita de muñecas victoriana con la particularidad de no ser del todo funcionales (figura 1). Dichos objetos fueron creados en 3D mediante el *software* Rhinoceros e impresos mediante una impresora 3D. Posteriormente, se pintaron según el estilo de los otros objetos de la casa. El cartel que acompañaba la actividad puede visualizarse en la figura 2.

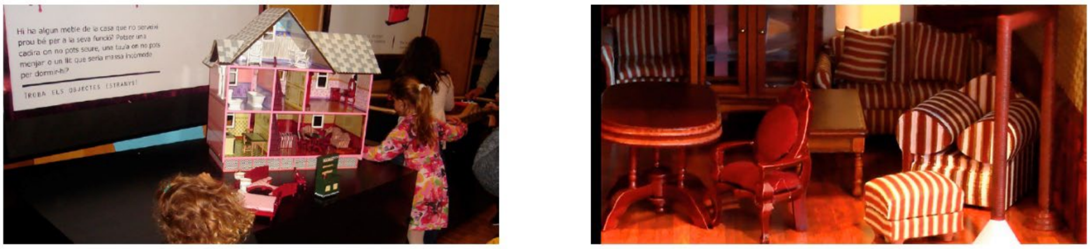


*Figura 1. Visión general de la casa de muñecas y detalle de una de sus salas.*


*Figura 2. Cartel de la actividad "El juego de la casita de muñecas".*

Los objetos que se incorporaron siguiendo la estética de la casa fueron un sillón en el que nadie puede sentarse en el cojín por tener los apoyabrazos demasiado grandes, una lámpara que no ilumina casi nada pues la pantalla está casi a ras de suelo, una cama muy incómoda para poder dormir en ella por su estrechez en la parte central y otros objetos con alguna característica en parte disfuncional como los que muestra la figura 3.


*Figura 3. Objetos con funcionalidad disminuida.*

En el transcurso de los días que duró la actividad se comprobó que había menores que eran perfectamente competentes para encontrar dichos objetos en la casa, pero se abrieron dudas sobre si estos realmente reconocían que había parcialidad en su funcionalidad. Esto llevó a plantear el realizar un estudio exhaustivo de hasta qué punto los menores, según la edad, reconocen la parcialidad. Hasta donde los autores saben no hay estudios de este tema y creemos que son absolutamente necesarios, pues, por ejemplo, muchos estudios en los que se consulta a menores utilizan las escalas Likert y presuponen que estos, a cualquier edad, dominan la parcialidad implícita en dichas escalas (Van Laerhoven *et al.*, 2004; Hall *et al.*, 2016; Efthymiou *et al.*, 2020).

El objetivo del artículo es recabar información del conocimiento que el alumnado de 6 a 8 años tiene sobre la parcialidad en situaciones no binarias a partir de la implementación del cuento ¿Dónde está?

## 2. El cuento y su relación con el pensamiento borroso

El pensamiento borroso acepta la premisa de que un elemento puede pertenecer parcialmente a un conjunto (Viladevall *et al.*, 2023a). La figura 4 presenta un conjunto de manzanas mordisqueadas para comprender esta idea de parcialidad en la pertenencia de un conjunto. Esta imagen fue creada recientemente para una exposición en el Museo de

Matemáticas de Cataluña en torno al concepto de parcialidad (Viladevall *et al.*, 2021) y rinde homenaje al famoso ejemplo propuesto por Kosko (1995) para entender dicho término.

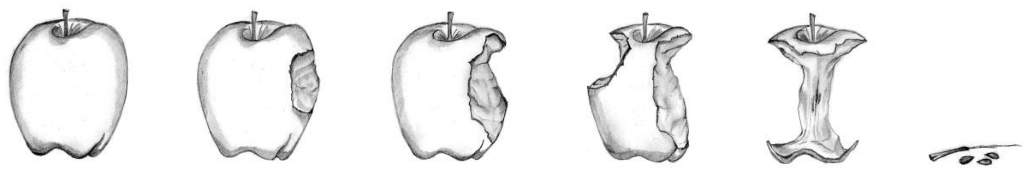


*Figura 4. Obra de Queralt Viladevall "De la manzana a la no manzana".*

Cada una de las imágenes de la figura 4 ejemplifica representaciones de elementos que pueden ser clasificados en el conjunto de manzanas. La primera imagen, situada más a la izquierda, podría considerarse una manzana en grado 1 (o una manzana al 100%). Kosko (1995) propuso disminuir gradualmente el grado de pertenencia al conjunto. Por lo tanto, la segunda manzana no pertenece al conjunto en grado 1, sino quizás en grado 0.9 (o una manzana al 90%). La tercera, por su parte, pertenece al conjunto en grado 0.65 (o una manzana al 65%). La cuarta, en grado 0.5 (o una manzana al 50%). La penúltima, en grado 0.1 (o una manzana al 10%). Para la última imagen, Kosko sugirió que podría decirse que pertenece al conjunto en grado 0 (o una manzana al 0%). Con esta noción de pertenencia en cualquier grado, se abre una nueva perspectiva clasificatoria. Cualquier elemento puede considerarse parte de un conjunto borroso, ya que se acepta la pertenencia de cualquier elemento al conjunto incluso en grado 0.

En coherencia con la propuesta, un conjunto borroso se define formalmente mediante una expresión que relaciona cada elemento del conjunto universo con su correspondiente grado de pertenencia al conjunto.

$$\widetilde{A} = \{(x_1, \mu_{\widetilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\widetilde{A}}(x_2)), (x_3, \mu_{\widetilde{A}}(x_3)), \dots\}$$

Al aceptar el supuesto de parcialidad de pertenencia, los números $\mu_{\widetilde{A}}(x_i)$ son valores reales entre 0 y 1, ambos incluidos. El sombrero en $\widetilde{A}$ identifica A como un conjunto borroso.

Se debe tener en cuenta que la asignación de valores específicos entre 0 y 1 puede estar sujeta a cierta subjetividad personal. Esto significa que diferentes personas pueden asignar valores numéricos diferentes a elementos idénticos. Por ejemplo, un mismo chiste puede ser percibido como más o menos divertido dependiendo de la persona que lo escuche.

Asimismo, es posible asignar el grado de pertenencia a través de términos lingüísticos como "nada", "poco", "bastante", "muchísimo" o "el que más" (Kaufmann y Aluja, 1988; Alsina y Trillas, 1991). Esta idea elimina la necesidad de trabajar con números en un rango de 0 a 1 o cualquier escala homomórfica a esta, como la escala del 0 al 100. En la figura 5 se presenta un ejemplo personal de este tipo de asignación asociado al predicado "ser un chiste gracioso".

| | | | |
|---|---|---|---|
| "¡Papá, papá!, ¿me haces el problema de Matemáticas?" "No hijo, no estaría bien". "Bueno, inténtalo de todas formas". | Un estadístico puso su cabeza en un horno y sus pies en hielo, y dijo que en promedio se encontraba bien. | Un 8 llega emocionado a la fiesta de los 0, pero al intentar entrar, recibe un desafortunado comentario: "Lo siento, solo los 0 pueden pasar". El 8, un tanto desconcertado, recibe una reprimenda de alguien en la fila: "Ya te advertí que no te pusieras cinturón | ... |
| Muy gracioso | Algo gracioso | Bastante gracioso | |

*Figura 5. Asignación personal de los autores al conjunto borroso "Ser un chiste gracioso".*

# 3. Metodología

De acuerdo con el objetivo del estudio, se ha utilizado una metodología cualitativa para analizar el conocimiento que el alumnado de 6 a 8 años tiene sobre la parcialidad en situaciones no binarias. El cuento utilizado, titulado "¿Dónde está?" (Anexo 1), forma parte de una trilogía de cuentos relacionados con los cuantificadores "nada", "algo", "bastante", "muchísimo" y "absolutamente", que pretenden recabar información sobre dicho conocimiento. Más concretamente, el cuento "¿Dónde está?" introduce los términos asociados a la graduación "nada", "un poco", "bastante", "muchísimo" (en la forma "muy pero que muy"), y "sumamente" (en la forma "el más", indicando el mayor grado), según lo divertidos que el conejo ha encontrado sus libros. En consecuencia, el cuento, tal y como se muestra en la figura 6, proporciona un ejemplo de un conjunto borroso cuyos grados, ordenados de menor a mayor, están expresados en términos lingüísticos.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Libro encontrado en la primera pila | Libro encontrado en la segunda pila | Libro encontrado en la tercera pila | Libro encontrado en la cuarta pila | Libro encontrado en la quinta pila |
| Nada divertido | Algo divertido | Bastante divertido | Muy pero que muy divertido | El más divertido |

*Figura 6. Conjunto borroso del predicado "es un libro divertido" con graduación lingüística según el conejo protagonista del cuento.*

La información ha sido recopilada a partir de una muestra de 91 alumnos de primero y segundo de primaria. Para ello, durante la fiesta del libro de Sant Jordi de 2024, se organizó una sesión de cuentacuentos con actividades en un colegio de Cataluña (España). En concreto, se llevaron a cabo dos sesiones de una hora con dos grupos de alumnos de 6-7 años y dos sesiones con dos grupos de alumnos de 7-8 años.

Para la obtención de datos, se siguieron las siguientes fases del cuento taller:

1) Presentación del cuentacuentos, a cargo de la primera autora, y del cuento taller.

2) Presentación de la tarea 1 (figura 7).

3) Elaboración de la tarea 1 por parte del alumnado.

4) Lectura del primer cuento con imágenes proyectadas en la pizarra digital.

5) Lectura del segundo cuento con imágenes proyectadas en la pizarra digital.

6) Lectura del tercer cuento con imágenes proyectadas en la pizarra digital.

7) Presentación de la tarea 2 (figura 8).

8) Elaboración de la tarea 2 por parte del alumnado.

9) Encuesta personal alumno a alumno mientras se recogían las tareas.

10) Taller de dibujo sobre personajes aparecidos en los cuentos.

Las técnicas de obtención y análisis de datos han sido fundamentalmente de dos tipos.

En primer lugar, se realizó un estudio con el propósito de determinar el nivel de comprensión que los niños tenían sobre los términos "nada", "algo", "bastante" y "muchísimo" mediante una escala de Likert construida conforme a los principios del pensamiento borroso (Viladevall et al., 2023b). La figura 7 presenta la tarea 1, de asociación con la escala Likert de cada término lingüístico que cada menor elaboró individualmente. La escala de la tarea presenta diferentes caras de satisfacción, partiendo de la nada hasta el todo. Durante la presentación de la tarea se les explicó cómo proceder. Debían relacionar cada término escrito dentro de los recuadros con la carita que considerasen más adecuada. Para no confundir ni orientar no se dio ningún ejemplo concreto dejándoles seguir su propio criterio. Se les alentó diciéndoles que no había nada correcto ni incorrecto, que todo era válido.

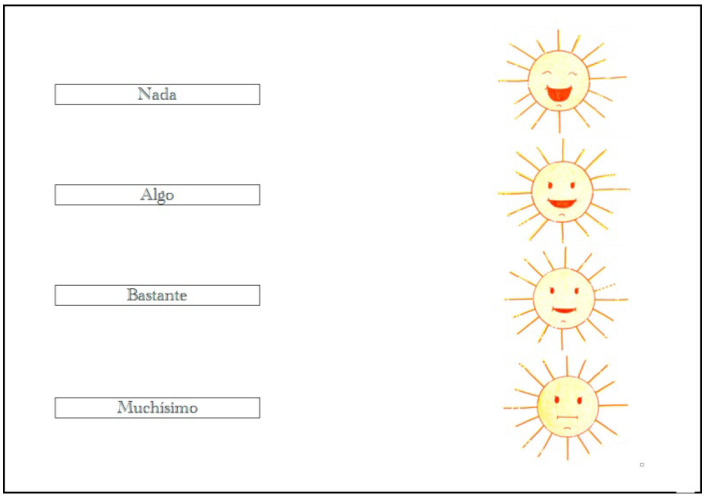



Figura 7. Tarea 1: actividad de asociación.

En segundo lugar, se realizó una entrevista individual a cada alumno con el propósito de determinar la comprensión que cada menor tenía respecto a la parcialidad. La entrevista partía de las respuestas a una tarea de asociación que el menor realizaba sobre el nivel de agrado de cada cuento con las caras de satisfacción de la escala de Likert trabajada previamente. La figura 8 muestra en detalle la tarea 2. En la entrevista se realizaban dos preguntas: Primero se les preguntaba cuál de los cuentos querían que fuese regalado a la escuela. Conocida la respuesta, se les preguntaba entonces cuál era el segundo cuento que quería que regaláramos a la escuela en caso de que no tuviéramos el primero disponible. Comparando sus respuestas con lo que habían marcado en la tarea se pretendía descubrir si realmente los menores tenían una correcta comprensión de la parcialidad al comprobar una absoluta coherencia en sus elecciones.

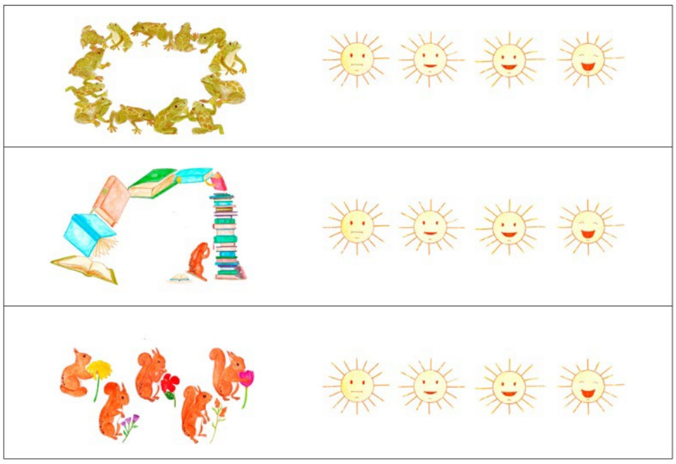


Figura 8. Tarea 2: actividad para conocer el nivel de agrado de los cuentos.

## 4. Resultados

La Tabla 1 presenta los resultados de la actividad de asociación de los términos "nada", "algo", "bastante" y "muchísimo" con la escala de Likert. Estos resultados están clasificados por curso y se han obtenido a partir de las respuestas de los menores a la tarea ilustrada en la figura 7.

Tabla 1. Resultados por curso de la actividad de asociación.

| | Primer curso | Segundo curso |
|---|---|---|
| Realizan correctamente la asociación | 40 (87%) | 40 (89%) |
| Realizan incorrectamente la asociación | 6 (13%) | 5 (11%) |

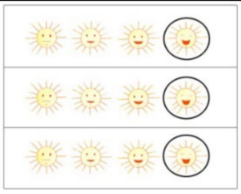
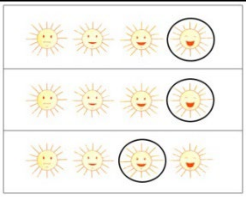
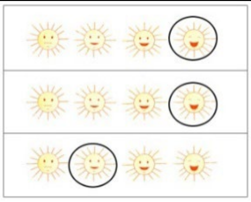
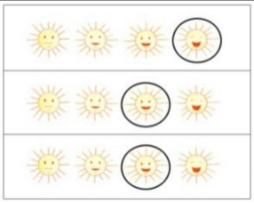
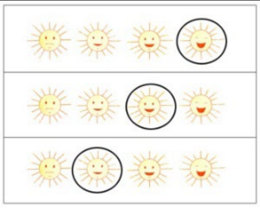
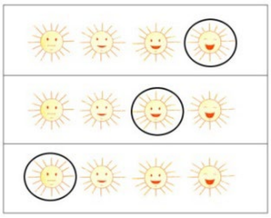
Dado que los valores de asociación correcta e incorrecta son similares en primero y segundo, se puede constatar que dichos términos son bien conocidos por la mayoría de los alumnos desde primero de primaria (6-8 años).

Por otro lado, debido a que un grupo de menores todavía presenta confusión con los términos en ambos cursos del primer ciclo, se evidencia que la lectura de cuentos, como el presentado en este artículo, puede ser necesaria para consolidar el aprendizaje de algunos términos lingüísticos que definen cuantificadores relacionados con la parcialidad.

Durante la entrevista, todos los niños, excepto uno, siempre pedían un cuento marcado con el máximo nivel de agrado. Posteriormente, se observó que todos, excepto el mismo niño, pidieron el segundo cuento marcado con el máximo nivel de agrado.

En la tabla 2 se muestran las elecciones de los alumnos clasificadas según el nivel de agrado general de los cuentos. La coherencia entre sus elecciones en la tarea de la figura 8 y las respuestas dadas a las dos preguntas en la entrevista apunta a que los niños de 6 a 8 años tienen una clara comprensión sobre la parcialidad.

Tabla 2. Clasificación de opciones de respuesta al nivel de agrado de los cuentos.

| **Ítem** | **Ejemplo visual** | **Alumnos de primero** | **Alumnos de segundo** |
|---|---|---|---|
| Todos los cuentos gustaron muchísimo |  | 12 | 18 |
| Dos cuentos gustaron muchísimo y el otro gustó bastante |  | 8 | 12 |
| Dos cuentos gustaron muchísimo y el otro gustó un poco |  | 4 | 2 |
| Un cuento gustó muchísimo y los otros dos bastante |  | 2 | 6 |
| Un cuento gustó muchísimo, otro bastante y el otro un poco |  | 12 | 2 |
| Un cuento gustó muchísimo, otro bastante y el otro nada |  | 4 | 3 |
| Otras opciones | | 4 | 2 |

# 5. Consideraciones finales

Aprender matemáticas a partir de literatura infantil es un recurso habitual en las aulas de infantil y primaria (Saá, 2002; Marín, 2021; Viladevall *et al.*, 2023a). El cuento "¿Dónde está?" tenía como propósito mostrar una posible situación real en la que aparecen términos del estilo de "nada", "algo", "bastante", "muchísimo" o "el más" a fin de que este fuera el primer relato creado con la intención específica de abordar la construcción de un conjunto borroso cuyo predicado está relacionado con un sentimiento y cuyos valores de graduación son estos términos lingüísticos cuyo uso posterior se relaciona con el concepto llamado "cálculo con palabras" (computing with words), concepto introducido por el mismo Zadeh (1996). Concretamente, el cuento, aceptando la premisa de que los libros pueden pertenecer parcialmente al conjunto con el predicado "ser divertido", permite construir el conjunto borroso de la figura 6. El cuento también posibilita trabajar los primeros cinco números ordinales, así como introducir un ejemplo más visual de conjunto borroso aprovechando la aplicación biyectiva entre diversos grados de diversión y diversas expresiones faciales de risa, tal y como muestra la figura 9.

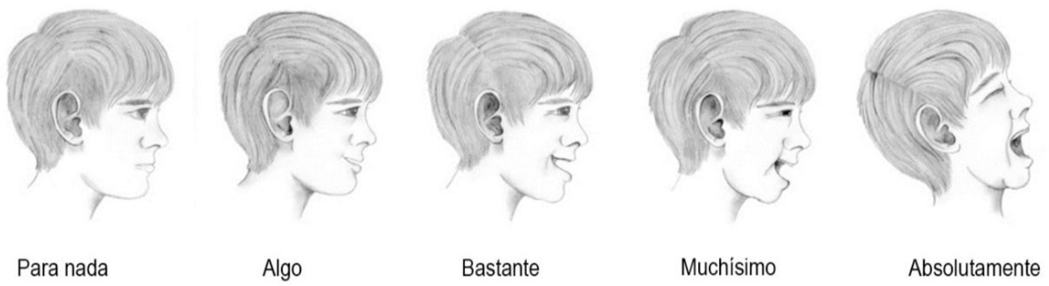



Figura 9. Conjunto borroso con predicado "Lo ha encontrado divertido".

Los primeros resultados indican que el alumnado de las primeras edades puede contestar sin problemas encuestas con escalas tipo Likert asociadas a la lógica borrosa. Las disparidades entre la primera actividad, en la que hubo cerca de un 10% de error, y la segunda, en la que solo un alumno no realizó correctamente la asociación, sugieren que es preferible utilizar imágenes en lugar de texto en dichas encuestas. Queda pendiente realizar un estudio más profundo que intente determinar la razón exacta por la que algunos niños no realizaron correctamente la asociación en la primera actividad. Este estudio debe tener en cuenta que la causa podría correlacionarse con problemas en el idioma de ciertos alumnos recién llegados.

Consiguientemente, este primer trabajo de campo permite sugerir que los alumnos de 6 a 8 años ya poseen una sólida comprensión de la parcialidad a estas edades y, por lo tanto, están preparados para explorar el pensamiento borroso, donde la parcialidad es aceptada sin reservas. Aun así, se quiere recordar que este estudio forma parte de una investigación mucho más amplia. Por lo tanto, se debe ser prudente con la aceptación de estos primeros resultados a la espera de la investigación futura de esta cuestión tanto en educación primaria como en educación infantil.

Se concluye que introducir el pensamiento borroso en el aula puede ayudar a evitar problemas graves asociados al pensamiento binario. Por ejemplo, facilita la clasificación de elementos que no encajan claramente en categorías binarias, como el sexo no binario en las categorías de hombre o mujer (Sanz y Guadarrama, 2012), o abordar la paradoja sorites (Linares et al., 2020). Además, el pensamiento binario a menudo conlleva asociaciones inconscientes entre conceptos binarios, como la relación entre el blanco y el negro con el bien y el mal (Frigerio, 2006). Oyěwùmí (2017) destaca esta asociación de categorías como una causa significativa de problemas sociales como el racismo o el sexismo. Por lo tanto, la introducción de nuevos sistemas de clasificación en las aulas, como el que ofrece el pensamiento borroso, brinda nuevas posibilidades para abordar un diálogo respecto al sexismo o racismo desde nuevas perspectivas por parte del maestro, entre otras muchas cuestiones. En el futuro, pues, será necesario realizar nuevos estudios que permitan afinar y ampliar los datos obtenidos en este estudio iniciático.

# Referencias


[1] ALSINA, C.; TRILLAS, E. Fuzzy sets and mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 16-19, 1991.

[2] EFTHYMIOU, N.; FILNTISIS, P.P.; KOUTRAS, P.; TSIAMI, A.; HADFIELD, J.; POTAMIANOS, G.; MARAGOS, P. *ChildBot: Multi-Robot Perception and Interaction with Children*, arXiv 2020, 2020.

[3] FERRER COMALAT, J.C.; BERTRAN ROURA, X.; LINARES MUSTARÓS, S.; COROMINAS COLL, D. Six experimental activities to introduce the theory of fuzzy sets. En *Complex Systems: Solutions and Challenges in Economics, Management and Engineering: Dedicated to Professor Jaime Gil Aluja*, 85-107, Springer, 2018.

[4] FRIGERIO, A. Negros" y "Blancos" en Buenos Aires: Repensando nuestras categorías raciales. *Temas de patrimonio cultural*, 16, 77-98, 2006.

[5] HALL, L.; HUME, C.; TAZZYMAN, S. Five degrees of happiness: Effective smiley face Likert scales for evaluating with children. In *Proceedings of the 15th international conference on interaction design and children*, 311-321, 2016.

[6] KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Ed. Milladoiro, 1988.

[7] KOSKO, B. *Pensamiento borroso: la nueva ciencia de la lógica borrosa*. Crítica, 1995

[8] LINARES-MUSTARÓS, S.; VILADEVALL-VALLDEPERAS, Q.; LLACAY-PINTAT, T.; FERRER-COMALAT, J.C. UNA INTRODUCCIÓN A LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA LÓGICA BORROSA A TRAVÉS DEL ARTE. *Cuadernos del CIMBAGE*, 1(20), 133-156, 2018a.

[9] LINARES MUSTARÓS, S.; FERRER COMALAT, J.C.; BERTRAN ROURA, X.; COROMINAS COLL, D.; HIDALGO GIL, J. *50 años de ideas fuzzy. Catálogo de la muestra expositiva "Explora" en el Cosmocaixa de Barcelona.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Girona, 2018b.

[10] LINARES-MUSTARÓS, S.; VILADEVALL, Q.; FERRER- COMALAT, J. C. La clasificación en la teoría de conjuntos borrosos. En *Edunovatic 2020. Conference Proceedings: 5th Virtual International Conference on Education, Innovation and ICT*, December 10-11, 2020 (pp. 653-654). REDINE (Red de Investigación e Innovación Educativa).

[11] Marín Rodríguez, M. (2021). Pensamiento matemático y cuentos en Educación Infantil. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 10(1), 30-44.

[12] OYĚWÙMÍ, O. *La invención de las mujeres: una perspectiva africana sobre los discursos occidentales del género*. En la frontera, 2017.

[13] SAA ROJO, M. D. Las matemáticas de los cuentos y las canciones. Editorial EOS. 2002.

[14] SANZ, V. ; GUADARRAMA, S. (2012). Applying a fuzzy model approach to the classification of sexual differences: Beyond the male/female binary. In 2012 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS) (pp. 1-6). IEEE.

[15] VAN LAERHOVEN, H.; VAN DER ZAAG-LOONEN, H.J.; DERKX, B.H. A comparison of Likert scale and visual analogue scales as response options in children's questionnaires. *Acta Paediatrica*, 93(6), 830-835, 2004.

[16] VILADEVALL, Q.; LINARES-MUSTARÓS, S.; FERRER-COMALAT, J. C. *From Everything to Nothing: 10 Works for Reflecting on Non Binary Contexts: Exhibition Catalogue.* Servicio de publicaciones de la Universidad de Girona, 2021.

[17] VILADEVALL, Q.; FERRER-COMALAT, J. C.; ALSINA, Á. El cuento infantil como herramienta para introducir los conjuntos borrosos en las primeras edades. *Revista Infancia, Educación y Aprendizaje*, 9(1), 53-68, 2023a.

[18] VILADEVALL, Q., LINARES-MUSTARÓS, S., HUERTAS, M. A.; FERRER-COMALAT, J. C. Understanding the Axioms and Assumptions of Logical Mathematical Systems through Raster Images: Application to the Construction of a Likert Scale. *Axioms*, 12(12), 1064, 2023b.

[19] ZADEH, L. (1965) Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353, 1965.

[20] ZADEH, L. (1996). Fuzzy logic = computing with words. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 4(2), 103-111

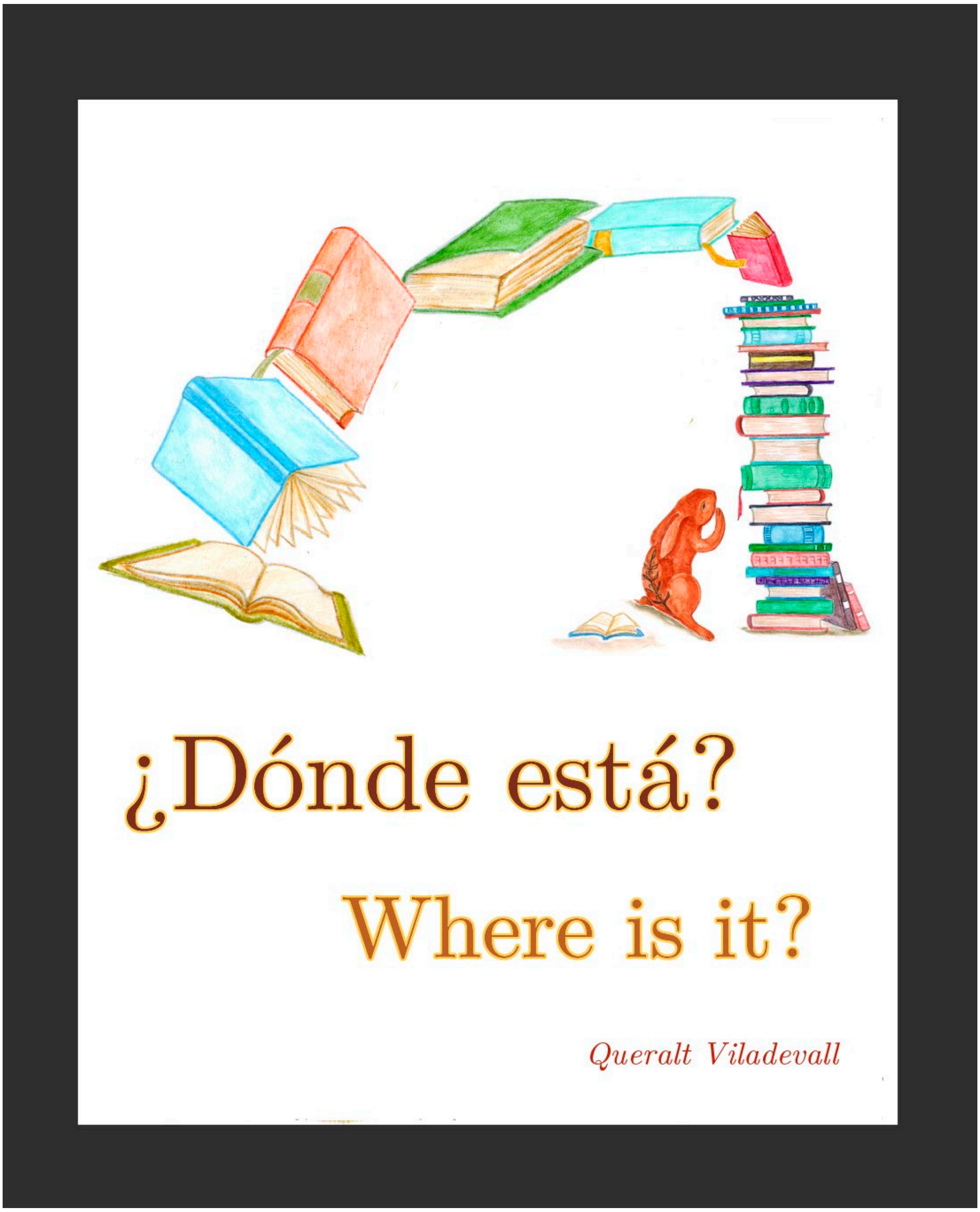
**Sobre los autores:**

*Nombre:* Queralt Viladevall
*Correo Electrónico:* qviladevall@uoc.edu
*Institución:* Universitat Oberta de Catalunya, España.

*Nombre:* Ángel Alsina
*Correo Electrónico:* angel.alsina@udg.edu
*Institución:* Universidad de Girona, España

*Nombre:* Joan Carles Ferrer-Comalat
*Correo Electrónico:* joancarles.ferrer@udg.edu
*Institución:* Universidad de Girona, España

## Anexo 1. Cuento "¿Dónde está?"



Érase una vez un conejo al que le gustaba mucho leer.
Un día quiso invitar a sus amigos a pasar una tarde leyendo
su libro favorito. ¡Era el libro más divertido del mundo!
—¿Os va bien quedar a las cinco aquí, en el campo? —les preguntó.
—¡Por supuesto! —contestaron los dos amigos.
Dicho esto se marchó a buscar el libro a su madriguera.

Once upon a time, there was a rabbit who really loved to read.
One day he wanted to invite his friends to spend an afternoon
reading his favourite book. It was the funniest book in the world!
"Can you meet me here in the country at five o'clock?" he asked.
"Of course!" his two friends answered.
So he went to his burrow to fetch the book.

Pero, ¡ay! Al entrar en la guarida no recordaba dónde lo tenía.
Lo cierto es que el conejo era bastante desordenado.
Tenía la madriguera hecha un desastre, con un montón de cosas por aquí y por allá.
Armándose de paciencia, decidió empezar a buscar.
En la primera pila encontró un manual de cómo se arregla un reloj.
Este libro —recordó el conejo — no era nada divertido.

But when he entered his burrow, he couldn't remember where he'd left it.
The truth is that the rabbit was quite disorganized.
The burrow was a mess, with stuff all over the place.
Gathering up all his patience, he decided to start looking for it.
In the first pile, he found a manual on how to fix a watch.
"This book," the rabbit recalled, "was not funny at all".

En la segunda pila encontró un libro algo divertido.
Contaba cómo un cuervo consigue participar en un concurso de canto entre canarios y cómo se las apaña para conseguir el primer premio.
Recordar lo que ocurría en el cuento le hizo sonreír.

In the second pile, he found a book that was quite funny.
It told of how a crow takes part in a singing contest for canaries and manages to win first prize.
Remembering what happened in the story made him smile.

En la tercera pila había varios libros más.
Pensó —¡Ya está! ¡Seguro que está aquí!— Y empezó a mirarlos.
De repente, encontró un pequeño libro donde se contaba lo que le había sucedido a una ardilla para preparar su pastel favorito: el de piñones. El recuerdo de las aventuras de la ardilla le provocó una sonrisa muy amplia, de aquellas que nos hacen enseñar los dientes.
—Este libro es bastante divertido —pensó el conejo—, pero no es el libro que busco.

In the third pile were several more books.
"That's it!" he thought, "I'm sure it's here!" And he began to look through them.
Then he found a small book that described all the things a squirrel had to do to make his favourite cake: a pine nut cake.
Remembering the squirrel's adventures made him smile broadly, one of those smiles that shows your teeth.
"This book is quite funny," the rabbit thought, "but it's not the book I'm looking for".

La cuarta pila era un montón de libros muy alto.
Le pareció que el de más abajo era el que buscaba.
—¡Mira! ¡Quizás es este!— dijo mientras lo estiraba.
De repente, todos los demás se le cayeron encima.
¡Pobre conejo!

The fourth pile was a mountain of books.
It seemed to him that the one at the bottom was the one he was looking for.
"Maybe it's that one!" he said, as he pulled it out.
But then all the other books suddenly fell on top of him.
Poor rabbit!

Desgraciadamente, no era el que buscaba.
Eso sí, ese libro era muy pero que muy divertido.
Contaba el viaje de un grupo de amigos en un avión hecho de madera,
y la madera estaba carcomida.
Al recordar la historia se le escapó una fuerte carcajada.

Unfortunately, it wasn't the one he was looking for either.
The book he had found was very, very funny though.
It told the story of a group of friends travelling in a wooden aeroplane
and the wood was rotten.
When he remembered the story, he burst out laughing.

Ya solo quedaba un montón donde buscar, el más grande de todos.
El conejo empezó a remover los objetos que componían esa quinta pila.
Y venga sacar cosas: una camiseta amarilla, unos calcetines azules que no sabía que tenía...
Removía y removía, pero no, no, no. No lo encontraba.
Al final, sin querer, se fijó en un libro medio escondido.

There was only one pile of things left, and it was the biggest of them all.
The rabbit began to remove all of the objects from that fifth pile: a yellow T-shirt, a pair of blue socks he didn't know he had...
He looked and looked, but no, he couldn't find it.
Then, just when he thought he had finished, he noticed a half-hidden book under the pile.

¡Qué alegría! ¡Era el libro que tanto había buscado!
Decidió que, después de tanto esfuerzo, valía la pena releerlo.
Así que empezó la lectura.
¡Lloraba de tanto reír!
—¡Sí! —pensaba—. Ciertamente, este libro es el más divertido de todos.

What joy! It was the book he'd been looking for!
He decided that after all that effort, it was worth rereading it.
So he began reading.
He was crying from laughing so much!
"Yes!" he thought, "this book is definitely the funniest of them all".

De repente notó que alguien le miraba y al girarse, ¡qué sorpresa! ¡Sus amigos estaban allí!
—¡Hola! ¿Qué ocurre? ¿No teníamos que encontrarnos esta tarde a las cinco? ¿Qué hacéis aquí?
—Pero, conejo... ¡Si son las nueve de la noche! ¡Hace cuatro horas que te esperamos!
¡Qué desastre! ¡Releyendo el libro se lo había pasado tan bien que ni se dio cuenta de la hora que era!

Suddenly he felt someone looking at him, and when he turned round, what a surprise!
It was his friends!
"Hey! What are you doing here? Didn't we say we'd meet at five o'clock this afternoon?"
"But, rabbit, it's nine o'clock at night! We've been waiting for you for four hours!"
Oh no! The rabbit had had such a good time rereading the book that he hadn't even realized what time it was!

Escrito e ilustrado por: Queralt Viladevall

Written and illustrated by: Queralt Viladevall

Experiencias docentes

# Innovación educativa en matemáticas mediante el uso de plataformas virtuales: Experiencias docentes en la educación universitaria

# Educational innovation in mathematics through the use of virtual platforms: Teaching experiences in university education

María C Urbano

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XV, Número 1, pp. 063–079, ISSN 2174-0410
Recepción: 12 Nov'24; Aceptación: 16 Dic'24

1 de abril de 2025

**Resumen**

El uso de plataformas virtuales ha transformado la enseñanza de las matemáticas en la educación universitaria, promoviendo la innovación pedagógica y mejorando la interacción entre docentes y estudiantes. Este estudio tiene como objetivo analizar cómo las plataformas virtuales contribuyen a la enseñanza de las matemáticas en el ámbito universitario, enfocándose en las experiencias docentes en la Universidad Simón Bolívar, sede El Litoral, en el estado La Guaira, en Venezuela y las estrategias pedagógicas innovadoras que se emplean. A través de un enfoque cualitativo, basado en entrevistas semiestructuradas y observación participante, se examinan las actitudes de cinco docentes hacia el uso de plataformas virtuales, así como las dificultades que enfrentan al integrarlas en su enseñanza. Los resultados indican que, aunque las plataformas virtuales permiten un aprendizaje más interactivo y colaborativo, muchos docentes enfrentan obstáculos como la falta de formación tecnológica y la resistencia al cambio en sus prácticas pedagógicas. A pesar de estas barreras, los docentes que adoptan un enfoque proactivo utilizan las plataformas para ofrecer recursos interactivos, fomentar la colaboración entre estudiantes y proporcionar retroalimentación personalizada. En este contexto, la investigación se apoya en enfoques pedagógicos clave, como el constructivismo social y el conectivismo, para comprender cómo la tecnología puede mejorar la interacción y el aprendizaje colaborativo en matemáticas. El estudio destaca la necesidad de una capacitación continua para los docentes y un apoyo institucional sólido para superar las dificultades tecnológicas. Finalmente, se proponen recomendaciones para mejorar la integración de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas, con el objetivo de optimizar el aprendizaje y hacer más accesible la educación matemática en la universidad.

**Palabras Clave:** Innovación educativa, matemáticas, plataformas virtuales, educación universitaria, experiencias docentes.

**Abstract**

The use of virtual platforms has transformed the teaching of mathematics in university education, promoting pedagogical innovation and improving the interaction between teachers and students. This study aims to analyze how virtual platforms contribute to the teaching of mathematics in the university setting, focusing on the teaching experiences at the Universidad Simón Bolívar, El Litoral campus, in the state of La Guaira, Venezuela, and the innovative pedagogical strategies that are used. Through a qualitative approach, based on semi-structured interviews and participant observation, the attitudes of five teachers towards the use of virtual platforms are examined, as well as the difficulties they face when integrating them into their teaching. The results indicate that, although virtual platforms allow for more interactive and collaborative learning, many teachers face obstacles such as a lack of technological training and resistance to change in their pedagogical practices. Despite these barriers, teachers who adopt a proactive approach use the platforms to offer interactive resources, encourage collaboration between students, and provide personalized feedback. In this context, the research draws on key pedagogical approaches, such as social constructivism and connectivism, to understand how technology can enhance interaction and collaborative learning in mathematics. The study highlights the need for ongoing training for teachers and strong institutional support to overcome technological difficulties. Finally, recommendations are proposed to improve the integration of virtual platforms in mathematics teaching, with the aim of optimizing learning and making mathematics education at university more accessible.

**Keywords:** Educational innovation, Mathematics, Virtual platforms, Higher education, Teaching experiences.

# 1. Introducción

La incorporación de las plataformas virtuales en la educación universitaria ha marcado un punto de inflexión en la forma en que los docentes imparten sus clases y los estudiantes acceden a los contenidos. En disciplinas como las matemáticas, tradicionalmente complejas y abstractas, estas plataformas ofrecen un espacio que promueve nuevas formas de interacción, aprendizaje activo y colaboración. Sin embargo, la efectividad de su uso depende de diversos factores, tales como la preparación tecnológica de los docentes, la infraestructura disponible y la disposición de estos para integrar las tecnologías en sus enfoques pedagógicos (Garcés & Santoya, 2011).

### 1.1. Las TIC en la Educación

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han demostrado ser herramientas fundamentales para transformar la educación tradicional, proporcionando flexibilidad, accesibilidad y oportunidades para un aprendizaje más personalizado. Según Garcés & Santoya (2011), las TIC facilitan la creación de entornos virtuales donde el estudiante no solo accede al contenido, sino que interactúa activamente con él, promoviendo un aprendizaje más significativo. En el caso de las matemáticas, las TIC permiten el uso de simuladores, software interactivo y plataformas de evaluación automática, que enriquecen la experiencia del estudiante al facilitar la comprensión de conceptos complejos (Díaz Levicoy, 2014; Barrera & Guapi, 2018).

La incorporación de TIC en la enseñanza de las matemáticas se traduce en una mayor motivación y compromiso por parte de los estudiantes, ya que estas tecnologías permiten explorar los conceptos de manera visual e interactiva. Además, las TIC favorecen el aprendizaje autónomo, donde los estudiantes pueden avanzar a su propio ritmo y resolver problemas matemáticos con herramientas que brindan retroalimentación instantánea (Gros, 2003).

**1.2. Educación a Distancia y su Impacto en las Matemáticas**

La educación a distancia, como modalidad educativa, ha crecido exponencialmente gracias a la integración de las TIC. Según Barrera & Guapi (2018), la educación a distancia permite a los estudiantes acceder al contenido desde cualquier lugar, superando barreras geográficas y temporales. Esto es particularmente relevante en el caso de las matemáticas, una disciplina que tradicionalmente requiere una interacción constante entre el docente y el estudiante.

Por su parte, Rodríguez (2010) también subraya la importancia de esta modalidad en la enseñanza de asignaturas complejas, como las matemáticas, ya que facilita la participación activa de los estudiantes a través de plataformas virtuales, mejorando la accesibilidad y flexibilidad en el proceso de aprendizaje.

En entornos de educación a distancia, las plataformas virtuales juegan un papel central al proporcionar herramientas como:

- Clases en línea: Permiten a los estudiantes seguir explicaciones detalladas de problemas matemáticos complejos.
- Foros de discusión: Facilitan la interacción entre estudiantes y docentes, fomentando el aprendizaje colaborativo.
- Evaluaciones automatizadas: Ayudan a los estudiantes a recibir retroalimentación inmediata sobre su desempeño.

La educación a distancia también ha impulsado el desarrollo de recursos abiertos, como tutoriales en línea, cursos masivos abiertos (MOOCs) y bases de datos matemáticas interactivas, que complementan el aprendizaje formal en las plataformas virtuales.

**1.3. Teoría Constructivista: Aprendizaje Colaborativo y Matemáticas**

El constructivismo, propuesto por Vygotsky (1978), enfatiza la importancia del aprendizaje colaborativo y la interacción social en el desarrollo del conocimiento. En la enseñanza de las matemáticas, este enfoque es particularmente útil, ya que los estudiantes pueden resolver problemas juntos, discutir diferentes enfoques y construir colectivamente su comprensión de los conceptos.

Las plataformas virtuales facilitan este tipo de aprendizaje al permitir:

- Interacción constante entre estudiantes y docentes.
- Espacios colaborativos donde los estudiantes pueden compartir sus soluciones y trabajar en proyectos conjuntos.
- Retroalimentación personalizada, que ayuda a los estudiantes a identificar sus errores y aprender de ellos.

**1.4. Conectivismo: Redes de Conocimiento en Matemáticas**

El conectivismo de Siemens (2005) ofrece una perspectiva moderna del aprendizaje, donde los estudiantes forman redes de conocimiento que combinan múltiples fuentes de información. En el contexto de las matemáticas, esto significa que los estudiantes pueden aprender no solo de sus docentes, sino también de:

- Recursos en línea: Videos tutoriales, simuladores y software especializado.
- Interacciones entre pares: A través de foros y espacios colaborativos.
- Conexiones con expertos externos: A través de webinars y otras herramientas interactivas.

Este modelo es especialmente relevante para las matemáticas, ya que fomenta un aprendizaje activo y exploratorio, donde los estudiantes toman la iniciativa para resolver problemas y buscar información de manera autónoma.

**1.5. Acción Humana: Reflexión Docente y Adaptación Tecnológica**

La teoría de la acción humana de Argyris y Schön (1974) subraya la importancia de la reflexión crítica en el proceso de enseñanza. En el caso de las matemáticas, los docentes deben reflexionar constantemente sobre cómo adaptan sus prácticas pedagógicas para maximizar el uso de las plataformas virtuales.

Esto incluye:

- Diseñar estrategias que combinen herramientas tecnológicas con metodologías tradicionales.
- Evaluar el impacto de las plataformas en el aprendizaje de los estudiantes.
- Superar barreras como la resistencia al cambio y la falta de formación tecnológica.

La combinación de las TIC, la educación a distancia y las teorías pedagógicas fundamentales proporciona un marco sólido para comprender cómo las plataformas virtuales pueden transformar la enseñanza de las matemáticas. Estas herramientas no solo mejoran la **interacción y colaboración**, sino que también permiten a los estudiantes y docentes adaptarse a los desafíos de un entorno educativo cada vez más digitalizado.

**1. 6. La Formación de Docentes en la Pedagogía Virtual**

La formación docente en pedagogía virtual es un aspecto fundamental para el éxito de la educación digital y el uso de plataformas virtuales. Para que los docentes integren de manera efectiva las TIC en su enseñanza, deben recibir formación específica en el uso pedagógico de estas herramientas. Esto no solo implica familiarizarse con el uso de plataformas tecnológicas, sino también con la adaptación pedagógica necesaria para que el aprendizaje en línea sea efectivo.

Según Garcés & Santoya (2011) la formación docente debe incluir aspectos clave como el diseño de materiales digitales, la creación de contenidos interactivos y la gestión de entornos de aprendizaje virtual. Los docentes deben aprender a utilizar las plataformas virtuales no solo como medios de distribución de contenido, sino como herramientas que fomenten el aprendizaje activo, la colaboración y la autonomía del estudiante.

**1.7. Estrategias Tecnológicas en la Enseñanza de las Matemáticas**

Las estrategias tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas involucran el uso de herramientas digitales que permiten a los docentes diseñar actividades interactivas, simulaciones matemáticas y evaluaciones en línea que faciliten la comprensión de conceptos complejos. Las plataformas virtuales, como Moodle o Blackboard, permiten a los docentes crear espacios colaborativos donde los estudiantes pueden trabajar en proyectos, discutir soluciones y recibir retroalimentación inmediata.

Una estrategia fundamental es la gamificación, que consiste en aplicar elementos de juego en el proceso de aprendizaje. Esto se ha demostrado como una herramienta poderosa para motivar a los estudiantes a involucrarse activamente con los contenidos matemáticos, especialmente en temas que requieren práctica constante, como el álgebra o el cálculo.

### 1.8. Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación

Las nuevas tecnologías aplicadas a la educación están reformulando los métodos tradicionales de enseñanza y aprendizaje. Las tecnologías emergentes, como la realidad aumentada, la inteligencia artificial y las aplicaciones móviles, están comenzando a ser integradas en la educación superior. Estas tecnologías permiten crear entornos de aprendizaje más inmersivos, personalizados y adaptativos.

Por ejemplo, el uso de realidad aumentada permite a los estudiantes visualizar problemas matemáticos en 3D, lo que facilita la comprensión de conceptos abstractos como las superficies en geometría. Las aplicaciones móviles, como Wolfram Alpha o GeoGebra, permiten a los estudiantes explorar conceptos matemáticos de manera práctica y dinámica, proporcionando recursos adicionales fuera del aula.

### 1.9. Beneficios y Ventajas de las TIC en la Educación Matemática

Las TIC ofrecen numerosas ventajas en la enseñanza de las matemáticas. Entre los principales beneficios se incluyen:

- Accesibilidad: Los estudiantes pueden acceder a materiales de aprendizaje desde cualquier lugar y en cualquier momento, lo que facilita el aprendizaje autónomo y la flexibilidad en los horarios.
- Interactividad: Las plataformas permiten a los estudiantes interactuar con el contenido de manera activa, participando en simulaciones, prácticas interactivas y resolviendo problemas en tiempo real.
- Colaboración: Las TIC fomentan el trabajo en equipo a través de foros de discusión y tareas colaborativas en línea, permitiendo a los estudiantes compartir soluciones y aprender de sus compañeros.
- Retroalimentación inmediata: Las plataformas ofrecen la posibilidad de recibir retroalimentación instantánea sobre las respuestas de los estudiantes, lo que facilita un proceso de aprendizaje más eficiente y personalizado.

Además, el uso de TIC en la enseñanza de las matemáticas ayuda a superar algunos de los desafíos tradicionales, como la falta de motivación y la dificultad para comprender conceptos abstractos. Las herramientas digitales permiten que los estudiantes visualicen los problemas matemáticos de manera más interactiva y visual, haciendo el aprendizaje más atractivo y comprensible. (Niño Merlo, 2023).

### 1.10. Integración de las TIC en el Aula de Matemáticas

La integración de las TIC en el aula de matemáticas es clave para transformar la educación tradicional. El uso adecuado de estas herramientas permite a los docentes ofrecer un aprendizaje más personalizado y orientado a la resolución de problemas, aspectos fundamentales en la enseñanza de las matemáticas, una disciplina que requiere de un enfoque práctico y conceptual. Según Barrera & Guapi (2018), las TIC tienen el potencial de transformar la enseñanza, proporcionando nuevas formas de interactuar con el contenido y creando un entorno de aprendizaje más dinámico y accesible. Sin embargo, la adopción efectiva de las TIC depende de varios factores, como la formación docente, la infraestructura tecnológica disponible y la adaptación pedagógica de las estrategias de enseñanza.

Las plataformas virtuales deben ser vistas no solo como un recurso complementario, sino como una herramienta fundamental que puede mejorar la comprensión conceptual y motivación de los estudiantes. En este sentido, la formación docente en el uso pedagógico de las TIC es crucial. Según Barrera & Guapi (2018), la capacitación de los docentes en el uso de plataformas virtuales permite diseñar experiencias de aprendizaje interactivas que integren tanto la teoría como la práctica de las matemáticas. Las herramientas digitales pueden fomentar un aprendizaje más activo, donde los estudiantes no solo reciben información, sino que participan de manera activa en la construcción de su conocimiento.

La integración pedagógica de las TIC también facilita la enseñanza de conceptos abstractos, como los relacionados con la geometría, álgebra y cálculo, mediante el uso de simuladores matemáticos y recursos visuales. Gros (2003) destaca que estas tecnologías permiten a los estudiantes visualizar problemas matemáticos complejos en un formato interactivo y práctico, lo que facilita su comprensión. Además, las plataformas virtuales permiten a los docentes ofrecer un aprendizaje personalizado al adaptar el contenido a las necesidades de cada estudiante, proporcionando recursos adicionales y herramientas para la resolución de ejercicios.

El potencial de las TIC en la enseñanza de las matemáticas es considerable, pero para que estas herramientas sean efectivas, es necesario que los docentes reciban formación continua en su uso pedagógico. Según Garcés & Santoya (2011), los docentes deben ser capacitados no solo para utilizar las plataformas, sino también para incorporar las estrategias pedagógicas adecuadas que faciliten el aprendizaje significativo. Además, es fundamental que las plataformas sean accesibles y adaptadas a las necesidades pedagógicas del aula. Cáceres (2016) subraya que la infraestructura tecnológica debe ser robusta para garantizar que los recursos estén disponibles para todos los estudiantes y docentes, sin importar las limitaciones tecnológicas que puedan existir.

En conclusión, la integración de las TIC en el aula de matemáticas ofrece un gran potencial para mejorar la calidad educativa, favoreciendo un aprendizaje interactivo, colaborativo y personalizado. Las plataformas virtuales, la realidad aumentada y las aplicaciones móviles permiten el acceso a contenidos innovadores y la resolución de problemas matemáticos, pero para que estas herramientas sean efectivas, es necesario asegurar una adecuada formación docente y una infraestructura tecnológica que apoye su implementación en el aula.

### 1. 11. Objetivos

De acuerdo con lo anterior el objetivo de este artículo es analizar cómo el uso de plataformas virtuales contribuye a la innovación pedagógica en la enseñanza de las matemáticas en la educación universitaria, a partir de las experiencias de los docentes. Partiendo de este, los objetivos específicos planteados son los siguientes:

1. Examinar las actitudes y percepciones de los docentes universitarios hacia el uso de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas: Este objetivo se enfoca en

comprender cómo los docentes valoran y experimentan el uso de las plataformas virtuales. Se busca identificar si las percepciones son positivas, negativas o neutrales, y cómo estas percepciones impactan en su disposición para utilizar las herramientas tecnológicas en sus clases.

2. Identificar las estrategias pedagógicas innovadoras que los docentes emplean al integrar plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas: Aquí se pretende explorar las metodologías y técnicas innovadoras que los docentes utilizan para enseñar matemáticas con el apoyo de las plataformas virtuales. El objetivo es identificar enfoques como la gamificación, el uso de simuladores matemáticos, la colaboración en línea, entre otros.
3. Analizar las dificultades y barreras que enfrentan los docentes en la integración de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas: Este objetivo se centra en investigar las dificultades tecnológicas, pedagógicas o institucionales que los docentes encuentran al intentar integrar plataformas virtuales en su enseñanza. Se busca comprender los obstáculos relacionados con la formación tecnológica, la infraestructura y otros factores limitantes.
4. Proponer recomendaciones para la integración efectiva de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas: A partir de los resultados obtenidos, se pretende generar recomendaciones prácticas que ayuden a optimizar el uso de las plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas, con el objetivo de mejorar el rendimiento académico y hacer más efectiva la implementación pedagógica.

A través de un enfoque cualitativo, se explorarán las actitudes y percepciones de los docentes hacia el uso de estas herramientas tecnológicas, las estrategias pedagógicas innovadoras que emplean, y las dificultades que enfrentan en su integración. Finalmente, se propondrán recomendaciones para la integración efectiva de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas, con el fin de optimizar su uso y mejorar los resultados de aprendizaje.

# 2. Metodología

### 2.1. Enfoque de la Investigación

Este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo bajo el paradigma interpretativo, el cual se caracteriza por la comprensión profunda de fenómenos desde la perspectiva de los actores involucrados. En este caso, el fenómeno investigado es el uso de plataformas virtuales con fines pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas en la Universidad Simón Bolívar, sede El Litoral. Según Guba y Lincoln (1991), este paradigma busca entender la realidad desde la subjetividad y contextualización de los sujetos, permitiendo obtener una visión holística de la experiencia de los docentes al integrar tecnologías en su práctica pedagógica.

La investigación se interesa por el crecimiento de la experiencia humana y la subjetividad, reconociendo que el conocimiento se construye a partir de la interacción y las vivencias de los sujetos en su contexto social. Esta perspectiva permite generar generalizaciones y nexos causales derivados de la comprensión profunda de los fenómenos observados.

### 2.2. Paradigma de la Investigación

El paradigma interpretativo se complementa con el enfoque fenomenológico-hermenéutico, ya que busca estudiar las vivencias de los docentes respecto a su experiencia en el uso de plataformas virtuales. Este enfoque es adecuado para estudiar fenómenos educativos complejos, donde la subjetividad y las experiencias individuales juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento. Según Husserl (1997), la fenomenología se enfoca en las estructuras de la conciencia y cómo los individuos experimentan su mundo, lo que permite comprender el fenómeno desde la perspectiva de los sujetos. Además, la hermenéutica proporciona una comprensión más profunda de cómo los docentes interpretan su experiencia con la tecnología y cómo estas interpretaciones influyen en su práctica pedagógica.

**2.3. Método de Investigación**

El **método fenomenológico-hermenéutico** es el más adecuado para este estudio, ya que permite explorar las experiencias de los docentes a través de la interpretación y comprensión de los fenómenos desde su **perspectiva subjetiva**. Este método se enfoca en las **vivencias** personales de los sujetos, y en cómo estos construyen significados de su interacción con las plataformas virtuales (Fuster Guillen, 2019).

A través de la observación participante y entrevistas semi-estructuradas, se busca comprender cómo los docentes experimentan el uso de la tecnología en sus prácticas pedagógicas y cómo interpretan estos cambios en su labor educativa. Este enfoque permite **capturar** la esencia del fenómeno sin manipularlo, preservando la autenticidad de las experiencias de los participantes.

**2.4. Muestra y Selección de Participantes**

La muestra está compuesta por cinco docentes de matemáticas de la Universidad Simón Bolívar, seleccionados bajo un muestreo intencional. Los criterios de selección fueron:

- Docentes activos que impartan cursos de matemáticas en los niveles básico y avanzado.
- Experiencia en el uso de plataformas virtuales para la enseñanza.
- Diversidad en las asignaturas impartidas, para garantizar una muestra representativa de los enfoques pedagógicos en diferentes niveles de dificultad matemática.

**2.5. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información**

Para la recolección de datos se emplearon dos técnicas principales:

a) Observación Participante: Esta técnica permite al investigador integrarse en el contexto educativo, observando de manera activa las interacciones entre docentes y estudiantes. Se registraron las estrategias pedagógicas, el uso de las plataformas y la interacción en clase. La observación fue no estructurada, permitiendo capturar las dinámicas espontáneas.

b) Entrevistas Semi-Estructuradas: Las entrevistas fueron realizadas a los informantes clave, los docentes seleccionados. Se empleó una guía de temas abierta, lo que permitió profundizar en las experiencias personales de los docentes. Las entrevistas fueron grabadas y transcritas para su posterior análisis.

**2.6. Técnicas de Procesamiento e Interpretación de la Información**

El análisis de los datos se llevó a cabo mediante un proceso de categorización y teorización. Según Martínez (2004), una vez recogida la información, el investigador clasifica los datos en categorías significativas. Las categorías emergentes fueron relacionadas con la actitud de los docentes hacia las plataformas virtuales, el impacto en la enseñanza de las matemáticas y las dificultades encontradas en el proceso de implementación.

El análisis también incluyó la comparación entre las respuestas de los docentes en relación con su nivel de experiencia y el uso de tecnologías. Este enfoque permitió una comprensión más rica de cómo las plataformas virtuales están transformando las prácticas pedagógicas en la enseñanza de las matemáticas.

**2.7. Matriz de Análisis de Categorías**

La matriz de categorías que se presenta proporciona un marco organizado para analizar los datos en función de las preguntas y los objetivos específicos de la investigación. Además, facilita la interpretación de las respuestas de los docentes y la organización de los resultados en áreas clave, como las percepciones, las estrategias pedagógicas, las dificultades y las recomendaciones.

*Tabla1. Matriz de Análisis de Categorías*

| Categoría | Descripción | Preguntas Relacionadas | Objetivos Específicos Relacionados | Subcategorías |
|---|---|---|---|---|
| Plataforma Virtual | Percepción y uso de las plataformas virtuales en el aula de matemáticas. | 1. ¿Qué concepción tiene usted sobre la plataforma virtual? | Objetivo 1: Examinar las actitudes y percepciones de los docentes sobre el uso de plataformas virtuales. | - Uso pedagógico<br>- Herramienta educativa<br>- Barreras tecnológicas |
| Proceso de Enseñanza y Aprendizaje | Impacto de las plataformas virtuales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. | 2. ¿Qué entiende por plataforma virtual educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje? | Objetivo 2: Identificar las estrategias pedagógicas innovadoras que los docentes emplean con las plataformas. | - Aprendizaje autónomo<br>- Aprendizaje colaborativo<br>- Dinámicas de clase |
| Educación Universitaria | Cómo las plataformas virtuales afectan a la educación universitaria. | 3. ¿Cree que la plataforma virtual aporta cambio a la educación universitaria? | Objetivo 3: Analizar las dificultades y barreras que los docentes enfrentan en la integración de plataformas. | - Impacto en la calidad educativa<br>- Mejora en el rendimiento estudiantil<br>- Inclusión tecnológica |
| Educación Virtual | Impacto y relevancia de la | 4. ¿Qué impacto e importancia | Objetivo 4: Proponer | - Modalidad semipresencial |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | educación virtual en la educación superior. | tienen las plataformas virtuales en la educación universitaria? | recomendaciones para la integración efectiva de plataformas virtuales. | - Aumento en la accesibilidad<br>- Flexibilidad en horarios y contenidos |
| Transformación de la Práctica Pedagógica del Docente | Cambios en las prácticas pedagógicas del docente debido a la integración de plataformas virtuales. | No Aplicable (Esta categoría se aborda durante el análisis de las experiencias y percepciones de los docentes). | Objetivo 2: Identificar las estrategias pedagógicas innovadoras empleadas en la enseñanza de las matemáticas. | Transformación de la enseñanza<br>- Rol de facilitador<br>- Formación continua |

### 2.7.1. Descripción de las Categorías

**Plataforma Virtual:**

a) Descripción: Analiza las percepciones de los docentes sobre las plataformas virtuales en su enseñanza. Incluye las concepciones que los docentes tienen sobre las plataformas y cómo estas herramientas se perciben como un recurso educativo.

b) Pregunta clave: ¿Qué concepción tiene usted sobre la plataforma virtual?

c) Objetivo Relacionado: Objetivo 1: Explorar las percepciones y actitudes de los docentes hacia el uso de plataformas virtuales.

**Proceso de Enseñanza y Aprendizaje:**

a) Descripción: Analiza cómo las plataformas virtuales modifican el proceso pedagógico de enseñanza y aprendizaje en matemáticas, favoreciendo prácticas de aprendizaje colaborativo y autónomo.

b) Pregunta clave: ¿Qué entiende por plataforma virtual educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje?

c) Objetivo Relacionado: Objetivo 2: Identificar las estrategias pedagógicas innovadoras que los docentes emplean al usar plataformas virtuales.

**Educación Universitaria:**

a) Descripción: Evalúa el impacto de las plataformas virtuales en la educación universitaria, especialmente en la calidad educativa y el rendimiento estudiantil.

b) Pregunta clave: ¿Cree que la plataforma virtual aporta cambio a la educación universitaria?

c) Objetivo Relacionado: Objetivo 3: Analizar las dificultades y barreras que los docentes enfrentan en la integración de plataformas virtuales.

**Educación Virtual:**

a) Descripción: Explora el impacto general de la educación virtual en el entorno universitario, particularmente en la flexibilidad y accesibilidad que las plataformas ofrecen.

b) Pregunta clave: ¿Qué impacto e importancia tienen las plataformas virtuales en la educación universitaria?

c) Objetivo Relacionado: Objetivo 4: Proponer recomendaciones para optimizar la integración de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas.

**Transformación de la Práctica Pedagógica del Docente:**

a) Descripción: Explora cómo el uso de las plataformas virtuales transforma la práctica pedagógica del docente, cambiando su rol de transmisor de conocimiento a facilitador del aprendizaje.

b) Objetivo Relacionado: Objetivo 2: Identificar cómo los docentes adaptan sus estrategias pedagógicas y cómo estas transformaciones favorecen el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas.

#### 2.7.2. Proceso de Categorización

El proceso de categorización implicó:

a) Transcribir y detallar la información obtenida de las entrevistas.

b) Dividir los datos en unidades temáticas y asignarles un nombre que sintetizara el significado de cada categoría.

c) Interpretar las unidades temáticas, relacionándolas con las categorías emergentes para generar conclusiones más profundas sobre las actitudes de los docentes hacia el uso de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas.

## 3. Resultados

### 3.1. Presentación de los Resultados en función de los Objetivos Específicos

Objetivo Específico 1: Examinar las actitudes y percepciones de los docentes universitarios hacia el uso de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas.

- Categoría: Plataforma Virtual

Pregunta relacionada**: ¿Qué concepción tiene usted sobre la plataforma virtual?**

Resultados:

Los docentes entienden la plataforma virtual como un conjunto de herramientas accesibles a través de internet, que permite llevar a cabo diversas funciones sin necesidad de presencia física. Un docente indicó:

*"Una plataforma virtual la asocio con un conjunto de procedimientos que permiten a las personas llevar a cabo diversas funciones o aplicaciones en un mismo espacio, sin necesidad de estar presentes físicamente, pero contando necesariamente con acceso a internet".*

Objetivo Específico 2: Identificar las estrategias pedagógicas innovadoras que los docentes emplean al integrar plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas.

- Categoría: Proceso de Enseñanza y Aprendizaje

Pregunta relacionada: ¿Qué entiende por plataforma virtual educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje?

Resultados:

Los docentes han destacado que las plataformas virtuales facilitan la organización de las clases y la asignación de tareas, permitiendo una mayor flexibilidad en el proceso de enseñanza. Un docente comentó:

*"Una plataforma educativa es una herramienta que facilita la comunicación e interacción virtual como complemento de la presencial en el sistema de educación en línea para el proceso de enseñanza y aprendizaje".*

Objetivo Específico 3: Analizar las dificultades y barreras que enfrentan los docentes en la integración de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas.

Categoría: Educación Universitaria

Pregunta relacionada: ¿Cree que la plataforma virtual aporta cambio a la educación universitaria?

Resultados:

Si bien los docentes reconocen que las plataformas virtuales aportan cambios significativos, también mencionan que la implementación abrupta de la educación virtual durante la pandemia causó dificultades en su integración. Un docente señaló:

*"Creo que hubo mucha improvisación en cuanto a tratar de implementar la educación virtual de una manera abrupta. Ahora bien, si se hace un uso adecuado de las plataformas virtuales, el impacto en la educación universitaria es evidente: interacción docente-alumno y alumno-alumno sin barreras físicas ni distancias".*

Objetivo Específico 4: Proponer recomendaciones para la integración efectiva de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas.

Categoría: Educación Virtual

Pregunta relacionada: ¿Qué impacto e importancia tienen las plataformas virtuales en la educación universitaria?

Resultados:

Los docentes coinciden en que la educación virtual ha transformado la dinámica educativa, promoviendo interacciones multimodales. Sin embargo, para su integración efectiva, es necesario realizar una actualización del currículo y la formación continua de los docentes en el uso de estas herramientas.

*"La plataforma virtual permite la interacción multimodal entre docentes y estudiantes, pero se debe redimensionar el diseño curricular hacia una educación virtual."*

Categoría: Transformación de la Práctica Pedagógica del Docente

Pregunta relacionada: ¿Cree que es importante el uso de las plataformas virtuales como un cambio en la práctica docente?

Resultados:

Los docentes mencionaron que la transformación de la práctica pedagógica es necesaria para adaptarse a la nueva realidad educativa.

*"Es evidente que la dinámica mundial nos obliga a cambiar muchas cosas y la transformación de la práctica docente es una de ellas. El uso de las plataformas virtuales constituye un reto para todos los docentes que no han estado familiarizados con estos entornos".*

# 4. Discusión

**Innovación Pedagógica a través de Plataformas Virtuales**

Los resultados obtenidos en este estudio respaldan la idea de que las plataformas virtuales juegan un papel fundamental en la innovación pedagógica dentro de la enseñanza universitaria de las matemáticas. El uso de estas herramientas permite que los docentes adopten enfoques más flexibles, interactivos y colaborativos, alineándose con las ideas de Vygotsky (1978), quien plantea que el aprendizaje es un proceso social **y** colectivo, favorecido por la interacción entre estudiantes y docentes.

Las TIC, como las plataformas virtuales, proporcionan entornos de aprendizaje más dinámicos, donde los estudiantes pueden acceder a materiales educativos de forma autónoma y resolver problemas matemáticos en tiempo real. Los docentes participantes en este estudio reconocen las ventajas de estas plataformas para promover la autonomía del estudiante y la interacción fuera del aula presencial, lo que coincide con los hallazgos de Garcés & Santoya (2011), quienes argumentan que las plataformas virtuales ofrecen mayor accesibilidad a los contenidos educativos y facilitan un aprendizaje más inclusivo.

Sin embargo, a pesar de estos beneficios, los docentes también expresaron que la implementación de las plataformas virtuales no es inmediata y presenta retos significativos, como la resistencia al cambio y la falta de recursos tecnológicos adecuados. Este desafío es consistente con lo señalado por Zuña et. al (2020) quienes concluyeron en su investigación que la implementación de las TIC en la educación se enfrenta a múltiples desafíos que van desde la resistencia al cambio por parte de los docentes hasta la falta de recursos económicos y la ausencia de un enfoque estratégico. Superar estas barreras requiere de una inversión sostenida en tecnología, formación docente y desarrollo de políticas educativas que promuevan la innovación y la integración de las TIC en todos los niveles educativos.

**Estrategias Pedagógicas Innovadoras**

Los docentes involucrados en este estudio implementan diversas estrategias pedagógicas innovadoras, como el uso de simuladores matemáticos, gamificación y aprendizaje colaborativo. Estas estrategias no solo facilitan el acceso al contenido matemático, sino que también permiten a los estudiantes interactuar con el material de una manera dinámica y práctica. Las plataformas virtuales permiten que estas estrategias se lleven a cabo de manera eficiente, como lo demuestra el uso de herramientas como GeoGebra y Desmos para la visualización de conceptos matemáticos.

Esta tendencia se encuentra en línea con los enfoques pedagógicos defendidos por Garrison (2003), quien sostiene que las tecnologías deben ser vistas no solo como herramientas de apoyo, sino como facilitadoras del aprendizaje activo. Sin embargo, algunos docentes mencionaron que estas estrategias no son implementadas de manera uniforme en todas las clases de matemáticas, lo que sugiere que hay una desigualdad en la preparación y el **uso** de las plataformas, un hallazgo que resalta la necesidad de programas de capacitación docente más específicos y sistemáticos.

**Dificultades y Barreras**

Una de las principales barreras que los docentes mencionaron es la falta de formación continua en el uso de plataformas virtuales, lo que limita su capacidad para integrarlas eficazmente en la enseñanza de las matemáticas. Este hallazgo coincide con la literatura existente, que subraya que la capacitación docente es un componente clave para el éxito de la integración tecnológica (Garrison, 2003). Los docentes reportaron sentirse abrumados por las demandas tecnológicas y pedagógicas que conlleva el uso de plataformas, especialmente cuando no reciben soporte institucional adecuado.

Además, se identificaron dificultades técnicas, como la infraestructura deficiente y los problemas de conectividad. Estos obstáculos dificultan la implementación efectiva de las plataformas virtuales, limitando su impacto positivo en el proceso educativo. Este resultado refleja las barreras tecnológicas mencionadas por Gómez Martinez (2017), quien argumenta que, aunque las plataformas virtuales pueden mejorar el aprendizaje, su eficacia depende en gran medida de la disponibilidad de recursos tecnológicos.

**Impacto en la Práctica Pedagógica**

Los docentes coinciden en que el uso de plataformas virtuales ha transformado su práctica pedagógica, permitiéndoles adoptar un rol más facilitador y mediador en lugar de ser solo transmisores de contenido (Alastor et. al , 2023). Este cambio en el rol del docente es consistente con la teoría de la acción reflexiva de Argyris y Schön (1974), que sugiere que la reflexión constante sobre la práctica docente es esencial para mejorar la calidad educativa. Los docentes entrevistados indicaron que la integración de las plataformas virtuales los ha motivado a revisar sus enfoques pedagógicos, incorporando más tecnologías interactivas y enfoques colaborativos en sus clases.

Sin embargo, la resistencia al cambio y la falta de familiaridad con la tecnología continúan siendo un desafío para algunos docentes, especialmente aquellos con menos experiencia en el uso de plataformas digitales. Esta dificultad subraya la importancia de realizar un acompañamiento docente continuo, como sugieren Vygotsky (1978) y Siemens (2005), quienes destacan la necesidad de un entorno de apoyo colaborativo para facilitar el aprendizaje y la adopción de nuevas tecnologías.

## 5. Conclusión

Este estudio ha analizado el uso de plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas en la educación universitaria, con un enfoque particular en las experiencias de los docentes. A partir de los resultados obtenidos, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

**1. Impacto Positivo de las Plataformas Virtuales en la Enseñanza de las Matemáticas**

El uso de plataformas virtuales ha demostrado ser un catalizador significativo para la innovación pedagógica en la enseñanza de las matemáticas. Los docentes destacan los beneficios de las plataformas como herramientas que favorecen un aprendizaje más flexible, autónomo y colaborativo. La posibilidad de acceder a contenidos y recibir retroalimentación en tiempo real contribuye a una enseñanza más dinámica y accesible, que permite superar algunas de las barreras tradicionales en la enseñanza de una disciplina considerada abstracta y compleja. Este hallazgo es consistente con la literatura existente (Garrison ,2003), que resalta la capacidad de las plataformas virtuales para facilitar el aprendizaje activo y mejorar la interacción entre docentes y estudiantes, así como entre los propios estudiantes.

**2. Estrategias Pedagógicas Innovadoras**

Los docentes han implementado diversas estrategias pedagógicas innovadoras utilizando plataformas virtuales, como la gamificación, el uso de simuladores matemáticos, y la promoción del aprendizaje colaborativo. Estas estrategias no solo ayudan a visualizar conceptos abstractos, sino que también fomentan un enfoque práctico y dinámico de la enseñanza. Sin embargo, la implementación de estas estrategias varía, con algunos docentes adoptándolas más ampliamente que otros.

El hallazgo subraya la importancia de continuar el desarrollo profesional de los docentes en estas áreas, para garantizar que el potencial pedagógico de las plataformas virtuales sea aprovechado plenamente.

**3. Dificultades y Barreras en la Integración de Plataformas Virtuales**

A pesar de los beneficios observados, la integración de las plataformas virtuales enfrenta barreras significativas. Las dificultades tecnológicas, como la infraestructura deficiente y los problemas de conectividad, son obstáculos clave que limitan el acceso y uso efectivo de las plataformas. Además, la falta de formación continua en el uso pedagógico de las plataformas sigue siendo una barrera importante, lo que se alinea con estudios previos que han identificado la necesidad de capacitación docente para maximizar los beneficios de las tecnologías educativas.

**4. Transformación de la Práctica Pedagógica del Docente**

El uso de plataformas virtuales ha llevado a una transformación significativa en la práctica pedagógica de los docentes. Los resultados muestran que los docentes pasan de ser transmisores de conocimiento a facilitadores del aprendizaje, adaptando sus métodos de enseñanza a las exigencias del entorno digital. Sin embargo, este cambio no ha sido inmediato ni homogéneo, ya que algunos docentes aún enfrentan resistencia a la adopción de estas herramientas tecnológicas. Este hallazgo refuerza la idea de que el acompañamiento pedagógico y la formación continua son fundamentales para que la transformación pedagógica sea efectiva, tal como lo sugiere Garrison (2003).

**5. Recomendaciones para la Integración Efectiva de Plataformas Virtuales**

A partir de los resultados obtenidos, se proponen las siguientes recomendaciones para mejorar la integración efectiva de las plataformas virtuales en la enseñanza de las matemáticas:

- Capacitación docente continua: Es fundamental ofrecer programas de formación especializados que no solo incluyan el uso técnico de las plataformas, sino también la integración de estrategias pedagógicas innovadoras que fomenten el aprendizaje activo y colaborativo.

- Mejora en la infraestructura tecnológica: Las universidades deben garantizar que los docentes y estudiantes tengan acceso a infraestructura tecnológica adecuada, que permita un uso eficiente de las plataformas sin interrupciones ni barreras tecnológicas.
- Ajuste curricular: Los planes de estudio deben adaptarse para incluir el uso de plataformas virtuales como parte integral de la enseñanza de las matemáticas, promoviendo el aprendizaje flexible y la participación activa de los estudiantes.
- Fomento de la reflexión pedagógica: Crear espacios para que los docentes reflexionen sobre sus prácticas pedagógicas y compartan buenas prácticas de integración de plataformas virtuales, con el objetivo de mejorar la enseñanza en matemáticas.

Este estudio concluye que las plataformas virtuales tienen el potencial de mejorar significativamente la enseñanza de las matemáticas, promoviendo un aprendizaje más interactivo, colaborativo y personalizado. Sin embargo, para que su implementación sea exitosa, es necesario que los docentes reciban capacitación continua en el uso de las plataformas y que las instituciones educativas proporcionen apoyo tecnológico y pedagógico.

La reflexión crítica y la adaptación pedagógica son esenciales para superar las barreras tecnológicas y la resistencia al cambio. Las plataformas virtuales no solo deben ser vistas como una herramienta complementaria, sino como un cambio estructural en cómo se enseña y aprende matemáticas. A medida que los docentes se familiaricen con estas herramientas y desarrollen enfoques pedagógicos adecuados, el impacto positivo en el aprendizaje de las matemáticas será más evidente.

## Referencias


[1] ARGYRIS, Chris., & SCHÖN, Donald. (1974). *Organizational Learning: A Theory of Action Perspective, Sn. Francisco, Ca: Addison Wesley*

[2] ALASTOR, Enrique, SÁNCHEZ-VEGA, Elena, Martinez-Garcia, Inmaculada & RUBIO GRAGERA, María. (2023). *TIC en educación en la era digital: propuestas de investigación e intervención*. 10.24310/mumaedmumaed.65.

[3] BARRERA, Victor. & GUAPI, Ana. (2018). "La importancia del uso de las plataformas virtuales en la educación superior", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo.

[4] DÍAZ LEVICOY, Danilo (2014). TIC en Educación Superior: Ventajas y desventajas. *Educación y tecnología.* ISSN-e 0719-2495, Nº. 4, 2013, págs. 44-50.

[5] FUSTER GUILLEN, Doris. (2019). Investigación cualitativa: Método fenomenológico hermenéutico. *Propósitos y Representaciones*, *7*(1), 201-229.

[6] GARCÉS, Miguel & SANTOYA, Yannin (2011). Propuesta de reforma educativa superior en Colombia y Modelos Pedagógicos. *Revista Cultural Unilibre*, 1, 78-85.

[7] GARRISON, Randy (2003). E-Learning in the 21st century: A framework for research and practice. London: Routledge Falmer.

[8] GÓMEZ MARTÍNEZ, Leonardo. (2017). Desarrollo cognitivo y educación formal: análisis a partir de la propuesta de L. S. Vygotsky. *Universitas Philosophica, 34*(69), pp. 53-75.

[9] GUBA, Egon & LINCOLN, Yvonna (1991). Investigación naturalista y racionalista. En T. Husen y T.N Postlethwaite (Dir). (1989-1993). *Enciclopedia internacional de la Educación.* Barcelona: Vicens-vives / MEC. Vol. 6 pp.3337-3343.

[10] HUSSERL, E. (1997). *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica.* México: Fondo de Cultura Económica, México.

[11] MARTÍNEZ, Miguel. (2004). *Ciencia y Arte en la Metodología Cualitativa*. Márquez México: Trillas.

[12] NIÑO MERLO , Carlos Andrés. (2023). Enseñanza de las Matemáticas Mediadas por las TIC. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *7*(5), 8796-8812.

[13] SIEMENS, George (2005). Teoría del Conectivismo: Una Teoría para la Enseñanza en la Era Digital. Instituto de Investigación del Conocimiento Mejorado por la Tecnología (TEKRI) en la Universidad de Athabasca.

[14] ZUÑA MACANCELA, Edgar, ROMERO, Wilson, PALMA VIDAL, Julio & SOLEDISPA BAQUE, Cesar (2020). Plataformas virtuales y fomento del aprendizaje colaborativo en estudiantes de educación superior. *Sinergias Educativas*, *1*(5).

**Sobre el/los autor/es:**

*Nombre:* María C Urbano
*Correo Electrónico:* murbano@usb.ve

*Institución:* Universidad Simón Bolívar, Venezuela.

# Historias de Matemáticas: Matemáticas para la sostenibilidad

# Modelación matemática para comprender los efectos de los turistas sobre el medio ambiente

# Mathematical modeling to understand the effects of tourists on the environment

Osvaldo Osuna, José Geiser Villavicencio-Pulido

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XV, pp. 081–094, ISSN 2174-0410
Recepción: 16 May'24; Aceptación: 19 Jun'24

1 de abril de 2025

**Resumen**

La matemática con su versatilidad ha sido aplicada en la solución de problemas que emanan desde las ciencias biológicas o las ciencias sociales entre otras ciencias. En la actualidad, la matemática está ayudando a lograr escenarios sostenibles entre la naturaleza y las actividades antropogénicas. En este trabajo se menciona brevemente cómo la modelación matemática ha sido usada para comprender los efectos del turismo en el medio ambiente.

**Palabras Clave:** Turistas, Medio ambiente, Escenarios sustentables, Modelos matemáticos.

**Abstract**

Mathematics with its versatility has been applied to solve problems that emanate from biological sciences or social sciences, among other sciences. Currently, mathematics is helping to achieve sustainable scenarios between nature and anthropogenic activities. This work briefly mentions how mathematical modeling has been used to understand the effects of tourism on the environment.

**Keywords:** Tourists, Environment, Sustainable scenarios, Mathematical models.

# 1. Introducción

Viajar por el mundo para conocer nuevas tierras es fascinante. Algunos viajeros buscan que los lugares que visiten estén rodeados de paisajes naturales hermosos mientras que otros buscan lugares con servicios turísticos que les provean confort y descanso.

Ya sean turistas que son atraídos por las bellezas naturales de un sitio o turistas que solo buscan descansar en habitaciones cómodas, ambos pueden causar un deterioro de los servicios ecosistémicos del lugar visitado. Por ejemplo, el aumento de turistas puede llevar a una falta de agua dulce por la sobre explotación del recurso, puede afectar negativamente la calidad del aire por el simple hecho de usar un equipo que mantenga la temperatura adecuada de las habitaciones o deteriorar los espacios de recreación debido a un número considerable de visitas.

Actualmente, el turismo es una de las actividades económicas más rentables. A nivel mundial, el turismo como generador de ingresos sólo está por debajo de los combustibles y los productos químicos. Por lo tanto, la industria turística es fundamental para el crecimiento de países en vía de desarrollo.

Para que un sitio turístico se establezca se requiere de una gran infraestructura ubicada en un sitio con un alto valor ecológico. Sin embargo, si la infraestructura crece de manera intensa, el medio ambiente será deteriorado. Ante esta situación, se deben implementar estrategias que mantengan la riqueza natural. En ese mismo sentido, es conocido que los sitios turísticos después de su florecimiento dejan de ser visitados en gran afluencia debido al surgimiento de nuevos sitios que les parecen más atractivos. Ante tal situación, los prestadores de servicios turísticos deben aumentar el atractivo del lugar a través de nuevas inversiones que se traduzcan en nuevos servicios turísticos, lo cual puede llegar a degradar el medio ambiente. Entonces, la relación entre turistas y medio ambiente está mediada por interacciones que son beneficiosas o perjudiciales para ambos.

Un escenario deseable es que exista una coexistencia sana entre el turismo y el medio ambiente. Es decir, que la interacción entre el turismo y el medio ambiente ocurra en un escenario sostenible. Para lograr tal escenario se requiere de herramientas que ayuden al diseño de estrategias y políticas públicas ambientales. Para este propósito se cuenta con modelos matemáticos que describen relaciones entre turismo, infraestructura y medio ambiente, entre otras variables [3,10]. Estos modelos pueden ser usados para diseñar estrategias que conduzcan a que los sitios turísticos se mantengan con un gran número de visitantes promoviendo que el medio ambiente se deteriore lo menos posible. Para la construcción de tales modelos es útil usar un diagrama en compartimentos con las interacciones entre las variables como el que se muestra en la Figura 1.

Casagrandi y Rinaldi en 2002 a través del uso de ecuaciones diferenciales modelaron la relación a largo plazo entre turismo, $T$, capital, $C$, y calidad del medio ambiente, $E$. Ellos fueron los primeros en relacionar la idea de sostenibilidad con las propiedades de los equilibrios de un sistema dinámico; ver la sección Apéndice. El modelo, aunque es muy simple y reduccionista, muestra una riqueza de escenarios teóricos confirmando patrones empíricos observados [3].

A través del análisis de los parámetros del modelo, algunos de los cuales describen características asociadas al desarrollo económico y protección ambiental, Casagrandi y Rinaldi concluyen que el modelo muestra escenarios sustentables ($T > 0, E > 0, C > 0$); escenarios rentables ($T > 0$); escenarios compatibles (E> 0). Los autores muestran que escenarios sustentables son posibles, aunque frecuentemente están en riesgo (alguna de las variables tienden a cero).

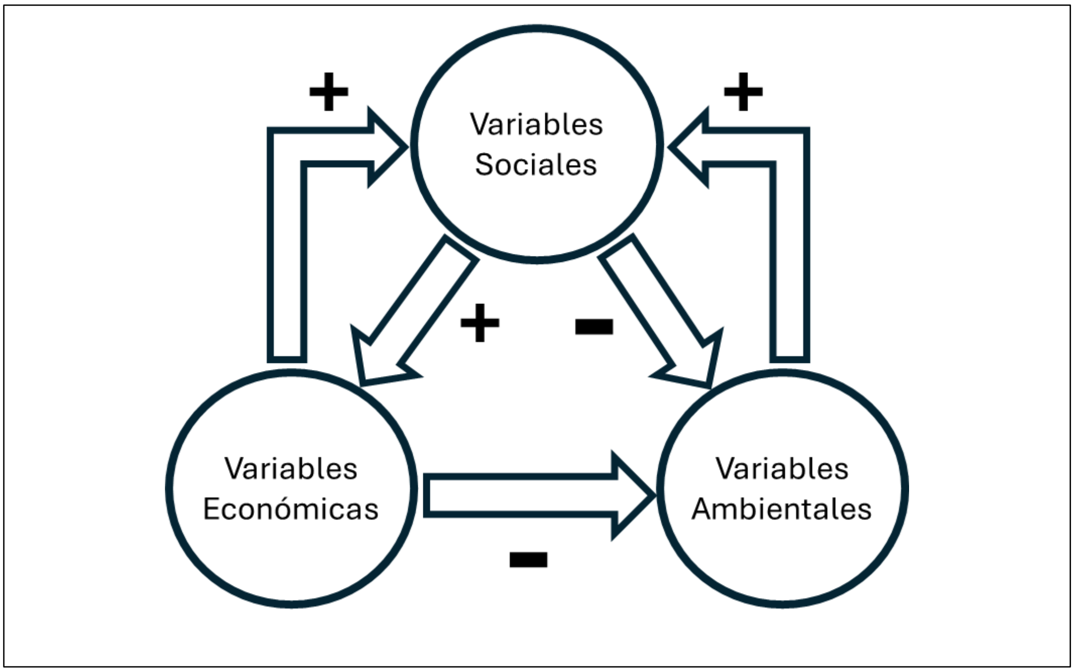



*Figura 1. Efectos asociados a las interacciones entre las variables usadas en el modelo. La flecha describe el efecto positivo (+) o negativo (-) recibido por una variable desde la otra.*

Otros modelos han sido construidos para analizar si es posible que ocurran escenarios sostenibles entre variables sociales, económicas y ambientales. En 2006, Sinay y Sinay modelaron la dinámica entre turistas y una variable que representa elementos de interés como ambiente y cultura local [14]. Lacitignola et al. 2007 generalizaron el modelo de Casagrandi y Rinaldi a través de clasificar a los turistas en dos clases: turistas amigables con el ambiente y turistas que son indiferentes al ambiente [10]. En 2016 y 2018, Diop analiza la dinámica entre peces (presas) y aves acuáticas migratorias (depredadores) cuando los turistas practican la pesca y la caza [5,6]. En el 2022, Villavicencio y coautores analizaron la dinámica entre recursos del bosque, vida silvestre y turismo modelando una interacción benéfica en densidades bajas de turistas y una interacción perjudicial en densidades altas de turistas [15]. En todos los modelos mencionados se concluye que escenarios sustentables son posibles, aunque pueden estar en riesgo bajo ciertas condiciones sociales, ambientales o económicas. En particular, Lacitignola et al. 2007 y Villavicencio et al. 2022 mostraron la existencia de un objeto matemático llamado atractor extraño. Este atractor extraño existe para valores de los parámetros cercanos a valores para los cuales el modelo muestra escenarios sustentables; ver Apéndice. Tal situación puede ser interpretada como catastrófica para el sistema socioecológico. Esto es debido a que un atractor extraño está asociado a comportamientos caóticos y este describe escenarios no sustentables.

En la siguiente sección se muestra un modelo socioecólogico para clarificar las ideas expuestas anteriormente.

# 2. Un modelo socioecológico

El turismo ha sido el principal motor económico de muchas localidades. En las últimas décadas, se han dirigido esfuerzos para integrar de manera sustentable la industria turística con la naturaleza. Esta clase de turismo es llamado turismo de naturaleza. El turismo de naturaleza busca que las actividades turísticas promuevan la conservación de especies y sus hábitats. Por ejemplo, el turismo de gorilas (Gorilla berengei berengei) practicado en el Parque Nacional Bwindi, en Uganda, provee recursos para operar varios parques que buscan la conservación de los gorilas. Además, el turismo de naturaleza en la Reserva Privada del Patrimonio Natural (RPPN) en Brasil ha contribuido positivamente a la conservación de la guacamaya roja y verde (Ara chloropterus).

Aunque el turismo de naturaleza ha permitido la conservación de flora y fauna de algunas regiones, es fundamental conocer si es posible que la interacción entre turistas, la flora y la fauna coexistan en equilibrios saludables. Si este no es el caso, es relevante conocer qué mecanismos ecológicos, demográficos y/o económicos llevaron a que ocurran escenarios no deseables. Para este propósito, a continuación, se explicará la construcción del sistema socioecológico presentado en [15], cuyas ecuaciones están dadas por (1), (2) y (3). En el modelo, la densidad de los recursos forestales, de la vida silvestre y de turistas son denotadas por $F(t)$, $W(t)$, y $E(t)$, respectivamente.

$$\frac{dF(t)}{dt} = aF(t)\left(\frac{l}{a} - F(t)\right) - bW(t)F(t) + \frac{\left(eE(t) - \left(E(t)\right)^2\right)E(t)F(t)}{1 + f\left(E(t)\right)^2}, \tag{1}$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = cW(t)F(t) - dW(t) + \frac{\left(gE(t) - \left(E(t)\right)^2\right)E(t)W(t)}{1 + h\left(E(t)\right)^2}, \tag{2}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{r}{L}\left(E(t)\right)^2 - rE(t) + E(t)\left(\alpha F(t) + \beta W(t)\right). \tag{3}$$

A continuación, se describirán cada uno de los términos de la ecuación (1). El término $aF(t)\left(\frac{l}{a} - F(t)\right)$ modela la tasa de crecimiento de los recursos forestales. En este término, el parámetro $a$ es la tasa de competencia intraespecífica y el parámetro $l$ es la tasa de crecimiento. Defínase la capacidad de carga de los recursos forestales por $K = \frac{l}{a}$. Observe que cuando $F(t) \approx 0$, la dinámica poblacional es modelada aproximadamente por $\frac{dF(t)}{dt} \approx lF(t)$. En contraste, cuando $F(t) \approx \frac{l}{a}$, la dinámica de los recursos forestales es modelada aproximadamente por $\frac{dF(t)}{dt} \approx 0$. En otras palabras, si la densidad de los recursos forestales es baja, estos crecen aproximadamente de manera proporcional a la densidad $F(t)$. Por otro lado, si los recursos forestales están cerca de la capacidad de carga $K$, estos se mantienen cerca de esta capacidad. El término $bW(t)F(t)$ modela la explotación de los recursos forestales por los individuos que componen la vida silvestre, a una tasa $b$. El término $\frac{\left(eE(t)-\left(E(t)\right)^2\right)E(t)F(t)}{1+f\left(E(t)\right)^2}$ de la ecuación (1) describe el cambio neto de beneficio menos costo debido a la interacción de los turistas y los recursos forestales. A diferencia de los términos descritos anteriormente, en este caso se utiliza una tasa denso-dependiente, $\frac{\left(eE(t)-(E(t))^2\right)}{1+f(E(t))^2}$, para modelar esta interacción. Observe que $\frac{\left(eE(t)-(E(t))^2\right)}{1+f(E(t))^2} > 0$ si y solo si $E(t) < e$. Entonces, si la densidad de turistas está por debajo de $e$, la interacción entre turistas y los recursos forestales es benéfica para los recursos forestales. En contraste, si la densidad de turistas está por arriba de $e$, es decir $E(t) > e$, esta interacción es perjudicial para los recursos forestales. Finalmente, observe que $\lim_{E(t)\to\infty} \frac{\left(eE(t)-(E(t))^2\right)}{1+f(E(t))^2} = -\frac{1}{f}$. Por lo tanto, en el caso límite, los turistas explotan los recursos forestales a una tasa $\frac{1}{f}$.

En la ecuación (2), el término $cW(t)F(t)$ modela el hecho que la densidad de la vida silvestre incrementa a una tasa $c$ al consumir recursos forestales. El término $-dW(t)$ describe que la densidad de la vida silvestre decrece de manera proporcional a su densidad. Es decir, el parámetro $d$ es la tasa de muerte. Finalmente, el término $\frac{\left(gE(t)-(E(t))^2\right)E(t)W(t)}{1+h(E(t))^2}$ modela una interacción entre los turistas y la vida silvestre que resulta benéfica para la vida silvestre si la densidad de turistas es menor que $g$ $(E(t) < g)$. En contraste, si la densidad de turistas es mayor que $g$ $(E(t) > g)$, la interacción resulta perjudicial para la vida silvestre. En este caso, se tiene la tasa denso-dependiente $\frac{\left(gE(t)-(E(t))^2\right)}{1+h(E(t))^2}$. Note que, $\lim_{E(t)\to\infty} \frac{\left(gE(t)-(E(t))^2\right)}{1+h(E(t))^2} = -\frac{1}{h}$. Es decir, en el caso limite, los turistas explotan a la vida silvestre a una tasa $\frac{1}{h}$.

Finalmente, en la ecuación (3) se describe que en ausencia de los recursos del bosque y de la vida silvestre, la dinámica de los turistas está dada por $\frac{dE(t)}{dt} = \frac{r}{L}\left(E(t)\right)^2 - rE(t)$. Entonces, el término $\frac{r}{L}\left(E(t)\right)^2 - rE(t)$ describe la siguiente dinámica poblacional. Si $E(t) \approx L$, la densidad de turistas se aleja de $E(t) = L$. En contraste, si $E(t) \approx 0$, la densidad de turistas se acerca al valor $E(t) = 0$. Es decir, la densidad de turistas tenderá a cero cuando no hay recursos forestales ni vida silvestre. Los términos $\alpha E(t)F(t)$ y $\beta E(t)W(t)$ modelan el incremento en la densidad de turistas debido a la interacción con los recursos forestales y la vida silvestre a tasas $\alpha$ y $\beta$, respectivamente.

El modelo socioecológico dado por las ecuaciones (1)-(3) admite tanto equilibrios de frontera (los cuales describen exclusión de al menos una especie ya que al menos una entrada de los puntos de equilibrio es cero) como equilibrios interiores (los cuales describen coexistencia de todas las especies ya que todas las entradas de los puntos de equilibrio son positivas). Si bien, las soluciones del modelo no pueden obtenerse de manera explícita, aún puede conocerse el comportamiento de sus soluciones a través de teorías de las ecuaciones diferenciales o técnicas computacionales. En este trabajo, se mostrarán algunos resultados utilizando ambas perspectivas.

Los equilibrios de frontera que existen para todos los valores de los parámetros son

$$O = (0,0,0), P_0 = (K,0,0), P_1 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a(cK-d)}{cb}, 0\right) \text{ y } P_2 = (0,0,L). \tag{4}$$

Observe que para que el equilibrio $P_1$ tenga sentido biológico se necesita que $K > \frac{d}{c}$. Además, en [15], se demuestra que equilibrios de frontera del tipo $(F^*, 0, E^*)$, lo cuales serán denotados por $P_w$, pueden ocurrir si se cumplen ciertas condiciones sobre los valores de los parámetros.

Mediante análisis de estabilidad de ecuaciones diferenciales, en [15] se probó que los equilibrios $O$ y $P_2$ son inestables siempre. Por lo tanto, en el sistema socioecológico las tres densidades poblacionales no tenderán a cero simultáneamente, ni existirá un escenario en el que los turistas tiendan a la densidad poblacional $E(t) = L$ si los recursos forestales y la vida silvestre están ausentes. En contraste, los equilibrios $P_0$, $P_1$ y $P_w$ son estables bajo algunas condiciones sobre los parámetros del modelo. En estos casos, escenarios de exclusión de alguna variable son posibles. Note que $P_0$ describe un escenario en el que solo existen los recursos forestales mientras que $P_2$ describe un escenario en el que los turistas están ausentes y existen recursos forestales y vida silvestre. Finalmente, $P_w$ describe un escenario en el que la vida silvestre desaparece y solamente permanecen los recursos forestales y los turistas.

El modelo dado por las ecuaciones (1)-(3) admite desde cero hasta dos equilibrios interiores del tipo $(F^*, W^*, E^*)$, los cuales serán denotados por $P^*$. Los equilibrios $P^*$ denotan escenarios de coexistencia y ellos pueden ser estables o inestables. Debido a la complejidad del modelo, en [15], los equilibrios interiores no fueron calculados explícitamente. En ese trabajo solamente se probó existencia de equilibrios interiores cuando se cumplen algunas condiciones sobre los parámetros. Los autores también muestran la existencia de orbitas periódicas, las cuales son denotadas por $P^O$. Además, en ese trabajo se muestra la existencia de un atractor extraño.

# 3. Ejemplos numéricos

En esta sección, se muestran simulaciones numéricas de las soluciones del modelo. A través de fijar todos los valores de los parámetros excepto un parámetro se explora su dinámica. El modelo describe diferentes escenarios al variar el parámetro $e$, los cuales tienen interés desde un punto de vista ecológico, social y económico. El parámetro $e$ se eligió para mostrar el comportamiento del modelo debido a que la interacción entre turistas y los recursos del bosque pasa de ser benéfica a perjudicial cuando dicho parámetro aumenta. Es importante mencionar que escenarios análogos se obtienen cuando se varía alguno de los otros parámetros, en particular cuando se varía el parámetro $g$.

Para ejemplificar los escenarios asociados al modelo socioecológico, se variará el valor de $e$ y se usarán los siguientes valores de los parámetros. $a = 0.12$, $b = 0.002$, $c = 0.5$, $d = 0.0001$, $f = 0.001$, $g = 0.001$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.0008$, $K = 1$, $r = 0.8$ y $L = 10$.

**Escenario I.**

Para $e = 2.2$, el único equilibrio localmente asintóticamente estable es $P_1$. En la Figura 2 se muestra que la solución del modelo con la condición inicial $F(0) = 0.0003, W(0) = 59.98$ y $E(0) = 0.001$ converge a $P_1$.

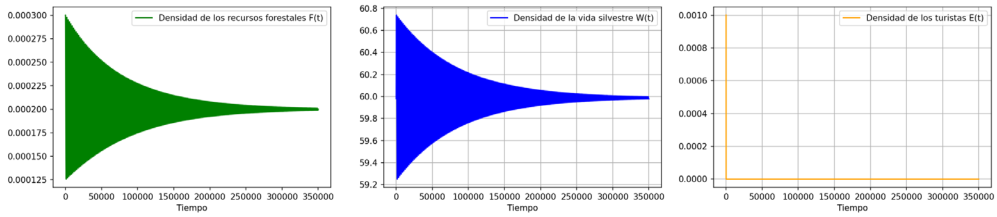


Figura 2. Las soluciones del modelo convergen al equilibrio $P_1$.

**Escenario II.**

Para $e = 2.4$ existen dos puntos de equilibrio localmente asintóticamente estables. Observe que para la condición inicial $F(0) = 0.0005, W(0) = 59.98$ *y* $E(0) = 0.003$ las soluciones del modelo convergen a $P_1$. En contraste, para la condición inicial $F(0) = 10.139, W(0) = 544.116$ *y* $E(0) = 1.824$ la solución converge a un equilibrio interior $P^*$. En la Figura 3 se muestra este caso.

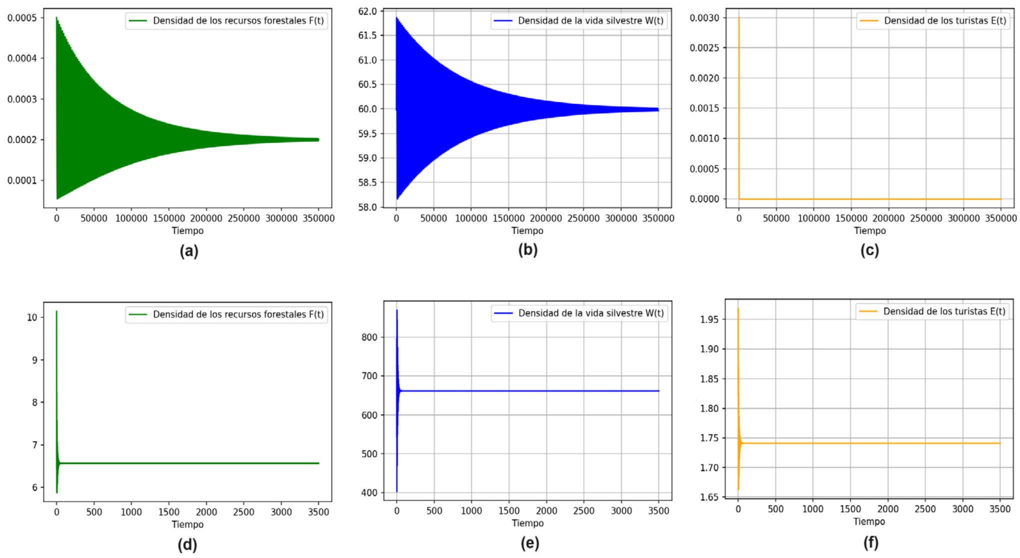


Figura 3. Las soluciones del modelo convergen ya sea al equilibrio $P_1$ o a un equilibrio interior $P^*$, dependiendo de las condiciones iniciales.

**Escenario III.**

Para $e = 2.7$ existe el equilibrio $P_1$ y una órbita periódica, la cual es denotada por $P^O$. Ambos objetos son estables.

La solución asociada a la condición inicial $F(0) = 0.0005, W(0) = 59.98$ y $E(0) = 0.003$ converge a $P_1$. En contraste, la solución con condición inicial $F(0) = 10.139, W(0) = 544.116$ y $E(0) = 1.824$ converge a la órbita periódica. Ver Figura 4.

**Escenario IV.**

Al aumentar el valor del parámetro tal que $e = 3.5$, la órbita periódica ya no existe y las soluciones convergen al equilibrio $P_1$ o convergen a un equilibrio interior $P^*$. Ver Figura 5. Para este caso se utilizaron las mismas condiciones iniciales que las usadas en el caso anterior.

**Escenario V**.

Con $e = 5$, las soluciones convergen al equilibrio $P_1$ o al equilibrio $P_w$. El comportamiento de las soluciones se muestra en la Figura 6. En este caso las condiciones iniciales son nuevamente las usadas en el escenario III.

**Escenario VI.**

Cuando $e = 15$ existe un único punto de equilibrio estable, $P_1$. El comportamiento de las soluciones es similar al caso mostrado en el escenario I.

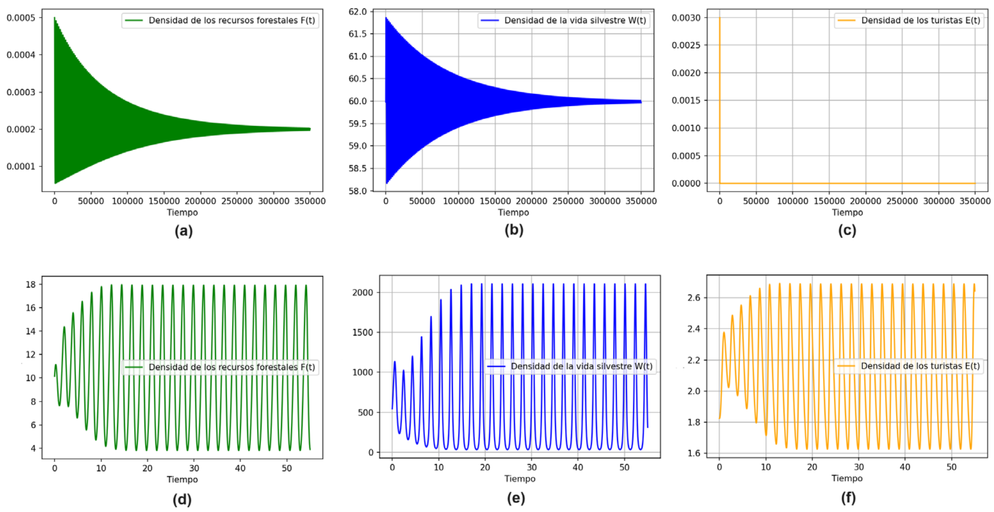



Figura 4. Las soluciones convergen ya sea al equilibrio $P_1$ o a una órbita periódica $P^O$.

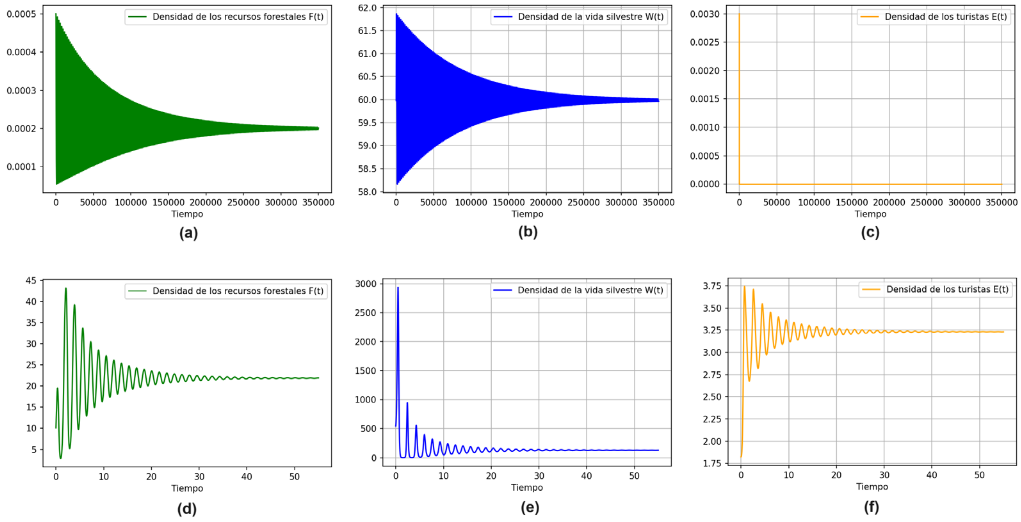



Figura 4. Las soluciones convergen ya sea al equilibrio $P_1$ o a un equilibrio interior $P^*$.

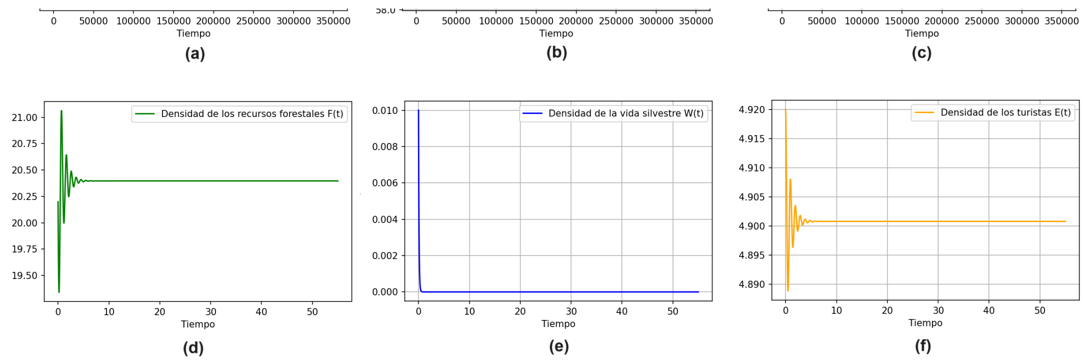



*Figura 5. Las soluciones del modelo convergen a $P_1$ o un equilibrio del tipo $P_w$.*

Escenarios similares a los mostrados anteriormente ocurren cuando se dan condiciones para que el equilibrio de frontera, $P_0$, sea estable; ver [15]. La diferencia con los escenarios mostrados es que las soluciones convergen a un equilibrio de coexistencia o a un equilibrio en que solo existan los recursos forestales. En estos casos, la vida silvestre desaparece.

Finalmente, la Figura 7 muestra que pequeños cambios en algunos parámetros del modelo llevan a grandes cambios en el comportamiento de sus soluciones. El caso (a) muestra el escenario en el que $e = 3.44$ y los otros valores de los parámetros son los mismos usados en el escenario III. En el caso (b), se tiene que el parámetro $L$ cambió a $L = 13.2$.

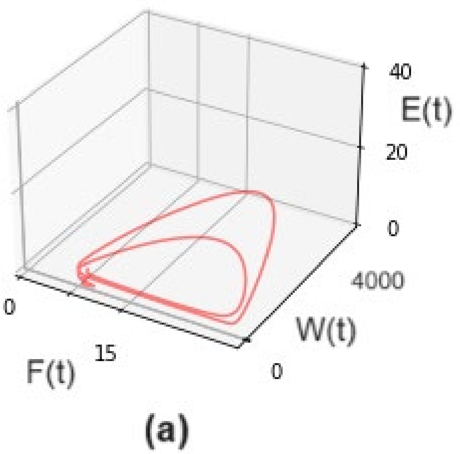



*Figura 6. Atractor caótico*

Utilizando las ideas expuestas por Casagrandi y Rinaldi en [3] se puede concluir que el sistema socioecológico dado por turistas, recursos forestales y la vida silvestre puede ser sustentable. Esto se concluye del hecho que en los escenarios II, III y IV hay soluciones que no se hacen cero en ningún tiempo. El análisis del modelo también muestra que el sistema socioecológico puede ser rentable, ya que en el escenario V se muestra que existen soluciones en las que el número de turistas para todo tiempo es distinto de cero aun cuando la vida silvestre se agota. Además, el modelo socioecológico puede ser compatible ya que los recursos forestales y la vida silvestre pueden coexistir; ver escenarios I-VI. Sin embargo, aun cuando existen escenarios sustentables estos están en riesgo debido a que ocurren a la par con escenarios no rentables, ya que el número de turistas tiende a cero para tiempos largos bajo algunas condiciones iniciales. Es importante resaltar que los escenarios sustentables ocurren para ciertos valores del parámetro $e$. Las simulaciones numéricas muestran que para que se den escenarios sustentables el valor del parámetro $e$ no debe ser muy pequeño (escenario I) ni muy grande (escenario V y VI). El parámetro $e$ puede interpretarse como la capacidad de carga de los recursos forestales. Una interpretación análoga se tiene para el parámetro $g$, el cual puede ser interpretado como la capacidad de carga de la vida silvestre. Finalmente, el modelo muestra la existencia de un atractor extraño, lo cual dificulta hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de las variables analizadas.

# 4. Conclusiones

Comprender los efectos que las actividades humanas tienen sobre los ecosistemas es fundamental para vivir en armonía. Si bien el turismo de naturaleza genera ingresos económicos, este también puede causar daños irreparables para la flora y fauna del sitio. Este trabajo busca mostrar que el uso de modelos matemáticos puede ser una herramienta útil para diseñar estrategias que permitan la coexistencia de turistas sin impactar fuertemente al ambiente. Del análisis del modelo se desprende que aun cuando pueda ampliarse el número de turistas que puede recibir un sitio, incrementar el número de turistas puede ser contraproducente. Esto se debe a que las variables ecológicas (flora y fauna), económicas y sociales (turistas) pueden tener un comportamiento oscilatorio, lo cual no es deseable desde un punto de vista ecológico y económico. A través de este trabajo se mostró que las actividades turísticas pueden coexistir con la naturaleza siempre y cuando sean llevadas de manera responsable.

Desafortunadamente, en la actualidad existen muy pocos modelos matemáticos, que no sean modelos econométricos, que describan los efectos del turismo sobre la naturaleza de manera dinámica. En ese sentido, además de los modelos mencionados anteriormente, solo encontramos los siguientes trabajos [1,2,4,8,9,11,12], los cuales son una generalización de los modelos propuestos por Casagrandi y Rinaldi en 2002 y Lacitignola et al. en 2007 [3,10]. Esos trabajos, muestran un análisis exhaustivo de dichos modelos o un análisis a través de técnicas específicas.

Es totalmente aceptado que las actividades humanas como el turismo tienen la capacidad de alterar el medio ambiente ya sea para conservarlo o para dañarlo lo cual resulta bastante paradójico. Por esta razón es fundamental contar con modelos matemáticos que permitan analizar los efectos antropogénicos sobre la naturaleza. Esto con el fin de conservar los paisajes paradisiacos que tanto nos gusta disfrutar y al mismo tiempo ayudar a las sociedades alrededor de ellos. Así que ante la pregunta ¿Viajar o no viajar? La respuesta es viajar, pero actuando de tal manera que tus actividades perjudiquen lo menos posible al planeta tierra y sus maravillosos lugares paradisíacos.

# 5. Apéndice

A continuación, se presentan algunos resultados de los sistemas dinámicos. Para profundizar en estos conceptos se recomienda revisar [7,13].

Definición 1. Un sistema dinámico suave sobre $R^n$ es una función continuamente diferenciable $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donde $\varphi(t, X) = \varphi_t(X)$ satisface:

a) $\varphi_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la función identidad: $\varphi_0(X_0) = X_0$.
b) La composición $\varphi_t o \varphi_s = \varphi_{t+s}$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

La ecuación diferencial $\frac{dX(t)}{dt} = F\big(X(t)\big)$ con $X \in U \subset \mathbb{R}^n, t \in R$, con $U$ un conjunto abierto, se denomina un sistema dinámico.

Una solución de equilibrio del sistema $\frac{dX(t)}{dt} = F\big(X(t)\big)$ es un punto $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\bar{X}) = 0$, es decir, una solución que no cambia con el tiempo. Una solución de equilibrio también es llamada "punto fijo", "punto estacionario", "punto crítico" o "estado estable" entre otros términos.

Se dice que un punto de equilibrio es estable si soluciones cercanas permanecen cercanas para todo tiempo futuro. Un equilibrio que no es estable se dice que es inestable.

Definición. Sea $\frac{dX(t)}{dt} = F\big(X(t)\big)$ un sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^n$ con flujo $\varphi_t(X)$. Un conjunto $\Lambda$ es llamado un atractor si

1. $\Lambda$ es compacto e invariante.
2. Existe un conjunto abierto $U$ conteniendo a $\Lambda$ tal que para cada $X \in U$, $\varphi_t(X) \in U$ para todo $t \geq 0$ y $\bigcap_{t\geq 0}\varphi_t(U) = \Lambda$.
3. (Transitividad) Dados dos puntos $Y_1, Y_2 \in \Lambda$ y cualquier entorno abierto $U_j$ relativo a $Y_j$ en $U$, hay una curva solución que comienza en $U_1$ y luego pasa por $U_2$.

En términos generales, un atractor para el sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto invariante que "atrae" todas las soluciones cercanas.

Definición. El flujo $\varphi_t(X)$ para un sistema de ecuaciones diferenciales tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales en $X_0$ siempre que haya un $r > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$, existe algún $Y_0$ con $||Y_0 - X_0|| < \delta$ para el cual las órbitas de $Y_0$ y $X_0$ se separan una distancia de al menos $r$. Más específicamente, para cualquier reparametrización

$\tau: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la órbita de $Y_0$, existe un tiempo $t_1 > 0$ tal que

$$||\varphi_{\tau(t_1)}(Y_0) - \varphi_{\tau(t_1)}(X_0)|| \geq r.$$

Definición. Se dice que el sistema tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales en un conjunto S siempre que tenga una dependencia sensible de las condiciones iniciales para cualquier condición inicial $X_0$ en S. Más precisamente, hay un $r > 0$ (que funciona para todos los puntos) tal que, para cualquier $X_0$ en S y cualquier $\delta > 0$, hay algún $Y_0$ en el espacio de fase tal que las órbitas de $X_0$ y $Y_0$ se separan una distancia de al menos $r$ en el sentido dado en la definición anterior. En esta definición, se permite que el segundo punto $Y_0$ esté fuera del conjunto S en el espacio de fase ambiental.

Si S es un conjunto invariante, decimos que el sistema tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales cuando se restringe a S, siempre que haya un $r > 0$ tal que, para cualquier $X_0$ en S y cualquier $\delta > 0$, haya algún $Y_0$ en S tal que las órbitas de $X_0$ y $Y_0$ se separan una distancia de al menos $r$ en el sentido dado en la definición anterior. En esta definición, el segundo punto $Y_0$ debe seleccionarse dentro del conjunto invariante S.

Definición. Un atractor caótico es un atractor transitivo $A$ para el cual el flujo depende sensiblemente de las condiciones iniciales cuando se restringe a $A$.

Debido a que el conjunto de puntos de un atractor caótico es a menudo un conjunto complicado, a veces se le llama "atractor extraño".

# Referencias

[1] AFSHARNEZHAD, Z., DADI Z., MONFARED, Z. Profitability and sustainability of a tourism-based social-ecological dynamical systems by bifurcation analysis. *J. Korean Math. Soc.*, 54, 1-16, 2017.

[2] BEHJATY, M., MONFARED, Z. Modeling and dynamic behavior of a discontinuous tourism-based social-ecological dynamical system. *Filomat*, 33, 5991-6004.

[3] CASAGRANDI, R., RINALDI, S. A theoretical approach to tourism sustainability. *Conserv. Ecol.* 6, 13, 2002.

[4] CASAGRANDI, R., RINALDI, S. Sustainability and bifurcations of positive attractors. *Chaos*

*Complexity Lett*. 1, 117–128, 2004.

[5] DIOP, O., SÈNE, A. Mathematical model of the dynamics of fish, waterbirds and tourists in the Djoudj National Park. *Acta Biotheor*, 64, 447-468, 2016.

[6] DIOP, O., SÈNE A. Mathematical model of fish, birds and tourists in wetlands: the impact of periodic fluctuations on the coexistence of species. *Afr. Math*. 29, 841-859, 2018.

[7] HIRSCH, M. W., Smale, S., Devaney, R. L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Elsevier, Academic Press, USA, 2004.

[8] JAWABREH, O., QADER, A. A., SALAH, J., AL MASHRAFI, K., AL DEIN AL FAHMAWEE, E., ALI, B. J. A. Fractional calculus analysis of tourism mathematical model. *Progr. Fract. Differ, Appl*. 9, 1-11, 2023.

[9] KASLIK, E., NEAMTU, M. Dynamics of a tourism sustainability model with distributed delay. *Chaos, Solitons and Fractals*, 133, 109610, 2020.

[10] LACITIGNOLA, D., PETROSILLO, I., CATALDI, M., ZURLINI, G. Modelling socio-ecological tourism-based systems for sustainability. *Ecological Modelling*, 206, 191-204, 2007.

[11] LACITIGNOLA, D., PETROSILLO, I., ZURLINI, G. Time-dependent regimes of a tourism-based social-ecological system: Period-doubling to chaos. *Ecological Complexity*, 7, 44-54, 2010.

[12] MONFARED, Z., DADI, Z., MILADI DARI, N., AFSHARNEZHAD, Z. Existence and nonexistence of periodic solution and Hopf bifurcation of a tourism-based social–ecological system. *Optik*, 127, 10908-10918, 2016.

[13] ROBINSON, R. C. An introduction to dynamics systems continuous and discrete, The American Mathematical Society, USA, 2012.

[14] SINAY, L., SINAY, L. A simple mathematical model for the effects of the growth of tourism on environment. http://espace.library.uq.edu.au/view/UQ:7692.

[15] VILLAVICENCIO-PULIDO, G., VÁZQUEZ-HIPÓLITO, V., GARCÍA-CRUZ, G. J. Catastrophic or sustainable scenarios might occur when the carrying capacities of a Tourism-based socioecological system vary. *Natural Resource Modeling*, e12365, 2022.

**Sobre el/los autor/es:**

*Nombre:* Osvaldo Osuna
*Correo Electrónico:* osvaldo.osuna@umich.mx
*Institución:* Universidad Michoacana, México.

*Nombre:* José Geiser Villavicencio-Pulido
*Correo Electrónico:* j.villavicencio@correo.ler.uam.mx
*Institución:* Universidad Autónoma Metropolitana, México.

# Juegos y rarezas matemáticas

# Una historia de triángulos y probabilidad
*Ficción con unos toques de Lakatos y Sanderson*

# A story of triangles and probability
*Fiction with a touch of Lakatos and Sanderson*

Dionisio Pérez

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XV, pp. 095–106, ISSN 2174-0410 Recepción: 10 Jul'24; Aceptación: 9 Oct'24

1 de abril de 2025

**Resumen**

Este artículo presenta un problema relacionado con Geometría y la Teoría de Probabilidad desde el punto de vista de un diálogo entre profesores y estudiantes un tanto peculiares.

**Palabras Clave:** Relatos Matemáticos, triángulos, probabilidad, resolución de problemas

**Abstract**

This paper presents a problem related to Geometry and Probability Theory from the point of view of a dialogue between teachers and students, both peculiar.

**Keywords:** Mathematical Stories, triangles, probability, problem solving

Asistimos a varias sesiones de un curso a medio camino entre la Geometría y la Teoría de probabilidad. El profesor dirige las clases dejando que sean los alumnos los actores principales y limitándose a ejercer un papel de moderador. Los alumnos son inteligentes y reflexivos, pero también locuaces y discutidores (a veces, incluso beligerantes y corrosivos).

**Día primero.**

El profesor está planteando un problema a la clase:

- Profesor.- Ésta es la cuestión que tienen que investigar: *¿cuál es la probabilidad de que un triángulo tenga sus tres ángulos agudos?*

  Mediten detenidamente y expongan sus conclusiones, que serán sometidas a crítica por parte de toda esta asamblea.

- Alef (al cabo de unos segundos).- La cuestión así planteada es demasiado vaga para que pueda tener un sentido preciso: ¿a qué se refiere cuando dice ’un triángulo’ sin más, de qué posible universo se escoge: del de todos los que han sido dibujados alguna vez, de todos los imaginables? Por otra parte, no se indica con qué procedimiento se elige, como dando a entender que se hace al azar; pero ’al azar’ es una expresión ambigua: habría que precisar de alguna manera qué distribución de probabilidad se emplea para esa elección. En resumen, lo primero que hay que hacer es formular la cuestión con rigor matemático.

- Profesor.- He formulado la pregunta de una forma intencionadamente difusa para que sean ustedes quienes le den el sentido que les parezca razonable y discutan tanto ese sentido como las conclusiones a las que lleguen. De hecho, la intervención de Alef responde perfectamente a mis expectativas iniciales.

- Bet.- Pues yo creo, al contrario que Alef, que la cuestión no adolece de ninguna vaguedad; para mí está clara como el día: se eligen tres puntos en el plano de manera independiente y de forma que la probabilidad de que un punto caiga en una cierta región sea proporcional al área de esa región (técnicamente, una distribución uniforme de probabilidad) y se estudia la proporción del número de triángulos acutángulos entre todos los posibles. Otra cosa es que ese cálculo resulte fácil o difícil.

- Alef.- La ingenuidad de Bet sólo puede compararse con su ignorancia. Por una parte, propone dividir dos cantidades infinitas: el número de triángulos acutángulos entre el de todos los triángulos (ya nos explicará cómo pretende conseguirlo), y por otra desconoce que no existe una distribución uniforme de probabilidad si el soporte tiene medida infinita.

- Guímel.- Seguramente en las palabras de Bet hay más enjundia de la que pretende ridiculizar el sarcasmo de Alef, y que la frase ’probabilidad de que un triángulo sea acutángulo’ tiene una interpretación natural y sencilla, y puede que incluso sea fácil de calcular. Sin duda, Alef nos puede iluminar al respecto.

- Alef.- Desde luego que sí. Puesto que tres puntos determinan una circunferencia (salvo en el caso de que estén alineados, que no considero por tener probabilidad nula), la pregunta podría - y debería - formularse en estos términos:

  *Dada una circunferencia, se eligen 3 puntos al azar sobre ella. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo que determinan sea acutángulo?*

  Aclararé lo que quiero decir por ’al azar’: en primer lugar, la elección se hace de manera independiente (tal como señaló atinadamente Bet), y en segundo lugar, la probabilidad de que un punto sea escogido dentro de un arco es proporcional a la longitud de ese arco (dicho con otras palabras, se sigue una distribución uniforme de probabilidad, lo que ahora sí tiene sentido, al ser finita la longitud de la circunferencia). También precisaré que ’el triángulo que determinan’ significa ’el triángulo cuyos vértices son esos puntos’ (por si acaso algún tiquismiquis me quisiera acusar de ambigüedad).

- Profesor.- No cabe duda de que Alef ha reformulado la cuestión de una forma muy precisa, aunque es discutible que sea la única manera aceptable de traducir la pregunta que yo lancé. En todo caso, es un avance notable.

- Alef.- Desde luego, es la única formulación aceptable por una mente clara y rigurosa. Además, ese planteamiento convierte la solución en algo obvio: la respuesta es $p = 1/4$, evidentemente.

- Dálet.- Sin hacer caso de la petulancia de Alef, he abordado el asunto con otro enfoque y he calculado esa probabilidad fácilmente: la respuesta que he obtenido es $p = 1/4$ (aunque yo no diría que sea evidente).

- Profesor.- Agradezco a Dálet el tono educado de su intervención. ¿Le importaría exponer sus argumentos?

- Dálet.- Para empezar, no he considerado ninguna circunferencia en la que situar los puntos, sino que he pensado en la forma del triángulo directamente, para la cual no tiene ninguna importancia dónde esté situado ni cuánto midan sus lados, sino solamente los ángulos, así que llamé $\alpha, \beta$ y $\gamma$ a los tres ángulos del triángulo.

  Naturalmente, como su suma es fija: $\pi$, sólo hay que considerar dos de ellos (los dos primeros, por ejemplo), que han de cumplir las condiciones $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi$ y $\alpha + \beta < \pi$ (para que $\gamma$ sea un ángulo admisible). De esa manera, considero $\alpha, \beta$ como un par de variables aleatorias que siguen una ley uniforme en la región $0 < \alpha, 0 < \beta, \alpha + \beta < \pi$, que es un triángulo en el plano $\alpha, \beta$, con vértices en los puntos $(0,0), (\pi, 0)$ y $(0, \pi)$. La función de densidad de la variable aleatoria bidimensional $\alpha, \beta$ es constante en ese triángulo (el valor de la constante es $2/\pi^2$, pero eso no es relevante).

  La recta vertical $\alpha = \pi/2$ corta en ese soporte una región triangular (a su derecha) correspondiente a los triángulos con el ángulo $\alpha$ obtuso; análogamente, la recta horizontal $\beta = \pi/2$ corta una zona triangular (arriba) correspondiente a los triángulos con el ángulo $\beta$ obtuso, y la recta oblicua $\alpha + \beta = \pi/2$ corta otra región triangular (por debajo) correspondiente a los triángulos de ángulo $\gamma$ obtuso. Queda en el centro una última zona, también triangular, que corresponde a los triángulos con los tres ángulos agudos. Como las cuatro partes son iguales, resulta que a los triángulos acutángulos les corresponde una cuarta parte del área total del soporte, lo que significa que la probabilidad de que un triángulo arbitrario sea acutángulo es $1/4$ (de regalo, la probabilidad de que sea obtusángulo es $3/4$ y la de que sea rectángulo es 0, porque esos triángulos están codificados por tres segmentos, cuya área es nula).

- Profesor.- Un enfoque original y sugestivo. Me gustaría oír sus comentarios.

- He.- Parece que Dálet ha encontrado la manera de castigar la arrogancia de Alef, mostrando una interpretación diferente de la cuestión, al tiempo que llega al mismo resultado numérico, $p = 1/4$.

- Vau.- Yo he abordado el desafío de un modo parecido a Dálet, pero desde otro ángulo (si me permiten el inocente juego de palabras). Comienzo por observar que el carácter (acutángulo, rectángulo u obtusángulo) de un triángulo viene determinado por el mayor de sus ángulos. Por eso, en lugar de considerar $\alpha, \beta$ y $\gamma$, sólo tengo en cuenta el mayor de ellos, al que llamo $\theta$. Naturalmente, ese ángulo no puede valer menos de $\pi/3$ ni más de $\pi$, por lo que $\theta$ se puede ver como una variable aleatoria uniforme en el intervalo de $\pi/3$ a $\pi$. Un triángulo será acutángulo cuando $\theta$ sea menor de $\pi/2$, por lo que la probabilidad buscada es el cociente entre $\pi/2 - \pi/3 = \pi/6$ y $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$, que es $1/4$. La conclusión es la misma, pero el tratamiento del problema es más elemental.

- He.- Minimalista, diría yo. Decididamente, hay más de una traducción posible del enunciado inicial al lenguaje riguroso de las Matemáticas, pero hay que conceder al valor $p = 1/4$ una ventaja sobre otras opciones.

- Zayn.- Me desagrada el cariz que van tomando los discursos presentados. Un triángulo está hecho de segmentos: tres lados que tienen sus longitudes y a los que aquí se pretende condenar al exilio. Al parecer, un triángulo se reduce a unos ángulos (como si no los formasen los lados del triángulo, y no se dedujese la amplitud de aquellos de las longitudes de estos) o, peor aún, a uno solo. Esos no son triángulos reales, sino apenas unos fantasmas, meras sombras de los triángulos auténticos. ¿Es que nadie va a considerar aquí los lados de los triángulos, con sus longitudes?

- Profesor.- Animo a Zayn o a cualquier otro a defender ese enfoque.
- Jet.- Me gustaría exponer otra solución. Aunque me temo que no será del agrado de Zayn y sí de Alef (quizá), puesto que para estudiar los triángulos los inscribo en una circunferencia.
- Profesor.- Dejaremos para mañana la versión de Jet. Creo que por hoy ya hemos tenido suficiente.

**Día segundo.**

- Profesor.- Buenos días. Espero que hayan asimilado los discursos de ayer y que vengan dispuestos a seguir con el programa. Tiene la palabra Jet.
- Jet.- Gracias, profesor. Quiero empezar haciendo unas observaciones elementales, que serán útiles en mi exposición.
- Profesor.- Adelante. Agradecemos todas las observaciones que nos faciliten el seguimiento de sus tesis.
- Jet.- En primer lugar, la naturaleza del triángulo definido por tres puntos situados sobre una circunferencia depende de la posición del centro de ésta respecto al triángulo: el triángulo es rectángulo cuando el centro está situado sobre uno de sus lados (en concreto, en el centro de la hipotenusa), es acutángulo cuando el centro queda en el interior del triángulo, y es obtusángulo cuando queda fuera.
- Alef.- Eso es una consecuencia evidente del teorema del ángulo inscrito; no veo la necesidad de mencionar obviedades.
- Profesor.- Quizá sea innecesario para usted, pero no me parece que esté de más recordarlo.
- Jet.- En segundo lugar, para saber si el centro de la circunferencia queda dentro del triángulo ABC o no, conviene tener en cuenta los puntos antipodales de los vértices. Intentaré ser preciso, quizá a costa de la brevedad.
- Bet.- En la disyuntiva entre claridad y concisión, elegir siempre la primera. Es mi lema.
- Jet.- Dos puntos, A y B, sobre una circunferencia determinan dos arcos: uno más corto, al que llamaré AB, y otro más largo, que denominaré BA. El punto A′, antipodal de A (es decir, el otro extremo del diámetro que pasa por A), y el B′, antipodal de B, definen otros dos arcos: A′B′ y B′A′, de la misma longitud que AB y BA respectivamente. Pues bien, para que el centro de la circunferencia quede en el interior del triángulo ABC (es decir, para que ABC sea acutángulo) es condición necesaria y suficiente que C se halle situado en el arco A′B′. Seguramente Alef encontrará obvia esta segunda observación, que he juzgado oportuno hacer explícita.
- Alef.- ¿Acaso no lo es? Pero no se prive de seguir haciendo observaciones triviales, si es su gusto: tenemos mucho tiempo por delante.
- Jet.- La tercera (y última) observación es que me serviré del plano complejo para situar los objetos. Así, la circunferencia en la que se localizarán los puntos será la circunferencia unidad y los puntos serán de la forma $P = e^{it}$ donde $t$ puede tomar cualquier valor real. Además, me apoyaré en la simetría del problema tanto como pueda para simplificarlo.
- Alef.- Alabo ambas decisiones. Que no digan que lo único que hago es protestar (llaman así a lo que no es sino señalar sus debilidades o incongruencias).

- Jet.- Pues bien, vamos al grano. El primero de los tres puntos puede ser cualquiera: la simetría permite que lo tome como el punto $1 = 1 + 0i$ de la circunferencia unidad en $\mathbb{C}$. El segundo será un punto arbitrario, que escribiré como $A = e^{iX}$ donde $X$ es una variable aleatoria distribuida uniformemente entre 0 y $\pi$.
- Bet.- ¿Cómo que entre 0 y $\pi$? ¿No debería ser entre 0 y $2\pi$? ¡Ah, ya veo! Está utilizando una vez más la simetría: si A estuviera en la mitad sur de la circunferencia sencillamente cambiaría el norte por el sur.
- Guímel.- Bet se ha salvado de una reprimenda de Alef por los pelos.
- Jet.- Cierto, Bet. El tercer punto ya no puede beneficiarse de esa simetría, puesto que la elección de A escoge ya un semicírculo, por lo que escribiré $B = e^{iY}$ donde $Y$ es una variable aleatoria distribuida uniformemente entre $-\pi$ y $\pi$, independiente de $X$.

  Lo que queda es casi rutinario, y similar a lo que expuso antes Dálet: la variable aleatoria bidimensional $(X, Y)$ sigue una distribución uniforme en el rectángulo $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Los triángulos acutángulos corresponden a aquellos valores de $Y$ que sitúan al punto B en el arco que delimitan los puntos antipodales de 1 y $A$, es decir, $-1$ y $-A = e^{i(X-\pi)}$. Eso es tanto como pedir que $Y$ esté entre $-\pi$ y $-X$, o lo que es lo mismo $X + Y < 0$. Esa condición se traduce en el soporte de las variables aleatorias (el rectángulo $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$) por un triángulo que ocupa exactamente la cuarta parte del rectángulo. De nuevo llegamos a la conclusión habitual: $p = 1/4$.
- Guímel.- $1/4$ se está convirtiendo en el vencedor por aclamación de este torneo.
- Tet.- No quisiera ser impertinente, pero creo que puedo mejorar el argumento de Jet, con unos ligeros retoques.
- Jet.- Adelante, Tet, no sea tímido. No me va a molestar oír un razonamiento más fino que el mío, al contrario: espero aprender de su versión.
- Tet.- En realidad, es casi todo igual a lo expuesto por Jet, con la particularidad de que distingo dos casos o escenarios, según $B$ esté en la mitad norte de la circunferencia o en la sur. Evidentemente, la probabilidad de cada unos de esos escenarios es $1/2$. Además, en el primero de ellos, el triángulo no es acutángulo, porque el centro del círculo queda fuera de él, al estar los tres puntos en la misma mitad de la circunferencia. Por tanto, me fijo en el segundo supuesto, en el cual $B = e^{iY}$ está en la mitad sur, es decir, $Y \in [-\pi, 0]$.

  En definitiva, el soporte de la densidad de $(X, Y)$ no es ahora el rectángulo $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ que manejaba Jet, sino su mitad inferior: el cuadrado $[0, \pi] \times [-\pi, 0]$. La condición $X + Y < 0$ ya explicada por Jet representa exactamente la mitad del cuadrado, así que la probabilidad de que el triángulo sea acutángulo es el segundo escenario (cuando $B$ está en la mitad sur) es $1/2$.

  Para rematar sólo hay que invocar el teorema de la probabilidad total: la probabilidad buscada es la suma de la probabilidad de cada escenario por la probabilidad condicionada por él, esto es $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- Jet.- Bravo, Tet. Me ha gustado la idea de dividir el problema en dos escenarios y aplicar el teorema de la probabilidad total.
- Guímel.- Yo no tengo nada que añadir a esta tertulia tan instructiva, pero quiero manifestar una inquietud que tengo respecto al resultado tan redondo (o quizá debería decir 'tan cuadrado'). Si hubiese salido un valor más 'raro' (qué sé yo, $\pi/5 - 1/3$ o $log(2)$) no me habría sorprendido, pero el valor $1/4$ es demasiado especial, no sé cómo explicarlo. Es igual a $1/2$ por $1/2$, como si el resultado dependiese del lanzamiento de dos monedas.

- Alef.- La intervención de Guímel no puede ser más atinada, porque es exactamente eso lo que sucede; el que un triángulo sea acutángulo o no lo sea sólo depende de que al lanzar una moneda dos veces salga cruz la primera vez y cara la segunda.
- He.- Apostaría a que Alef está intentando desesperadamente sorprendernos con algún truco de magia de bolsillo para quedar por encima de los demás. Su ego está sufriendo demasiado con las brillantes intervenciones anteriores.
- Alef.- Haré caso omiso de sus insidiosas frases, que apenas alcanzan el umbral de mi atención y procederé a sostener mis palabras con una demostración concluyente.
- Profesor.- Estoy deseando oírla, pero tendremos que esperar a mañana. La sesión de hoy ha sido agotadora.

**Día tercero.**

- Profesor.- Buenos días. Espero que hayan descansado bien, tras la densa jornada de ayer. Por mi parte, estoy impaciente por oír cómo Alef nos explica en qué sentido el problema se reduce al lanzamiento de dos monedas. Alef, tiene usted la palabra.
- Alef.- Gracias. Aprovecharé algunas de las ideas elementales que expuso ayer Jet, tales como situar los objetos en el plano complejo, aprovechar las simetrías y deducir el carácter del triángulo de la posición que ocupe el origen (el centro de la circunferencia) respecto a dicho triángulo. Por consiguiente, empiezo señalando que los tres puntos escogidos serán $A, B$ y $C$, donde $C = 1$, tal como se hizo ayer.

  En cuanto a los puntos $A$ y $B$, no necesito escribirlos como $e^{is}$ y $e^{it}$, aunque pueden hacerlo así si lo desean. Lo que sí haré es señalar un hecho evidente (visto el gusto de esta clase por las obviedades): que al elegir un punto, se está eligiendo también el diámetro que pasa por ese punto, y que un punto y su antipodal determinan el mismo diámetro en la circunferencia. Lo subrayo porque la clave de mi tesis consiste en desglosar la elección de un punto sobre la circunferencia en dos pasos: primero se escoge un diámetro (lo que se podría describir por medio de una variable aleatoria uniforme entre 0 y $\pi$, pero lo considero innecesario) y después se elige uno de sus dos extremos (lo que se modeliza con el lanzamiento de una moneda).

  Desde luego, si un extremo, $P$, está en el hemisferio norte, su antípoda, $P'$, estará en el hemisferio sur, y viceversa; de modo que planteo la elección de los puntos $A$ y $B$ de la siguiente manera: primero elijo dos diámetros al azar (ya saben: con una distribución uniforme de probabilidad entre 0 y $\pi$) y luego lanzo una moneda dos veces; la primera vez para decidir qué extremo escojo de uno de los diámetros y la segunda para hacer lo mismo con el otro. Cuando el resultado del lanzamiento sea 'cara' elegiré el extremo situado más al norte, y cuando sea 'cruz', el otro extremo. Lo explicaré con detalle, aunque se alargue la explicación, siguiendo el lema de Bet.
- Bet.- Es una decisión prudente.
- Alef.- Decía que el primer paso era elegir dos diámetros, que es tanto como señalar dos puntos al azar, $P$ y $Q$, en el hemisferio superior. Los ordenaré llamando $P$ al que queda a la derecha, de modo que al recorrer la circunferencia en sentido positivo partiendo del punto 1 nos encontramos sucesivamente con $P, Q, -1, -P, -Q$ y volvemos al punto de partida. Lanzo la moneda una vez para decidir si el punto $A$ será $P$ o $-P$: cara significará que $A = P$, mientras que si sale cruz tomaremos $A = -P$; un segundo lanzamiento servirá para decidir si $B = Q$ (cuando salga cara) o $B = -Q$ (si sale cruz).

¿En qué casos cae el centro de la circunferencia en el interior del triángulo $ABC$? Como señaló acertadamente Jet, eso sucede cuando el punto $C = 1$ está en el arco menor determinado por los puntos $A'$ y $B'$, lo cual sólo sucede si $A$ y $B$ están situados en distintos hemisferios y además en las posiciones más lejadas de $C$, es decir, cuando $A = -P$ y $B = Q$. Dicho de otro modo, si la moneda cae primero de cruz y luego de cara, como dije ayer (pese a la incredulidad de He, que me acusaba de pretender engañarles con algún juego de manos). Sugiero a quien no lo vea claro aún que haga un sencillo dibujo, que escriba $P$ y $Q$ como $e^{is}$ y $e^{it}$ con $0 < s < t < \pi$, y que calcule las longitudes de los diferentes arcos.

- Profesor.- Quod erat demonstrandum. Confieso (con gusto) que la disertación de Alef ha superado mis expectativas. Me agrada especialmente cómo surge de manera inesperada una variable aleatoria discreta (representada por el lanzamiento de la moneda) al estudiar una cuestión cuya naturaleza es evidentemente continua. Lo cual contribuye a explicar el peculiar resultado $p = 1/4$. Me quito el sombrero.
- Alef.- Así como antes no me afectaron las invectivas maliciosas de algunos, tampoco me conmueven ahora los halagos, pero agradezco sus palabras por lo que tienen de reconocimiento a lo único que aquí importa: que se arroja luz sobre el problema planteado.
- Yod.- Lamento interrumpir estos momentos de éxtasis para echar (quizá) un jarro de agua fría sobre el entusiasmo general, pero he obtenido un resultado diferente de los anteriores. Según mis cálculos, la probabilidad de que un triángulo sea acutángulo no es $1/4$, sino casi un 43 %: exactamente $2 - \frac{\pi}{2}$.
- Profesor.- ¡Excelente! Acaba usted de dejar caer una bomba en medio de la ciudad. Esperaremos a mañana para detonarla.

**Día cuarto.**

- Profesor.- Buenos días. Ayer disfrutamos de una sesión excelente, con la brillante exposición de Alef y la sorprendente intervención de Yod, anunciando un valor inesperado para la probabilidad $p$. No creo exagerar si digo que nos dejó a todos en ascuas, así que cedo la palabra a Yod para que nos explique cómo llega a ese resultado.
- Yod.- Gracias, profesor. El camino por el que llegué a ese valor de $p$ es muy sencillo, siempre que uno esté dispuesto a salirse de lo que están haciendo los demás. En lugar de fijarme en los ángulos del triángulo o en la circunferencia que pasa por sus vértices, consideré las longitudes de sus lados: $x, y, z$.
- Zayn.- ¡Bravo por Yod! Al fin vuelven el sentido común y la sensatez a esta sala. No está todo perdido.
- Yod.- Naturalmente, esas longitudes han de ser positivas y obedecer a la desigualdad triangular: la suma de dos de ellas tiene que ser mayor que la otra. Planteado así, la región del espacio tridimensional que describen esas condiciones no es acotada, lo que supone un primer obstáculo que salvé tomando como unidad de medida la longitud del lado mayor. De esa manera, sólo tenía que considerar dos longitudes, $x, y$, que constituyen una variable aleatoria bidimensional uniforme en la región definida por $0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y > 1$, que es una zona triangular de vértices $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$; su área es $1/2$, por lo que la función de densidad vale 2 sobre ese soporte.

  Para identificar qué trozo corresponde a los triángulos acutángulos, sólo hay que recordar el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 1$ es la fórmula que identifica el arco de circunferencia correspondiente a los triángulos rectángulos; por debajo quedan aquellos en que los cuadrados de los catetos suman menos que el de la hipotenusa ($x^2 + y^2 < 1$), que son los obtusángulos, y por encima están representados los acutángulos.

El área del segmento circular correspondiente a los primeros es igual a la del cuadrante del círculo menos el triángulo: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, por lo que la probabilidad de que un triángulo sea obtusángulo es el doble de esa cantidad (recordemos que la función de densidad vale 2), $\frac{\pi}{2} - 1$. La probabilidad de que sea acutángulo es lo que le falta para llegar a 1: $p = 2 - \frac{\pi}{2}$ (evidentemente, la probabilidad de que sea rectángulo es 0, como correponde al arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que tiene área nula).

- Zayn.- En cuanto alguien ha estudiado los triángulos como debe hacerse, dando protagonismo a sus lados (gracias, Yod), hemos empezado a oír hablar de Geometría: Pitágoras, segmentos circulares; que asomase el número $\pi$ era casi inevitable. No puedo estar más satisfecho.

- Alef.- La naturaleza humana es fascinante: que alguien pueda felicitarse de ver cómo una cantidad irracional usurpa el lugar que antes ocupaba legítimamente una fracción tan bella como 1/4 sólo se comprende desde la infinita diversidad de los gustos. Por mi parte, retrocedo con horror ante el espectáculo de esos números cuya parte decimal es interminable y no está sujeta a regularidad alguna.

- Kaf.- En ese caso, me temo que voy a aumentar su disgusto. Yo he seguido un camino similar al de Yod, aunque con algunas diferencias, y el valor que he calculado para $p$ es aún más exótico. Me sale algo inferior al 30 % (con más precisión, $0'295587$...); exactamente es $p = log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 2$.

- Alef.- Una vez que se abren las puertas a la insensatez, toda abominación tiene la entrada franca.

- Guímel.- El logaritmo que aparece, ¿es el decimal o el neperiano?

- Kaf.- El logaritmo neperiano, naturalmente. Si están interesados, les cuento como llegar a ese resultado. Es muy breve.

- Profesor.- Adelante, Kaf, por favor.

- Kaf.- Al igual que Yod, Me fijé en las longitudes de los lados, pero tomé como unidad de medida la longitud del lado mediano, en vez de la del mayor.

- Bet.- Disculpe la interrupción: ¿por qué no eligió el lado menor?

- Kaf.- Ésa fue mi primera intención, pero la descarté porque al imponer las condiciones sobre las longitudes de los otros dos lados (que su diferencia fuese menor que 1, esencialmente) obtenía una banda infinita, lo que impedía definir una distribución uniforme de probabilidad, como deseaba.

- Bet.- Ya veo, gracias. Y al elegir el lado mediano, ¿no se topó con ese mismo obstáculo? Al fin y al cabo, aún queda un lado mayor, cuya longitud podría ser tan grande como se quisiera.

- Kaf.- En realidad, no. Llamando $x$ a la longitud del lado menor e $y$ a la del mayor, tenemos las condiciones $0 < x < 1 < y$, pero también $y < x + 1$, para que puedan formar un triángulo, de modo que $y$ está acotado. En realidad, esas desigualdades determinan una región triangular de vértices $(0, 1), (1, 1)$ y $(1, 2)$ en la cual podemos definir una distribución uniforme de probabilidad: la función de densidad vale 2 sobre ese soporte, al igual que en el modelo de Yod.

El resto es similar, aunque los cálculos son algo más complicados: los triángulos rectángulos responden a la igualdad $x^2 + 1 = y^2$, que es la ecuación de una hipérbola; los acutángulos corresponden a la zona situada por debajo: $y^2 < x^2 + 1$ o $y < \sqrt{x^2 + 1}$. Para hallar la probabilidad $p$, tenemos que calcular el área de esa parte del soporte y multiplicarla por 2, lo que supone un pequeño ejercicio de integración.

- Alef.- Abandonar el sendero de la claridad y la sencillez tiene un precio que está empezando a pagar: ahora se ve obligado a calcular la integral de $\sqrt{x^2 + 1}$ entre 0 y 1, que no es inmediata, por más que usted lo denomine 'un pequeño ejercicio'.

- Kaf.- Reconozco sin ambages que el cálculo no es inmediato, como sucedía al abordar el problema al modo de Yod, pero tampoco es una tarea extenuante: un cambio de variable mediante el seno hiperbólico es suficiente para llegar al resultado: una primitiva de la función $\sqrt{x^2 + 1}$ es $\frac{1}{2}[log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x\sqrt{x^2 + 1}]$. Evaluando en 0 y en 1, se obtiene el valor de la integral: $\frac{1}{2}[log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}]$.

- Guímel.- Pero ¡ese resultado es mayor que 1! ¿cómo es posible?

- Kaf.- Eso es debido a que hemos calculado el área por debajo de la rama de hipérbola y por encima del eje de abscisas (entre 0 y 1), cuando en realidad hay que fijarse en la parte que queda dentro del soporte, es decir, por encima de la recta $y = 1$; eso lo conseguimos restando 1 al resultado anterior (por el cuadrado que queda debajo). Finalmente, multiplicamos por 2 y ya tenemos el anhelado valor de la probabilidad: $p = log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 2$.

- Alef.- Ayer se unió a la fiesta el número $\pi$, invitado por Yod; hoy, Kaf ha traído al número e bajo el disfraz del logaritmo neperiano y del seno hiperbólico. No me extrañaría que en cualquier momento vinieran la razón áurea o la constante de Euler-Mascheroni. Contemplo el panorama con ánimo abatido: donde antes reinaban la armonía y la belleza de los sencillos números naturales y sus razones cabe ahora cualquier aberración. Quédense ustedes con sus insensatos resultados, pero no pretendan desterrarme del paraíso de los elegantes argumentos geométricos y los sencillos resultados racionales.

- Lámed.- No se lo tome tan a la tremenda, amigo Alef, que su jardín se mantiene en perfectas condiciones (y yo no me privo de sus frutos, como el magnífico argumento que usted mismo expuso aquí no hace mucho). Pero no deje de disfrutar también de otros paisajes. Por mi parte, celebro los enfoques de Yod y Kaf, que nos han conducido por nuevos caminos a destinos inesperados. Y aplaudiría si de repente alguien decidiera mostrarnos otras vías y otros valores de la probabilidad que estamos investigando.

- Mem.- Recojo la ovación de Lámed, puesto que me propongo defender la tesis de que $p$ puede tomar razonablemente cualquier valor comprendido entre 0 y 1.

- Nun.- Cuando parece que ya está todo dicho, alguien viene a sorprendernos con una nueva ocurrencia.

- Profesor.- Oigamos lo que tiene que decirnos Mem, que me tiene intrigado. No es que haya llegado a un nuevo valor de $p$, sino a todos a la vez; quisiera saber cómo.

- Mem.- En realidad, es muy simple. Un triángulo tiene una base y un vértice opuesto a ella. Si la perpendicular a la base trazada desde ese vértice cae dentro de la base, el triángulo es acutángulo; si cae fuera, será obtusángulo, y si cae en uno de los extremos será un triángulo rectángulo.

- Alef.- Mal empezamos. La altura puede caer dentro de la base y aun así ser un triángulo rectángulo u obtusángulo.

- Mem.- Tiene usted razón, Alef, y lamento haber sido tan descuidado. Estaba pensando en triángulos cuya altura fuese suficientemente grande (al menos, la mitad de la longitud de la base), y por eso patiné. Lo expondré con más detalle, aunque tenga que alargarme más de lo que querría.

- Bet.- De nuevo, la claridad es preferible a la brevedad. No falla.

- Mem.- Situaré el segmento que sirve de base sobre el eje de abscisas, con el origen en su centro y tomaré como unidad de medida la distancia del centro a un extremo; así, la base es el segmento $[-1, 1]$ del eje de abscisas. El vértice opuesto puede ser cualquier punto $P = (x, y)$ con $y \neq 0$. La simetría nos autoriza a pensar que $y$ es positivo. Supondré por ahora que $y > 1$; de ese modo, el punto $P$ está fuera de la circunferencia unidad y el ángulo en $P$ es agudo, con lo que la frase que pronuncié al principio (y que Alef censuró, con toda la razón) es cierta: si la perpendicular a la base trazada desde $P$ cae dentro de la base, el triángulo es acutángulo; si cae fuera, será obtusángulo, y si cae en uno de los extremos será un triángulo rectángulo.

- Alef.- Ahora sí.

- Mem.- Puesto que el pie de la perpendicular es el punto $(x, 0)$, lo que sucede es que el triángulo es obtusángulo cuando $|x|$ es mayor que 1, es rectángulo si $x = \pm 1$ y es acutángulo cuando $-1 < x < 1$. El valor de $y$ no juega ningún papel, por lo que podemos olvidarnos de él. La probabilidad de que un triángulo sea acutángulo es $p = p(-1 < x < 1)$.

- Nun.- ¿Qué sentido tiene esa probabilidad $p(-1 < x < 1)$? Puesto que $x$ puede tomar cualquier valor real, no es posible que siga una distribución uniforme.

- Mem.- Precisamente, ahí está el quid de la cuestión: ¿qué distribución de probabilidad seguirá $x$? Dado que no puede ser uniforme, deberemos pensar en alguna otra, y la opción obvia es una normal. Si $x$ sigue una ley $N(0, 1)$, entonces la probabilidad $p(-1 < x < 1)$ viene dada por la función de distribución, $\Phi$: $p = p(-1 < x < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$, que podemos leer en una tabla de la distribución normal: $0'3174$ (redondeando; el valor exacto se expresa mediante la integral de la función de densidad).

  Pero si la varianza no es 1, sino que $x$ sigue una ley $N(0, \sigma)$, entonces la probabilidad $p(-1 < x < 1)$ es igual a $\Phi(1/\sigma) - \Phi(-1/\sigma) = 2\Phi(1/\sigma) - 1$, que tiende a 1 cuando $\sigma$ tiende a 0 y a 0 cuando $\sigma$ tiende a infinito. Como la función $\Phi$ es continua, esa probabilidad adopta todos los valores entre 0 y 1, con tal de elegir $\sigma$ adecuadamente.

  Y eso es todo.

- Nun.- Se olvida de discutir el caso $y < 1$.

- Mem.- En realidad es una variante de lo anterior algo más complicada. Cuando $y$ es menor que 1, los valores de $x$ que corresponden a triángulos acutángulos ocupan una zona más pequeña (pues hay que considerar la posibilidad de que el ángulo en $P$ sea obtuso). Creo que la complicación adicional no merece la pena.

- Profesor.- Ésa es también mi opinión. Si les parece, podemos dar por cerrado este tema: hemos discutido por activa y por pasiva maneras de entender los triángulos y de estudiar la probabilidad de que sean acutángulos. Hemos descubierto enfoques y argumentos ingeniosos, elegantes, sorprendentes y hasta frustrantes en ocasiones. Los objetivos que me planteaba cuando les propuse la pregunta han sido cubiertos muy de sobra. Gracias a todos.

**Sobre el/los autor/es:**
*Nombre:* Dionisio Pérez Esteban
*Correo electrónico:* dionisio.perez@upm.es
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid.

# Juegos y rarezas matemáticas

# Pasos hacia un conocimiento físico-matemático naturalizado

# Steps toward naturalized physical-mathematical knowledge

José Vico Martín

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XV, pp. 107–133, ISSN 2174-0410
Recepción: 18 Mar'24; Aceptación: 13 ene'25

1 de abril de 2025

**Resumen**

Una investigación académica de este autor sobre los presupuestos didácticos de una muestra de alumnos, inscritos en un master para el profesorado de educación secundaria, ha confirmado unos rasgos físico-matemáticos excesivamente formalistas y, casi siempre, muy alejados de los modelos circunstanciales de la realidad natural humana. Este artículo propone, en cambio, una práctica docente del profesorado que fundamente la sintaxis simbólica utilizada, en tres de las componentes principales del entendimiento humano: espacio, tiempo y materia/causalidad. Constituyentes, las tres, del principio de razón suficiente de las realidades cognoscibles.

**Palabras Clave:** definiciones circunstanciales, escala humana, cuánto por uno, ficciones matemáticas, ontología de la matemática.

**Abstract**

An academic investigation by this author on the didactic budgets of a sample of students, enrolled in a master's degree for secondary education teachers, has confirmed certain forms, classic and routine, used in the transmission of physical-mathematical knowledge specific to the educational level noted. The generally observed features coincide in excessively formalistic physical-mathematical conceptions and, almost always, very far from the circumstantial models of human natural reality. This article proposes, instead, a teaching practice for teachers that bases the symbolic syntax used on three of the main components of human understanding: space, time and matter/causation. Constituents, all three, of the principle of sufficient reason of knowable realities.

**Keywords:** circumstantial definitions, Human scale, How much for one, Mathematical fictions, Ontology of mathematics..

# 1. Una experiencia didáctica de partida: concepciones matemáticas y físicas de la Educación Secundaria en estudiantes de Máster de Profesorado

Este artículo se inspira, íntegramente, en experiencias personales de quien lo redacta. La pretensión del encabezamiento alude, por eso, a un recorrido histórico, paulatino y personal —durante cuarenta años de práctica docente— hacia un cambio de enfoque, más circunstancial y menos formalizado, desde el que contemplar dos de las creaciones intelectuales más entrelazadas de la humanidad: una ciencia fáctica del mundo; la física, por un lado; y otra lógico-formal de sus modelos, la matemática, por otro.

Vaya por delante, además, que el presente artículo se refiere, en lo institucional, al nivel académico de la Educación Secundaria en España (entre 15 y 18 años) y, en lo curricular, al olvido, en la didáctica científica generalmente utilizada, de las habituales circunstancias que las actividades humanas proveen en su contacto habitual con la naturaleza.

Con el tiempo, una primera constatación se ha ido imponiendo: la desconexión, paulatina y permanente, de la necesaria continuidad bio-psicológica del yo —aquello que condiciona el entendimiento humano— con buena parte de las circunstancias en las que se presentan los fenómenos físico-matemáticos que habitualmente se utilizan en la educación institucional. Un caso real puede servir de ejemplo introductorio:

En uno de los apartados de un cuestionario presentado a 50 estudiantes de un máster en formación del profesorado, y que se detallará más adelante, se propuso la siguiente cuestión: "Explique, brevemente, lo que es el seno de un ángulo".

Tan solo 19, entre 50, fueron las respuestas aceptables, aunque en forma operacional (cateto opuesto partido por hipotenusa en un triángulo rectángulo). Nadie tenía un concepto circunstancial; como este, por ejemplo

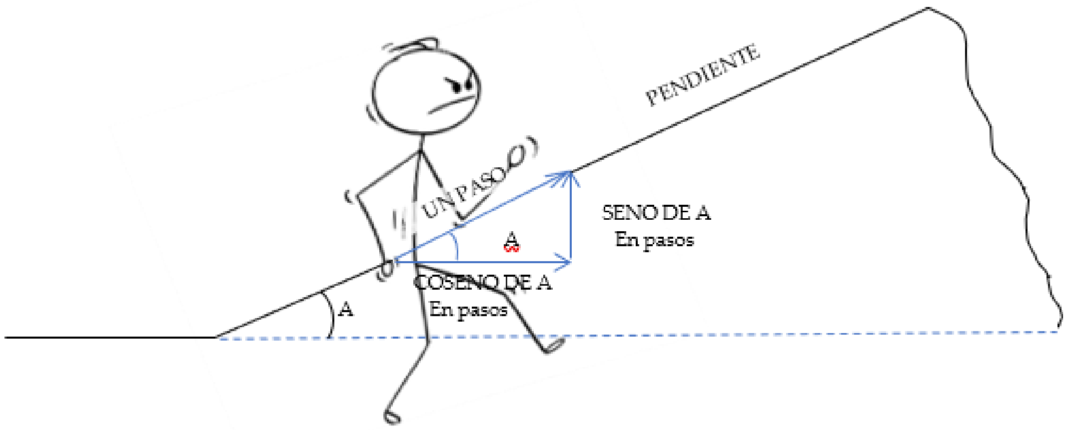



*Figura 1. Trigonometría a escala humana.*

El objetivo propuesto en este artículo es, entonces, doble: a) ofrecer la experiencia que proporciona un largo ejercicio profesional, y b) proponer una innovación educativa que tomara, en alta consideración a la historia y a la filosofía de la ciencia como referentes fundamentales en la transmisión del conocimiento y los valores humanos. Ambas acciones dirigidas preferentemente tanto a profesores ya en activo, como a quienes aspiran a serlo. Por eso quien esto escribe ha tenido la oportunidad de realizar un sencillo experimento con un grupo de alumnos de nivel universitario, graduados en ciencias varias.

Estos fueron la descripción, la composición, la amplitud y la procedencia de la muestra, la cuestión propuesta, la categorización de las respuestas y, por último, los resultados obtenidos.

## 1.1 Cuestionario sobre didácticas matemáticas específicas en la educación secundaria. Estadístico 1[1]

- Año del trabajo de campo: 2023
- Procedencia académica de los participantes: grado universitario en matemáticas y ciencias experimentales
- Estatuto académico de los participantes en el momento de la prueba: curso de posgrado como Máster Oficial en Profesorado de Educación Secundaria de España.
- Promotor y gestor de la investigación: autor de este artículo como profesor jubilado de bachillerato.
- Contacto con los encuestados: mediación de una de las profesoras del máster.
- Estudio de un caso: "Explique brevemente lo que es el seno de un ángulo".
- Descripción del estadístico:
    - Composición de la muestra: 50 alumnos con un grado universitario en ciencias.
    - Distribución de la muestra por titulaciones: 2 alumnos de Arquitectura; 1 de Arquitectura Técnica; 11 de Biología; 4 de Ciencias Ambientales y del Mar; 13 de Matemáticas; 12 de Química y 7 sin datos del grado.
    - Categorías de clasificación cualitativa de las respuestas.
        - NA (Naturalismo alto) = Descripción verbal; metafórica; por analogía, generalización empírica, holística y a escala humana.
        - ND (Naturalismo débil) = Interpretación fenoménica de fórmulas matemáticas.
        - FA (Formalismo alto) = Modelos matemáticos correctos; solución correcta; utilización del cuanto por uno.
        - FD (Formalismo débil) = Exposición tecnológica, fáctica o formalista incompleta.

[1] Autor de este artículo, febrero 2023

- SR = Sin respuesta; exposición formalista incorrecta; "sí" o "no" escueto; y respuesta no pertinente o ilegible.

- Clasificación de resultados.

*Tabla 1. Frecuencias absolutas y relativas por titulación, categorías y totalidad de la muestra (50 alumnos) (solo para la cuestión 5c: "Explique brevemente lo que es el seno de un ángulo")*

| *Titulaciones* | *NA* | *ND* | *FA* | *FD* | *SR* |
|---|---|---|---|---|---|
| Arquitectura | - | - | - | 1 | 1 |
| Arquitectura Técnica | - | - | - | - | 1 |
| Biología | - | - | - | - | 11 |
| CC. Amb. Y Mar. | - | - | 1 | 1 | 2 |
| Matemáticas | - | - | 8 | 2 | 3 |
| Química | 1 | - | 1 | 1 | 9 |
| Sin datos de grado | - | - | 1 | 1 | 5 |
| Muestra total | 1 | 0 | 11 | 6 | 32 |
| Frecuencias relativas | 2% | 0 | 22% | 12% | 64% |

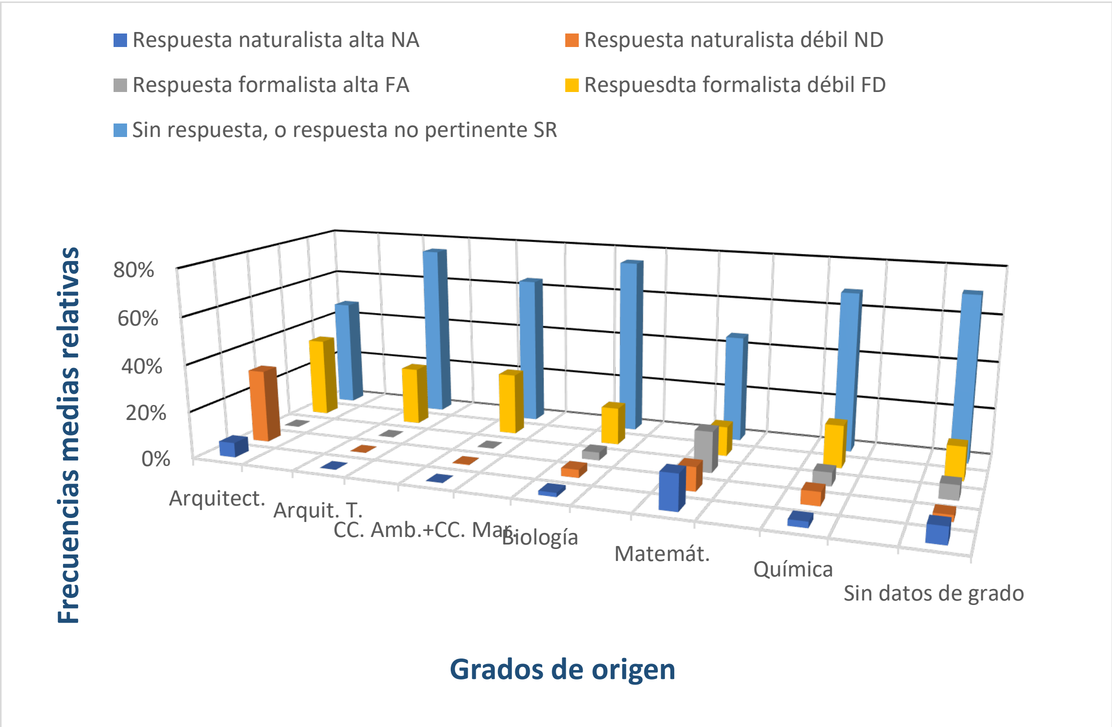



*Figura 2. Educación matemática. Diagrama de columnas para la totalidad de los ítems (16) del cuestionario*

## 1.2 Análisis de la respuesta a la pregunta "Explique brevemente lo que es el seno de un ángulo"

Observando las frecuencias relativas por titulación y categorías (tabla 1) de izquierda a derecha, las dos primeras cifras que llaman inmediatamente la atención es un escuálido 2% de cuestiones resueltas en modo naturalista alto y ninguna en forma de un naturalismo débil.

La hipótesis inicial del estudio, en cuanto que el dominio de formalismo es casi absoluto, se confirma plenamente: 17 del total de respuestas habidas (18) son de estilo formalista

En el resto de la muestra, 32 alumnos en la categoría "sin respuesta" es, con mucho la más llamativa. Casi dos tercios de los encuestados con titulación universitaria en ciencias han olvidado las nociones básicas de la trigonometría que debieron haberles enseñado en la ESO y repetido en el bachillerato.

Aunque muy complicado, un interesante estudio, al respecto, sería conocer cómo hubieran sido las respuestas si, en su momento, a los alumnos se les hubiera propuesto la figura 1 (trigonometría a escala humana) como "imagen" del seno de un ángulo.

En cualquier caso, sí es afirmable en nuestro cuestionario, que, quienes todavía recuerdan algo de la noción de seno de un ángulo, lo asocian exclusivamente a una rutinaria operación aritmética. A la que, por otra parte, ninguno de los cincuenta estudiantes asigna significado conceptual alguno: diecinueve son las soluciones "formalmente" acertadas y ninguna respuesta natural.

Mención aparte merece otro de los resultados sorprendentes. Y es que, nadie de entre los titulados en bilogía, se acuerde de lo que significa el seno de un ángulo: ni de forma circunstancial, ni memorística. ¿Sirvió de algo lo que, a este respecto, les enseñaron en secundaria?

Igual que, como llamativa resulta, además, la situación de tres de los trece titulados en matemáticas, un 23%, con errores o sin respuesta en el elemental ítem trigonométrico propuesto.

Llegados a las tercera y cuarta de las categorías, las que engloban las respuestas "formalistas altas (FA)" y "formalistas débiles (FD)" llama la atención la baja proporción de aciertos completos o parciales —solo 17 entre 50— nada menos que en un concepto geométrico que, precisamente, tenemos ante nosotros casi todos los días.

Por eso, en alusión a la ausencia de rememoración conceptual y aplicación práctica de tantas vivencias humanas habituales con el seno de un ángulo, se utiliza el entrecomillado para la condición formalista que se achaca a las definiciones calificadas como "FA" y "FD". Algunos actos cotidianos pueden servir de recordatorio.

Basta con caer en la cuenta, de la alta probabilidad, de que los encuestados —jóvenes, todos ellos— hubieran visitado en los días anteriores alguno de los centros comerciales que poseen escaleras mecánicas. Amén de ser una práctica generalizada, ninguno, sin embargo, parece darse cuenta de eso como origen circunstancial humano de la mayoría de las ficciones matemáticas que se divulgan constantemente: que moverse por un plano inclinado, por ejemplo, produce el mismo resultado[2] —y es más cómodo— que realizar un movimiento vertical y

[2] A "producir un mismo resultado" asigna este autor el significado que se esconde con la ortodoxa utilización de "descomposición/composición" de fuerzas y movimientos.

otro horizontal con el mismo origen y final que el primero. En todo caso, nuestro intelecto no puede ir más allá que a "imaginarlos" con la ficción procedimental de sentido contrario al llamado "principio de superposición".

Tampoco nadie, en el orden cuantitativo, parece darse cuenta de que la mayor o menor utilidad de cada escalera o pendiente, que es subir o bajar, se puede medir —y es más útil su uso matemático— en "cuanto por uno" (sugiero poner: tanto por uno. También en lo siguiente. O, dicho de otro modo: cuantos metros/pasos/palmos/cm… subo (o bajo) por cada metro/paso/palmo/cm de avance sobre la pendiente o escalera. Visto así, uno se percata de inmediato que, a cada metro/paso, etc. de avance por ella, a la altura ganada —o perdida, en el caso de bajar— le corresponde siempre una dimensión menor que un metro/paso, etc. Mira por dónde, por eso nos repitieron tantas veces, que el seno de un ángulo, y también el coseno, son siempre menores que un cuanto por uno. Lo que, en el fondo, significa algo tan obvio como que, cualquiera que sea una pendiente, sus proyecciones horizontal y vertical son siempre más cortas que ella. Evidencia palmaria que, sin embargo, no es fácilmente evocable desde la definición ortodoxa de "cateto opuesto partido por hipotenusa". Tal vez de ahí pudiera proceder la alta tasa de errores observados en la investigación narrada.

Física y matemáticas circunstanciales y a escala humana son, por eso mismo, mucho más útiles para la inmensa mayoría de las situaciones prácticas.

Además de que, con el procedimiento que aquí se defiende (el seno y el coseno como la longitud vertical —subida o bajada— del uno, y el desplazamiento horizontal, del otro; ambos cuando recorremos 1 km, 1 m, 1 cm, … etc. en pendiente), no es necesaria demostración alguna para la aplicación directa del teorema de Pitágoras a su forma trigonométrica. La relación $sen^2 a + cos^2 a = 1$ es inmediata: la suma de los cuadrados del cuanto por uno de desplazamiento vertical y del cuanto por uno del horizontal, serán siempre el "uno" del patrón de medida del desplazamiento natural.

Desde este artículo, repetimos, se pretende llamar la atención justamente en el origen natural de la totalidad de los conceptos matemáticos y, por utilizar uno de tantos ejemplos posibles del uso de un seno o un coseno. Ambos implican siempre una circunstancia material humana (movimientos oblicuos de objetos, resistencia de materiales, transmisión de radiaciones, etc.). Que su modelo mental haya consistido en la forma geométrica conocida como triángulo rectángulo es una ficción como tantas otras de nuestras realidades físicas: son muy escasas las realidades naturales geométricamente regulares.

Ampliando en un caso más el análisis de la investigación que se comenta, otra de las cuestiones propuestas preguntaba "¿Sabría usted demostrar el Teorema de Pitágoras con una cuerda?" A excepción de un graduado en arquitectura, que había oído o leído algo al respecto, ninguno de los estudiantes encuestados sabía de la utilidad histórica de la cuerda de doce nudos (el triángulo sagrado egipcio) para trazar perpendiculares perfectas en construcción o agrimensura; o hasta demostrar, incluso, el mismo teorema de Pitágoras. Pareciera como si el entendimiento ecológico de los sabios clásicos de otras épocas hubiera sido secuestrado por los modelos y algoritmos aritméticos abstractos, cuando las sencillas proporciones (3-4-5 y sus proporcionales) de estos triángulos permiten cálculos que, con simples sumas, restas y fracciones pueden sustituir, con aproximación suficiente a las complicadas potencias y raíces del Teorema de Pitágoras.

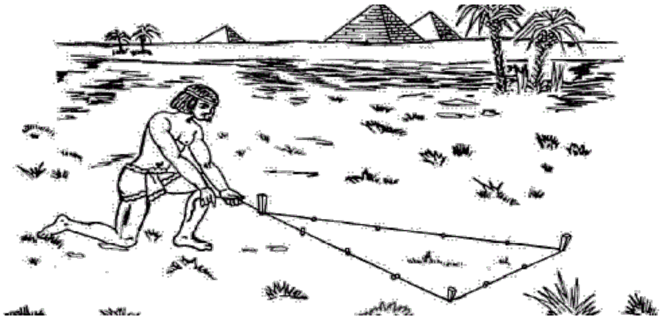


*Figura 3 Ugarte, Alberto. https://www.geogebra.org/m/nfkuxems*

Así, por derivación natural de las vivencias humano-ambientales, las tres "razones directas", que así se llaman al seno, coseno y tangente, pueden ser mucho mejor modeladas —también, claro está, las inversas— a partir de los fenómenos circunstanciales que suceden en la vida de las personas. Las aburridas y volátiles operaciones aritméticas, como se hace habitualmente en la inmensa mayoría de los círculos académicos, solo pueden justificar su existencia en la posibilidad de su manejo materialmente utilitario por medio de patrones gráficos, artilugios mecánicos o máquinas. Nunca, sin embargo, serán capaces de fomentar la creatividad humana por generalización empírica, ni sus implicaciones a escala humana, si no es con referencias continuadas al contexto general de la biosfera.

Richard Feynman[3], premio Nobel de física en 1965, incluyó lo siguiente en su discurso de recepción del premio:

> *Siempre me parece extraño que las leyes fundamentales de la física, cuando se descubren, puedan aparecer en tantas formas diferentes idénticas al principio y que luego, con una pizca de matemáticas, pueda mostrarse la relación entre ellas… Es algo que he aprendido de la experiencia. Siempre hay otra manera de decir lo mismo que no se parece en nada a la manera en que se había dicho antes…Creo que de algún modo es una representación de la simplicidad de la naturaleza. No sé lo que significa que la naturaleza escoja esas curiosas formas, pero tal vez es una manera de definir la simplicidad .*

Valdrá la pena señalar también, a título de ejemplo, otra de las cuestiones planteadas a los estudiantes de máster, y que fueron generalmente mal resueltas; esta, por ejemplo: " ¿Qué significado tiene la expresión: 8€/2€? ". Y es importante notar de antemano que lo que la pregunta solicitaba es un "significado", no una fórmula, un cálculo, o un resultado.

Las respuestas fueron variadas; pero todas ignoraron algunos posibles significados, circunstanciales. Por ejemplo, que 8 pueden ser los euros ganados y 2 los invertidos, con lo cual: 8€/2€ = 4 euros de beneficio por cada uno de inversión. O —una única persona lo respondió así— "que estemos haciendo montoncitos de 2 euros, con lo que, con 8 € salen 4 montoncitos".

He aquí cómo, en la cuestión propuesta, "4" posee entidad concreta: son "montoncitos"; ese es otro posible significado. Todas las fracciones de este tipo (mismas unidades en el numerador que en el del denominador) sí poseen dimensiones, sean éstas materiales o conceptuales. En el mundo natural, no existen referencias relativas no objetivables. Decir que el seno de una pendiente de 30º vale 1/2 puede significar al menos, dos cosas: a) que la elevación o descenso

3 Publicado en: Krauss, Lawrence M. Descubrir a Richard Feynman. Biografía científica. Barcelona: RBA Libros, S. A., 2012, p. 29.

por una pendiente de 30º es siempre la mitad de la pendiente recorrida o, lo que es lo mismo, b) que, por un metro de pendiente recorrida, se sube o baja medio metro. Se trata, en definitiva, de un cuanto por uno, como se decía más arriba: un algo por cada unidad de otro algo.

Similares fueron, a propósito de esto mismo, otras de las respuestas en relación a fracciones de esta clase. Valga una breve lista de "curiosas" respuestas sobre la misma fracción 8€/2€

- "…la realidad palpable impide dividir € entre €"
- "Me resulta curioso que en la fracción operemos con unidades"
- "4 €", (sin añadir nada más)
- "4 … y no sé si la unidad se mantiene"
- "4, aunque esta operación carece de sentido en la realidad"
- "4 … los euros se eliminan unos con otros"
- "4 …no tiene unidades, es solo 4…"
- "Pondría: $\nexists$ 8€/2€ "

Con todo, el 4, como respuesta y sin añadir nada más, es la más repetida. Y una única (recordamos que entre 50) y la mejor de todas: "Tenemos 8€ y queremos hacer montones de 2€ para repartirlos…"

## 1.3 Un ejemplo físico y su interpretación matemática. El fenómeno de la refracción de la luz y la Ley de Snel[4]

Un caso más, en defensa de las inferencias circunstanciales, sobre todo en física, que aquí se postulan, puede ilustrar sus ventajas frente a las notaciones simplemente matemáticas. Se trata de la llamada ley de Snel para la refracción de la luz.

Como es sabido, el efecto de la refracción de la luz se produce cuando un haz de la misma (también del resto de energías ondulatorias) experimentan una desviación al pasar de un medio que las conduce a otro de distinta densidad. Añádase a esto el hecho de que, cuando la densidad del segundo medio es mayor que la del primero, el haz de luz se desvía con un ángulo menor que el de incidencia. Comportándose al revés cuando el segundo medio es menos denso que el primero.

En esta desviación, experimentalmente se comprueba siempre que, midiendo los ángulos, el seno del de incidencia y el seno del de refracción son proporcionales a un factor $n$ cuyo valor depende de la naturaleza de los dos medios de transmisión de las ondas y de la naturaleza de las propias ondas. Matemáticamente, se suele expresar como $sen\, i = n\, sen\, r$ y, por lo tanto: $n = \frac{sen\, i}{sen\, r}$ En cuyo caso, $sen\, i$ [$i$ = ángulo de incidencia] dividido por $sen\, r$ [$r$ = ángulo de refracción] son los "cuantos" de $sen\, i$ que corresponden a cada uno de los "cuantos" de $sen\, r$. Cosa que llama la atención por cuanto parece que lo más coherente sería partir del resultado o "salida" del fenómeno —la luz refractada— y comparar esta con la luz inalterada, antes del

[4] Utilizamos "Snel" en lugar de "Snell", por el nombre original de su autor Willebrord Snel, antes de ser latinizado como Snellius.

fenómeno. Aunque, claro está, entonces $n = \frac{sen\ r}{sen\ i}$ ; es decir, n = cuantos de r (salida) por cada cuanto de i (entrada).

Paralelamente, lo mismo ocurre con la definición física —comprobada, también experimentalmente— del índice de refracción, como $n = \frac{c}{v}$ con lo que, de esta manera, se están ofreciendo los cuantos de una constante absoluta, $c$, en el vacío, por cada uno de los cuantos de sus variables en lugar de hacerlo al revés, como parecería más lógico. Eso sí, del modo ortodoxo $n$ es siempre mayor que 1, puesto que cualquier otro medio será siempre de mayor densidad que el vacío, y la velocidad de la luz en él menor que $c$.

Digamos, por último, que, lo que aquí defendemos como "circunstancial", sería considerar la contracción lineal de los puntos del haz luminoso refractado hacia la normal a la superficie de separación de los dos medios, por cada unidad de separación de los de incidencia. O sea, considerar $n = \frac{sen\ r}{sen\ i} < 1$. Lo que estaría en consonancia definiendo $n$ como $v/c$; en donde $v$ es la velocidad de la luz en el medio de transmisión material, y $c$ es la velocidad de la luz en el vacío. De este modo, y partiendo del índice de refracción del agua pura de 1,33:

- Si $n = \frac{c}{v}$, nagua = (300.000 km/s)/(224 900 km/s) = 1,333 ≈ 4/3; lo que indica que, en el vacío, la velocidad de la luz es (4 )/3 mayor que en el agua; dato que resulta poco representativo de la acción del agua sobre la luz.
- Si $n = \frac{v}{c}$; nagua = (224.900 km/s)/(300.000 km/s) = 0,74966 ≈ 0,75 = 3/4; cuyo significado, que la velocidad de la luz en el agua disminuya a los 3/4 de la del vacío[5] , es claramente indicador (circunstancial) de la acción del agua sobre la luz.

De igual manera, en la figura 4 se observa la contracción de la longitud de $r$ en relación a la longitud de $i$ para el caso de refracción aire-agua, ilustración que da una idea intuitiva del fenómeno.

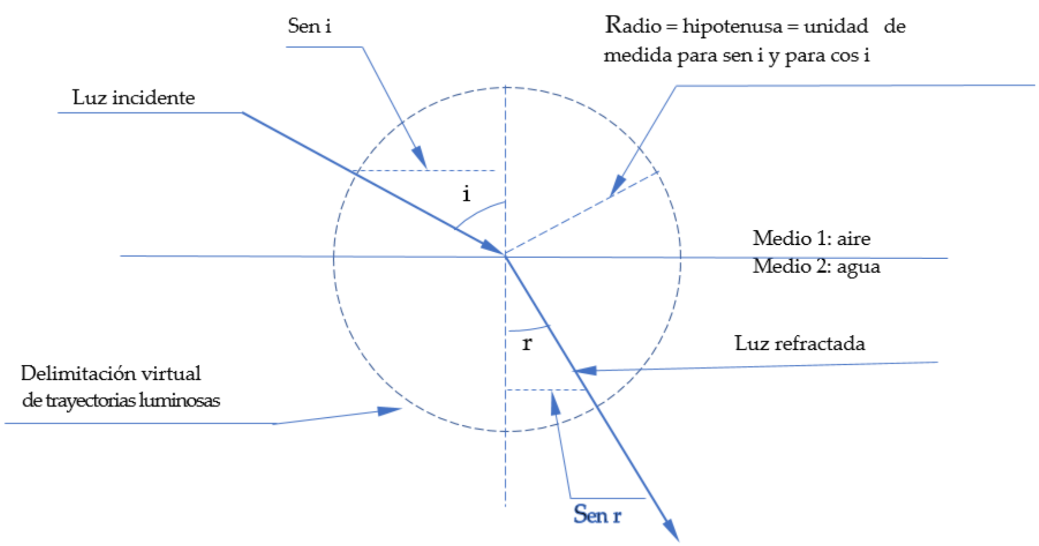



*Figura 4. Ley de Snel naturalizada*

[5] En el aire es prácticamente la misma: [Caire = 299.705 km/s; Cvacío = 299.792 km/s]

Hasta aquí, lo que podría tomarse como una representación "físico-circunstancial" que trata de explicar de otro modo las características formales "asignadas" a la refracción, y que son las que figuran en todas las referencias manejadas por el autor.

Este autor, sin embargo, aboga por una descripción[6] menos abstracta y formalista y mucho más natural y fenomenológica; "circunstancial", la estamos llamando y, para lo cual se ha elaborado el esquema anterior que reproduce un modelo del proceso.

Pero, ¿cuál es su significado físico-natural, además de las relaciones escuetamente matemáticas?, ¿qué fenómenos cualitativos son los que dan fundamento al patrón exclusivamente trigonométrico que se enseña casi en exclusiva?, ¿por qué no aparecen, en ninguno de los esquemas utilizados, ¿las realidades físicas —las separaciones lineales— entre los haces de luz y el eje virtual?

En el modelo gráfico anterior (figura 4) se han querido proponer los siguientes hechos didácticos:

- El paso de la luz desde el aire a cualquier otro medio transparente sigue siempre el mismo patrón cualitativo de "quebradura".
- Aun sin variar el ángulo de incidencia, sí varía el de refracción con los distintos medios refractores utilizados.
- Para cada medio refractor, el ángulo de refracción se mantiene constante cuando el de incidencia también lo hace7.
- $sen\ i$ y $sen\ r$, han sido representados en su versión geométrica natural. O sea, como la menor distancia trazada desde un punto cualquiera del rayo luminoso al eje de referencia.
- En todos los casos prácticos, la velocidad de la luz en el aire se toma con su valor en el vacío, por su mínima diferencia[8].

Y, en estas condiciones, la definición matemática de $n$ como $\frac{sen\ i}{sen\ r}$, se podría naturalizar, en cuanto por uno, de dos maneras:

- Una forma débil, la formalmente utilizada pero que subvierte el orden de sucesión del principio de causalidad, como: Desviación lineal (en metros, cm. mm…) del rayo incidente por un (m, cm, mm …) de desviación del rayo refractado.
- Una forma naturalizada, que, al menos, respeta el orden de sucesión del principio de causalidad, tal como desviación lineal (en m, cm. mm…) del rayo refractado por un (m, cm, mm…) de desviación del rayo incidente.

Obviamente, en este último caso de inferencia, siguiendo el orden de sucesión desde el principio de causalidad, la formulación matemática del índice de refracción habría de ser n = $\frac{sen\ r}{sen\ i}$ = *desviación lineal de la luz refractada por una unidad (m, cm, mm … etc.) de recorrido de la luz incidente*. Lo que implicaría, claro está, que $n < 1$, tanto en la figura como en cualesquiera de los casos del paso de la luz desde un medio de menor a otro de mayor densidad.

[6] Nótese que no llamamos "explicación" a lo que sigue.

[7] Damos preferencia al consecuente (el cambio) frente al antecedente, las condiciones iniciales.

[8] $c_{vacío}$ = 299 792 458 m/s; y $c_{aire}$ = 299.705.543 m/s

En otros contextos físicos, una situación similar a la que se propone, se da, por ejemplo, en los casos de la dilatación térmica. El coeficiente de dilatación lineal [a] se determina experimentalmente como el incremento de longitud por unidad de variación de la temperatura y de la longitud inicial. Así: a = $\frac{\Delta L}{\Delta T \text{ L0},}$. Es decir: El "índice" de un fenómeno como cuanto del "consecuente" por unidades del "antecedente".

## 2. Ciertas complejidades didácticas y el Principio de razón suficiente

Si se echa una ojeada a las expresiones físicas en "cuantos por uno" más habituales:

velocidad, $v = \frac{d}{t}$ ; aceleración, $a = \frac{v}{t}$ ; masa, $m = \frac{f}{a}$; potencia, $P = \frac{T}{t}$; presión, $p_r = \frac{f}{S}$ ; densidad, $d = \frac{m}{vol}$ ; caudal, Q= $\frac{vol}{t}$ ; intensidad de corriente eléctrica, $I = \frac{q}{t}$ ; capacidad de carga eléctrica, $C = \frac{Q}{V}$ , …; con la misma estructura fraccionaria, en "cuantos por uno", se pueden expresar, tanto definiciones formales, como fenómenos y propiedades físicas. Siempre bajo el Principio de razón suficiente más alguno, o varios, de sus tres componentes básicos: espacio, tiempo y causalidad.

No sabemos, en la mayoría de los casos, qué pueda ser aquello a lo que llamamos "causa". Y las definiciones se limitan, por necesidad, a relacionar efectos o materia ya conocidos —o *establecidos* intuitiva o experimentalmente *a priori* —con su evolución espacio-temporal.

Así, en realidad, la masa es, por ejemplo, una abstracción condicionada a una aceleración condicionada, a su vez a una fuerza; la velocidad lo mismo con respecto a la distancia y al tiempo; la potencia, un trabajo condicionado, a su vez, por una fuerza aplicada durante un tiempo; y, así, sucesivamente: tautologías, en definitiva, que no dicen nada nuevo sobre sus numeradores porque tan solo los refieren, directa o indirectamente a sus respectivos denominadores por la intervención —suponemos— de una causa, el tiempo y el espacio. Los tres componentes básicos, como queda dicho, del *Principio de razón suficiente.*

## 3. Dos fundamentos epistemológicos oportunos: la Crítica de la razón pura, y El mundo como voluntad y representación

Si, como reza el título del presente artículo, su objetivo primordial es abogar por una naturalización de la ciencia de la que, cada día nos alejamos más, y con funestas consecuencias. Si la inmisericorde robotización a la que estamos sometidos los seres humanos nos está convirtiendo en manipuladores de datos en lugar de experimentadores de circunstancias vitales. Y si, los jóvenes estudiantes continúan embebidos en un mar de pantallas. Si todo esto no se revierte en favor de una vuelta a las circunstancias genuinamente humanas, y a sus mínimas formulaciones algorítmicas, el transhumanismo más radical puede acabar con la razón y con la emotividad: el Homo sapiens convertido en absoluto Homo faber.

Por eso, la Crítica de la razón pura, de Kant y El mundo como voluntad y representación, de Arthur Schopenhauer se añaden, aquí, como dos oportunos apoyos epistemológicos naturales de lo que se acaba de defender. Ambas, las dos referencias anunciadas, se han elegido en virtud de su complementación perceptual y su oportunidad cognitiva.

*"El mundo es mi representación": esta es la verdad que vale para todo ser viviente y cognoscente, aunque solo el hombre puede llevarla a la conciencia reflexiva abstracta: y cuando lo hace realmente surge la reflexión filosófica.*

*[…] lo único que constituye el otro aspecto del mundo […] es, de parte a parte voluntad.*[9]

Con esto, su primera verdad, la representación, Schopenhauer muestra, por ejemplo, un caso clarísimo de intuición pura que resulta perfecto para la concepción de las dos primeras, y las más antiguas, de las ramas de la matemática, la aritmética y la geometría.

*Que la aritmética se basa en la intuición pura del tiempo no es tan evidente como que la geometría está basada en la del espacio. Pero se puede demostrar del siguiente modo. Toda numeración consiste en establecer repetidamente la unidad: cada vez la caracterizamos con una palabra distinta con el único fin de saber siempre cuántas veces la hemos establecido: estas son las cifras. Pero la repetición solo es posible por medio de la sucesión: y esta, es decir, la secuencia, se basa inmediatamente en la intuición del tiempo y solo gracias a él resulta un concepto comprensible: así que también la numeración es posible solo por medio de él*[10].

Además, y para mayor abundamiento, Schopenhauer echa mano del pedagogo Pestalozzi quien enseñaba a multiplicar como "dos veces 2 es cuatro veces uno". Y, naturalmente, la palabra "veces" implica siempre una evocación temporal.

Uno cree importante, a partir de aquí, explicitar con mayor detalle las conjunciones intelectuales entre el tiempo, el espacio y la ley de causalidad "cuya aplicación [la ley de la causalidad] supone las otras dos formas emparentadas con ella, el espacio y el tiempo [y que] solo mediante la unión de las tres se llega a la representación objetiva"

Así que nada mejor, para eso, que reproducir los predicados de la tabla de características propias del tiempo, el espacio y la materia. Su lectura y reflexión resulta del máximo interés para cualquiera que pretenda captar —sobre todo si luego se quiere transmitir— algunas de las esencias de las leyes de la naturaleza mejor expresadas; esas que conforman los cerebros humanos y de cuya práctica están las escuelas tan necesitadas. Se trata de los Praedicabilia a priori del tiempo, el espacio y la materia. Una transcripción, la tabla 2, que, en el contexto educativo, consideramos imprescindible.

[9] Schopenhauer, Arthur. El mundo como voluntad y representación. Traducción, introducción y notas de Pilar López de Santa María. Madrid: Editorial Trotta, S. A., 2004, pp. 51-52.

[10] Ibidem pp. 64-65.

*Tabla 2. Praedicabilia a priori del tiempo, el espacio y la materia.*

| DEL TIEMPO | DEL ESPACIO | DE LA MATERIA |
|---|---|---|
| 1) Solo hay un tiempo y todos los diferentes tiempos son partes del mismo | 1) Solo hay un espacio, y todos los diferentes espacios son partes del mismo. | 1) Solo hay una materia, y todos los diferentes materiales son distintos estados de la materia: en cuanto tal, se llama *sustancia.* |
| 2) Los diferentes tiempos no son simultáneos sino sucesivos. | 2) Los diferentes espacios no son sucesivos sino simultáneos. | 2) Las materias de diferentes tipos (materiales) no lo son por la sustancia sino por los accidentes. |
| 3) No puede hacerse abstracción del tiempo, pero sí puede abstraerse todo de él. | 3) No puede hacerse abstracción del espacio, pero sí puede abstraerse todo de él. | 3) No puede pensarse la negación de la materia, pero sí la de todas sus formas y cualidades. |
| 4) El tiempo tiene tres períodos: pasado presente y futuro que forman dos direcciones con un punto de indiferencia. | 4) El espacio tiene tres dimensiones: altura, anchura y profundidad. | 4) La materia existe, es decir, actúa, según todas las dimensiones del espacio y a lo largo de todo el tiempo, por lo que une y llena ambos; en eso consiste su esencia: es, pues, en todo, causalidad. |
| 5) El tiempo es divisible hasta el infinito. | 5) El espacio es divisible hasta el infinito. | 5) La materia es divisible hasta el infinito. |
| 6) El tiempo es homogéneo y un *continuum*: es decir, ninguna parte del tiempo es distinta de las demás ni está separada de ellas por nada que no sea tiempo. | 6) El espacio es homogéneo y un *continuum*: es decir, ninguna parte del mismo es distinta de las demás ni está separada de ellas por nada que no sea espacio | 6) La materia es homogénea y un *continuum*: es decir, no consta de partes originalmente diferentes (homeomerías) ni originariamente separadas (átomos); no está, pues, compuesta de partes que estén esencialmente separadas por nada que no sea materia. |
| 7) El tiempo no tiene comienzo ni fin, sino que todo comienzo y fin están en él. | 7) El espacio no tiene límites, sino que todos los límites están en él. | 7) La materia no tiene origen ni término, sino que todo nacer y perecer están en ella. |
| 8) En virtud del tiempo contamos. | 8) En virtud del espacio, medimos. | 8) En virtud de la materia, pesamos. |
| 9) El ritmo existe sólo en el tiempo. | 9) La simetría existe sólo en el espacio. | 9) El equilibrio existe sólo en la materia. |
| 10) Conocemos *a priori* las leyes del tiempo. | 10) Conocemos *a priori* las leyes del espacio. | 10) Conocemos *a priori* las leyes de la sustancia de todos los accidentes. |
| 11) El tiempo es intuible *a priori*, aunque solo bajo la figura de una línea. | 11) El espacio es inmediatamente intuible *a priori*. | 11) La materia es *a priori* solamente pensada. |

| | | |
|---|---|---|
| 12) El tiempo no tiene duración, sino que pasa tan pronto como existe. | 12) el espacio no puede perecer, sino que permanece siempre. | 12) Los accidentes cambian, la sustancia permanece. |
| 13) El tiempo es incesante | 13) El espacio es inmóvil. | 13) La materia es indiferente al reposo y al movimiento, es decir, no está originariamente inclinada a ninguno de ellos. |
| 14) Todo lo que existe en el tiempo tiene una duración. | 14) Todo lo que existe en el espacio, tiene un lugar. | 14) Todo lo material tiene una actividad. |
| 15) El tiempo no tiene duración, sino que toda duración existe en él, y es el permanecer de lo permanente, en oposición a su curso incesante. | 15) El espacio no tiene movimiento, sino que todo movimiento existe en él, y es el lugar del cambio de lo móvil, en oposición a su inconmovible reposo. | 15) La materia es lo permanente en el tiempo y lo móvil en el espacio: medimos la duración comparando lo que está en reposo con lo movido. |
| 16) el movimiento sólo es posible en el tiempo. | 16) El movimiento sólo es posible en el espacio. | 16) El movimiento sólo le es posible a la materia. |
| 17) La velocidad está, para un mismo espacio, en relación inversa con el tiempo. | 17) La velocidad está, para un mismo tiempo, en relación directa con el espacio. | 17) La *cantidad de movimiento* está, para una misma velocidad en relación geométrica directa con la materia (masa). |
| 18) El tiempo no es mensurable directamente, por sí mismo, sino solo indirectamente a través del movimiento, en cuanto aquello que existe a la vez en el espacio y el tiempo: así miden el tiempo el movimiento del Sol y el del reloj. | 18) El espacio es directamente mensurable por sí mismo, e indirectamente a través del movimiento en cuanto aquello que existe a la vez en el tiempo y en el espacio. | 18) La materia, como tal, (la masa) es mensurable, es decir, determinable en su cantidad, solo indirectamente, a saber, mediante la *cantidad de movimiento* que recibe y emite al ser impulsada o atraída. |
| 19) El tiempo es omnipresente: cada parte de él está en todas partes, es decir, en todo el espacio a la vez. | 19) El espacio es eterno: cada parte de él existe en todo tiempo. | 19) La materia es absoluta: no puede nacer ni perecer, no su *quantum* aumentar o disminuir. |
| 20) En el tiempo, por sí solo, todo sería sucesivo.<br><br>21) El tiempo hace posible el cambio de los accidentes. | 20) En el espacio, por sí solo, todo sería simultáneo.<br><br>21) El espacio hace posible la permanencia de la sustancia. | 20), 21) La materia une el efímero flujo del tiempo con la persistente inmovilidad del espacio: por eso es la sustancia permanente de los accidentes cambiantes. Esos cambios los determina, para cada lugar y tiempo, la causalidad, que conecta así el tiempo y el espacio, y constituye toda la esencia de la materia. |
| 22) Cada parte del tiempo contiene todas las partes de la materia. | 22) Ninguna parte del espacio contiene la misma materia que otra. | 22) Pues la materia es tan persistente como impenetrable. |

| | | |
|---|---|---|
| 23) El tiempo es el *principium individuationis.* | 23) El espacio es el *principium individuationis.* | 23) Los individuos son materiales. |
| 24) El ahora no tiene duración. | 24) El punto no tiene extensión. | 24) El átomo no tiene realidad. |
| 25) El tiempo en sí es vacío e indeterminado. | 25) El espacio, en sí, es vacío e indeterminado. | 25) La materia en sí no tiene forma ni cualidad, es por lo mismo inerte, es decir, indiferente al reposo y el movimiento, o sea, indeterminada. |
| 26) Cada instante está condicionado por el anterior y existe solo en cuanto este ha dejado de existir. (Principio de razón del ser en el tiempo). | 26) Mediante la situación de cualquier límite en el espacio con respecto a cualquier otro, podemos determinar estrictamente su situación con respecto a todos los posibles. (Principio de razón del ser en el espacio) | 26) Ningún cambio en la materia puede producirse si no es debido a otro que le precede: por eso un primer cambio y un primer estado de la materia son tan impensables como un comienzo del tiempo o un límite del espacio (Principio de razón del devenir). |
| 27) El tiempo hace posible la aritmética. | 27) El espacio hace posible la geometría. | 27) La materia, como lo móvil en el espacio, hace posible la foronomía. |
| 28) El elemento simple de la aritmética es la unidad. | 28) El elemento simple de la geometría es el punto. | 28) El elemento simple de la foronomía es el átomo. |

Por último, y sin perder de vista el objetivo que preside la redacción de este artículo, veamos un contraste didáctico entre ciertas prácticas y algunas teorías: he aquí, en este sentido, un antecedente claro de Kant a los *praedicabilia* de Schopenhauer acabados de transcribir:

> *Si llamamos sensibilidad a la receptividad que nuestro psiquismo posee, siempre que sea afectado de alguna manera, en orden a recibir representaciones, llamaremos entendimiento a la capacidad de producirlas por sí mismo, es decir, a la espontaneidad del conocimiento. Nuestra naturaleza conlleva el que la intuición sólo pueda ser sensible. La capacidad de pensar el objeto de la intuición es, en cambio, el entendimiento.*
>
> *[…]Ninguna de estas propiedades es preferible a la otra: sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguno sería pensado. Los pensamientos sin contenido son vacíos; las intuiciones sin concepto son ciegas […]. Las dos facultades o capacidades no pueden intercambiar sus funciones. Ni el entendimiento puede intuir nada, ni los*

*sentidos pueden pensar nada. El conocimiento únicamente puede surgir de la unión de ambos*[11].

*" […] sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguno sería pensado.* (Kant, Immanuel, 2005, p. 93)

Extraordinaria, la anterior sentencia que, al estilo de la Academia de Platón con la geometría, habría de figurar en el frontispicio de todo sistema educativo:

Por eso, porque la cicatería naturalista académica actual se mantiene a machamartillo, a uno le parece más oportuno que nunca denunciar la persistente pereza del hombre para liberarse de su "culpable incapacidad", en palabras del propio Kant:

*La incapacidad significa la imposibilidad de servirse de su inteligencia sin la guía de otro. Esta incapacidad es culpable porque su causa no reside en la falta de inteligencia sino de decisión y valor para servirse de sí mismo de ella sin la tutela de otro. ¡Sapere aude! ¡Ten el valor de servirte de tu propia razón!*[12]

Precisamente, son las deficiencias didácticas y las excesivas normativas burocráticas académicas vividas por este antiguo profesor, las que han orientado este trabajo y el consiguiente ensayo experimental que, sucintamente, se ha presentado en el capítulo uno.

## 4. La matemática adaptable a las realidades objetivas. Mario Bunge

Uno no descubre nada nuevo si afirma que, en la formación de los estudiantes de las ciencias fácticas en general, y de la matemática, en particular, priman, de manera dominante, las dialécticas lógico-formales abstraídas, a posteriori, de las circunstancias cotidianas de la vida. Muchos, demasiados profesores, utilizan los objetos matemáticos como si, de verdad, estuvieran presentes en la naturaleza. Aceptan, como realidad, la metáfora galileana de un mundo escrito en caracteres matemáticos. Han olvidado, en el caso de que sí la conocieran, esta sentencia antropológica de Kant que se citaba más arriba y que condiciona categóricamente el intelecto humano —y hasta los instintos animales— a la experiencia sensible.

*" […] sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguno sería pensado. (Kant, Immanuel, 2005, p. 93)*

Aunque, claro está, no resulta nada fácil leer filosofía cuando está tan poco prestigiada "¿para que sirve?", es la pregunta más frecuente en muchos de los niveles del sistema educativo español. Por eso, por la ignorancia de los orígenes del entendimiento y la pereza intelectual, se utiliza mayoritariamente una didáctica al revés: recitar definiciones, leyes y teorías para

[11] Kant, Immanuel. Crítica de la razón pura. Introducción, traducción, notas e índices de Pedro Ribas. Madrid: Santillana Ediciones Generales, S.L. 2005, p. 93. (A: páginas de la primera edición de 1781 y B: páginas de la segunda edición de 1787).

[12] Kant, Immanuel. Filosofía de la historia. Prólogo y traducción de Eugenio Imaz. México: Fondo de Cultura Económica, 1987, p. 25: ¿Qué es la Ilustración? 1784.

exponer; y ejercitar, después teóricamente, sus aplicaciones prácticas. El carro delante de los bueyes. Y, así, a los estudiantes se les pasa, de este modo por alto, que todas las leyes científicas son fruto de las experiencias humanas. Y que, en particular y, además, la matemática misma tendría muy poco sentido sin una realidad objetiva que la motivara. Mario Bunge, el físico y matemático argentino, epistemólogo y filósofo de la ciencia, así lo afirmaba en uno de sus magníficos libros:

> *Permítame el lector repetir una perogrullada: la verdad matemática es esencialmente relativa o dependiente del contexto. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras vale para los triángulos planos, pero no para los esféricos y no todas las álgebras son conmutativas o, siquiera, asociativas.*
>
> *[…] Por último, admitamos que el problema de la verdad, si bien resulta central en la ciencia y la filosofía, es periférico en la matemática. Tal como ha expresado Mac Lane (1986)[13], no es adecuado preguntar si una pieza matemática es verdadera. Las preguntas adecuadas son si es correcta, "fructífera" [responsive] (o sea, si resuelve un problema o hace avanzar una línea de investigación), iluminadora, promisoria o relevante para la ciencia para o para algunas actividades humanas[14].*

## 5. Algunas aportaciones ejemplares más en la ontología de las matemáticas

En relación con lo anterior, a este autor le vienen a la mente tres testimonios importantes: el primero, historicista y de procedencia rusa[15]; el segundo, los escritos del sabio francés Henri Poincaré y, como tercero, los del alemán David Hilbert. Los tres podrían perfectamente personalizar un recorrido entre dos de los posibles extremos en un continuo histórico-epistemológico del desarrollo del saber matemático. La aportación rusa como representante de un amplio naturalismo intuitivo, histórico y, por eso mismo, a escala humana; Henri Poincaré sirviéndose de la intuición, como una apoyatura conceptual consistente; y David Hilbert, categórico defensor de una matemática inventada a *priori*, axiomática y radical desde sus inicios.

Siguiendo, entonces, el mismo orden de cita de los tres autores que se proponen, la estructura narrativa de este apartado se ceñirá, por razones de espacio, a una sola de las tres categorías fundamentales del pensamiento matemático. De entre la *aritmética, la geometría y el análisis*, trataremos de glosar lo más destacable que de la primera, la aritmética, caracteriza el pensamiento de cada uno de los autores elegidos.

[13] Se refiere a: Mac Lane, Saunders, 1986. Mathematics: Form and Function. Nueva York, Springer -Verlag.

[14] Bunge, Mario (2006). A la caza de la realidad. La controversia sobre el realismo. Barcelona, Editorial Gedisa, S. A. p. 271.

[15] Nos referimos a: Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev. La matemática: su contenido, métodos y significado. Versión española de Manuel López Rodríguez. Madrid: Alianza Editorial, 1985.

## 5.1 Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev. La matemática: su contenido, métodos y significado

Desde su primera edición (en ruso y en 1956) hasta la primera traducción española (Alianza Editorial, 1973) que tomaremos, ahora, como referencia, se han publicado bastantes reediciones más; lo que da lugar a la consideración de la importancia de una obra que, en tres tomos, expone una visión general de la matemática de una calidad histórica, abarcadora y didáctica extraordinaria. Bastante de la práctica docente de este autor estuvo inspirada en sus lecturas. Como esta, por ejemplo:

> *Tal es el camino general de la ciencia: a partir de lo que la experiencia proporciona directamente, pasa a generalizaciones y abstracciones, volviendo luego otra vez a la experiencia como instrumento para un conocimiento más profundo de la esencia de los fenómenos; y al proporcionar así la explicación de fenómenos conocidos y la predicción de otros nuevos, guía la actividad práctica de los investigadores y a su vez encuentra en ello su propia justificación y la fuente de su futuro desarrollo.*[16]

*"La experiencia, como medio para un conocimiento más profundo de la esencia de los fenómenos"* constituye el lema de la obra y se remarca de nuevo, casi al final de la obra, cuando se trata el tema 10 sobre *la geometría abstracta y el espacio real,* en el capítulo dedicado a las geometrías no euclidianas, ya casi al final de la obra. El valor de la experiencia —repetimos— preside, de principio a fin, la totalidad de la obra: "El espacio es euclidiano con suficiente aproximación en dominios que son pequeños comparados con la escala cósmica" (*Ib.* p. 226 y 227). Dominios que son, precisamente, los únicos en los que la escala humana nos permite desarrollarnos.

Son —añadimos aquí—, la materia y sus objetos lo que da sensibilidad al concepto de "espacio". Y, dado que es toda la materia la que está sometida a continuos cambios, esas modificaciones son, paralelamente a la idea de espacio, lo que facilita las nociones del tiempo. No, desde luego, de un tiempo absoluto, sino del que se puede asociar a cada uno de los procesos observables. Si acaso, se podría presentir una cierta intuición del tiempo como lo circunstancial ineludible a las totalidades de sucesos posibles.

Respecto a la intencionalidad de la obra rusa, mucho antes, en los inicios, se nos advierte que:

> *En este libro nuestro propósito será el de dar a conocer y aclarar el contenido concreto de conceptos tales como los ya mencionados*[17]*, de modo que el lector pueda convencerse por sí mismo de que todos ellos están relacionados con la vida real, tanto en su origen como en sus aplicaciones.*[18]

---

[16] Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A., y otros. La matemática: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Editorial, S.A. (tres tomos), 1973, p. 227 tomo tres.

[17] Alude el autor a los conceptos de la geometría, a los de números reales, racionales, irracionales, complejos, funciones, diferenciales etc. etc., que cita algunas líneas arriba.

[18] Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A., y otros, ob. cit. p.18.

Y, en este sentido, destacamos algunos de los contenidos concretos a los que se refiere el capítulo *Aritmética,* en el tomo I,

*a – Es fácil reconocer el carácter abstracto de la matemática. Operamos con números abstractos sin preocuparnos de cómo relacionarlos en cada caso a casos concretos (p. 17).*

*b — El concepto de número (por el momento hablaremos sólo de números enteros positivos) fue elaborado muy lentamente, (p. 24).*

*c — A un nivel inmediatamente superior, el número aparece ya como una propiedad de una colección de objetos, aunque no se distingue todavía de la colección en cuanto "número abstracto", en cuanto número no relacionado con objetos concretos. (p. 24).*

*d – El número de objetos de una colección dada es propiedad de la colección, pero el número real en sí, "el número abstracto" es una propiedad abstraída de la colección concreta y considerada simplemente en sí misma, al igual que "negrura" o "dureza" (p. 25).*

*e – Las operaciones con números aparecen como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos. Esto se observa incluso en los nombres de los números. Por ejemplo, entre ciertos indios americanos el número veintiséis se pronuncia como "encima de dos dieces coloco un seis (p. 26).*

*f — Experimentalmente se descubrió que una suma*

*no depende del orden de los sumandos y que el resultado de contar un conjunto dado de objetos no depende del orden en que se cuente hecho que se refleja en la identidad esencial de los números "ordinal" y "cardinal: primero, segundo tercero, y uno, dos tres. De este modo los números aparecen no como entidades separadas e independientes sino relacionadas unas con otras, (p .26).*

*g — En general, no aparecieron como entidades separadas, sino como un sistema con sus relaciones mutuas y sus reglas.*

*El objeto de la aritmética es exactamente éste, el sistema de números con sus relaciones mutuas y sus reglas. Los números abstractos en sí no tienen propiedades tangibles y en general se puede decir muy poco sobre ellos. […] De hecho, las propiedades de un número dado consisten precisamente en sus relaciones con otros números (p. 27).*

La nota al pie número 5 de la misma página 27 amplía lo anterior diciendo que *"Cualquier abstracción, eliminada su base concreta, […] carece de sentido en "sí misma"; sólo existe en sus relaciones con otros conceptos […] sin ellas la abstracción pierde todo su contenido y significado, es decir, sencillamente no existe*[19].

*h — El concepto de número, como el de cualquier otro concepto abstracto no tiene una imagen inmediata; no puede ser exhibido, sino sólo concebido en la mente.*

[19] ibidem p. 27.

*i — La sucesión de números aparece como indefinidamente prolongable, y con ello entra en la matemática la noción de infinito (p. 28).*

*j — La historia de los conceptos de la aritmética muestra cuán equivocado es el punto de vista idealista de que surgen del "pensamiento puro", de la "intuición innata, de la contemplación de formas a priori o algo similar (p. 35).*

*k — [...] los métodos de la lógica y los conceptos de la aritmética, fueron elaborados y fijados en nuestro conocimiento tras tres mil años de experiencia práctica, sobe la base de regularidades objetivas del mundo que nos rodea (p. 36).*

Una síntesis de la selección expuesta sobre la aritmética la expresan perfectamente los propios autores:

*"Resumiendo, la realidad es concreta; y resulta particularmente importante recordar este hecho en relación con la matemática debido precisamente a su abstracción" (p. 37).*

## 5.2 Henri Poincaré. La ciencia y su método

Hace ya más de 100 años, Henri Poincaré escribía esto,

*Muchos [de los alumnos] no habrán comprendido si no encuentran alrededor de ellos, en la práctica o en la naturaleza, la razón de ser de tal o cual explicación matemática. Bajo cada palabra quisieran poner una imagen visible; es preciso que la definición evoque esa imagen, que a cada estado de la demostración la vean transformarse y evolucionar. Con esta condición solamente comprenderá y retendrán. A menudo, ellos mismos se hacen la ilusión; escuchan los razonamientos, miran las figuras; se imaginan haber comprendido y no han hecho más que ver*[20].

Y, a los efectos de las pretensiones de este artículo, y porque son afirmaciones como estas las que han inspirado ampliamente las concepciones didácticas del autor, parece muy oportuno señalar que, para uno de los grandes de la matemática del siglo XX, fuera la intuición la guía más firme para un conocimiento objetivo como fundamentación de las conceptualizaciones matemáticas.

*El fin principal de la duda matemática es desarrollar ciertas facultades del espíritu, y, entre ellas la intuición. Es merced a ella que el mundo matemático permanece en contacto con el mundo real; y, cuando las matemáticas puras pudieran prescindir de ella, sería preciso siempre tener recursos para salvar el abismo que separa el símbolo de la realidad*[21].

Y, en eso, y porque no todo el mundo posee semejante habilidad en el mismo grado, se basa nuestra conjetura de la utilidad de la naturalización del aprendizaje de la ciencia físico-

[20] Poincaré, Henri. Sobre la ciencia y su método. Ciencia y método; El espacio; Últimos pensamientos.

Traducciones de M. García Miranda, L. Alonso, A. B. Besio y J. Banfi. Prólogo de José Manuel Sánchez Ron. San Viçens dels Horts (Barcelona), 1997. Círculo de Lectores, S. A. p. 126.

[21] Poincaré, Henri. Ob. cit. p. 218..

matemática. El utilísimo acceso intelectual a la proporcionalidad, por ejemplo, se simplifica notablemente con la intuición de la constancia o variación del *cuanto de efecto por unidad de causa,* en los problemas directos, y del *cuanto de causa por unidad de efecto*, en los problemas inversos; mucho más complejos e interesantes, por cierto.

> *Muchos fenómenos obedecen a una ley de proporcionalidad. Pero ¿por qué? Porque en esos fenómenos hay algo que es muy pequeño. La ley simple observada no es entonces más que la traducción de esta regla analítica general conforme a la cual el crecimiento infinitamente pequeño de una función es proporcional al crecimiento de la variable*[22].

Precisamente es esta magistral observación la que está en el origen conceptual de todos los procesos de la proporcionalidad: lo que aquí se ha denominado como "cuanto por uno" y que en la inmensa mayoría de los textos científicos aparece con la amorfa denominación de "constante de proporcionalidad". Uno ha experimentado largamente la versión *causal* en formato de "cuanto", para los efectos por unidad de causa, y comprobado su eficacia por su amplio espectro de aplicación —siempre se tiene la posibilidad de diseñar los *tamaños* prácticos de los patrones unitarios. Ni que decir tiene, además, que la coherencia de la observación anterior de Poincaré sobre que "el fin principal de la duda matemática es desarrollar ciertas facultades del espíritu, y, entre ellas la intuición", es imprescindible para que que las ficciones matemáticas se mantengan en permanente contacto con los hechos objetivos del mundo real al que, aquellas, tratan de representar.

Atrevida afirmación, esta, que probablemente —al menos por experiencia propia— pondría los pelos de punta a bastantes de los compañeros de profesión. Como, de forma parecida, se aboga aquí por un conocimiento básicamente a escala humana. También en esto, el sabio francés se pronunciaba, claramente, a favor de la escala humana:

> *¿Es bueno advertirles [a los alumnos y sobre la mecánica ordinaria] que no es más que aproximada? Sí, pero más tarde; cuando hayan penetrado hasta la médula, cuando hayan tomado el hábito de no pensar sino por ella, cuando no corran el riesgo de olvidarla, entonces se podrá sin inconvenientes mostrarles los límites.*
>
> *Es con la mecánica común como deben vivir, es la única que tendrán siempre que aplicar; cualquiera que sean los progresos del automovilismo, nuestros coches no alcanzarán jamás las velocidades donde ella no sea verdadera. La otra no es más que un lujo y no se debe pensar en lujos sino cuando no se corra el riesgo de perjudicar lo necesario.*[23]

En resumidas cuentas: a) lógica, como método generalizador, sí; pero…

b) después de haber estimulado la intuición desde el trato directo con la experiencia natural y "*no pensar sino por ella*".

Habilidades intelectuales, por cierto, tan poco estimuladas desde la pedagogía institucional que, valga añadir una anécdota representativa sobre una de las respuestas al cuestionario aludido en el apartado segundo de este artículo.

Esta era la pregunta número 5c, del bloque 2, sobre didácticas específicas en matemáticas:

[22] Poincaré, Henri, ob. cit. p. 8.

[23] Ibid. p. 219.

*¿Tienen algo que ver entre sí, las derivadas y la proporcionalidad?*

Recordemos que 50 era en número de alumnos y posibles respuestas para el ítem 5c del bloque 2.

Y, estos, fueron los resultados:

46 cuestiones sin respuesta.

3 "Creo que sí", pero sin argumentar.

1 solo acierto bien argumentado.

Aunque los resultados de la investigación se expresan por sí mismos, especialmente difíciles de entender resultan la ausencia de respuesta en los dos alumnos (la totalidad de arquitectura); en los once (la totalidad) de los alumnos de biología; en los 10 de matemáticas (la muestra era de 13 alumnos); y en los once (la muestra era de 12) alumnos de química. Sobre todo, si se tiene en cuenta que se trata de disciplinas científicas en las que las generalizaciones empíricas son la base metodológica de su alcance cognitivo.

Motivados, en fin, por la digresión anterior, es, por lo demás, tanta la calidad pedagógica de Poincaré, que uno no resiste al impulso de agregar una más de sus experiencias, fácilmente extrapolables a una matemática naturalizada a escala humana:

Este, por ejemplo, en relación a las formas habituales de las definiciones y sus posibilidades de ser comprendidas:

> *[…] En las escuelas primarias, para definir una fracción, se corta una manzana o una torta.*
>
> *En la Escuela Normal Superior, por el contrario, o en las facultades, se dirá: una fracción es el conjunto de dos números enteros separados por un trazo horizontal; se definirá por convenciones que pueden sufrir estos números; se demostrará que las reglas de estas operaciones […, etc., etc.].*
>
> *Tales son las definiciones que encontráis en un libro con justicia admirado y muchas veces coronado: Los Grundlagen der geometrie, de Hilbert. Veamos, en efecto cómo comienza: "Pensemos tres sistemas de cosas que llamaremos puntos, rectas y planos". ¿Qué son estas cosas? No lo sabemos, y no tenemos que saberlo. Todo lo que tenemos derecho a saber es lo que nos enseñan los axiomas, este, por ejemplo: "Dos puntos diferentes determinan siempre una recta" […] Así "estar situado sobre una recta está definido como sinónimo de determinar una recta[24]. He aquí un libro que me parece muy bueno, pero que no recomendaría a ningún estudiante de instituto[25].*

## 5.3 Un Contrapunto: el formalismo radical de David Hilbert

Pero la última cita no es, como en tantas otras cuestiones humanas, ni la única ni la indiscutible metodología para la transmisión de la ciencia. Aunque sí la más cercana a las circunstancias reales de nosotros, los humanos. En la evolución histórica de la matemática, de sus tres facetas más relevantes: su fundamentación formal, sus métodos de enseñanza y su

[24] Nótese el estilo circular de la definición

[25] Ibid. p. 121.

aplicabilidad utilitaria; la primera ha ocupado mucho del tiempo —tal vez demasiado—, de los matemáticos.

Los empeños para encontrar criterios suficientes que llevaran a la aceptación indiscutible de las verdades matemáticas han sido constantes desde los primeros tiempos. Recuérdese, si no, al propio Euclides de Alejandría, cuyos *Elementos* siguen gobernando eficazmente, por su consistencia racional y su aplicabilidad práctica, todos los procesos de la geometría aplicada a escala humana.

Y es que, la matemática tiene —y ha tenido siempre— un halo de soberbia. Y quienes, a lo largo de la historia, han tomado la coherencia absoluta de sus resultados como muestra del orden universal y hasta cuasi divino; Platón y los Pitagóricos, por ejemplo; han perpetuado la aureola de superioridad de sus argumentos frente a las "vulgaridades" específicamente humanas. David Hilbert, puede ser un buen representante, como contrapunto a la matemática naturalista, que se está postulando aquí.

Un libro suyo, *Fundamentos de las Matemáticas*[26], Comienza como aparece en esta imagen.

Los textos que conforman la presente antología abarcan un período de más de 30 años (1899-1930) en las investigaciones de Hilbert acerca de los fundamentos de las matemáticas. En ellos podemos observar el desarrollo de sus ideas en torno a esta problemática: la axiomatización como el método propio de las matemáticas, la justificación del infinito y la necesidad, en vista de la aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos y las subsecuentes disputas en torno a la validez de la aritmética transfinita y la lógica misma, de darles un fundamento seguro y definitivo con la *metamatemática* o teoría de la demostración. En este proyecto, tanto lógico como matemático, la reflexión filosófica desempeña un papel importante y así vemos como la filosofía de Kant constituye un pilar tan importante como el cálculo lógico de Frege y Rusell. Este intento, conocido como el programa de Hilbert, es el origen del formalismo en la filosofía de las matemáticas y constituye un punto de referencia ineludible para el estudio histórico de estos problemas.

*Figura 5. Comienzo de la obra 'Fundamentos de las matemáticas' de Hilbert*

[26] Hilbert, David. Fundamentos de las Matemáticas. México: Impresión Tipográfica Fenian, S.A. de C.V. Primera edición en español: 1993. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.
https://tienda.fciencias.unam.mx/es/inicio/35-fundamentos-de-las-matematicas-9786070220500.html

## 5.4 Dos versiones extremas: el formalismo radical de David Hilbert y la biología del conocer, de Humberto Maturana

En el texto anterior se puede leer, en relación con las concepciones de Hilbert, que "En ellos [los textos que conforman la presente antología] podemos observar el desarrollo de sus ideas entorno a a esta problemática: la axiomatización como el método propio de las matemáticas, la justificación del infinito y la necesidad […] de darles un fundamento seguro y definitivo con la *metamatemática* o teoría de la demostración[27]".

Si se recogen, ahora, las radicales argumentaciones axiomáticas en las que semejante *metamatemática* se apoya, se puede ejercitar una comparativa funcional con esto otro:

> *El aprender tiene que ser algo diferente del captar algo externo, puesto que no se puede dar el captar algo externo, ya que, en la interacción, lo que a uno le pasa, depende de uno*[28].

Categórica afirmación, de Humberto Maturana, que responde a la estructura del sistema nervioso —experimentada largamente por el biólogo chileno y sus colaboradores— y cuyos resultados indican que

> *"[…] el sistema nervioso (o el organismo) no ha sido diseñado por nadie, es el resultado de una deriva filogenética de unidades centradas en su propia dinámica de estados. Lo adecuado, por lo tanto, es reconocer el sistema nervioso como una unidad definida por sus relaciones internas en las que las interacciones sólo actúan modulando su dinámica estructural, esto es, como una unidad con clausura operacional"*[29].

Con lo que, la comparativa propuesta, se resuelve constatando dos extremos muy significativos entre un método axiomático sumamente abstracto y fuera de toda realidad natural, y una comprobación biológica, histórica y experimental, de las funciones, estructuras y organización de los sistemas nerviosos de los seres vivos en el seno de una evolución filogenética con una teleonomía fundamental: la conservación homeostática necesaria, al servicio de la *autopoiesis* de la vida: "el sistema nervioso (o el organismo) [concluye Maturana] no ha sido diseñado por nadie, es el resultado de una deriva filogenética de unidades centradas en su propia dinámica de estados".

¿Cómo es posible compaginar, entonces, "la axiomatización como el método propio de las matemáticas…" con las investigaciones biológicas sobre el sistema nervioso?

Por eso hemos llamado "contrapunto" a algunas de las afirmaciones *a priori* por las que, David Hilbert pretende llegar a la fundamentación básica de las ciencias exactas. Exactitud que, desde luego, estará asegurada en la medida en que fuera firme la aceptación de sus premisas. Dicho de otro modo: predicar exactitud a partir de axiomas no deja de ser un juicio analítico: una tautología.

---

27 Hilbert, David, ob. cit. p. 8.

28 Maturana, Humberto. El sentido de lo humano. Dolmen Ediciones, S. A., Octava edición, 1996, p. 228.

29 Maturana, Humberto y Varela, Francisco. El árbol del conocimiento. Las bases biológicas del entendimiento humano. Buenos Aires, Grupo Editorial Lumen, 2003, p. 113.

Veamos algunos ejemplos aportados por el propio Hilbert:

> *Los axiomas no son considerados como proposiciones verdaderas, evidentes y que no requieren demostración; un axioma no es tal sino en combinación con los otros axiomas; su carácter deriva del hecho de que sea independiente de, y consistente con, dos demás. Es decir, a partir de los axiomas, no deberá concluirse una contradicción y, ningún axioma podrá derivarse de los restantes*[30].

Con el imprescindible respeto al personaje, a uno le viene a la memoria este comentario de un profesor de su juventud que, declaraba así la definición geométrica de "punto":

> *"El punto es la intersección de dos rectas; luego:*
> *Corolario: ¡Cuánto más gordas son las rectas (y dibujaba una gruesa "X") más gordo es es punto!"*

Por último, y a modo de alusión concreta, he aquí algunos de los axiomas tomados literalmente de la obra en cuestión[31]:

> *El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no sólo de las matemáticas puras sino en general de todo el pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: en un principio, era el signo.*
>
> *[…] El signo 1 es un número.*
>
> *Un signo que comienza y termina por 1, de modo que siempre que el signo 1 aparezca antes del final sea seguido de +, y siempre que tengamos + le siga 1 es también un número.*
>
> *De acuerdo con lo anterior, los signos*
>
> *1 + 1*
>
> *1+ 1 + 1*
>
> *son números*
>
> *Estos numerales o signos numéricos [Zahlzeichen] son, en realidad, números y constituyen enteramente a éstos, convirtiéndose ahora ellos mismos en objeto de nuestro estudio. Pero los numerales carecen por completo de cualquier otro significado fuera de éste*
>
> *Aparte de estos signos, nos serviremos de otros que sí tienen un significado y poseen una función comunicativa. Del signo 2, por ejemplo, como una abreviatura de 1 + 1, de 3 en lugar de 12 + 1 + 1, etc. Además de éstos, usaremos los signos = y > que resultan de utilidad para la comunicación de afirmaciones. De esta manera, v.gr.*

---

[30] Hilbert, A. ob. cit. p. 10.

[31] Hilbert, ob. cit. pp. 45 y 46.

*2 + 3 = 3 + 2*

*No es una fórmula, sino que tiene solamente la función de comunicar (tomando en cuenta las abreviaturas que hemos introducido) que 2 + 3 y 3 + 2 son, en realidad, uno y el mismo signo, esto es: 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Tampoco*

*3 > 2*

*es una fórmula, sino que sirve exclusivamente para comunicar el hecho de que el signo 3, esto es, 1+1+1 es más extenso que el signo 2, es decir, 1+1 o, lo que es lo mismo, que este último es un segmento de aquel*[32]*.*

A partir de aquí, acabamos de entrar en un nuevo mundo matemático que dejamos al lector para el entendimiento y valoración circunstancial humana que considere oportunos.

# Referencias

[1] ALEKSANDROV, KOLMOGOROV Y LAURENTIEV; A. D., A. N., M. A., 1985. *La matemática: su contenido, métodos y significado, pp. 18, 27, 227* Tomo III. Versión española de Manuel López Rodríguez, Alianza Editorial, Madrid.

[2] BUNGE. Mario, 2006. *A la caza de la realidad*. La controversia sobre el realismo, p. 271. *Editorial Gedisa, S. A., Barcelona.*

[3] FEYNMANN, Richard, 2012. *Descubrir a Richard Feynman, Biografía científica, p. 29.* Publicado en Krauss, Lawrence M., RBA Libros, S. A., Barcelona.

[4] KANT, Immanuel, 2005. *Crítica de la razón pura.* Introducción, traducción, notas e índices de Pedro Ribas, Santillana Ediciones Generales, S.L., Madrid.

[5] KANT, Immanuel, 1987. *Filosofía de la historia*, p. 93. Prólogo y traducción de Eugenio Imaz. Fondo de Cultura Económica, México.

[6] KRAUSS, Lawrence M., *2012. Descubrir a Richard Feynman.* Biografía científica, p. 29. RBA Libros, S. A., Barcelona,.

[7] HILBERT, David, 1993. *Fundamentos de las Matemáticas.* pp. 8, 10, 45, 46, 121 Primera edición en español. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México, D.F.

[8] HILBERT, David. Web: https://tienda.fciencias.unam.mx/es/inicio/35-fundamentos-de-las-matematicas-9786070220500.html

[9] MATURANA, Humberto, 1996. *El sentido de lo humano,* p. 228, Dolmen Ediciones, S. A., Octava edición, Santiago de Chile.

[10] MATURANA, Humberto y VARELA, Francisco, *2003*. *El árbol del conocimiento*. Las bases biológicas del entendimiento humano, *Grupo Editorial Lumen, Buenos Aires.*

[32] Hilbert, ob. cit. pp. 45 y 46.

[11] POINCARÉ, Henri, 1997. *Sobre la ciencia y su método. Ciencia y método; El espacio; Últimos pensamientos.* Traducciones de M. García Miranda, L. Alonso, A. B. Besio y J. Banfi. Prólogo de José Manuel Sánchez Ron. Círculo de Lectores, S. A., San Viçens dels Horts (Barcelona).

[12] SCHOPENHAUER, Arthur, 2004. *El mundo como voluntad y representación*. Traducción, introducción y notas de Pilar López de Santa María. *Editorial Trotta, S. A., Madrid.*

[13] SCHOPENHAUER, Arthur, 2003. *Praedicabilia a priori del tiempo, el espacio y la materia*. El mundo como voluntad y representación II, complemento, pp. 51, 52, 64, 65, 68. *Traducción, introducción y notas de Pilar López de Santa María, Editorial Trotta.*

[14] VICO MARTÍN, José. Cuestionario sobre didácticas matemáticas específicas en la educación secundaria. *No publicado.*

**Sobre el autor:**
*Nombre:* José Vico Martín
*Email:* vico.martin@hotmail.com
*Institución:* Universidad de la Coruña, España

# Cuentos Matemáticos

# Mate-aventuras en la granja: desafíos

# Math-adventures at the farm: challenges

Osvaldo Osuna y Berenice Reyes-Herrera

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XV, pp. 107–110, ISSN 2174-0410
Recepción: 28 Agos'23; Aceptación: 16 Sep'23

1 de Abril de 2025

**Resumen**

Se presenta una narración breve, orientada a niños de entre 9 y 12 años, en la que se realizan operaciones aritméticas básicas, al tiempo que, para su resolución, se solicita un ejercicio creativo de imaginación.

**Palabras Clave:** operaciones aritméticas básicas, razonamiento matemático.

**Abstract**

A short story is presented, aimed to children between 9 and 12 years old, in which basic arithmetic operations are carried out, while, for its resolution, a creative exercise of imagination is requested.

**Keywords:** basic arithmetic operations, mathematical reasoning.

## 1. La granja

Las vacaciones de verano con los abuelos son fabulosas. ¡Hay muchas cosas entretenidas por hacer! En la granja hay gallinas, vacas, burros, gatos y también pájaros, ¡con suerte se ven luciérnagas! No es como en la ciudad donde viven las primas Pipa, Rebe y Lin; con los abuelos hay mezquites, fresnos y nopales. Pipa es la mayor, luego sigue Lin y la más pequeña, Rebeca.

Las tres primas disfrutan jugando y correteando en el gran patio que tiene la casa: pueden rodar entre la hierba, lanzar piedras a lo lejos y buscar insectos entre las hojas. También pueden jugar con el tío Nito, al que le gusta organizar actividades con pelotas, hacer máscaras de papel o de yeso, hacer paseos a los alrededores y hasta realizar experimentos sorprendentes... aunque a veces no resultan como se planearon.

## 2. Reparando el corral de las gallinas

Hoy el tío está arreglando el corral de las gallinas, tiene que reemplazar algunos postes de madera que sostienen la cerca. Curiosas, y con ánimo de colaborar, las niñas se acercan. El tío aprovecha para desafiarlas, les pregunta: — ¿Cuántos postes se necesitan para completar el corral? — Las niñas empiezan a contar los postes faltantes... que son 9, sin embargo, antes de responder, el tío sonriendo las detiene y les dice: —¡Solamente uno, el último! — Los chistes del tío no son tan buenos y las chicas se echan la mano en la cara.

— ¿Quieren ayudarme? — ¡Sí! — Responden al unísono. — Bien, entonces por favor traigan los postes que están bajo el árbol de aguacate. —Las niñas corren al árbol y hacen el primer viaje. Pipa acarrea dos postes y las demás traen uno cada una. En el segundo viaje, las niñas terminaron de acarrear los postes, todas colaboraron con al menos uno. Si se suma lo que acarreó cada niña, las tres llevaron una cantidad distinta de postes, ¿cuáles fueron las cantidades individuales acarreadas?

En lugar de contar los postes, el tío Nito aprovecha para explicarles con un papel y un lápiz:

— Se requerían 9 postes. Hicieron dos viajes y cada una llevó al menos un poste por viaje.

Por lo tanto necesitamos expresar al 9 como una suma de 3 cantidades distintas.

Cada una de estas cantidades debe ser mayor o igual a 2 (porque cada una llevó al menos dos postes).

Entonces una niña llevó dos postes, otra tres y otra cuatro.

## 3. Leche y una sorpresa

En eso apareció la abuela Lola con una olla y una canasta. Se dirige al depósito donde está la leche recién ordeñada, pues requiere 4 litros. Las niñas, contentas, deciden acompañarla. Al llegar al depósito notan que, además del contenedor de leche, sólo están una jarra de 3 litros y otra de 5 litros. ¿Cómo va a hacer la abuela para obtener 4 litros?

— Rebe piensa rápido y grita: —¡Yo sé! Primero lleno la jarra de 5 litros y con esta misma lleno la jarra de 3 litros, quedando así 2 litros en la jarra de 5. Estos 2 los vaciamos en la olla de la abuela. Luego regresamos el contenido de la jarra de 3 a la de 5 y terminamos de llenar la de 5 litros. — ¡Claro! — Pipa la interrumpe. — Ahora repetimos el proceso para obtener de nuevo 2 litros y con los 2 anteriores tenemos 4. ¡Pero hay otra manera de resolverlo! — ¿Cuál es esa otra forma de obtener 4 litros de leche en la olla de la abuela?

Las más pequeñas, contrariadas, no logran encontrar otra manera. — No se preocupen, —comenta la abuela —es muy fácil: primero llenamos la jarra de tres y la pasamos a la olla. Solamente nos faltaría un litro, ¿cierto?, entonces rellenamos la de tres nuevamente y la pasamos a la de 5, volvemos a llenar la de tres y vaciamos leche en la de 5 hasta que se llene, por lo tanto, nos queda un litro en la de tres. Es la cantidad que vaciaremos en la olla. — Las niñas se alegraron. — Y ahora, vayamos a los nidos de las gallinas. Ayúdenme a recoger huevos para 3 encargos que nos hicieron los vecinos: 4 huevos para el primero, el triple de esa cantidad para el segundo y una cantidad igual a la mitad del segundo para el tercero. —¿Cuántos huevos deberán tomar las niñas?

De regreso en la cocina, su abuela las felicitó por recoger los 22 huevos y les revela que preparará una rica sorpresa. Las niñas toman agua y corren a jugar a las escondidas dentro de la casa. —¡El que no se ha escondido tiempo ha tenido! — Las risas y los gritos alegran el corazón de los tíos, los primos y los abuelos. Después de un rato, la abuela las llama y les enseña una tarta recién horneada. Para terminar el día, el tío Nito les comenta que terminó de arreglar el corral y que también les ha dado comida a las gallinas. Les narra que la gallina rojiza llegó enseguida de la blanca, la café llegó en medio del gallo y la pinta, el gallo no le ganó a la rojiza pero no fue último. — ¡Niñas! ¿Pueden decirme en qué orden llegaron las primeras 5 aves? — Les pregunta antes de probar un pedazo de tarta de la mesa. Las niñas, entretenidas con la tarta y un buen vaso de leche, se toman su tiempo antes de pensar en la respuesta...

— Tío, —dice Lin — solamente podría ser de una manera: que la blanca llegara primero, luego la rojiza, el gallo, la café y finalmente la pinta. — ¡Muy bien!, son todas muy inteligentes. Qué les parece si mañana vamos a pasear a la presa. — ¡Sí! ¡Queremos emparedados! — Emocionadas, dijeron las niñas. Ha sido un día cansado y satisfactorio para todos, pero las vacaciones de verano apenas se inician...

**Sobre el/los autor/es:**
*Nombre:* Osvaldo Osuna
*Correo electrónico:* osvaldo.osuna@umich.mx
*Institución:* Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás, de Hidalgo, Ciudad Universitaria, C.P. 58040. Morelia, Michoacán, México.

*Nombre:* Berenice Reyes-Herrera
*Correo electrónico:* breyes@enesmorelia.unam.mx
*Institución:* Escuela Nacional de Estudios Superiores-UNAM. Antigua Carretera a Pátzcuaro No. 8701 Col. Ex Hacienda de San José de la Huerta. C. P. 58190. Morelia, Michoacán, México.

Críticas y reseñas

# ¡Aún no es tarde! Juntos hacia el aprendizaje (10 experiencias en educación superior y claves para su transferencia).

# It's not too late yet! Together towards learning (10 experiences in higher education and keys for their transfer).

Equipo editorial

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XV, pp. 101–106, ISSN 2174-0410
Recepción: 22 Jul'24; Aceptación: 2 Sep'24

1 de abril de 2025

**Resumen**

Este artículo presenta la reseña del libro "¡Aún no es tarde! Juntos hacia el aprendizaje". Ser docente en educación superior es una profesión exigente. El ritmo vertiginoso de los cambios en nuestra sociedad exige responder con acierto y rapidez a las necesidades formativas de la ciudadanía que ha de integrarse en el mundo laboral del siglo XXI. Es preciso concebir, diseñar e impartir buenas propuestas formativas, que consideren e integren las demandas y características que definen el contexto actual y a su vez puedan ser proyectadas en el futuro; formar comunidades de aprendizaje, con verdadero compromiso ciudadano y social, en los que cada estudiante desarrolle sus capacidades de comprensión de los nuevos conceptos con espíritu crítico y aplicación al entorno real.

Docentes de la Universidad Politécnica de Madrid, en colaboración con profesorado internacional, comparten reflexiones y experiencias en torno a la cuestión de cómo promover el aprendizaje del alumnado de educación superior, en su mayoría de Ingeniería, impulsando su rol protagonista en el proceso. El resultado muestra diferentes ejemplos reales de acciones educativas específicas, con impacto en la mejora de la calidad educativa (ODS 4).

**Palabras Clave:** Atención a la diversidad, Educación, Educación en competencias, Sociedad del conocimiento, Universidad.

**Abstract**

This article presents the review of the book: "It's not too late! Together towards learning". Being a teacher in higher education is a demanding profession. The dizzying pace of changes in our society requires a successful and rapid response to the training needs of citizens who must integrate into the world of work in the 21st century. It is necessary to conceive, design and deliver good training proposals, which consider and integrate the demands and characteristics that define the current context and in turn can be projected into the future; form true learning communities, with true citizen and social commitment, in which each student develops their abilities to understand new concepts with a critical spirit and application to the real environment.

Teachers from the Polytechnic University of Madrid, in collaboration with international teaching staff, share reflections and experiences around the question of how to promote the learning of higher education students, mostly in Engineering, promoting their leading role in the process. The result shows different real examples of specific educational actions, with an impact on improving educational quality.

**Keywords:** Attention to diversity, Education, Education in competencies, Knowledge society, University.

# 1. Ficha técnica


**Título:** ¡Aún no es tarde! Juntos hacia el aprendizaje
10 experiencias en educación superior y claves para su transferencia
**Autor:** Diversos autores.
**Coordinación**: M.ª Cristina Núñez-del-Río, José Luis Martín-Núñez
**Editorial:** Horizontes Universidad
Edición: 1ª edición en castellano
**Fecha de publicación:** mayo 2024
**ISBN:** 9788419900616
**Páginas:** 230

# 2. El Libro

La educación cambia. Para realizar su función transformadora ha de seguir el ritmo de la sociedad a la que sirve. Por eso las instituciones educativas han de apostar por la mejora de la calidad docente, favoreciendo e impulsando el trabajo serio, comprometido y eficaz del profesorado.

Este libro presenta diez capítulos liderados por docentes de la Universidad Politécnica de Madrid, en colaboración con profesorado internacional. Diferentes servicios, programas y proyectos han impulsado y facilitado su desarrollo. Un foco común: cómo promover el aprendizaje de los estudiantes, en su mayoría de Ingeniería, pero también de otros campos/ámbitos, para favorecer su rol protagonista en el proceso. Un resultado de experiencias variado que enriquece y potencia la perspectiva de acción educativa.

Los dos capítulos iniciales reciben el apoyo del Instituto de Ciencias de la Educación de la UPM, así como de servicios generales de universidades brasileiras. Ambos se enmarcan y derivan de proyectos de investigación de la convocatoria nacional. Revisan aspectos generales: cómo convertirse en docente adaptativo, sensible a las diferencias de los estudiantes, y cómo preparar entornos virtuales de aprendizaje (EVA) eficaces.

En el marco de iniciativas financiadas a través de proyectos de innovación educativa y aprendizaje-servicio, cinco capítulos transitan por diferentes materias, contenidos y competencias, con gran acierto en los planteamientos. Ofrecen propuestas concretas que pueden ser transferidas a nuevas materias. Programación, matemáticas, experiencias de aprendizaje-servicio aplicadas a soluciones de retos sísmicos actuales y competencia de comunicación escrita son los focos de atención de estos. Cierra este conjunto de aportaciones una magnífica revisión de más de 20 años de historia de experiencia de ABP (aprendizaje basado en proyecto) con resultados excelentes.

El programa Erasmus+ ofrece la oportunidad de colaboración internacional estrecha, que en estas propuestas refuerza e impulsa el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Tres capítulos muestran realizaciones diferentes. Por un lado, el esfuerzo del profesorado de primer año de carrera para facilitar la transición al estudiantado; por otro, dos capítulos se centran en la inmersión de los estudiantes en tareas específicas: en un caso, abordan la elaboración de materiales para la mejora acústica de los espacios, y en el otro, la contribución a la creación de mapas colaborativos.

Tanto si eres docente como si gestionas la formación docente de tu institución, este libro te interesará. Te ofrecerá claves para transformar las acciones educativas en el marco del contexto actual.

El contenido del libro está desglosado en 10 capítulos titulados:

Prólogo (M.ª Cristina Núñez del Río; José Luis Martín Núñez)

1. Reconocer la diversidad en la práctica pedagógica: camino hacia la mejora de la calidad educativa (M.ª Cristina Núñez del Río; Márcia Bündchen; Kelly Geronazzo Martins)

2. Desarrollo de competencias docentes en el diseño de entornos virtuales de aprendizaje (Arturo Caravantes; Begoña Galián)

3. Personalización del aprendizaje en la enseñanza de la tecnología a través de proyectos de aprendizaje-servicio (José Luis Martín Núñez)

4. Desarrollar la competencia de comunicación escrita a través del aprendizaje basado en retos y la evaluación formativa (Ana Jiménez-Rivero; Alexandra Míguez-Souto)

5. Aprender matemáticas ayudando a aprender (Sagrario Lantarón Sánchez; Mariló López González)

6. Retos y experiencias de aprendizaje-servicio aplicado a soluciones de bajo coste para la construcción de viviendas en zonas sísmicas (Sandro Andrés Martínez; Rubén Muñoz Pavón; Marcos García Alberti; Juan Carlos Mosquera Feijóo)

7. Diseño e implementación de experiencias de aprendizaje basado en proyectos exitosas: una metodología educativa para Ingeniería con infinitas posibilidades (Andrés Díaz Lantada)

8. Empoderar al alumnado para su transición de la educación secundaria a la universidad (Iciar Pablo-Lerchundi; Maria Yarosh)

9. Geovoluntariado para el aprendizaje: mapeo abierto y colaborativo para promover el compromiso ambiental y social (Susana Sastre-Merino; Miguel Marchamalo Sacristán; Jana Michalková; Miloslav Michalko)

10. Innovación educativa y desarrollo sostenible: el uso de papel reciclado para el desarrollo de nuevos materiales. El caso de la comunidad EELISA «El campus circular y regenerativo» en el proyecto de la mejora acústica de dos aulas del Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) (David Sanz Araúz; Nadia Vasileva)

## 3. Aprender matemáticas ayudando a aprender

El capítulo 5 de este libro escrito por las profesoras Sagrario Lantarón y Mariló López, está dedicado a experiencias directamente relacionadas con las Matemáticas. Lleva por título "Aprender matemáticas ayudando a aprender". A continuación, se incluye un resumen del contenido del capítulo que da una idea del carácter aplicado y práctico de las actividades docentes descritas, no sólo en el capítulo, sino en todo el libro:

La realización de acciones donde los estudiantes tienen que aplicar los conocimientos adquiridos a ámbitos aparentemente alejados de las áreas puramente teóricas y académicas, es una forma de dinamizar y motivar el aprendizaje. Si además estas acciones tienen un carácter lúdico, el propósito aumenta sus posibilidades de éxito. Por otro lado, la manera más eficaz de poner a prueba lo que se ha aprendido sobre una materia y si verdaderamente se ha entendido, es intentar transmitirlo y enseñárselo a otros.

La experiencia que se comparte en este capítulo es la propuesta de actividades a alumnos universitarios centradas en promover la cultura científica combinando la ciencia (concretamente las matemáticas) con muy diversas áreas, desarrollando conocimientos científicos y buscando su presencia y aplicación a otros entornos. Además, en numerosas de estas actividades, los participantes universitarios son mentores de grupos de estudiantes preuniversitarios a los que guían con la finalidad de prestarles y ampliar sus conocimientos científicos mediante el apoyo y el trabajo conjunto.

Todas las acciones a realizar tienen un carácter aplicado, manipulativo y lúdico lo que resulta altamente motivador.

**Sobre los coordinadores/autores:**
*Nombre:* M.ª Cristina Núñez-del-Río
*Correo Electrónico:* mc.nunez@upm.es
*Institución:* ICE de la Universidad Politécnica de Madrid

*Nombre:* José Luis Martín-Núñez
*Correo Electrónico:* joseluis.martinn@upm.es
*Institución:* ICE de la Universidad Politécnica de Madrid

# Críticas y reseñas

# Cuando menos es más

# When less is more

Alberto Donoso Bellón

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XV, pp. 101–106, ISSN 2174-0410
Recepción: 21 Ene'25; Aceptación: 2 Feb'25

1 de abril de 2025

**Resumen**

Escrito en clave divulgativa, donde no aparecen fórmulas y todo está explicado con palabras, usando analogías y ejemplos ilustrativos, *Cuando menos es más* pretende mostrar que ingeniería y matemáticas pueden llegar a conformar un excelente binomio con el que llevar a cabo diseños más eficientes en cualquier ámbito de la ciencia y la tecnología.

**Palabras Clave:** diseño, ingeniería, matemáticas, optimización topológica.

**Abstract**

Written in informative key, where there are no formulas and everything is explained with words, using analogies and illustrative examples instead, *Cuando menos es más* is intended to show that engineering and math may conform an excellent binomial to carry out more efficient designs in any field of science and technology.

**Keywords:** design, engineering, math, topology optimization.

## 1. Ficha técnica


**Título:** Cuando menos es más
**Autor:** Alberto Donoso Bellón.
**Editorial:** Almud Ediciones de Castilla-la Mancha
**Fecha de publicación:** 2024
**ISBN:** 9788412914146
**Páginas:** 88

## 2. El Libro

*Cuando menos es más* (O de cómo los tucanes nos enseñan a construir aviones) es un ensayo de carácter divulgativo que pretende dar a conocer una filosofía de diseño más eficiente, más sostenible y en cierta manera más conectada con la naturaleza. Y el cálculo diferencial es la herramienta que permite llevar a cabo esa tarea de forma sistemática. Estructurado en seis capítulos de accesible lectura, a lo largo de los mismos se responden a diferentes preguntas que precisamente coinciden con el título de los capítulos.

Con el fin de entender mejor qué matemáticas hay detrás de todo esto, podemos decir que dentro de las diferentes técnicas destinadas a llevar a cabo optimización en el ámbito del diseño de estructuras se encuentra la optimización topológica, la cual es considerada por la comunidad científica como una de las herramientas de diseño conceptual más importantes que existen en la actualidad. A grandes rasgos, la idea es encontrar la mejor manera de distribuir una cierta cantidad de material en un dominio de diseño de modo que se optimice una cierta función objetivo cumpliendo a la vez una serie de restricciones. Un ejemplo bastante paradigmático e interesante desde el punto de vista aplicado consiste en encontrar la estructura más rígida posible entre todas aquellas cuyo volumen está limitado por un cierto valor. La distribución de material obtenida es la que permite definir la pieza no sólo exteriormente a través de su forma, sino también interiormente mediante la más que posible aparición de agujeros internos en ella. El número, la forma y la posición de esos agujeros determinarían su topología, de ahí que el término optimización topológica se refiera precisamente a la distribución óptima de dichos agujeros (internos y externos) en la estructura al optimizar una cierta función objetivo con restricciones. En este tipo de problemas de optimización la variable de diseño es típicamente una función característica de subconjuntos medibles del dominio de diseño, y cuando esta se relaja adecuadamente pasa a ser una densidad, que toma todos los valores intermedios entre 0 y 1, ambos incluidos. Estos valores extremos son los que realmente nos interesan, ya que se corresponden físicamente con la fase vacío (o agujeros) y la fase sólida (o material), respectivamente, en la estructura.

Este tipo de problemas pertenecen a los de diseño óptimo (que a su vez son un caso particular de los problemas de control óptimo) en los que el control es intrínseco al sistema físico, lo que matemáticamente suele traducirse en el hecho de que la variable de control actúa en la parte principal de la ecuación en derivadas parciales que describe el sistema, es decir, en los coeficientes de las derivadas de mayor orden de esta. En general, los problemas de diseño óptimo son problemas que carecen de solución, ya que son problemas mal formulados y requieren de una formulación relajada. En este paso es donde entra en juego de una forma central la teoría de homogenización y la teoría matemática de materiales compuestos.

Aunque inicialmente el concepto de optimización topológica fue concebido para diseño estructural, especialmente en las industrias del automóvil y aeronáutica, a día de hoy se ha aplicado y se sigue haciendo de forma satisfactoria en otros muchos contextos físicos. Algunos de estos conocidos ejemplos de aplicación, recogidos en el libro, son el diseño de mecanismos flexibles (dispositivos monolíticos que se deforman gracias a su flexibilidad), metamateriales (aquellos que presentan unas propiedades atípicas y que no se encuentran en la naturaleza) o transductores piezoeléctricos (sensores/actuadores que transforman energía mecánica en eléctrica y viceversa), entre otros.

A lo largo de este libro descubriremos, mediante ejemplos simples y atractivos, cómo la optimización topológica puede revolucionar la forma en que construimos, desde aviones hasta dispositivos electrónicos, y exploraremos cómo la naturaleza utiliza patrones eficientes para crear formas sólidas y ligeras, inspirando a profesionales de la ingeniería y el diseño a aplicar estos principios en sus creaciones.

## 3. ¿A quién va dirigido?

Aunque en un principio este libro quizá podría ir más orientado hacia cualquier estudiante universitario que se encuentre cursando o haya terminado un grado técnico o de ciencias, como matemáticas o física, el texto está pensado para que una amplia audiencia interesada en la divulgación científica, sin conocimientos previos en la materia, pueda entender mínimamente de qué va. El libro se puede adquirir directamente a través de la editorial Almud Ediciones, en la página web de la librería Serendipia de Ciudad Real o en La Casa del Libro.

## 4. El autor

Alberto Donoso es profesor de matemáticas de la Universidad de Castilla-La Mancha en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Ciudad Real, donde desarrolla su actividad docente e investigadora, esta última centrada en el uso y desarrollo de diferentes técnicas de optimización para problemas de ingeniería mecánica y diseño estructural.

En paralelo, también coordina a nivel provincial desde hace años el programa ESTALMAT (EStímulo del TALento MATemático) en niños y niñas de 12-13 años, proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España. Recientemente también ha participado en diferentes eventos de divulgación científica, como el festival de ciencia Pint of Science en 2024.

Fruto de más de veinte años de estudio e investigación por parte del autor en el campo de la optimización topológica, surge *Cuando menos es más*, un libro de pocas páginas, intentando hacer honor a su título, pero con un mensaje muy claro: podemos diseñar las cosas (objetos, piezas, dispositivos) de una manera más eficiente, empleando para ello menos recursos materiales, y, en consecuencia, reduciendo su consumo energético. En definitiva, el libro sostiene una filosofía de diseño más sostenible y en cierta manera conectada con la naturaleza, sin dejar de poner en valor y enfatizar que para ello necesitamos matemáticas.

**Sobre el autor:**
*Nombre:* Alberto Donoso Bellón
*Correo Electrónico:* Alberto.Donoso@uclm.es
*Institución:* Universidad de Castilla – La Mancha