
Revista de Investigación "Pensamiento Matemático"

Universidad Politécnica de Madrid

ISSN 2174-0410 Volumen XIII, Número 1, Abril 2023


## HISTORIAS DE MATEMÁTICAS

UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD DEL SIGLO XVII. HUYGENS Y HUDDE

MUJERES PIONERAS DE LA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## EXPERIENCIAS DOCENTES

METODOLOGÍA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE PROBLEMAS DE LA PROFESIÓN, VÍA ECUACIONES DIFERENCIALES

LA DERIVADA DISCRETA COMO CONCEPTO PROPEDÉUTICO A UN CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

APPLICATION OF FRACTAL GEOMETRY IN THE CONSTRUCTION OF ANTENNAS: AN ASSESSMENT OF ACTIVITIES IN CONTEXT BY ENGINEERING STUDENTS

SITUACIONES DE CONTRAEJEMPLO EN CONTEXTO ESCOLAR. UNA PROPUESTA DE CLASIFICACIÓN

## INVESTIGACIÓN

ESTUDIO ESTADÍSTICO SOBRE LOS FACTORES DE RIESGOS RESPONSABLES DE ACONTECIMIENTOS CORONARIOS

## CUENTOS MATEMÁTICOS

SEGUNDO JAZZ

## JUEGOS Y RAREZAS MATEMÁTICAS

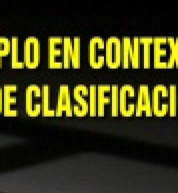
A VUELTAS CON LAS TANGENTES

## CRÍTICAS Y RESEÑAS

CANAL DE YOUTUBE Y LIBROS DE MATEMÁTICA DISCRETA Y GRAFOS

PROGRAMACIÓN EN RUST

## ENTREVISTA A:



MIGUEL ÁNGEL MORALES MEDINA: CREADOR DEL BLOG "GAUSSIANOS"

Revista Pensamiento Matemático

ISSN - 2174 - 0410

Volumen XIII, Número 1, Abril 2023

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Producción / GIE Pensamiento Matemático y GI MAIC
Ilustración de portada / Henry Segerman: https://math.okstate.edu/people/segerman/
Diseño de portada y Maquetación / José Manuel Sánchez Muñoz

Universidad Politécnica de Madrid

# Revista Pensamiento Matemático

Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático
y
Grupo de Investigación Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid

Volumen XIII, Número 1, ISSN 2174-0410



1 de abril de 2023

# Índice de Artículos

# Editorial del Número 1 (Volumen XIII)

Equipo Editorial

Revista de Investigación

Volumen XIII, Número 1, pp. 001–004, ISSN 2174-0410
Recepción: 01 Mar’23; Aceptación: 15 Mar’23

1 de abril de 2023

**Resumen**

Este es el número de Pensamiento Matemático del año 2023. En él se incluyen interesantes artículos de autores de diferentes países. Este carácter internacional enriquece la aportación de la Revista que estamos seguros encontrareis muy interesantes.

Como es habitual, los trabajos están distribuidos en cada una de las secciones de la publicación.

**Abstract**

This is the number of Mathematical Thought of the year 2023. It includes interesting articles by authors from different countries. This international character enriches the contribution of the Journal that we are sure you will find very interesting.

As usual, the works are distributed in each of the sections of the publication.

## Introducción

En este año que ha pasado entre el número anterior y el que se presenta, se ha avanzado en relación a la salud, la pandemia parece controlada, pero seguimos inmersos en la incomprensible guerra de Ucrania. Parece que no somos capaces de parar las agresiones injustificadas, las demostraciones de fuerza y la sinrazón.

Nuestra Revista ha recibido trabajos de gran interés y de profesionales de diversos puntos de la geografía mundial que queremos compartir con todo el público interesado en las matemáticas. Estamos seguros que os interesarán.

## Investigación

*“Estudio estadístico sobre los factores de riesgo responsables de acontecimientos coronarios”*. Este interesante trabajo realiza un estudio estadístico para establecer la posible relación o no de varios factores con el riesgo de desarrollar enfermedad cardiovascular, medido según el test REGICOR. Se consigue, entre otros resultados, cuantificar de forma precisa el impacto de 7 de los 13 factores de riesgo con los que se trabajan.

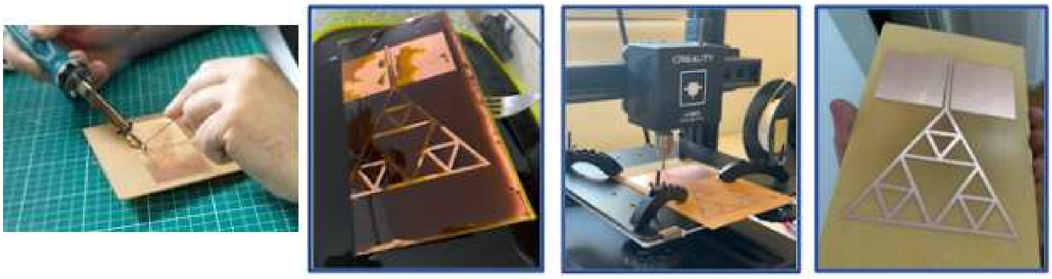
# Experiencias Docentes

La sección tiene como finalidad compartir experiencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles. En este número se publica la siguiente propuesta.

*"Metodología para la enseñanza de la modelación matemática de problemas de la profesión, vía ecuaciones diferenciales"* nos llega desde la Universidad de Granma en Cuba y tiene como objetivo realizar una propuesta para la enseñanza de la modelación en las carreras de ingeniería a través de ecuaciones diferenciales. Un tema realmente aplicado y de interés.

*"La Derivada Discreta como concepto propedéutico a un curso de Cálculo Infinitesimal"*. Un trabajo desarrollado sobre enseñanza secundaria en Uruguay donde no existe evidencia de experiencias docente de implementación del concepto de derivada discreta. En él se invita a los docentes a que trabajen dicho concepto con la intención de evaluar si la experiencia previa al abordaje de un curso de cálculo diferencial tradicional, mejora el aprendizaje en matemática de sus estudiantes.

*"Application of Fractal Geometry in the construction of antennas: an assessment of activities in context by engineering students"* también nos llega de Uruguay y presenta las percepciones de los estudiantes sobre la implementación de una propuesta didáctica basada en la aplicación de las matemáticas, en particular del álgebra lineal, a antenas fractales.



*"Situaciones de contraejemplo en contexto escolar. Una propuesta de clasificación"*. En este artículo profesores de la Universidad Autónoma de Guerrero de México nos proponen una clasificación de situaciones de contraejemplo. Es el producto de una amplia revisión de libros escolares y no escolares, observaciones de clases y entrevistas a profesores, futuros profesores y estudiantes de matemáticas.

# Historias de Matemáticas

Esta sección incluye estudios sobre matemáticas y sus aplicaciones, así como artículos de historia de esta ciencia. En este número se presentan dos trabajos de naturaleza histórica.

*"Un problema sobre probabilidad del siglo XVII. Huygens y Hudde"* presenta traducciones al español de los fragmentos de la correspondencia entre Huygens y Hudde que tratan sobre resolución de problemas concretos en juegos de azar, y se lleva a cabo la resolución de diferentes variantes con lenguaje algebraico actual, pero imitando la forma de resolver de ellos.

*"Mujeres pioneras de la Matemática española"* presenta las biografías de quince mujeres españolas pioneras de las Matemáticas del país. El objetivo es ponerlas como modelos y referentes ante la sociedad, para la que son prácticamente desconocidas.

| Licenciada en matemáticas | Universidad | Fecha de licenciatura |
|---|---|---|
| Victoria Beatriz Baylos Corroza | Central de Madrid | 1931 |
| María Capdevila D'Oriola | Barcelona | 1928 |
| Paz Vicenta Esponera Andrés | Zaragoza | 1935 |
| Águeda Gimeno Payá | Central de Madrid | 1927 |
| Carolina Jiménez Butigieg | Zaragoza | 1930 |
| María del Carmen Martínez Sancho | Central de Madrid | 1926 |
| Rosa Obrador Parpal | Islas Baleares | 1934 |
| Esperanza Oller Alemany | Barcelona | 1932 |
| Nemesia Rodríguez Fernández-Llamazares | Sin datos | |
| Irene Roig Mota | Barcelona | 1916 |
| María del Pilar Rojas Gutiérrez | Central de Madrid | 1926 |
| María de los Remedios Ruiz Feixas | Zaragoza | 1931 |
| Ascensión Serret de Andrés | Barcelona | 1915 |
| María Sordé Xipell | Barcelona | 1914 |
| Rosa Vila Coro | Barcelona | 1925 |

# Juegos y Rarezas Matemáticas

*"A vueltas con las tangentes"* es un precioso trabajo en el que se plantea un problema sobre tangencias propuesto por Juan José Isach Mayo y que sirve de excusa para revisar distintas teorías sobre construcciones como la inversión o las transformaciones de Möbius en el plano complejo.

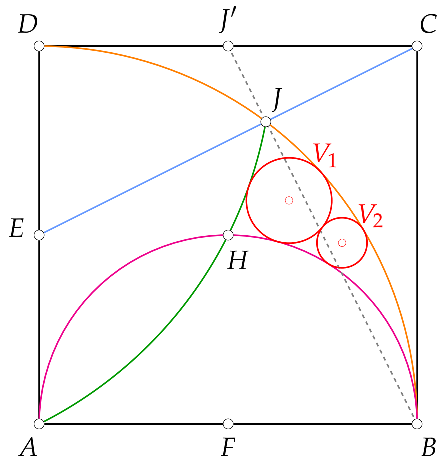



*Figura 1. Problema de partida.*

# Cuentos

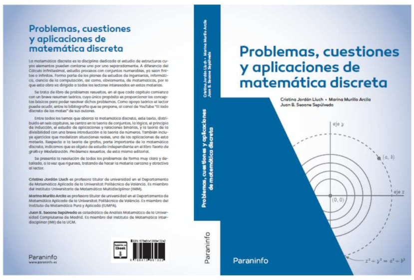
*"Segundo jazz"* es un ejercicio de sinécdoque narrativa encuadrado en el taller de escritura creativa (nivel medio) de la Escuela de literatura Fuentetaja. En él se trabaja el tema de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Además, cómo no, los protagonistas del relato son estudiantes de matemáticas.

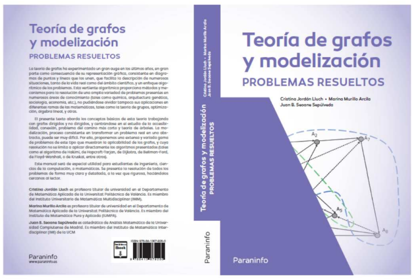
# Reseñas

En este número contamos con la presentación de dos interesantes textos.

*"Canal de Youtube y libros de matemática discreta y grafos"* presenta el trabajo de un grupo de profesores universitarios que han escrito dos libros sobre matemática discreta y teoría de grafos dirigidos. Como apoyo audiovisual a estos libros, los autores han elaborado el canal de YouTube "El lado discreto de las mates".

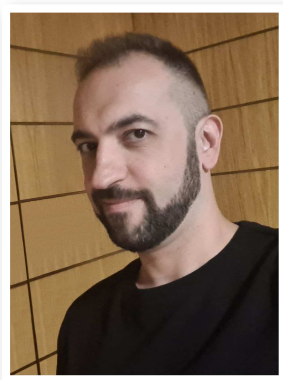
*"Programación en Rust"* es un trabajo que permitirá a los programadores introducirse en el lenguaje de programación Rust. Se trata de un lenguaje que está siendo utilizado por los desarrolladores de los principales sistemas operativos (Windows, Linux, Android) para sustituir al *C* y al *C++*.






# Entrevista

José Manuel Sánchez Muñoz miembro del Comité Científico y Editorial de Pensamiento Matemático entrevista a Miguel Ángel Morales Medina. Repasaremos la trayectoria profesional e inquietudes de este profesor de matemáticas, licenciado por la Universidad de Granada que creó hace ya más de una década uno de los blogs de divulgación matemática más reconocidos y exitosos en el mundo de habla hispana. *Gaussianos* es sinónimo de divulgación y Miguel Ángel se ha dedicado durante muchos años a mantener vivo este espectacular proyecto. Por todo ello, no resulta extraño que hasta futuros candidatos a puestos de profesorado de educación secundaria utilicen sus contenidos como referencia para su preparación en las pruebas de oposición.



*Miguel Ángel Morales*

Investigación

# Estudio estadístico sobre los factores de riesgo responsables de acontecimientos coronarios.

# Statistical study about the risk factors responsible of coronary events.

Alejandro Fernández-Jiménez, Álvaro Fernández Jiménez,
Abilio José Fernández Vicente

Revista de Investigación

Volumen XIII, Número 1, pp. 04–24, ISSN 2174-0410
Recepción: 16 Ago'22; Aceptación: 10 Ene'23

1 de abril de 2023

**Resumen**

En este artículo realizamos un estudio estadístico para discernir la posible relación o no de varios factores con el riesgo de desarrollar enfermedad cardiovascular medido según el test REGICOR. Una vez decididos los factores de riesgo involucrados, utilizamos una regresión lineal para medir la relevancia de cada uno y dar una previsión del valor del riesgo cardiovascular de cada paciente. Además, con estos factores relevantes, con una regresión logística obtenemos una regla de clasificación para riesgo bajo-moderado y riesgo alto-muy alto.

**Palabras Clave:** Regresión lineal, regresión logística, REGICOR, factores de riesgo cardiovascular.

**Abstract**

In this paper we perform a statistical study to understand the possible relationship between several factors and the risk to develop a cardiovascular disease according to the REGICOR test. Once we determine which ones are the risk factors involved, we use a linear regression to measure the relevance of each one of them and get an estimation of the cardiovascular risk of each patient. With the same factors, we perform a logistic regression to obtain a classification rule for low-moderate risk and high-very high risk.

**Keywords:** Linear regression, logistic regression, REGICOR, cardiovascular risk factors.

## 1. Introducción

**Riesgo cardiovascular.**

Las enfermedades cardiovasculares constituyen un grupo patológico de interés común por ser la principal causa de muerte en nuestro medio, el elevado grado de discapacidad y el alto gasto sanitario que generan. Estas son responsables de más del 30 % de las muertes en todo el mundo y su incidencia va en aumento [24].

La enfermedad cardiovascular isquémica (ECVI) se caracteriza por presentar una etiología multifactorial en la que intervienen factores de riesgo con diferente grado de penetranción. En algunas ocasiones, dichos factores se presentan asociados, pudiéndose potenciar entre sí. Se entiende por factor de riesgo una característica biológica, hábito o enfermedad que permite identificar un grupo de personas con mayor probabilidad de presentar una determinada enfermedad a lo largo del tiempo en comparación con el resto de la población. Por un lado, se pueden definir los factores de riesgo endógenos o marcadores de riesgo; estos factores no son modificables y dependen bien de la dotación genética del individuo, bien de características ambientales. Por otro lado, se pueden definir los factores de riesgo exógenos que se caracterizan por ser, a priori, modificables. Éste es el caso del tabaquismo, la diabetes mellitus (DM), la hipertensión arterial (HTA) y la dislipemia [22].

**Tabla I.** Análisis de prevalencia de factores de riesgo en el grupo total de pacientes y en controles y en el grupo total sesgado por sexo.

| | Pacientes *n* (%) | Controles *n* (%) | *Odds ratio* | IC 95% | *p* |
|---|---|---|---|---|---|
| Total | | | | | |
| Tabaquismo | 77 (25,0) | 51 (16,6) | 1,7 | 1,12-2,53 | 0,008 |
| HTA | 179 (58,1) | 138 (45,0) | 1,64 | 1,29-3,05 | < 0,05 |
| DM | 75 (24,4) | 38 (12,4) | 2,2 | 1,45-3,42 | < 0,001 |
| Dislipemia | 79 (25,6) | 57(18,6) | 1,48 | 1,00-2,17 | 0,046 |
| Varones | | | | | |
| Tabaquismo | 63 (39,1) | 44 (27,3) | 1,75 | 1,09-2,80 | 0,020 |
| HTA | 85 (52,8) | 58 (36,0) | 1,70 | 1,25-3,07 | 0,003 |
| DM | 39 (24,2) | 18 (11,2) | 1,37 | 1,37-4,64 | 0,002 |
| Dislipemia | 51 (31,7) | 27 (16,8) | 2,28 | 1,34-3,80 | 0,002 |
| Mujeres | | | | | |
| Tabaquismo | 14 (9,5) | 7 (7,8) | – | – | ns |
| HTA | 94 (63,9) | 80 (54,8) | – | – | ns |
| DM | 36 (24,5) | 20 (13,7) | 1,96 | 1,07-3,59 | 0,027 |
| Dislipemia | 28 (19,0) | 30 (20,5) | – | – | ns |

DM: diabetes mellitus; HTA: hipertensión arterial, IC 95%: intervalo de confianza del 95%; ns: no significativo.

*Figura 1. Tabla resumen de [22] que muestra la relación de distintos valores de riesgo cardiovascular en el grupo total de la población y sesgado según sexos.*

**Objetivo del estudio.**

La finalidad de este estudio es comparar y analizar la relevancia de los distintos parámetros clínicos con respecto al riesgo cardiovascular. Una vez satisfecho este objetivo utilizaremos esta información para obtener predicciones por medio de una regresión lineal y reglas de clasifica-

**Tabla II.** Análisis de factores de riesgo en el grupo de pacientes y de controles sesgado por sexo.

| | Varón *n* (%) | Mujer *n* (%) | *Odds ratio* | IC 95% | *p* |
|---|---|---|---|---|---|
| Pacientes | | | | | |
| Tabaquismo | 63 (39,1) | 14 (9,5) | 0,166 | 0,09-031 | < 0,0001 |
| HTA | 85 (52,8) | 94 (63,9) | 1,58 | 1,00-2,50 | 0,047 |
| DM | 39 (24,2) | 36 (24,5) | – | – | ns |
| Dislipemia | 51 (31,7) | 28 (19,0) | 0,507 | 0,30-0,86 | < 0,011 |
| Controles | | | | | |
| Tabaquismo | 44 (27,3) | 7 (4,8) | 0,137 | 0,06-0,31 | < 0,001 |
| HTA | 58 (36,0) | 80 (54,8) | 2,31 | 1,45-3,67 | < 0,001 |
| DM | 18 (11,2) | 20 (13,7) | – | – | ns |
| Dislipemia | 27 (16,8) | 30 (20,5) | – | – | ns |

DM: diabetes mellitus; HTA: hipertensión arterial, IC 95%: intervalo de confianza del 95%; ns: no significativo.

*Figura 2. Tabla resumen de [22] que muestra la relación de distintos valores de riesgo cardiovascular en el grupo total de la población y sesgado según sexos.*

ción a través de regresión logística.

Para obtener la predicción, durante el proceso queremos evaluar cada uno de los pasos implementados. Esto lo hacemos para garantizar que los cálculos realizados se encuentran apoyados bajo un marco teórico fiable.

Con este contexto extraemos dos rectas de regresión. En la primera incluimos todos los parámetros $\beta_j$ suceptibles de ser factor de riesgo de evento cardiovascular. En la segunda, tras estudiar las conclusiones obtenidas, usamos solo los parámetros rechazados con contundencia para la hipótesis de contraste $H_0$: $\beta_j = 0$ en la primera regresión. Con esta segunda recta de regresión conseguimos un análisis más depurado con el que se obtienen conclusiones mucho más precisas.

Sobre la regla de clasificación, nuestro objetivo es ser capaces de predecir si el paciente pertenece al grupo de riesgo bajo o moderado (riesgo de evento cardiovascular inferior al 10 %), población 0, o al grupo de riesgo alto o muy alto (riesgo de evento cardiovascular no inferior al 10 %), población 1.

**Recogida de datos.**

Para la elaboración de este análisis se han recogido una serie de datos clínicos sobre varios pacientes de las localidades de Almarza, El Cubo, Espejo, Matute, Portelarbol, San Andrés, Segoviela, Soria, y Tera; todas ellas pertenecientes a la provincia de Soria. Soria es una provincia del norte de España, ubicada en el extremo oriental de la comunidad autónoma de Castilla y León. Se trata de una de las regiones más despobladas de Europa, además de una de las más envejecidas, lo que hace que aumente la necesidad de investigar sobre potenciales factores de riesgo. Según la clasificación climática de Koppen, Soria está dentro de un clima oceánico de tipo CFB, es una región predominantemente rural y la dieta prevalente es la dieta mediterránea [29, 6].

La muestra total es de $n = 219$ pacientes. Los datos fueron tomados por el Doctor Abilio José Fernández Vicente. Entre los datos que han sido recogidos se incluyen el nivel de colesterol (total, LDL y HDL), triglicéridos y glucosa en sangre, la tensión arterial (sistólica, diastólica y tensión diferencial), filtrado glomerular, presencia/ausencia de albuminuria, tabaquismo, edad y sexo del paciente. Además se ha realizado un seguimiento del historial clínico de los distintos pacientes con el fin de tener en cuenta las distintas particularidades de cada uno de ellos.

Por último, para poder comparar, se ha obtenido el riesgo cardiovascular de cada paciente utilizando la escala REGICOR. La escala REGICOR estima el riesgo de acontecimiento coronario a los 10 años (angina o infarto de miocardio, con o sin síntomas, mortal o no) [20].

**Esructura del artículo.**

Este trabajo se divide en dos partes, en las Secciones 2, 3 y 4 se realiza una regresión lineal para predecir el riesgo cardiovascular esperado del paciente, obteniendo una primera recta, una segunda más depurada y discutiendo la relevancia de los datos influyentes respectivamente. Más adelante, en la Sección 5 se obtiene una regla de clasificación para riesgo bajo-moderado o riesgo alto-muy alto utilizando una regresión logística. La regla obtenida presenta resultados muy satisfactorios en la identificación de pacientes con riesgo bajo-moderado pero no resulta tan fiable para riesgo alto-muy alto. Por último en la Sección 6 se exponen las principales conclusiones obtenidas y se proponen líneas de investigación con las que continuar este trabajo.

## 2. Primera recta de regresión lineal múltiple

Esta sección se dedica a los primeros pasos para la obtención de una regla que estime el riesgo de accidentes cardiovasculares usando para ello algunos de los parámetros establecidos. Con este propósito, recurrimos a una recta de regresión. Una vez obtenida evaluaremos la fiabilidad que hemos conseguido con ella.

### 2.1. Discusión sobre la posible relación de los distintos parámetros con el riesgo cardiovascular

En un primer análisis para confeccionar nuestra recta de regresión utilizaremos los parámetros $\beta_1, \cdots, \beta_{12}$, todos ellos relacionados en la literatura científica con el riesgo cardiovascular.

Sospechamos que todos y cada uno de ellos son factores de riesgo cardiovascular por las razones que se enumeran a continuación.

- $\beta_1$: Edad. La enfermedad cardiovascular aterosclerótica cursa con una frecuencia de aproximadamente 50 % en personas de 30 años sin enfermedad conocida y su incidencia va en aumento, sobre todo en países industrializados, lo que está en relación con el envejecimiento [27]. El envejecimiento es un proceso fisiológico que conlleva una disminución progresiva de la capacidad elástica de las arterias [28]. Como consecuencia, esto implica un incremento de enfermedades cardiovasculares.
- $\beta_2$: Colesterol total en sangre. Elevadas cantidades de colesterol favorece la aterosclerosis, un proceso inflamatorio crónico que se inicia desde la infancia y se desarrolla a lo largo de los años, de forma asintomática la mayor parte del tiempo. Se produce una retención, oxidación y modificación de lípidos en forma de estrías grasas en las paredes de las arterias que posteriormente evolucionan a placas fibrosas con engrosamiento de la pared de la arteria afectada, disminuyendo su diámetro interno o luz de manera crónica. Cuando estas placas se rompen causan trombosis y oclusión aguda parcial o total de la arteria afectada [16].

- $\beta_3$: Colesterol HDL. Los niveles bajos de colesterol HDL se correlacionan con un riesgo elevado de desarrollar enfermedad aterosclerosa coronaria. La disminución de las HDL afecta al transporte reverso de colesterol, que es la vía metabólica responsable de la remoción del colesterol excedente de la células periféricas y su transporte hacia el hígado para reciclarlo o eliminarlo. Las HDL poseen además propiedades antiinflamatorias, antioxidativas, antiagregatorias, anticoagulantes y profibrinolíticas in vitro [25].

- $\beta_4$: Colesterol LDL. Las lipoproteínas de baja densidad (LDL) son un agente causal de la enfermedad cardiovascular. Si las concentraciones séricas de colesterol LDL están elevadas de manera importante y persistente, éste logra penetrar las paredes de las arterias, se deposita y acumula entre las células, se liberan radicales libres de oxígeno, produciendo oxidación del LDL y liberando partículas proinflamatorias [28].

- $\beta_5$: Triglicéridos. Existen evidencias de que las lipoproteínas ricas en triglicéridos, especialmente las de muy baja densidad (VLDL) son capaces de promover y desarrollar aterosclerosis [21].

- $\beta_6$, $\beta_7$: Presión arterial sistólica, presión arterial diastólica. La hipertensión arterial, tanto sistólica como diastólica, produce daño endotelial aunque el mecanismo no es bien conocido; este hecho la convierte en factor de riesgo para la aterosclerosis [4]. Está demostrado que el aumento de 20 mmHg en la presión sistólica y de 10 mmHg en la presión diastólica por encima de los valores normales de 115/75 mmHg aumenta al doble el riesgo de muerte por enfermedad cardiovascular, independiente de otros factores de riesgo de ECV, para ambos sexos [19].

- $\beta_8$: Nivel de glucosa en sangre. El control estricto de glucemia de forma prolongada en el tiempo puede reducir de forma signifcativa el riesgo de sufrir un evento cardiovascular mayor, concretamente en un 17 %. Después de casi 10 años de seguimiento los cerca de 1800 pacientes con diabetes tipo 2, que habían sido asignados al azar a un control intensivo de la glucosa tenían entre 8 y 6 eventos cardiovasculares mayores menos por 1000 personas/año que los asignados a la terapia estándar, pero no se observó ninguna mejoría en la tasa de supervivencia global. La reducción de la mortalidad cardiovascular se situó en un 12 % con terapia intensiva, si bien no presenta significación estadística con la terapia convencional [23].

- $\beta_9$: Filtrado glomerular. Diversos estudios [1, 3, 11, 2] relacionan la insuficiencia renal crónica con el aumento de la morbimortalidad cardiovascular. El filtrado glomerular y la albuminuria son los principales indicadores de enfermedad renal crónica.

- $\beta_{10}$: Albuminuria persistente. Se aplica lo mismo que lo anotado en el punto anterior. Tomaremos el valor 1 para pacientes cuyas niveles de albuminuria pertenezcan a la categoría $A1$, 2 para la categoría $A2$ y 3 para $A3$. Las categorías $A1$, $A2$ y $A3$ se refieren a una cantidad de entre 0 $mg/g$ a 29 $mg/g$, 30 $mg/g$ a 300 $mg/g$, y más de 300 $mg/g$ respectivamente; donde, la medida que se está utilizando es miligramos de albumina por gramo de creatinina.

- $\beta_{11}$: Diabetes. La diabetes mellitus aumenta de 2 a 5 veces el riesgo de enfermedad cardiovascular, siendo esta la primera causa de morbimortalidad en diabéticos [15]. Asignaremos el valor 1 a aquellos pacientes que sean considerados diabéticos y 0 al resto, sin hacer una discriminación más precisa.

- $\beta_{12}$: Tabaquismo. El tabaquismo se ha considerado de forma clásica como uno de los principales factores de riesgo cardiovascular modificable [30]. El tabaquismo disminuye los niveles de HDL. En personas que fuman desde la adolescencia la mortalidad es 3 veces mayor que la de los no fumadores [13]. Asignaremos el valor 1 a aquellos pacientes que sean considerados fumadores habituales y 0 al resto, sin realizar una discriminación más precisa sobre la cantidad de tabaco consumida o el número de años como fumadores habituales.

- $\beta_{13}$: Sexo. La influencia del sexo en el riesgo cardiovascular está claramente demostrada dado que la incidencia de esta patología es mucho mayor en hombres menores de 50 años que en mujeres del mismo rango de edad, si bien, a partir de esta edad las incidencias tienden a igualarse [26]. No obstante, en este primer análisis no incluiremos este parámetro en nuestra recta de regresión, más adelante aportaremos explicaciones más elaboradas para justificar la decisión tomada.

Estos parámetros van a ser empleados para estimar el riesgo cardiovascular según el test REGICOR y con una regresión lineal.

Tras obtener la recta de regresión para estimar el riesgo de accidente cardiovascular del paciente, uno de los propósitos del análisis (quizás, incluso más interesante que la obtención de la propia recta de regresión) es decidir qué parámetros podrían no ser necesarios para la recta de regresión, es decir, que no aportan información relevante o que la información aportada ya es obtenida de manera implícita a través del resto de parámetros. Para este objetivo empleamos herramientas matemáticas para evaluar los datos aportados por la evidencia muestral. Como herramienta de apoyo, las conclusiones obtenidas de la evidencia muestral son analizadas desde el punto de vista médico para intentar decidir si los parámetros clasificados como no necesarios presentan un vínculo implícito con el resto de parámetros, si la relación de la variable "no necesaria" con la variable riesgo cardiovascular no es lineal o es inexistente o ambas circunstancias de forma simultánea.

Por este motivo en este primer análisis no hemos incluido la variable sexo. Ya existe mucha evidencia que sugiere la relación entre el sexo del paciente y el riesgo que este tiene de padecer un accidente cardiovascular. Por contra, nuestros datos para algunos parámetros varían mucho según el sexo del paciente. Por ejemplo, solo el 8,80 % de las mujeres en nuestra muestra son fumadoras en contraposición con el elevado 20,21 % en el caso de los hombres. En nuestros datos, solo el 11,20 % de las mujeres son diabéticas en contraposición con el 17,02 % de los hombres.

Los resultados vistos evidencian una relación entre las variables sexo y ser fumador habitual, y las variables sexo y padecer diabetes, especialmente fuerte en el primer caso. Al elaborar nuestro estudio, y decidir qué variables son relevantes, si incluyéramos el parámetro sexo podríamos encontrarnos en una situación indeseada. Si rechazamos el parámetro "ser fumador habitual" sería difícil decidir si el motivo del rechazo es debido a que ser fumador no afecta al riesgo cardiovascular o si, por el contrario, esta variable se encuentra expresada de forma implícita en la variable "sexo del paciente". Tenemos mucha evidencia de que la variable "sexo del paciente" es factor de riesgo [5, 10, 22, 17] y no necesitamos incluir esta variable en el primer análisis para decidir si es relevante para la recta de regresión, tenemos evidencia de que sí lo es.

## 2.2. Coeficientes de la recta de regresión

La estimación de los parámetros obtenida viene dada por la Tabla 1.

Lo que estamos haciendo es estimar el riesgo de acontecimiento coronario a los 10 años (angina o infarto de miocardio, con o sin síntomas, mortal o no) en tanto por 1, $\hat{y}$, creando para ello la siguiente regla

| | Parámetro | Estimación |
|---|---|---|
| $\hat{\beta}_0$ | Ordenada en el origen | $-0{,}102876$ |
| $\hat{\beta}_1$ | Edad | 0,000620 |
| $\hat{\beta}_2$ | Colesterol total | 0,0006419 |
| $\hat{\beta}_3$ | HDL | $-0{,}0010525$ |
| $\hat{\beta}_4$ | LDL | 0,0003768 |
| $\hat{\beta}_5$ | Triglicéridos | $-2{,}7749 \cdot 10^{-5}$ |
| $\hat{\beta}_6$ | Presión Arterial Sistólica | 0,0004922 |
| $\hat{\beta}_7$ | Presión Arterial Diastólica | $4{,}4558 \cdot 10^{-5}$ |
| $\hat{\beta}_8$ | Glucosa | $4{,}2925 \cdot 10^{-5}$ |
| $\hat{\beta}_9$ | Filtrado Glomerular | 0,0146038 |
| $\hat{\beta}_{10}$ | Albuminuria | 0,0004476 |
| $\hat{\beta}_{11}$ | Diabetes | 0,0227179 |
| $\hat{\beta}_{12}$ | Tabaquismo | 0,0201834 |

*Tabla 1. Resumen de la información dada por la recta de regresión estimada.*

$$\begin{aligned}
\hat{y} \;=\; & -0{,}102876 + 0{,}000620 \cdot \text{edad} + 0{,}0006419 \cdot \text{col} \\
& -0{,}0010525 \cdot \text{HDL} + 0{,}0003768 \cdot \text{LDL} - 2{,}7749 \cdot 10^{-5} \cdot \text{Trig} \\
& +0{,}0004922 \cdot \text{PAS} + 4{,}4558 \cdot 10^{-5} \cdot \text{PAD} + 4{,}2925 \cdot 10^{-5} \cdot \text{Glu} \\
& +0{,}0146038 \cdot \text{Fil Glo} + 0{,}0004476 \cdot \text{Cat Alb} \\
& (+0{,}0227179 \;\; \text{si} \;\; \text{diabetico}) \\
& (+0{,}0201834 \;\; \text{si} \;\; \text{fumador} \;\; \text{habitual})\,.
\end{aligned}$$

De esta forma, para la recta de regresión calculada, la estimación para $\sigma^2$ es

$$\hat{\sigma^2} = s_R^2 = \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2 = \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{\text{RSS}}{n-k-1} = 0{,}000348595,$$

donde $n = 219$ se corresponde con el número de datos, $k = 12$ con el número de parámetros que se tienen en cuenta para el análisis y $e_i := \hat{y}_i - y_i$ se corresponde con el residuo.

Las sumas de cuadrados son,

- (total) TSS $:= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 0{,}22266849$,
- (residual) RSS $:= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = 0{,}07181063$,
- (explicada por modelo) MSS $:= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2 = 0{,}15085786$.

Podemos definir el coeficiente de determinación como

$$R^2 := \frac{MSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \leq 1.$$

Este parámetro resulta útil, pues, si $R^2$ toma un valor próximo a 1, el modelo explica bien la realidad. En cambio, si toma un valor cercano a 0, no explica bien la realidad. En nuestro caso, $R^2 = 0{,}6775$. El p-valor del contraste global de la regresión, $H_0$: $\beta_1 = \cdots = \beta_{12} = 0$ es $3{,}893 \cdot 10^{-44}$ (el estadístico es 36,06 y usamos la distribución $F$ de Fisher-Snedecor $F_{k;n-k-1}$ para contrastar, con $n = 219$ y $k = 12$), un valor muy bajo. Es razonable aceptar que la realidad se explica bien por esta recta de regresión.

Por último, para cada parámetro vamos a dar sus intervalos de confianza para $\alpha = 5\,\%$ (ver Tabla 2) y a estudiar la hipótesis de contraste, $H_0$: $\beta_j = 0$ (ver Tabla 3).

| Intervalos de confianza con $\alpha = 5\,\%$ | | | |
|---|---|---|---|
| | Parámetro | Extremo inferior | Extremo superior |
| $\beta_0$ | Ordenada en el origen | $-0{,}141498$ | $-0{,}064254$ |
| $\beta_1$ | Edad | 0,000415 | 0,000826 |
| $\beta_2$ | Colesterol total | 0,000221 | 0,001063 |
| $\beta_3$ | HDL | $-0{,}001478$ | $-0{,}000627$ |
| $\beta_4$ | LDL | $-0{,}000800$ | $4{,}6049 \cdot 10^{-5}$ |
| $\beta_5$ | Triglicéridos | $-0{,}000112$ | $5{,}6259 \cdot 10^{-5}$ |
| $\beta_6$ | Presión Arterial Sistólica | 0,000325 | 0,000659 |
| $\beta_7$ | Presión Arterial Diastólica | $-0{,}000244$ | 0,000333 |
| $\beta_8$ | Glucosa | $-0{,}000129$ | 0,000215 |
| $\beta_9$ | Filtrado Glomerular | $-0{,}006714$ | 0,035922 |
| $\beta_{10}$ | Albuminuria | $-0{,}012435$ | 0,013330 |
| $\beta_{11}$ | Diabetes | 0,012548 | 0,032888 |
| $\beta_{12}$ | Tabaquismo | 0,012551 | 0,027816 |

*Tabla 2. Con una probabilidad del 95 % cada uno de los parámetros $\beta_j$, $j = 0, \cdots, 12$ mencionados en esta tabla se encuentran en dicho rango de valores.*

De la tabla 3 se deduce que no hay suficiente evidencia estadística para afirmar que las variables "Triglicéridos", "Presión Arterial Diastólica" , "Glucosa" y "Albuminuria" aportan significativamente a la recta de regresión, esto podría deberse a que las variables no están relacionadas con el riesgo de evento cardiovascular o porque son descritas de manera implícita como combinación lineal de variables que sí aceptamos.

En un intento de buscar una respuesta a esta pregunta, cabría la posibilidad de que la variable "Glucosa" haya sido alterada artificialmente por la presencia de diabéticos (13,7 % de nuestra muestra), los cuales se encuentran bajo medicación y presentan valores sobre el parámetro "Glucosa" que no reflejan la realidad del paciente. Sus valores "Glucosa" podrían haber sido radicalmente distintos si se hubieran tomado en otro momento. Sería interesante repetir el estudio sin incluir a los diabéticos y analizar tras ello los resultados obtenidos.

Con las variables "Filtrado Glomerular" y "LDL" podríamos tener nuestras dudas sobre si lo correcto es rechazar la hipótesis de contraste o aceptarla ya que sus valores se encuentran en un punto intermedio. No obstante, no existe ningún problema con rechazar ambas.

En el Apéndice A demostramos que las variables "Riesgo de evento cardiovascular" y Filtrado Glomerular son dependientes. Además, durante la discusión nos convencemos de que la relación entre ambas no era lineal, pues el riesgo incrementaba considerablemente al cambiar de $G1$ a $G2$ y volvía a disminuir significativamente al cambiar de $G2$ a $G3a$.

La variable "LDL" se encuentra altamente relacionada con las variables "Colesterol" y "HDL" ya que es la fracción más importante del colesterol "no HDL", por ello el valor del parámetro "LDL" puede estar relacionado de forma implícita con el de los parámetros "Colesterol" y "HDL", explicando esto un p-valor del 8,04 %. Por ello, aunque este valor no sea muy elevado, por ser superior al 5 % y estar relacionado con otros dos parámetros que sí vamos a incluir en la segunda recta de regresión, decidimos no incluir el "LDL" en el segundo análisis más depurado que realizaremos posteriormente.

| Hipótesis de contraste $H_0$: $\beta_j = 0$ | | |
|---|---|---|
| | Parámetro | p-valor |
| $\beta_1$ | Edad | 0,000001 % |
| $\beta_2$ | Colesterol total | 0,298 % |
| $\beta_3$ | HDL | 0,00022 % |
| $\beta_4$ | LDL | 8,04 % |
| $\beta_5$ | Triglicéridos | 51,56 % |
| $\beta_6$ | Presión Arterial Sistólica | 0,000002 % |
| $\beta_7$ | Presión Arterial Diastólica | 76,09 % |
| $\beta_8$ | Glucosa | 62,32 % |
| $\beta_9$ | Filtrado Glomerular | 17,83 % |
| $\beta_{10}$ | Albuminuria | 94,54 % |
| $\beta_{11}$ | Diabetes | 0,00171 % |
| $\beta_{12}$ | Tabaquismo | 0,000045 % |

*Tabla 3. Realizamos hipótesis de contrastes para todos los parámetros (excepto ordenada en el origen, el hecho de que la ordenada en el origen pueda ser* 0 *o no, no es relevante ya que simplemente actúa como una corrección de la recta) y damos el p-valor. Cuanto más bajo sea el p-valor, con mayor contundencia podemos rechazarlo y cuanto más alto, existe menor evidencia estadística para poder rechazarla, siendo lo más natural en ese caso aceptar la hipótesis de contraste,* $\beta_j = 0$.

## 2.3. Análisis de normalidad de los residuos.

Para varios de los resultados obtenidos durante esta Sección, hemos usado que los residuos se distribuían según una variable aleatoria normal de media 0. El objetivo de esta Subsección es comprobar que podemos suponer que esto es cierto. Suponemos que los residuos se distribuyen según una normal de media 0 y desviación típica 0,01811 (desviación típica obtenida si suponemos que los residuos tienen media 0).

Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 0{,}01811)$ queremos contrastar la hipótesis de rechazo

$H_0$: Los datos recogidos sobre el colesterol en sangre es una muestra aleatoria de $X$.

Para contrastar esta hipótesis usaremos el test de Kolmogorov-Smirnov. Sean

$$F_X(t) = \mathbb{P}(\{X \le t\}), \tag{1}$$

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sharp\left\{1 \le j \le n : x_j \le t\right\}. \tag{2}$$

Se define el estadístico de Kolmogorov-Smirnov como

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sup |F_n(t) - F_X(t)| \\ &= \text{máx}_{1\le j\le n}\left[\text{máx}\left\{\left|F_X(x_j) - \frac{j-1}{n}\right|, \left|F_X(x_j) - \frac{j}{n}\right|\right\}\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Para nuestra muestra el estadístico de Kolmogorov-Smirnov toma el valor $\delta_n = 0{,}0823548$ y $\sqrt{n} \cdot \delta_n = \sqrt{219} \cdot 0{,}08235 = 1{,}2187 < 1{,}3581$ (siendo este último número el percentil $\alpha = 5\,\%$ de la variable aleatoria $Z$ de Kolmogorov-Smirnov). No rechazamos la hipótesis de contraste y por ende, podemos asumir que nuestros datos se distribuyen siguiendo una variable aleatoria normal. La Figura 3 pretende mostrar de manera visual la discusión que acabamos de tener, los residuos de nuestras predicciones se han distribuido de acuerdo a una variable aleatoria normal.

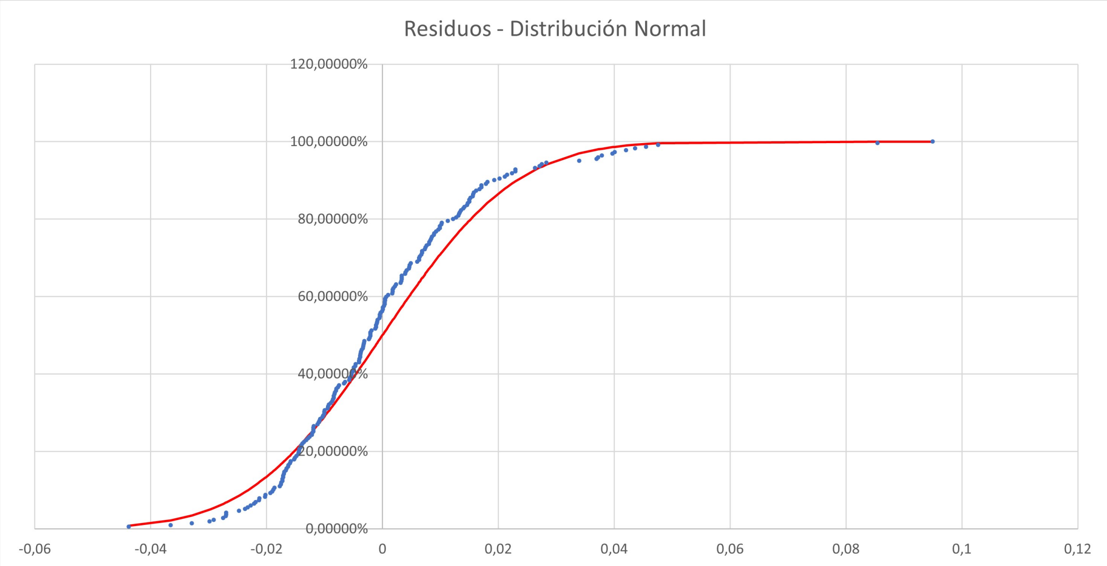



*Figura 3. Comparación de las funciones $F_n(t)$ (en azul) y $F_X(t)$ (en rojo). Ambos trazos resultan parecidos sugiriendo que vienen motivados por una misma distribución y siendo esta hipótesis comprobada por el test de Kolmogorov-Smirnov.*

# 3. Segunda recta de regresión, solo con los parámetros relevantes.

Tal y como apuntábamos anteriormente, en esta Sección vamos a repetir el análisis para obtener una recta de regresión más depurada. Con este propósito utilizamos solo los parámetros para los que hemos rechazado contundentemente la hipótesis de contraste $H_0$: $\beta_j = 0$ en el primer análisis. Estos son "Edad", "Colesterol total", "HDL", "Presión Arterial Sistólica", "Diabetes" y "Tabaquismo". También podríamos incluir los parámetros "LDL" y "Filtrado Glomerular" pero ya hemos discutido por qué es mejor no hacerlo. Además, incorporamos el parámetro "Sexo", que no hemos tenido en cuenta en el anterior análisis porque podría habernos confundido sobre si el "Tabaquismo" (entre otros) era factor de riesgo o no, al estar ambos parámetros muy relacionados en nuestra muestra. No obstante, dado que existe gran cantidad de evidencia médica que afirma que el sexo del paciente y el riesgo cardiovascular están relacionados [5, 10, 22, 17], añadimos este parámetro en esta segunda regresión lineal más depurada.

La estimación de los parámetros que obtenemos en este caso viene dada por la Tabla 4.

En este caso, la regla que estamos dando (en forma de recta de regresión) para estimar el riesgo de evento cardiovascular es

$$\begin{aligned}\hat{y} \;&= -0{,}080727 + 0{,}000497 \cdot \text{edad} + 0{,}000293 \cdot \text{col} \\ &\quad -0{,}000672 \cdot \text{HDL} + 0{,}0003768 + 0{,}000506 \cdot \text{PAS} \\ &\quad (+0{,}023995 \;\text{ si }\; \text{diabetico}) \\ &\quad (+0{,}017748 \;\text{ si }\; \text{fumador habitual}) \\ &\quad (+0{,}007638 \;\text{ si el paciente es hombre}).\end{aligned}$$

La estimación para $\sigma^2$ es

$$\hat{\sigma^2} = s_R^2 = \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2 = \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{\text{RSS}}{n-k-1} = 0{,}00033854$$

y tenemos, $R^2 = 0{,}6792$, un valor muy similar al anterior. El p-valor del contraste global de la

| | Parámetro | Estimación |
|---|---|---|
| $\hat{\beta}_0$ | Ordenada en el origen | $-0{,}080727$ |
| $\hat{\beta}_1$ | Edad | 0,000497 |
| $\hat{\beta}_2$ | Colesterol total | 0,000293 |
| $\hat{\beta}_3$ | HDL | $-0{,}000672$ |
| $\hat{\beta}_4$ | Presión Arterial Sistólica | 0,000506 |
| $\hat{\beta}_5$ | Diabetes | 0,023995 |
| $\hat{\beta}_6$ | Tabaquismo | 0,017748 |
| $\hat{\beta}_7$ | Sexo | 0,007638 |

*Tabla 4. Resumen de la información dada por la segunda recta de regresión estimada.*

regresión $H_0$: $\beta_1 = \cdots = \beta_7 = 0$ es $1{,}1127 \cdot 10^{-48}$ (el estadístico es 63,82 y usamos la distribución $F_{k;n-k-1}$ para contrastar, con $n = 219$ y $k = 7$), un valor incluso más pequeño que el del análisis anterior, siendo muy razonable aceptar que la realidad se corresponde fielmente con las predicciones que damos con esta recta de regresión.

Por último, al igual que hicimos con la primera recta de regresión, para cada parámetro damos sus intervalos de confianza al 5 % (ver Tabla 5) y estudiamos las hipótesis de contraste $H_0$: $\beta_j = 0$ (ver Tabla 6).

| Intervalos de confianza con $\alpha = 5\,\%$ | | | |
|---|---|---|---|
| | Parámetro | Extremo inferior | Extremo superior |
| $\beta_0$ | Ordenada en el origen | $-0{,}101623$ | $-0{,}059831$ |
| $\beta_1$ | Edad | 0,000354 | 0,000639 |
| $\beta_2$ | Colesterol total | 0,000223 | 0,000364 |
| $\beta_3$ | HDL | $-0{,}000832$ | $-0{,}000513$ |
| $\beta_4$ | Presión Arterial Sistólica | 0,000374 | 0,000637 |
| $\beta_5$ | Diabetes | 0,016272 | 0,031717 |
| $\beta_6$ | Tabaquismo | 0,010298 | 0,025199 |
| $\beta_7$ | Sexo | 0,002399 | 0,012877 |

*Tabla 5. Con una probabilidad del 95 % cada uno de los parámetros $\beta_j$, $j = 0, \cdots, 7$ mencionados en esta tabla se encuentran en dicho rango de valores.*

Los p-valores de las hipótesis de contraste $H_0$: $\beta_j = 0$ son tan pequeños para todos los parámetros que podemos afirmar que todos ellos son relevantes y aportan información a la recta de regresión. Confirmando nuestras sospechas hechas en el primer análisis que apuntaban a que estos eran los parámetros relevantes. El hecho de que los p-valores sean mucho más pequeños que en el análisis anterior es también un buen síntoma que sugiere que hemos conseguido eliminar duplicidades, es decir, los parámetros que intervienen ahora no presentan tantas relaciones lineales entre ellos.

Con respecto a los intervalos de confianza para un valor $\alpha = 5\,\%$. Este segundo análisis ha mejorado las estimaciones de los parámetros. Consecuentemente, hemos calibrado el impacto que tienen factores de riesgo y cómo estos afectan de una manera u otra al riesgo de evento

| Hipótesis de contraste $H_0$: $\beta_j = 0$ | | |
|---|---|---|
| | Parámetro | p-valor |
| $\beta_1$ | Edad | $6{,}72 \cdot 10^{-9}$ % |
| $\beta_2$ | Colesterol total | $2{,}75 \cdot 10^{-12}$ % |
| $\beta_3$ | HDL | $1{,}05 \cdot 10^{-12}$ % |
| $\beta_4$ | Presión Arterial Sistólica | $1{,}24 \cdot 10^{-10}$ % |
| $\beta_5$ | Diabetes | $4{,}38 \cdot 10^{-7}$ % |
| $\beta_6$ | Tabaquismo | $4{,}78 \cdot 10^{-4}$ % |
| $\beta_7$ | Sexo | 0,4466 % |

*Tabla 6. Realizamos hipótesis de contrastes para todos los parámetros (excepto ordenada en el origen, el hecho de que la ordenada en el origen pueda ser 0 o no, no es relevante ya que simplemente actúa como una corrección de la recta) y damos el p-valor, cuanto más bajo sea este, con mayor contundencia podemos rechazarlo y cuanto más alto, existe menor evidencia estadística para rechazarlo y por tanto lo natural será aceptar la hipótesis de contraste, $\beta_j = 0$.*

cardiovascular ya que todos los intervalos de confianza nuevos tienen una longitud inferior a la que tenían en el primer análisis (depurar la recta eligiendo solo los valores relevantes nos ha permitido tener un conocimiento más preciso de la información de la que disponemos), destacando especialmente el parámetro “Colesterol total”, la longitud de su intervalo de confianza es del orden de casi 10 veces más estrecho (una excepcional mejora en la estimación de la cuantificación de la influencia del colesterol como factor de riesgo).

Además, los intervalos de confianza del segundo análisis de los parámetros “Colesterol total”, “Presión Arterial Sistólica” y “Diabetes” son contenidos completamente por los intervalos de confianza obtenidos para estos mismos parámetros en el primer análisis. Para los otros tres parámetros, los intervalos de confianza del segundo análisis están contenidos casi completamente en los respectivos intervalos de confianza del primero. Puede ser interesante estudiar si en nuestra muestra existe algún tipo de relación entre los parámetros “Edad”, “HDL” o “Tabaquismo” con el parámetro que hemos añadido para este segundo análisis, la variable “Sexo”, y que esta sea la razón por la que sus intervalos de confianza no estén contenidos completamente en los del análisis previo. Ya hemos visto que sí que existe esta entre el “Tabaquismo” y el “Sexo”, el análisis para las otros dos es más complicado pero sugiere nuevas preguntas interesantes.

Resumimos las conclusiones más interesantes a las que hemos llegado con este segundo análisis depurado que cambia (esencialmente mejora) algunos de los resultados obtenidos antes y aporta nuevas observaciones importantes.

- Con una probabilidad del 95 %, envejecer 10 años conlleva el aumento de entre un 0,35 % y un 0,64 % del riesgo de evento cardiovascular.

- El aumento del colesterol es perjudicial: Un aumento de 10 mg/dL incrementa el riesgo de evento cardiovascular entre un 0,22 % y un 0,36 % con una probabilidad del 95 %, en cambio, el aumento del HDL es beneficioso para prevenir eventos cardiovasculares, un aumento de 10 mg/mL disminuye el riesgo de evento cardiovascular entre un 0,51 % y un 0,83 % con una probabilidad del 95 %.

- Con una probabilidad del 95 %, el incremento en 10 mmHg de la presión arterial sistólica conlleva el aumento de entre un 0,37 % y un 0,64 % del riesgo de evento cardiovascular.

- Los pacientes diabéticos presentan con una probabilidad del 95 % un aumento de entre un 1,63 % y un 3,17 % del riesgo de evento cardiovascular.
- Los fumadores habituales presentan con una probabilidad del 95 % un aumento de entre un 1,03 % y un 2,52 % del riesgo de evento cardiovascular.
- El sexo del paciente influye en el riesgo que este tiene de sufrir un evento cardiovascular, con un 95 % de probabilidad, un hombre tiene un riesgo de evento cardiovascular de entre un 0,24 % y un 1,29 % superior al que tiene una mujer.

## 4. Estudio de datos influyentes.

En todo estudio de naturaleza bioestadística es habitual encontrar datos influyentes o "anómalos". La razón de esto es que en la muestra solemos encontrar pacientes con condiciones o patologías especiales que requieren ser tratados de forma personalizada, susceptibles de alejarse demasiado de las estimaciones predichas por el modelo. Por ello, es importante detenerse en los datos anómalos para estudiarlos con mayor cuidado y de manera individualizada. Queremos decidir si estos pacientes requieren un tratamiento excepcional o si el modelo ha fallado para ellos.

Decimos que una observación es influyente si tiene mucho impacto en $\hat{\beta}$ y en $\hat{y}$, a estas observaciones las llamaremos puntos críticos.

Consideremos $\hat{\mathbb{Y}}$ el vector con las estimaciones $\hat{y}_i$, $\mathbb{Y}$ el vector con las observaciones $y_i$ y $X$ la matriz de datos, entonces, se satisface,

$$\hat{\mathbb{Y}} = X\hat{\beta} = X(X^T X)^{-1} X^T \mathbb{Y}.$$

Definimos la matriz $H := X(X^T X)^{-1} X^T$, y tomamos la coordenada $h_{ii}$ que definimos como leverage del dato $i$-ésimo. Pasamos ahora a definir la distancia de Cook como,

$$D_i := \frac{1}{k+1} \left( \frac{e_i}{s_R \sqrt{1 - h_{ii}}} \right)^2 \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}.$$

Podemos usar el leverage, $h_{ii}$ y la distancia de Cook para identificar puntos críticos [8, 9].

Las distancias de Cook de nuestra muestra son por lo general bastante pequeñas. Esta medida resalta por encima del resto solo a los pacientes 33 (distancia de Cook 0,1742) y 158 (distancia de Cook 0,1613), exceptuando estos dos datos, el resto de elementos de la muestra lleva asociada una distancia de Cook inferior a 0,075.

Para el leverage consideraremos anómalos aquellos datos que sean superiores a $3\dfrac{k+1}{n} =$ 0,17808. Tenemos 6 datos que satisfacen esto, los pacientes 15 ($h_{ii} = 0{,}2112$), 29 ($h_{ii} = 0{,}1869$), 79 ($h_{ii} = 0{,}2290$), 115 ($h_{ii} = 0{,}3521$), 159 ($h_{ii} = 0{,}3813$) y 161 ($h_{ii} = 0{,}2389$).

Los pacientes 33 y 158 que eran influyentes según la distancia de Cook son también los únicos dos pacientes cuyo riesgo de evento cardiovascular es superior al 15 %, 18 % y 19 % respectivamente. Como su riesgo de evento cardiovascular es tan elevado comparado con el del resto de pacientes es normal que estos dos puntos sean considerados influyentes, la coordenada $y$ se encuentra lejos de la del resto de datos.

Pasamos al estudio personalizado de los datos influyentes según el "leverage" (ninguno coincide con los datos influyentes según la distancia de Cook)

- Paciente 15: Se trata de un paciente pluripatológico en tratamiento con múltiples fármacos, entre ellos *Acecumarol*. Este es un anticoagulante, un tratamiento preventivo para disminuir el riesgo de accidentes tromboembólicos. Por ello, es de esperar que algunos de sus factores de riesgo hayan sido modificados por el tratamiento farmacológico mientras que otros factores han permanecido inalterados, creando un dato con parámetros poco comunes que puede ser leído de manera influyente por la regresión. Además el paciente era diabético, en tratamiento hipoglucemiante, lo que hace que el valor de las cifras de glucemia estén alteradas artificialmente.

- Paciente 29: Se trata de un paciente con hipertrigliciremia severa con valores de colesterol dentro de la normalidad, en este paciente habría que descartar una hipertrigliceremia familiar, en cuyo caso habría factores genéticos que podrían influir en su riesgo cardiovascular. Este paciente sobrepasa en gran manera los valores habituales de triglicéridos y es probable que por ello sea un dato influyente para la recta de regresión.
- Paciente 79: La distancia de Cook para este paciente es muy pequeña, $1{,}85 \cdot 10^{-6}$, así que según este criterio, el paciente 79 se encuentra lejos de ser un dato influyente. Su única anomalía es padecer diabetes mellitus tipo I, único paciente con esta disfunción de entre todo los analizados. Esta característica podría hacer que este dato sea influyente. No obstante, no somos capaces de decidir si el modelo ha fallado ya que el dato podría no ser influyente (la predicción y el dato "REGICOR" real fueron muy similares).
- Paciente 115: La tensión diferencial, considerada factor de riesgo por varios autores [18], de esta paciente es muy elevada. Los valores de "LDL" y "Triglicéridos" son demasiado elevados, mientras que los de "HDL" se encuentran por debajo de lo aconsejable. Además, el paciente es diabético y fumador habitual. Al tener tantos parámetros en rangos muy alejados de las cifras habituales es razonable pensar que este paciente deba ser considerado un dato influyente para nuestra recta de regresión. Su riesgo de evento cardiovascular debería ser estudiado de forma especial y personalizada.
- Paciente 159: Paciente de avanzada edad pluripatológico, polimedicado, bien controlado. Los datos de los distintos parámetros son muy satisfactorios para una persona de su edad (posiblemente como consecuencia de su medicación) que lo convertiría en un dato influyente por estar en rangos distintos a lo que suele ser habitual para pacientes de su edad.
- Paciente 161: Paciente diabético fumador de avanzada edad relativamente bien controlado por medicación lo que hace que sus parámetros puedan estar modificados artificialmente.

Es interesante observar que la gran mayoría de los datos influyentes son diabéticos (pacientes que no constituyen un porcentaje tan representativo de la población). Por ello, para realizar un análisis más depurado y fiable, sería aconsejable estudiar la población diabética y no diabética de forma separada.

Para nuestro estudio, al contar solo con 6 datos influyentes sobre un total de 219, retirarlos del análisis no cambiaría de forma significativa los resultados obtenidos.

## 5. Regla de clasificación

Queremos predecir si un paciente con unas determinadas características es suceptible de tener un riesgo de evento cardiovascular bajo o moderado (inferior al 10 %), clasificado en la población 0, o de padecer un riesgo alto o muy alto (igual o superior al 10 %), población 1.

En nuestra muestra contamos con 206 pacientes en la población 0 (riesgo bajo o moderado) y con 13 en la población 1 (riesgo alto o muy alto).

La regla de clasificación que hemos aplicado es la regresión logística, usando el comando "Solver" del programa Excel para resolver la combinación de $\hat{\beta}_j$ que maximiza el estimador log VEROSIMILITUD.

Con esto, la regla obtenida consiste en calcular el valor

$$\begin{aligned} f(x_i) \quad &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \text{Edad} + \hat{\beta}_2 \cdot \text{Colesterol Total} + \hat{\beta}_3 \cdot \text{HDL} + \hat{\beta}_4 \cdot \text{LDL} \\ &+ \hat{\beta}_5 \cdot \text{Trigliceridos} + \hat{\beta}_6 \cdot \text{PAS} + \hat{\beta}_7 \cdot \text{PAD} + \hat{\beta}_8 \cdot \text{Glúcidos} \\ &+ \hat{\beta}_9 \cdot \text{Filtrado Glomerular} + \hat{\beta}_{10} \cdot \text{Albuminuria} \\ &\left(+\hat{\beta}_{11} \text{ si el paciente es diabetico}\right) \\ &\left(+\hat{\beta}_{12} \text{ si el paciente es fumador}\right) \\ &\left(+\hat{\beta}_{13} \text{ si el paciente es hombre}\right), \end{aligned}$$

donde los valores de los coeficientes $\hat{\beta}_j$ vienen dados en la Tabla 7.

| Regresión Logística | | |
|---|---|---|
| | Parámetro | Estimación para la regresión logística |
| $\hat{\beta}_0$ | Ordenada en el origen | $-800$ |
| $\hat{\beta}_1$ | Edad | 1,0139631 |
| $\hat{\beta}_2$ | Colesterol total | 0,1004485 |
| $\hat{\beta}_3$ | HDL | 1,0092167 |
| $\hat{\beta}_4$ | LDL | 1,03056338 |
| $\hat{\beta}_5$ | Triglicéridos | 1,0258 |
| $\hat{\beta}_6$ | Presión Arterial Sistólica | 1,030683 |
| $\hat{\beta}_7$ | Presión Arterial Diastólica | 1,0169 |
| $\hat{\beta}_8$ | Glucosa | 1,0222 |
| $\hat{\beta}_9$ | Filtrado Glomerular | 1,000156 |
| $\hat{\beta}_{10}$ | Albuminuria | 1,0002 |
| $\hat{\beta}_{11}$ | Diabetes | 1,0000833 |
| $\hat{\beta}_{12}$ | Tabaquismo | 1,000083 |
| $\hat{\beta}_{13}$ | Sexo | 1,00015 |

*Tabla 7. Valores propuestos por la función "Solver" de Excel para la regla de clasificación de regresión logística.*

De esta forma, si el valor de $f(x_i)$ es menor que 0 clasificamos el dato $x_i$ en la población 0, y en caso contrario en la población 1. Es cierto que la función "Solver" a veces puede ser imprecisa. No obstante, la regla de clasificación que hemos dado ha sido acertada para un 93,15 % de los datos (204 del total de 219), aunque al haber usado los mismos datos para comprobar la fiabilidad y crear la regla de clasificación este valor tan elevado de aciertos puede haber sido adulterado, deberíamos comprobar esta regla con datos nuevos. En caso de no poder conseguir datos nuevos, para evaluar la regla, para cada dato de los que disponemos podemos crear una regla de clasificación con esta metodología (regresión logística), hacer la predicción de ese dato y evaluar si la predicción ha acertado.

Nuestra regla ha clasificado de forma altamente precisa los datos de la población 0, solo 7 fallos de entre 206 pacientes de esta población, pero clasifica con poca precisión a los pacientes de la población 1, 8 fallos de entre 13 pacientes.

# 6. Conclusiones

En este estudio hemos realizado dos rectas de regresión lineal para mejorar los resultados proporcionados por esta herramienta. De esta manera se ha conseguido cuantificar de forma muy precisa el impacto de 7 de los 13 factores de riesgo de los cuales sospechábamos una potencial relación con el riesgo cardiovascular. De los 6 factores de riesgo iniciales restantes, uno de ellos, "LDL" está relacionado implícitamente de forma lineal con otros dos de los factores incluidos en el segundo análisis, "Colesterol total" y "HDL". Otro de los potenciales factores de riesgo descartados para la segunda recta de regresión, el "Filtrado glomerular" ha sido estudiado cualitativamente de forma independiente en el Apéndice A. Para futuros estudios se sugiere estudiar la posible independencia de los 4 potenciales factores de riesgo restantes ("Triglicéridos", "Presión Arterial Diastólica", "Glucosa", "Albuminaria"). También se sugiere corroborar los resultados aquí obtenidos con otros datos.

En este trabajo también hemos propuesto una regla de clasificación por medio de una regresión logística. Para un próximo estudio proponemos la creación de reglas óptimas de clasificación para estas dos poblaciones. Con este fin, como funciones para cada una de las poblaciones se propone: usar funciones tales que para los parámetros $\beta_1$ - $\beta_{10}$ sean una normal de dimensión 10 con media y varianza muestral (intentando obtener el dato de la albuminaria y no solo la clasificación en $A1$, $A2$ o $A3$) y para los parámetros $\beta_{11}$, $\beta_{12}$, $\beta_{13}$ Bernoullis tomando como $p$ el siguiente valor

$$p = \frac{\text{casos valor 1 en la poblacion i}}{\text{casos totales en la poblacion i}}, \quad i = 1, 2$$

independientes cada una de ella del resto de parámetros que intervienen en la función de densidad. Tras esto se aconseja incluir costes de mala clasificación si se desea evitar clasificar pacientes con riesgo alto o muy alto como pacientes de riesgo bajo o moderado, mejorando su función como una herramienta de prevención de riesgo. También sería interesante usar algún test para cerciorarnos de que estas funciones de densidad reflejan la realidad.

# A. El filtrado glomerular es un factor de riesgo cardiovascular no lineal.

La Enfermedad Renal Crónica (ERC) tiene en nuestro medio una prevalencia aproximada del 15 %, siendo mayor en varones, personas con edad avanzada y pacientes con enfermedad cardiovascular. Fue incluida como factor de riesgo independiente de Enfermedad Cardiovascular por el *Joint National Committe on Prevention Detection and Treatment of High Blood pressure* en 2003 [7]. Partiendo de estas premisas, parece interesante utilizar los marcadores analíticos de función renal para el diagnóstico precoz de patología cardiovascular ya que la marcada acumulación de factores de riesgo cardiovascular en estos nefrópatas podría hacer considerar a la enfermedad renal crónica como un trastorno cardiovascular (e.g. [12, 14]). En esta Sección discutiremos que existe una dependencia entre estos dos factores pero que esta no es lineal.

La metodología empleada es un contraste $\chi^2$ de independencia (supondremos los valores de las probabilidades desconocidos y los estimaremos por cantidad de cada clase dividido por el tamaño de la muestra). Vamos a contrastar la siguiente hipótesis de rechazo.

$H_0$: el filtrado glomerular y el riesgo cardiovascular se distribuyen según dos variables aleatorias independientes.

Por último, antes de la recopilación de datos, conviene explicar el significado de las distintas categorías en relación al filtrado glomerular, así como los criterios de clasificación.

Estadíos del filtrado glomerular estimado ($mL/min/1{,}73\,m2$) en función de creatinina con fórmula CKD-EP[1]

- G1 $\geq 90\,\%$: FG normal o elevado.
- G2 $60 - 89\,\%$: FG ligeramente disminuido.
- G3a $45 - 59\,\%$: FG ligera-moderadamente disminuido.
- G3b $30 - 44\,\%$: FG moderada-gravemente disminuido.
- G4 $15 - 29\,\%$: FG gravemente disminuido.
- G5[2] $< 15\,\%$: Fallo renal.

| Tabla de observados | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fil. Glomerular/RC (REGICOR) | Bajo | Moderado | Alto | Muy Alto |
| G1 | 70 | 17 | 4 | 0 |
| G2 | 53 | 39 | 6 | 2 |
| G3a | 10 | 7 | 1 | 0 |
| G3b | 3 | 5 | 0 | 0 |
| G4 | 2 | 0 | 0 | 0 |

*Tabla 8. Tabla de observados relación filtrado glomerular con riesgo cardiovascular (según test REGICOR).*

| Tabla de esperados | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fil. Glomerular/RC (REGICOR) | Bajo | Moderado | Alto | Muy Alto |
| G1 | 57.34 | 28.26 | 4.57 | 0.83 |
| G2 | 63.01 | 31.05 | 5.02 | 0.91 |
| G3a | 11.34 | 5.59 | 0.90 | 0.16 |
| G3b | 5.04 | 2.48 | 0.40 | 0.07 |
| G4 | 1.26 | 0.62 | 0.10 | 0.02 |

*Tabla 9. Tabla de esperados relación filtrado glomerular con riesgo cardiovascular (según test REGICOR).*

El estadístico de Pearson toma el valor $b = 19{,}00$, lo cual implica que el $p$-valor es 8,84 % (contrastamos con $\chi^2_{12}$). Esto permite rechazar la hipótesis de contraste $H_0$ con un nivel de confianza superior al 90 %.

Realicemos un análisis cualitativo sobre la relación entre la filtración glomerular y el riesgo cardiovascular. Las diferencias más abultadas que encontramos entre observados y esperados se encuentran en las clases $G1$ y $G2$. Para $G1$ el riesgo observado parece más bajo que el esperado, mientras que para $G2$ los resultados parecen indicar lo contrario. En cambio, para las clases $G3a$, $G3b$ y $G4$, los resultados observados concuerdan con los esperados, lo cuál sugiere que una vez alcanzado el estado $G3a$ (o superior) la calidad del filtrado glomerular es independiente del riesgo cardiovascular.

En base a estos resultados podemos concluir que los pacientes en estadío $G1$ (filtrado glomerular normal o elevado) presentan en la práctica un RCV menor que el que cabría esperar si ambos fenómenos fueran independientes. El adecuado filtrado glomerular sería capaz de compensar, al menos parcialmente, el efecto nocivo de estos factores de riesgo.

[1]Individuos de raza negra: multiplicar por 1,159

[2]En nuestra muestra, ningún paciente ha alcanzado la categoría de fallo renal y en consecuencia no la tendremos en cuenta para nuestro estudio.

En el estadío $G2$ ya el filtrado glomerular se encuentra discretamente disminuido $(60-89\,\%)$, la uremia aumenta levemente y sería responsable de un estado de inflamación crónica a nivel de toda la anatomía con el consiguiente aumento de RCV como se aprecia en nuestro estudio.

Cuando la insuficiencia renal ya está consolidada, es decir filtrado glomerular inferior al 60 % (estadíos $G3a$ a $G5$), la conjunción de los distintos factores de riesgo ya han lesionado de forma importante e irreversible tanto el sistema cardiovascular como la función renal y en consecuencia el deterioro renal no se ve reflejado en un aumento del RCV que ya es de por sí elevado.

Del análisis de estos resultados se desprende que la detección precoz de los pacientes con disminución ligera del filtrado glomerular ($G2$), previa a la insuficiencia renal crónica, permitiría implementar las actuaciones sobre los Factores de Riesgo Cardiovascular modificables y con ello disminuir de forma costo-efectiva la morbimortalidad cardiovascular así como la evolución hacia la enfermedad renal crónica.

## Referencias

[1] M. Al de Francisco, L. Aguilera y V. Fuster. Enfermedad cardiovascular, enfermedad renal y otras enfermedades crónicas. Es necesaria una intervención más temprana en la enfermedad renal crónica. *Nefrología* 29.1 (2009), págs. 6-9.

[2] R. Alcanzar, L. Orte y A. Otero. Enfermedad renal crónica. *Nefrología* (2008), págs. 3-6.

[3] R. Alcázar Arroyo, L. Orte, E. González Parra, J. Górriz, J. Navarro, A. Martín de Francisco, M. Egocheaga y F. Álvarez Guisasola. Documento de consenso SEN-semFYC sobre la enfermedad renal crónica. *Nefrología* 28.3 (2008), págs. 273-282.

[4] R. W. Alexander. Hypertension and the pathogenesis of atherosclerosis: oxidative stress and the mediation of arterial inflammatory response: a new perspective. *Hypertension* 25.2 (1995), págs. 155-161.

[5] A. Arias Morales, R. García Hernández y M. Oliva Pérez. Riesgo cardiovascular global en pacientes ancianos hipertensos. *Revista Cubana de Medicina* 53.2 (2014), págs. 178-188.

[6] A. Asesio Sánchez, A. Fernández y A. Morcillo. *Influencia de la Dieta Mediterránea en la percepción de la salud: Estudio en población adolescente del IES Antonio Machado de Soria y población adulta de la provincia de Soria*. Editorial Académica Española, 2018.

[7] A. V. Chobanian, G. L. Bakris, H. R. Black, W. C. Cushman, L. A. Green, J. L. Izzo Jr, D. W. Jones, B. J. Materson, S. Oparil, J. T. Wright Jr et al. Seventh report of the joint national committee on prevention, detection, evaluation, and treatment of high blood pressure. *hypertension* 42.6 (2003), págs. 1206-1252.

[8] R. D. Cook. Detection of influential observation in linear regression. *Technometrics* 19.1 (1977), págs. 15-18.

[9] R. D. Cook. Influential observations in linear regression. *Journal of the American Statistical Association* 74.365 (1979), págs. 169-174.

[10] J. M. B. Díez, J. L. del Val García, J. T. Pelegrina, J. L. M. Martínez, R. M. Peñacoba, I. G. Tejón, E. M. R. Quintana, M. P. Sajkiewicz, A. A. Boronat, B. Á. Pérez et al. Epidemiología de las enfermedades cardiovasculares y factores de riesgo en atención primaria. *Revista española de cardiología* 58.4 (2005), págs. 367-373.

[11] S. G. García, R. M. Barmudez, J. B. Sanjuan, A. C. Amenós, R. D. Piquet y A. L. M. de Fran. Recomendaciones sobre la utilización de ecuaciones para la estimación del filtrado glomerular en adultos. *Nefrología* 26.6 (2006), págs. 658-665.

[12] M. Gorostidi, M. Sánchez-Martínez, L. M. Ruilope, A. Graciani, J. Juan, R. Santamaría, M. D. del Pino, P. Guallar-Castillón, F. de Álvaro, F. Rodríguez-Artalejo et al. Prevalencia de enfermedad renal crónica en España: impacto de la acumulación de factores de riesgo cardiovascular. *Nefrología* 38.6 (2018), págs. 606-615.

[13] R. R. Gorrita Pérez, A. Gilvonio Cárdenas e Y. Hernández Martínez. Caracterización del hábito de fumar en un grupo de escolares adolescentes. *Revista Cubana de Pediatría* 84.3 (2012), págs. 256-264.

[14] M. I. Gutiérrez Pérez y J. C. Rodríguez Sánchez. *Problemas nefrourológicos y genito-urinarios*.

[15] S. M. Haffner, S. Lehto, T. Rönnemaa, K. Pyörälä y M. Laakso. Mortality from coronary heart disease in subjects with type 2 diabetes and in nondiabetic subjects with and without prior myocardial infarction. *New England journal of medicine* 339.4 (1998), págs. 229-234.

[16] W. Insull Jr. The pathology of atherosclerosis: plaque development and plaque responses to medical treatment. *The American journal of medicine* 122.1 (2009), S3-S14.

[17] J. P. S. de Lafuente, Y. Sáez, M. Vacas, M. Santos, J. D. Sagastagoitia, E. Molinero y J. A. Iriarte. Diferencias de sexo en los factores de riesgo cardiovascular en pacientes con enfermedad coronaria comprobada angiográficamente. *Clínica e investigación en arteriosclerosis* 21.4 (2009), págs. 173-178.

[18] J. A. Linares, J. B. Simó, F. S. Sancho, S. R. Martínez, M. Y. Marco y M. M. Pérez. La presión diferencial como factor independiente de riesgo cardiovascular. *Atención Primaria* 36.1 (2005), págs. 19-24.

[19] E. M. T. Lira. Impacto de la hipertensión arterial como factor de riesgo cardiovascular. *Revista Médica Clínica Las Condes* 26.2 (2015), págs. 156-163.

[20] Á. C. Matía Cubillo, J. M. Soto Esteban y M. E. Martín Pascual. *Riesgo cardiovascular*.

[21] J. Millán, A. Hernández-Mijares, J. F. Ascaso, M. Blasco, A. Brea, Á. Díaz, P. González-Santos, T. Mantilla, J. Pedro-Botet, X. Pintó et al. La auténtica dimensión del colesterol-no-HDL: colesterol aterogénico. *Clínica e Investigación en Arteriosclerosis* 28.6 (2016), págs. 265-270.

[22] V. Moreno, A. García Raso, M. García Bueno, C. Sánchez-Sánchez, E. Meseguer, R. Mata y P. Llamas. Factores de riesgo vascular en pacientes con ictus isquémico. Distribución según edad, sexo y subtipo de ictus. *Rev Neurol* 46.10 (2008), págs. 593-8.

[23] M. Morillas Bueno. ¿ Hasta dónde bajar la glucemia para la prevención cardiovascular en la diabetes? *Cardiología hoy 2015* (2015), págs. 593-598.

[24] M. Naghavi, H. Wang, R. Lozano, A. Davis, X. Liang, M. Zhou et al. GBD 2013 Mortality and Causes of Death Collaborators. Global, regional, and national age-sex specific all-cause and cause-specific mortality for 240 causes of death, 1990-2013: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2013. *Lancet* 385.9963 (2015), págs. 117-171.

[25] Ó. Pérez-Méndez. Lipoproteínas de alta densidad (HDL).¿ Un objetivo terapéutico en la prevención de la aterosclerosis? *Archivos de cardiología de México* 74.1 (2004), págs. 53-67.

[26] M. Ramirez Iñiguez de la Torre et al. "Determinación del Riesgo Cardiovascular en una población laboral aparentemente sana. Relación con Variables Sociodemográficas y Laborales". Tesis doct. Universitat de les Illes Balears, 2016.

[27] G. A. Roth, M. H. Forouzanfar, A. E. Moran, R. Barber, G. Nguyen, V. L. Feigin, M. Naghavi, G. A. Mensah y C. J. Murray. Demographic and epidemiologic drivers of global cardiovascular mortality. *New England Journal of Medicine* 372.14 (2015), págs. 1333-1341.

[28] D. Sarre-Álvarez, R. Cabrera-Jardines, F. Rodríguez-Weber y E. Díaz-Greene. Enfermedad cardiovascular aterosclerótica. Revisión de las escalas de riesgo y edad cardiovascular. *Medicina interna de México* 34.6 (2018), págs. 910-923.

[29] Wikipedia. *Provincia de Soria — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. `http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Provincia%20de%20Soria&oldid=145180302`. [Online; accessed 11-August-2022]. 2022.

[30] S. Yusuf, S. Hawken, S. Ôunpuu, T. Dans, A. Avezum, F. Lanas, M. McQueen, A. Budaj, P. Pais, J. Varigos et al. Effect of potentially modifiable risk factors associated with myocardial infarction in 52 countries (the INTERHEART study): case-control study. *The lancet* 364.9438 (2004), págs. 937-952.

**Sobre el/los autor/es:**

*Nombre:* Alejandro Fernández-Jiménez
*Correo electrónico:* alejandro.fernandezjimenez@maths.ox.ac.uk
*Institución:* University of Oxford
*Orcid:* 0000-0002-4548-4374.

*Nombre:* Álvaro Fernández Jiménez
*Correo electrónico:* alvfj1404@gmail.com
*Institución:* Universidad Católica de Valencia
*Orcid:* 0000-0002-1580-9764.

*Nombre:* Abilio José Fernández Vicente
*Correo electrónico:* abiliofernandez@yahoo.es
*Institución:* Sanidad de Castilla y León (SaCyL)
*Orcid:* 0000-0002-9507-7937.

Experiencias Docentes

# Metodología para la enseñanza de la modelación matemática de problemas de la profesión, vía ecuaciones diferenciales

# Methodology for the teaching of the mathematical modeling of problems of the profession, road differential equations

Salvador Fonseca Nueva

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XIII, Número 1, pp. 025–038, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Nov'22; Aceptación: 22 Dic'22

1 de abril 2023

**Resumen**

El presente trabajo tiene como objetivo proponer una metodología para la enseñanza de la modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales, en las carreras de ingeniería. La misma parte de un diagnóstico de las insuficiencias que poseen los estudiantes de estas carreras en el desarrollo de las habilidades básicas y elementales que limitan el desarrollo de la habilidad de modelación matemática. La metodología propuesta está estructurada en tres etapas; nivel de precisión de las habilidades básicas y elementales, nivel de transferencia de estas habilidades y nivel de concreción de la modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales. En la última etapa los estudiantes en las prácticas de campo, orientados por el profesor, recopilan información sobre determinados problemas de la profesión, vinculados con la modelación matemática y a través de talleres en el aula construyen los modelos matemáticos, vía ecuaciones diferenciales.

**Palabras Clave:** Metodología, Modelación Matemática.

**Abstract**

The objective of this paper is to propose a methodology for teaching mathematical modeling, via differential equations, in engineering careers. The same part of a diagnosis of the insufficiencies that students of these careers have in the development of basic and elementary skills that limit the development of mathematical modeling ability. The proposed methodology is structured in three stages; level of precision of basic and elementary skills, level of transfer of these skills and level of concretion of mathematical modeling, via differential equations. In the last stage, students in field practices, guided by the teacher, collect information on certain problems of the profession, linked to mathematical modeling and through workshops in the classroom they build mathematical models, via differential equations.

**Keywords:** Methodology, Mathematical modeling

# 1. Introducción

El Ingeniero tiene su propio modo de actuación expresado en los campos de acción de la ciencia y la técnica, siendo el objetivo principal la explotación de los sistemas de ingeniería. Para alcanzar este desarrollo precisa de una formación básica matemática, que le permita aplicar los conocimientos adquiridos en asignaturas básicas y en otras con carácter más específico dentro de la carrera. Una de las habilidades que debe desarrollar el ingeniero para poder interpretar de forma acertada a la realidad es la modelación matemática de los problemas de la profesión pues, esta, le permite simular los diferentes procesos afines a su campo y predecir los resultados en interés de tomar las mejores decisiones. El diseño en ingeniería no es un producto acabado sino una metodología que se apoya en el conocimiento, la inventiva, la creatividad y la toma de conciencia del concepto de urgencia, para visualizar un problema real, formularlo en términos técnicos, explorar posibles soluciones, evaluar alternativas, proponer una o más formas o vías de solución, evaluar los procesos posibles que se necesite usar y sus correspondientes resultados (Cipriano Cruz, 2010). El planteamiento anterior destaca tres elementos importantes, conocimiento, inventiva y la creatividad lo que presupone un alto nivel de preparación.

El tema ha sido abordado por diferentes autores que ejemplifican, a partir de problemas ya definidos como transcurre el proceso de modelación matemática, como un proceso y no como una habilidad, sin detenerse a analizar las principales insuficiencias que presentan los estudiantes al respecto. Entre tantos otros autores, (Plaza, 2015) plantea una nueva forma de enseñar matemáticas en programas de ingeniería aplicando algunas estrategias didácticas, como actividades de campo o laboratorio, las cuales han demostrado su eficacia para que los estudiantes obtengan una mayor comprensión de los diferentes fenómenos y procesos objetos de modelación matemática; dichas estrategias han logrado un incremento conceptual matemático relacionado con la interpretación, formulación y solución de problemas, además de permitir un acercamiento entre el estudiante y la matemática como instrumento útil en el ejercicio de la ingeniería.

Entre tanto, (Hernández Moreno, 2017) plantea que el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones en diferencias es un tema no resuelto en las facultades de ingeniería, pues las actividades didácticas encaminadas a desarrollar la habilidad de modelar matemáticamente diversas situaciones son muy escasas en los cursos de ecuaciones diferenciales y en diferencias y matemática discreta.

Otros autores, en la literatura revisada, enfatizan la importancia y aplicabilidad de la Matemática a la solución de los problemas profesionales, entre ellos Brito Ballina (2015), la cual considera la Modelación Matemática como una de las habilidades a desarrollar en los estudiantes de ingeniería pues la misma crea en los estudiantes una capacidad y habilidad necesarias para la solución de posibles problemas prácticos.También el profesor colombiano Villa –Ochoa, (2015), prepondera el papel de la modelación matemática en la formación de los futuros ingenieros.

El plan de estudio E (MES, 2018), para las carreras de ingeniería, contempla la modelación matemática como un objetivo esencial. Sin embargo, se ha podido comprobar que existen otras insuficiencias que limitan el desarrollo sistemático de esta habilidad como las siguientes:

- Pobre desarrollo de las habilidades matemáticas básicas e intelectuales que sirven de base para el futuro desarrollo de la habilidad de modelación matemática de problemas de la profesión.
- La bibliografía básica que emplean los estudiantes de ingeniería no está actualizada.
- No existen alternativas metodológicas en el tratamiento de la habilidad de modelación matemática de problemas de la profesión.
- Existen limitaciones en la preparación de los docentes para dirigir el proceso de desarrollo de la habilidad de modelación matemática de problemas de la profesión en las carreras de ingeniería.

Resulta obvio que el estudiante que estudia ingeniería debe poseer conocimientos y habilidades matemáticas, pero como se hacía referencia anteriormente se necesita además la creatividad para la definición y formulación de un problema de la profesión y modelarlo matemáticamente y sobre todo tener la sensibilidad de, si algo en su campo de acción funciona mal, hacer algo al respecto.

# 2. Materiales y métodos

La investigación fue realizada en la carrera de Ingeniería Agrícola de la Facultad de Ciencias Técnica de la Universidad de Granma. La metodología se aplicó a 22 estudiantes de una población de 70 estudiantes, en la asignatura de Matemática II y en el tema relacionado con las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.

El ingeniero agrícola tiene su campo de acción en la explotación de los sistemas de ingeniería agrícola para los procesos tecnológicos y biotecnológicos de la producción agropecuaria sostenible en los eslabones de base.

## 2.1 Metodología a aplicar

**Objetivo**: contribuir al desarrollo de la habilidad de modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales, en los estudiantes de la carrera de Ingeniería Agrícola de la Facultad de Ciencias Técnicas de la Universidad de Granma.

**Acciones**:

- Análisis de fuentes teóricas relativas a investigaciones sobre el desarrollo de la habilidad de modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales, en las carreras de ingeniería.
- Determinación del contenido y las habilidades que tributan a la modelación matemática, según plan de estudio E.
- Elaboración de la matriz de articulación entre los contenidos de la disciplina de matemática y los problemas de la profesión en la carrera de Ingeniería Agrícola.
- Aplicación de encuestas a profesores de experiencia del departamento de Ciencias Básicas e Informática Aplicada y especialistas de la carrera para validar la articulación entre las

habilidades que recibe el estudiante en los cursos de matemática y la habilidad de modelación matemática.

- Aplicación de una prueba pedagógica a los estudiantes de segundo año de la carrera de Ingeniería Agrícola para evaluar el desarrollo de las habilidades matemáticas en torno a la modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales.
- Aplicación de la metodología consistente en tres etapas:

a) Ejercicios preparatorios. Tienen como objetivo asegurar el nivel de partida para la siguiente etapa, ejercicios de aplicación. Se orientan ejercicios para el desarrollo de las habilidades básicas y elementales que se aplican en el trabajo con funciones exponenciales y logarítmicas y que son necesarias para la Modelación Matemática, vía ecuaciones diferenciales.

b) Ejercicios de aplicación: el objetivo de esta etapa es la problematización del contenido con carácter profesional con vista a la transferencia de la habilidades básicas y elementales a la resolución de problemas contextualizados con su profesión, como cálculo con potencias, logaritmos naturales y propiedades de las funciones exponenciales.

c) Ejercicios de modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales: es la etapa de concreción de la Modelación Matemática, pero no directamente como aparecen en la bibliografía tradicional, sino a través de actividades independientes y motivadoras que realizaron los estudiantes en su práctica de campo.

Los ejercicios se fueron socializando a través de grupos de WhatsApp y entornos de aprendizaje como la MOODLE, en interés de aprovechar las posibilidades que brindan las redes sociales y las plataformas de aprendizaje ya que los ejercicios de la primera etapa no se contemplan de forma directa en el programa de la asignatura de Matemática II.

La metodología cuenta con tres momentos fundamentales, la planeación, ejecución y evaluación. Cada etapa se planifica, se ejecuta y se evalúa. También se distinguen, en cada etapa, las acciones del profesor y del estudiante.

# 3. Análisis y discusión de los resultados

## 3.1 Aplicación de la metodología

En la primera etapa se orientaron ejercicios sobre cálculo con potencias y logaritmos, funciones exponenciales y sus propiedades haciendo énfasis en los tipos de cálculo que más se utilizan en la modelación matemática utilizando modelos en función del tiempo. Se evaluó el nivel de precisión del desarrollo de las habilidades básicas y elementales.

En la segunda etapa se orientaron ejercicios de aplicación a la especialidad utilizando problemas relacionados con la variación de una magnitud física con respecto al tiempo. Se evaluó el nivel de transferencia de las habilidades en la resolución de problemas.

En la tercera etapa se aprovechan las posibilidades que brinda la práctica laboral de los estudiantes en las entidades agrícolas para orientar una Hoja de Trabajo, donde los estudiantes tienen que recopilar informaciones, datos relacionados con los problemas de su profesión como por ejemplo: propagación de plagas, contaminación del suelo, deformaciones de puentes en los ríos y canales entre otros para luego en el aula realizar talleres y construir de forma conjunta los modelos matemáticos, vía ecuaciones diferenciales.

### 3.1.1. Ejercicios de la etapa preparatoria

Los problemas propuestos en esta etapa fueron:

1. Despejar t en las siguientes expresiones:
   a) $e^{2t} = 8$
   b) $\frac{1}{e^t} = 2$
   c) $lnt = 2$
2. Calcule el valor de k en las siguientes expresiones:
   $a)\ e^{2k} = 1{,}0120$
   $b)\ e^{-0{,}0021k} = 0{,}2341$
   $c)\ \dfrac{1}{e^k} = 0{,}0002$
   $d)\ lne^{0{,}2k} = 0{,}0012$
   $e)\ e^{ln0{,}1k} = 1{,}1245$
3. Obtenga el gráfico de la función.$Y = 0.0124\ e^x$.
4. Formule matemáticamente las siguientes proposiciones:
   a) La velocidad de un cuerpo es igual a la variación de su desplazamiento con respecto al tiempo.
   b) La intensidad instantánea de la corriente eléctrica se expresa como la variación de la carga con respecto al tiempo.
   c) El crecimiento de una población con respecto al tiempo es proporcional a la población en un instante t.
   d) La variación del peso de un individuo en un período de tiempo.
   e) El decrecimiento de una sustancia N en un período de tiempo.
   f) La disminución de la temperatura de un metal es proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto y la temperatura ambiente.

### 3.1.2. Ejercicios de la etapa de aplicación

Fueron los siguientes:

1. Un cultivo de 2048 bacterias se multiplica de forma tal que cada minuto doblael número de ellas, ¿cuántas bacterias habrá dentro de 20 minutos?

Solución:

Primer día: $N(0) = 2048$

Segundo día: $N(2) = 2 * 2048$

Tercer día: $N(3) = 2^2 * 2048$

Cuarto día: $N(4) = 2^4 * 2048$

……………………………………..

$f(t) = 2048 * 2^t$

$f(20) = 2048 * 2^{20} = 4\,294\,967\,296$

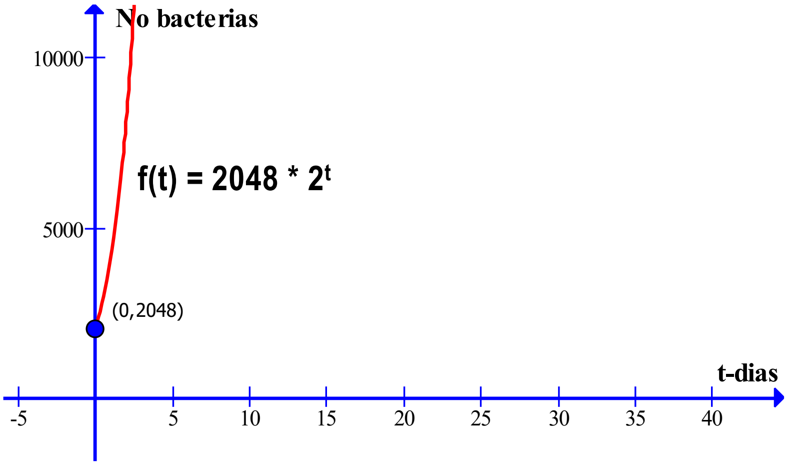



*Figura 1: Gráfico de la función exponencial y sus soluciones particulares*

Este ejercicio permite al estudiante buscar un procedimiento matemático que le permita simplificar el cálculo pues no es lo mismo calcular veinte veces el duplo de 2048 que calcular $2048 * 2^{20}$, aquí radica la ventaja del procedimiento con respecto al cálculo tradicional y a la vez va preparando las condiciones para la construcción de modelos matemáticos, vía ecuaciones diferenciales, en función del tiempo.

### 3.1.3. Ejercicios de modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales.

Esta etapa cuenta con cuatro acciones antes de llegar a la construcción del modelo matemático, ellas son:

- **Orientación de la hoja de trabajo.**

Hoja de trabajo.

Asignatura: Matemática II Año: primero. Semestre: segundo

Objetivo: desarrollar un grupo de actividades relacionadas con el estudio de los problemas de la profesión entre los que se encuentran el perfeccionar los principales elementos de los sistemas de ingeniería para los procesos tecnológicos y biotecnológicos de la producción agropecuaria sostenible en sus eslabones de base.

A continuación, te relacionamos cuatro problemas de la profesión a los cuales te enfrentarás en el desarrollo de la práctica laboral. En cada uno de ellos deberás realizar las actividades que se te indican.

1. La propagación de plagas en los cultivos es un fenómeno frecuente. Estas causan un daño enorme si no se controlan por lo que resulta necesario su estudio. Uno de los métodos más efectivos para el estudio de este fenómeno es la modelación matemática, pero para su

aplicación se necesita de toda la información posible por lo que te invitamos a realizar las siguientes actividades al respecto.

a) Investiga cuáles son las principales plagas que atacan a los cultivos de la entidad agrícola donde realizas la práctica laboral.
b) ¿Cuál es su velocidad de propagación con respecto al tiempo?
c) ¿Cuáles son las medidas para el control de las mismas?

2. La maquinaria agrícola, las bombas para agua (turbinas) son muy utilizadas en las labores agrícolas. Su sobrexplotación ocasiona roturas frecuentes producto del recalentamiento del motor, de cables eléctricos deformados, de este problema investigue:

a) ¿Cuál es la temperatura que indica que el motor de un tractor o de una turbina se ha sobrecalentado?
b) ¿Qué medidas adoptan los operarios ante la situación anterior?

3. La construcción de puentes en los ríos y canales es de vital importancia para el traslado de los equipos agrícolas pesados como las gradas, multilabradoras y los propios tractores. Investigue:

a) Los materiales con los que fueron construidos los puentes.
b) El nivel de flexión que han sufrido los puentes y a qué curva matemática se asemeja.

4. El uso de fertilizantes, como la UREA, es muy frecuente en la agricultura. Investigue la forma de preparación para su uso foliar teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

a) Nivel de concentración de la UREA en agua.
b) Dosis por cada metro cuadrado.
c) Nivel de contaminación del suelo provocado por los plaguicidas.

Las respuestas de estas actividades permitirán realizar los talleres en las clases para la construcción de MODELOS MATEMÁTICOS, vía ecuaciones diferenciales.

### 3.1.4. Realización de talleres.

**Primera situación**

En un taller de maquinado se fabrican piezas de repuestos a partir de la fundición de metales reciclados, pero no se tiene precisión del tiempo que se dedica a los diferentes tratamientos que se les aplican a las piezas una vez extraídas del molde. Los estudiantes recopilaron la información necesaria sobre los principales parámetros como la temperatura cuando sale del molde, temperatura ambiente y midieron varias veces el tiempo y la temperatura entre los diferentes tratamientos que se aplicó a las piezas.

a) Definición del problema.

Una pieza fundida se extrae de un molde a una temperatura de $131^oC$. Pasados diez minutos la pieza posee una temperatura de $100^oC$ ¿si la temperatura ambiente es de $31^oC$, en qué tiempo la pieza alcanza una temperatura ideal de $35^oC$ para su próximo tratamiento?

b) Búsqueda de la vía de solución.

Como se trata de la variación de una temperatura mayor a una menor la ley que gobierna a este problema es la ley de enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_a)$, donde:

$T$: temperatura máxima de la pieza. $t$: Tiempo. $T_a$: temperatura ambiente.

La expresión es una ecuación diferencial de **variable separable** cuya solución es

$T(t) = Ce^{\alpha t} + T_a$.

c) Construcción del modelo.

De acuerdo a las condiciones iniciales del problema se calculan los parámetros del modelo obteniéndose: $T(\boldsymbol{t}) = \mathbf{100}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.0371}\boldsymbol{t}} + 31^{\mathbf{0}}$ MODELO

d) Comprobación del modelo.

Para $T(\mathbf{0}) = \mathbf{131^0}$

$T(0) = 100e^{-0.0371*0} + 31 = 131$

Para $T(10) = 100^0$

$T(10) = 100e^{-0.0371*10} + 31T(10) = 100e^{-0.371} + 31$

$T(10) = 100 * 0.69 + 31 = 100$

e) Validación del modelo.

35= $100e^{-0.0371*t} + 31$

$100e^{-0.0371*t} = 4$

$e^{-0.0371*t} = 0.04$

Introduciendo logaritmo natural

$-0.0371 * t = -3.2188, t = 87\ minutos$

Respuesta: la pieza alcanza la temperatura ideal aproximadamente a los 87 $minutos$.

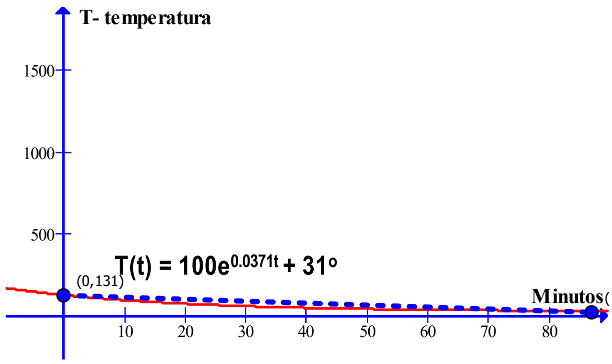



*Figura 2: Soluciones particulares del modelo*

**Segunda situación**

Los estudiantes observaron, en un cultivo de tomates, una plaga que por sus características parecía tratarse de la mosca blanca. Investigaron y comprobaron que se trataba de la mosca blanca, se motivaron en el estudio de este problema de la profesión y definieron el siguiente problema.

a) Definición del problema.

Un cultivo de 2000 plantas de tomates es atacado por la mosca blanca (Bemisiatabaci*)* Inicialmente ha afectado al 1 % de las plantas. La velocidad de propagación de la enfermedad no sólo es proporcional a las plantas infectadas sino a las no infectadas, Si al cabo de tres días el porcentaje de infección asciende al 4%, ¿en cuántos días se infectará el 100% de las plantas?

b) Búsqueda de la vía de solución

La ley que gobierna a este problema es $\frac{dy}{dt} = y_0 r_M (1 - y)$ donde:

$y: Plantas\ infectadas.$

$(2000 - y): plantas\ sanas$

$r_M: Inóculo, tasa\ de\ crecimiento\ de\ la\ enfermedad$

Resolviendo la ecuación diferencial de variables separadas, por el método de fracciones simple, se obtiene la solución general $y = \frac{2000Ce^{-2000r_M t}}{1+Ce^{-2000r_M t}}$, luego, aplicando las condiciones iniciales, se obtiene el valor de C y del coeficiente $r_M$:

$f(t) = \frac{20{,}20e^{0.4723t}}{1+0.0101e^{0.4723t}}$ ***MODELO*** que también puede expresarse como:

$$f(t) = \frac{20{,}20}{\frac{1}{e^{0.4723t}} + 0.0101}$$

c) Comprobación del modelo

| *Tabla 1. Análisis de los resultados del modelo.* | | | |
|---|---|---|---|
| **Tiempo (t-días)** | **0** | **3** | **15** |
| **Nº Plantas infectadas** | 20 | 80 | 1848 |

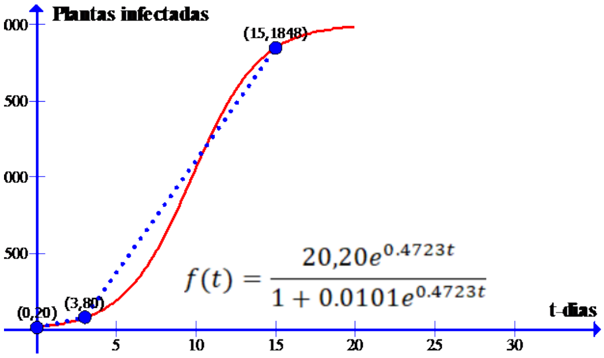



*Figura 3: Soluciones particulares del modelo*

**Tercera situación**

La UREA es un fertilizante que se aplica al suelo y provee de nitrógeno a las plantas, pero también se disuelve en agua para aplicar a las hojas de las plantas, sobre todo a los cítricos y frutales.

a) Definición del problema.

Se disuelven inicialmente 300 gramos de UREA en un tanque que contiene 800 Litros de agua. Se bombea UREA liquida al tanque a razón de 2 Lt/min, Figura 4.

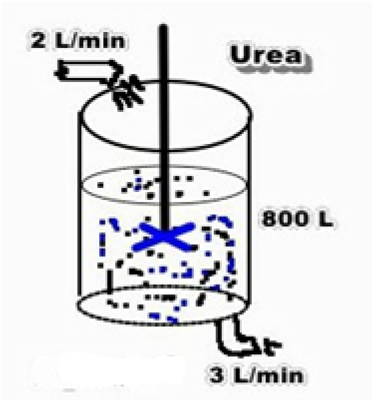



*Figura 4: Disolución de urea*

Luego la disolución mezclada adecuadamente se bombea fuera del tanque a razón de 3 Lt/min. Si la concentración de la disolución que entra al tanque es de 20g/Lt, determine la cantidad de UREA que hay en el tanque en un instante cualquiera.
Solución:

Como se observa en la figura 4, se trata de un problema de transporte de sustancia, donde:
Y(t): cantidad de UREA en un instante t, C(t): concentración de urea en un instante t.
La ley que gobierna a este problema se expresa:

$\frac{dY}{dt} = (v_1c_1) - (v_2c_2),$ donde:

$v_1c_1: Rapidez\ con\ que\ entra\ la\ sustancia$

$v_2 c_2$: $Rapidez\ con\ que\ sale\ la\ sustancia.$

$$\frac{dY}{dt} = \binom{Rapidez\ con\ que}{la\ sustancia\ entra} - \binom{Rapidez\ con\ que}{la\ sustancia\ sale}$$

$$\frac{dY}{dt} = R_1 - \quad R_2$$

$$R_1 = V_1 C_1 = 2Lt/\text{min}.\frac{20g}{Lt} = 40g/min$$

$C_2 = \frac{Cantidad\ de\ UREA}{cantidad\ total}$. Se conoce que la cantidad de UREA es $y(t)$, luego $C_2 = \frac{Y(t)}{cantidad\ total}$

¿Cómo encontrar la cantidad total?

Es la cantidad que va quedando en el tanque en un instante t más la cantidad que había inicialmente, es decir: $cantidad\ total = (V_1 - V_2)t + 800$, luego:

$$C_2 = \frac{Cantidad\ de\ UREA}{cantidad\ total} = \frac{Y}{800 - t}$$

$$V_2 C_2 = 3\frac{Y}{800 - t}$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{40g}{min} - 3\frac{Y}{800 - t}$$

$\frac{dY}{dt} + \frac{3}{800-t}Y = 40$ Ecuación diferencial lineal $Y' + p(t)Y = Q(t)$

Resolviendo la EDL e introduciendo la condición inicial, se tiene:

$Y(t) = 16000 - 20t - 0{,}00003(800 - t)^3$ MODELO

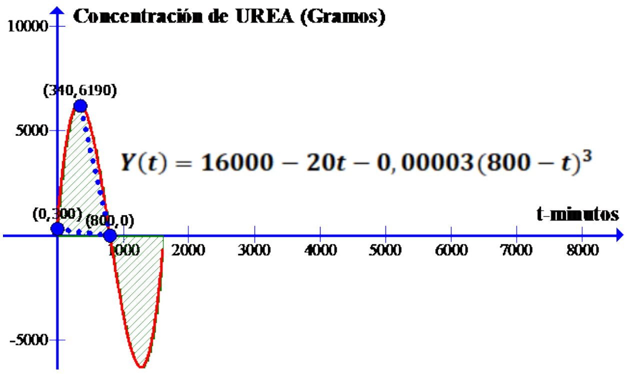



*Figura 5: Solución particular del modelo*

## Análisis del modelo

Para $t = 0$, $Y(0) = 16000 - 20.0 - 0{,}00003(800)^3 = 16000 - 15700 = 300g$.

Para $t = 30min, Y(30) = 16000 - 20.30 - 0{,}00003(770)^3 = 15400 - 13695 = 1705g$

El tanque se vacía en: $Y(800) = 16000 - 20.800t - 0{,}00003(800 - 800)^3$

$Y(800) = 0$

### 3.2 Evaluación de los resultados

Se evaluaron los elementos relacionados con las dos primeras etapas de la modelación matemática, vía ecuaciones diferenciales, puesto que es donde más insuficiencias presentan los estudiantes y por la existencia de software para la solución de estos modelos.

- Definición del problema y sus objetivos.

a) Motivación hacia la solución del problema.
b) Identificar la ley que gobierna al problema (en problemas de la profesión, regularmente, se identifica la ley que gobierna al problema: leyes de la Física, la Química, la Biología, Económicas, entre otras)
c) Definición del problema.

- Búsqueda de la vía para la construcción del modelo matemático**.**

d) Interpretación: dividir el texto en partes lógicas, traducir del lenguaje común al matemático, construcción de gráficos auxiliares, esquemas lógicos y extraer la información.
e) Establecer relaciones entre las partes y el todo: plantear hipótesis, establecer vínculos causales.
f) Búsqueda de la vía de solución: establecer hipótesis, relaciones, vínculos causales entre lo que se pide, la información que se da. y los datos que hacen falta.

g) Concreción de la vía de solución: ecuación diferencial

Resultados obtenidos:

*Tabla 2. Resultados del desarrollo de las habilidades.*

| Habilidades | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aprobados | 22 | 15 | 12 | 14 | 14 | 18 | 15 |

## 4. Conclusiones

Los resultados obtenidos en la presente investigación permitieron llegar a las siguientes conclusiones:

- El desarrollo de las habilidades básicas y elementales con relación a las propiedades de las potencias, de las funciones exponenciales y logarítmicas resulta un tema recurrente e importante a la hora de construir un modelo matemático, vía ecuaciones diferenciales, en función del tiempo.
- La profesionalización del contenido de la enseñanza en la disciplina de matemática motiva

a los estudiantes hacia el estudio de la misma.

A pesar de que la Modelación matemática constituye un acto de creación, la metodología aplicada demostró que se puede enseñar a un número significativo de estudiantes a modelar matemáticamente.

## Referencias

[1] BOCCO, M. Funciones elementales para construir modelos matemáticos, 98-125. Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica. Volumen I. Buenos Aires, 2010

[2] BRITO-VALLINA, M.L. Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. Ingeniería Mecánica. Vol. 14. No. 2, mayo-agosto, 2011, p. 129-139. La Habana, 2015.

[3] CRUZ, C. La enseñanza de la modelación matemática en ingeniería. Fac. Ing. UCV v.25 n.3 Caracas, 2010.

[4] GARCÍA, J. P. Modelado y Resolución de Problemas de Organización Industrial mediante Programación Matemática Lineal. Grupo de investigación ROGLE. Departamento de Organización de Empresas. Curso 2015/2016

[5] GUZMÁN P. Propuesta didáctica de modelación maten ática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros. Tesis Doctoral, 1-15. México, D.F., 2016.

[6] HERNÁNDEZ, N. Modelo didáctico para el aprendizaje de la modelación matemática a través de las ecuaciones diferenciales. 2, (4), 1-86, 2017. Colombia, 2017.

[7] Plan de estudio "E". Ministerio de Educación Superior de la República de Cuba, 2018.

[8] PLAZA L. Modelación matemática en ingeniería. Revista de investigación educativa, 2017.

[9] VILLA J. Formative assessment of pre-service teachers knowledge on mathematical modeling. Mathematics, 9(8), 851. 2021.

**Sobre el autor:**

*Nombre:* Salvador Fonseca Nueva

*Correo Electrónico:* salfonsecan@gmail.com

*Institución:* Universidad de Granma, Cuba.

# La Derivada Discreta como concepto propedéutico a un curso de Cálculo Infinitesimal

# The Discrete Derivative as a propaedeutic concept to a course of Infinitesimal Calculus

Duberly González Molinari

Revista de Investigación

Volumen XIII, Número 1, pp. 39–56, ISSN 2174-0410
Recepción: 17 Dic'22; Aceptación: 11 Ene'23

1 de abril de 2023

**Resumen**

Los cursos y libros llamados de *Precálculo* no suelen incluir entre sus temas, aquellos relacionados directamente con los que se tratarán a posteriori en un curso de Cálculo propiamente dicho (límites, derivadas, integrales, series, entre otros). Este artículo pretende romper con dicha tradición, introduciendo un concepto que hemos dado en llamar *Derivada Discreta*, para pasar a estudiar luego sus propiedades y consecuencias más importantes, como el estudio de la monotonía de una sucesión real.

**Palabras Clave:** Derivada discreta, Sucesión real, Sucesiones monótonas, Cálculo infinitesimal.

**Abstract**

Precalculus courses and books do not usually deal with topics directly related to the ones that are to be dealt with later in a Calculus course (limits, derivatives, integrals, series, among others). This work aims at breaking such tradition by introducing a concept that has been called Discrete Derivative and by studying its most important properties and consequences, such as the monotonicity of a real sequence.

**Keywords:** Discrete derivative, Real sequence, Monotonic sequences, Infinitesimal calculus.

## 1. Introducción

Los libros (y cursos) llamados de *Precálculo* suelen incluir tópicos referentes a generalidades sobre funciones reales de variable real, estudio de las propiedades particulares de las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, etc., en el entendido de que dichos conceptos son prerrequisitos para poder abordar un curso tradicional de cálculo, donde los conceptos que en estos se suelen desarrollar incluyen límites de funciones reales de variable real, derivadas, integrales, series, entre otros. Sin embargo, los cursos de Precálculo no suelen introducir nociones referentes a los conceptos que más tarde se desarrollarán en un curso de Cálculo propiamente dicho.

En este sentido, el programa oficial de la asignatura Matemática II de 2do año de Bachillerato - Diversificación Científica de Educación Secundaria de Uruguay (donde los estudiantes rondan los 17 años de edad) ha sido un intento para que esto no suceda. Por ejemplo, en dicho programa se desarrollan conceptos tales como límites de sucesiones reales de variable natural, cálculo del área bajo la gráfica de una función polinómica no negativa en un intervalo $[a, b]$ a través del método de exhaución y límite de la suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica, intentando aproximar a los estudiantes a los conceptos de, respectivamente, límites, integrales y series que tratarán en el próximo curso de Cálculo.

Además, dicho programa nombra "tímidamente" el concepto de monotonía de una sucesión, donde los libros de texto suelen hacer referencia mediante pocas líneas, definiendo lo que se llamará sucesión monótona (creciente, decreciente, estrictamente creciente y estrictamente decreciente). Este concepto, que podría aproximar a los estudiantes al concepto de derivada de una función real de variable real y sus aplicaciones, no suele desarrollarse en profundidad por los profesores y, como ya se dijo, por los libros de texto relativos a dicho curso.

En muchos casos, el tratamiento que hacen muchos docentes se resume en realizar un trabajo como el siguiente: Supóngase que se desea probar que la sucesión real de variable natural $(a_n) : a_n = \frac{1}{n+1}$ es estrictamente decreciente. Esto es, como se definirá más adelante, probar que $a_{n+1} < a_n \, \forall n,\ n \in \mathbb{N}$ entonces se procede a plantear la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{(n+1)+1} < \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \\ n+1 < n+2 &\Leftrightarrow \\ 1 < 2 & \end{aligned}$$

Como la última desigualdad es cierta, la primera lo es, y, por tanto, la sucesión $(a_n)$ efectivamente es decreciente en forma estricta.

Es claro que este procedimiento, por más válido que sea, limita las posibilidades de los tipos de sucesiones con las que se puede trabajar.

Es por todo lo expuesto antes que, en las próximas páginas, intentaremos, por un lado, definir conceptos básicos necesarios como el de sucesión real y operaciones con sucesiones reales (de las cuales hemos decidido excluir la composición debido a la necesaria exigencia de que una de las sucesiones tome únicamente valores naturales), para luego pasar a definir el concepto de sucesión monótona y un concepto central en la teoría a desarrollar que llamaremos *derivada discreta*.

Como el lector conocedor de un curso de Cálculo infinitesimal tradicional notará, las herramientas teóricas que aquí desarrollaremos son mínimas, pero no por ello muy potentes. Además, la ventaja que encontraremos, comparando con el desarrollo del concepto de derivada de una función real de variable real es que, en forma simultánea a que se desarrolla la definición y propiedades del concepto de derivada discreta, también podremos ir observando sus aplicaciones al estudio de la monotonía de una sucesión, algo que no sucede tradicionalmente en un curso de Cálculo diferencial típico.

Espero que las próximas páginas permitan introducir a sus estudiantes a través del fantástico mundo del cálculo con infinitesimales, pasando antes por el cálculo de las diferencias finitas.

# 2. La Derivada Discreta de una Sucesión Real

**Definición 2.1** Llamaremos *sucesión real* a toda función de dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

**Observación 2.1**

- Cuando sea necesario, denotaremos por $\mathbb{N}^*$ al conjunto $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.
- En general, llamaremos simplemente *sucesiones* a las *sucesiones reales*.
- A las sucesiones las representaremos por $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$, etc.
- A la imagen de un número natural $n$, a través de una sucesión $(a_n)$, la representaremos con $a_n$ y le llamaremos término $n$-ésimo o término enésimo.
- Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones cualesquiera, definimos las sucesiones suma, diferencia, producto y cociente de aquellas dos, respectivamente como:
  1. $(s_n) : s_n = a_n + b_n$
  2. $(d_n) : d_n = a_n - b_n$
  3. $(p_n) : p_n = a_n \cdot b_n$
  4. $(c_n) : c_n = \frac{a_n}{b_n}$ con $b_n \neq 0$ $\forall n,\ n \in \mathbb{N}$
- Llamaremos *representación gráfica* de la sucesión $(a_n)$ al conjunto de puntos de coordenadas $(n, a_n)$ con $n \in \mathbb{N}$.

**Ejemplo 2.1** *Representar gráficamente la sucesión* $(a_n)$ *siendo* $a_n = n^2 - 6n + 8$.

Comencemos realizando una *tabla de valores*:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 8 | 3 | 0 | $-1$ | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 | 48 |

Ahora representamos en un sistema cartesiano plano los puntos de coordenadas $(n, a_n)$ que surgen de la tabla anterior, como se observa en la Figura 1.

**Definición 2.2** Diremos que una sucesión $(a_n)$ es $\left\{\begin{array}{c}\text{monótona creciente}\\ \text{monótona creciente en sentido estricto}\\ \text{monótona decreciente}\\ \text{monótona decreciente en sentido estricto}\end{array}\right\}$

si $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} > a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \\ a_{n+1} < a_n \end{array}\right\}$ $\forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

**Observación 2.2**

- Cuando se cumpla una de las cuatro condiciones anteriores, diremos que la sucesión $(a_n)$ es *monótona*. En caso contrario, diremos que la sucesión $(a_n)$ no es monótona, como sucede con la sucesión del Ejemplo 2.1 ya que, por ejemplo, $a_3 = -1 < 0 = a_2$ pero $a_4 = 0 > -1 = a_3$.

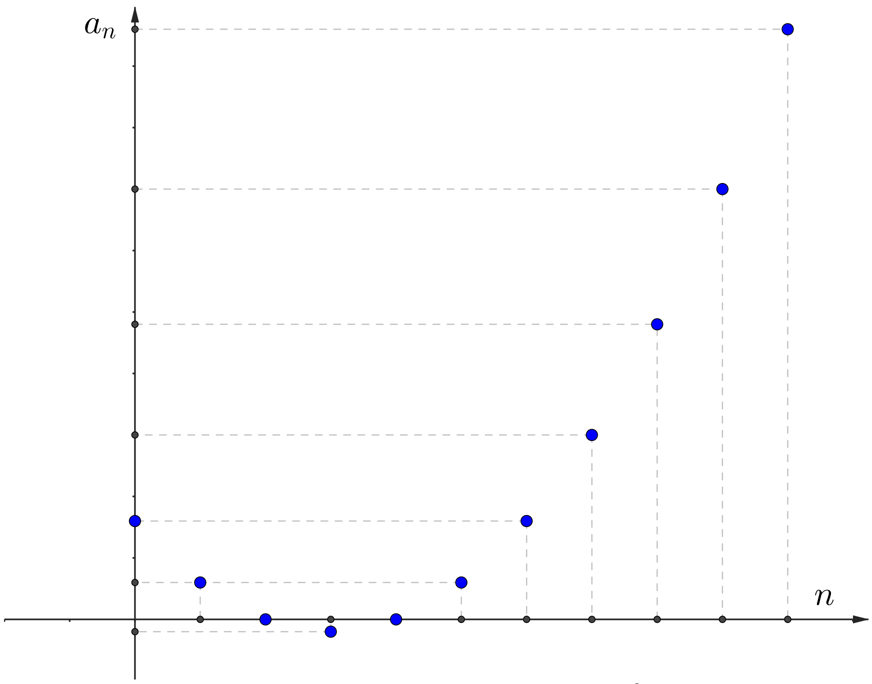



*Figura 1. Representación gráfica de* $(a_n)$ *siendo* $a_n = n^2 - 6n + 8$

- Cuando una sucesión $(a_n)$ sea monótona creciente y decreciente en forma simultánea, diremos que la misma es *constante*. Esto es, $a_{n+1} = a_n \; \forall n,\; n \in \mathbb{N}$ o, su equivalente, existe $k \in \mathbb{R}$ de modo que $a_n = k \; \forall n,\; n \in \mathbb{N}$.

**Ejemplo 2.2** *Representar gráficamente cada una de las sucesiones dadas a continuación por su término enésimo*:

1. $a_n = n^2 + 1$.
2. $b_n = 4 - n^2$.
3. $c_n = n^2 - n + 1$.
4. $d_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 5$.
5. $f_n = 3$.

Comenzamos realizando una tabla de valores para cada una de las sucesiones dadas:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 17 | 26 | 37 | 50 | 65 | 82 | 101 |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 4 | 3 | 0 | $-5$ | $-12$ | $-21$ | $-32$ | $-45$ | $-60$ | $-77$ | $-96$ |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | 1 | 1 | 3 | 7 | 13 | 21 | 31 | 43 | 57 | 73 | 91 |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | 5 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-7$ | $-25$ | $-61$ | $-121$ | $-211$ | $-337$ | $-505$ |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Ahora representamos gráficamente las distintas sucesiones, como se observa en la Figura 2.

Notemos lo siguiente:

- $a_1 > a_0$, $a_2 > a_1$, $a_3 > a_2$, etc., lo que nos motiva a conjeturar que la sucesión $(a_n)$ es **monótona creciente en sentido estricto**, lo cual podremos demostrar con las herramientas que desarrollaremos más adelante.
- $b_1 < b_0$, $b_2 < b_1$, $b_3 < b_2$, etc., lo que aparentemente muestra que la sucesión $(b_n)$ es **monótona decreciente en sentido estricto**.
- $c_1 = c_0$, $c_2 > c_1$, $c_3 > c_2$, $c_4 > c_3$, etc., lo que motiva a pensar en que la sucesión $(c_n)$ es **monótona creciente**, pero no en forma estricta.
- $d_1 < d_0$, $d_3 = d_2 = d_1$, $d_4 < d_3$, $d_5 < d_4$, $d_6 < d_5$, etc., por lo que pareciera ser que la sucesión $(d_n)$ es **monótona decreciente**, como podremos demostrar más adelante.
- $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = \ldots$, por lo que $(f_n)$ es **constante**. Esta sucesión es monótona creciente y también es monótona decreciente. Esto ocurre con cualquier sucesión constante.

**Definición 2.3** Sea $(a_n)$ una sucesión cualquiera, llamaremos *sucesión derivada discreta* (o simplemente *derivada discreta*) de la sucesión $(a_n)$ a la sucesión que anotaremos $(\Delta a_n)$ y que viene dada por

$$\Delta a_n \stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n$$

**Observación 2.3**

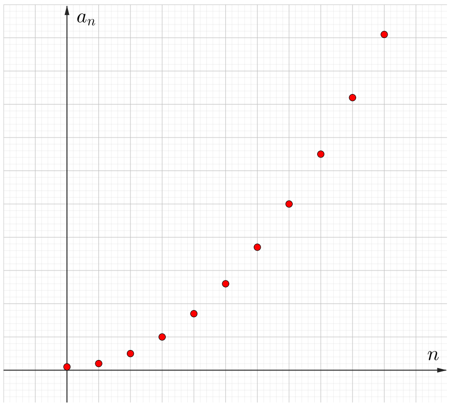
- Este concepto coincide con el de diferencia de una sucesión. Hemos optado por la expresión "derivada discreta" pues su signo nos permitirá decidir si una sucesión es monótona o no lo es (ver el Teorema 2.1).
- Es importante remarcar que la derivada discreta de una sucesión $(a_n)$ es otra sucesión $(\Delta a_n)$ cuyos términos $\Delta a_n$ representan la diferencia entre el término $(n+1)-$ésimo y el término $n-$ésimo de la sucesión $(a_n)$.

**Ejemplo 2.3** *Sea la sucesión $(a_n)$ dada por $a_n = n^2$, calcular el décimo término de la derivada discreta $(\Delta a_n)$ e interpretar gráficamente el resultado obtenido.*

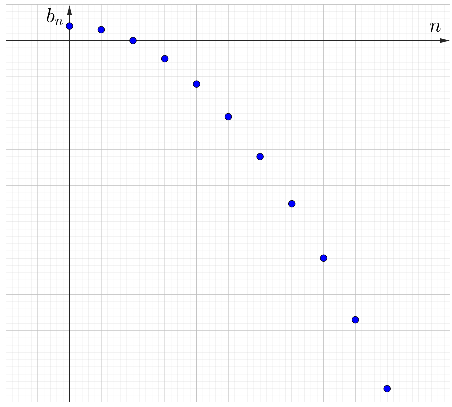
Por definición, el décimo término de la derivada discreta $(\Delta a_n)$ es la diferencia entre $a_{10+1}$ y $a_{10}$, o sea,

$$a_{11} - a_{10} = 11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$$

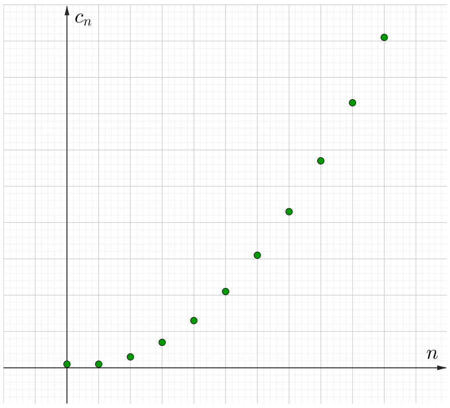
El resultado que acabamos de obtener lo podemos interpretar en la Figura 3, donde los puntos en color rojo pertenecen al gráfico de $(a_n)$ y el punto azul, de abscisa 10, pertenece al gráfico



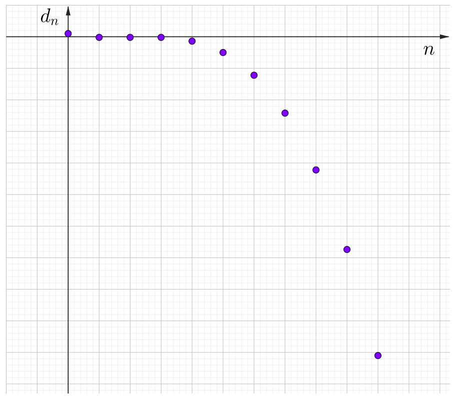

(a) $(a_n) : a_n = n^2 + 1$



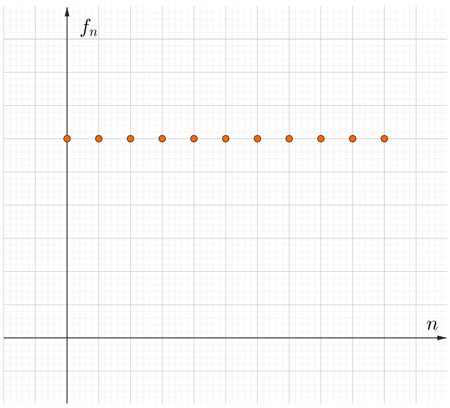

(b) $(b_n) : b_n = 4 - n^2$




(c) $(c_n) : c_n = n^2 - n + 1$




(d) $(d_n) : d_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 5$




(e) $(f_n) : f_n = 3$

*Figura 2. Representación gráfica de cada sucesión del Ejemplo 2.2*

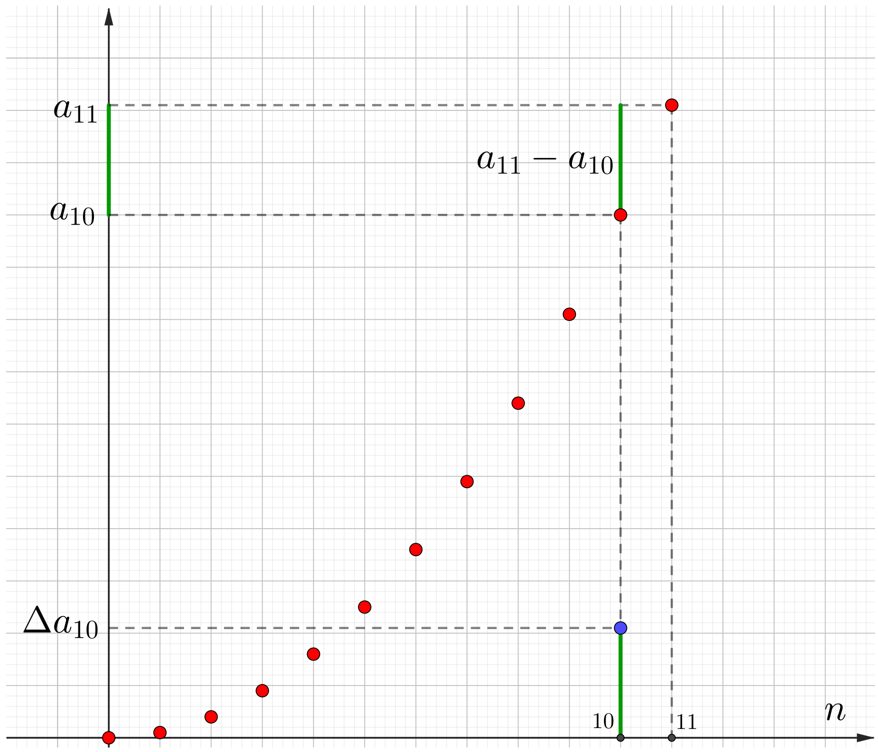



*Figura 3. Interpretación gráfica del resultado obtenido en el Ejemplo 2.3*

de $(\Delta a_n)$. Nótese los tres segmentos en color verde, todos de longitud 21 unidades.

**Teorema 2.1** Una sucesión real $(a_n)$ es $\left\{\begin{array}{c}\text{monótona creciente}\\ \text{monótona creciente en sentido estricto}\\ \text{monótona decreciente}\\ \text{monótona decreciente en sentido estricto}\end{array}\right\}$ si y sólo si $\left\{\begin{array}{l}\Delta a_n \geq 0\\ \Delta a_n > 0\\ \Delta a_n \leq 0\\ \Delta a_n < 0\end{array}\right\}$ $\forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

**Demostración**: Demostraremos el primer caso. Los restantes se prueban de forma análoga.

$(a_n)$ es monótona creciente $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n\ \forall n,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0\ \forall n,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Delta a_n \geq 0\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

**Observación 2.4** El teorema anterior nos indica que, para estudiar la monotonía de una sucesión, basta con analizar el signo de su derivada discreta. Es por ello que, a continuación, determinaremos la derivada discreta de algunas sucesiones particulares, estudiaremos el signo de algunas de ellas e interpretaremos gráficamente algunos de dichos resultados.

**Teorema 2.2** La derivada discreta de cada una de las sucesiones de la primera columna de la Tabla 1, son las que lucen en la segunda columna, respectivamente.

*Tabla 1. Derivada discreta de algunas sucesiones particulares*

| Sucesión $(a_n)$ dada por | Derivada discreta $(\Delta a_n)$ dada por |
|---|---|
| $a_n = k \quad (k \in \mathbb{R})$ | $\Delta a_n = 0$ |
| $a_n = n$ | $\Delta a_n = 1$ |
| $a_n = n^2$ | $\Delta a_n = 2n + 1$ |
| $a_n = n^3$ | $\Delta a_n = 3n^2 + 3n + 1$ |
| $a_n = \frac{1}{n+1}$ | $\Delta a_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ |
| $a_n = \mathrm{e}^n$ | $\Delta a_n = \mathrm{e}^n \cdot (e - 1)$ |
| $a_n = \ln(n+1)$ | $\Delta a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ |
| $a_n = (-1)^n$ | $\Delta a_n = -2 \cdot (-1)^n$ |
| $a_n = \sqrt{n}$ | $\Delta a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ |
| $a_n = An + B \quad (A \neq 0)$ | $\Delta a_n = A$ |
| $a_n = An^2 + Bn + C \quad (A \neq 0)$ | $\Delta a_n = 2An + (A + B)$ |
| $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D \quad (A \neq 0)$ | $\Delta a_n = 3An^2 + (3A + 2B)n + (A + B + C)$ |
| $a_n = \mathrm{sgn.}(n)$, es decir, signo de $n$ | $\Delta a_n = 1 - \mathrm{sgn.}(n)$ |

**Demostración:**

1.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= k - k \\ &= 0\end{aligned}$$

Este resultado nos indica que si una sucesión es constante, no existe incremento en el valor de sus términos.

2.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= (n+1) - n \\ &= 1\end{aligned}$$

Como $1 > 0$, la sucesión $(a_n) : a_n = n$ es monótona creciente en sentido estricto y términos consecutivos de la misma difieren siempre en 1 unidad.

3.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

Como $n \geq 0$, entonces $2n \geq 0$ por lo que $2n + 1 > 0 \, \forall n,\, n \in \mathbb{N}$. Luego, $(a_n) : a_n = n^2$ es monótona creciente en sentido estricto.

4.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= (n+1)^3 - n^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 \\ &= 3n^2 + 3n + 1\end{aligned}$$

Un análisis similar al anterior nos permite concluir que $(a_n) : a_n = n^3$ es monótona creciente en sentido estricto.

5.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= \frac{1}{(n+1)+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Aquí es fácil ver que $\Delta a_n < 0\,\forall n,\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $(a_n) : a_n = \frac{1}{n+1}$ es monótona decreciente en sentido estricto.

Interpretemos gráficamente el resultado anterior, como se puede apreciar en la Figura 4. Nótese que $\Delta a_n < 0\,\forall n,\, n \in \mathbb{N}$ pues la sucesión $(a_n)$ es estrictamente decreciente. Los puntos en color rojo pueden obtenerse a partir de los de color azul, como ya se indicó en la Figura 3.

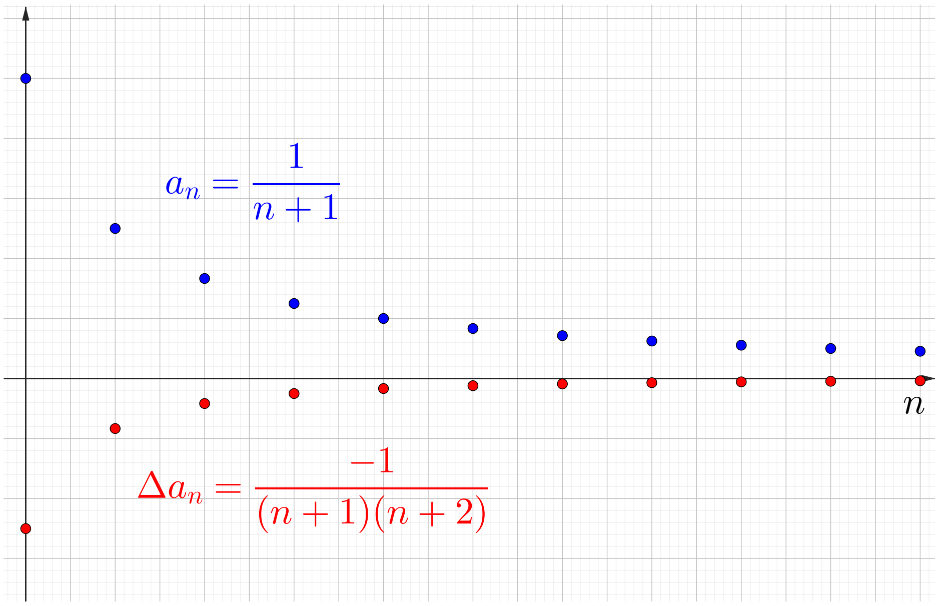



*Figura 4. Representación gráfica de $(a_n) : a_n = \frac{1}{n+1}$ y su derivada discreta $(\Delta a_n)$*

6.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= \mathrm{e}^{n+1} - \mathrm{e}^{n} \\ &= \mathrm{e}^{n} \cdot (e-1)\end{aligned}$$

Como $e > 1$, entonces es $e - 1 > 0$. Luego, por ser $\mathrm{e}^n > 0\,\forall n,\, n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(a_n) : a_n = \mathrm{e}^n$ es monótona creciente en sentido estricto.

7.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= \ln((n+1)+1) - \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Como $n \geq 0$, entonces es $n+1 > 0$ y también es $\frac{1}{n+1} > 0$. Luego, por ser $1 + \frac{1}{n+1} > 1$, es $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$. En conclusión, la sucesión $(a_n) : a_n = \ln(n+1)$ es monótona creciente en sentido estricto.

8.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= (-1)^{n+1} - (-1)^n \\
&= (-1)^n \cdot (-1-1) \\
&= -2 \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

Nótese que $\Delta a_n = -2$ si $n \in \mathbb{N}$, con $n$ par, y $\Delta a_n = 2$ si $n \in \mathbb{N}$, con $n$ impar. Esto nos indica no sólo que $(a_n)$ no es monótona, sino que $a_n$ y $a_{n+1}$ difieren en 2 unidades $\forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

9.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Es claro que $\Delta a_n > 0\, \forall n,\ n \in \mathbb{N}$. Luego, $(a_n) : a_n = \sqrt{n}$ es monótona creciente en sentido estricto.

10.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= A(n+1) + B - (An + B) \\
&= An + A + B - An - B \\
&= A
\end{aligned}$$

Este resultado nos indica que el signo de $A$ informará si $(a_n) : a_n = An + B$ es monótona creciente en sentido estricto (cuando $A > 0$) o si la misma es monótona decreciente en sentido estricto (en caso que $A < 0$).

11.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= A(n+1)^2 + B(n+1) + C - (An^2 + Bn + C) \\
&= A(n^2 + 2n + 1) + Bn + B + C - An^2 - Bn - C \\
&= An^2 + 2An + A + Bn + B + C - An^2 - Bn - C \\
&= 2An + (A + B)
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D - (An^3 + Bn^2 + Cn + D) \\
&= A(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + B(n^2 + 2n + 1) + Cn + C + D - An^3 - Bn^2 - Cn - D \\
&= An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B + Cn + C + D - An^3 - Bn^2 - Cn - D \\
&= 3An^2 + (3A + 2B)n + (A + B + C)
\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= \text{sgn.}(n+1) - \text{sgn.}(n) \\
&= 1 - \text{sgn.}(n)
\end{aligned}$$

Notemos aquí que $\Delta a_n \geq 0\, \forall n,\ n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión $(a_n) : a_n = \text{sgn.}(n)$ es monótona creciente, aunque no lo sea en forma estricta.

**Teorema 2.3** La derivada discreta de una suma, diferencia, producto o cociente de sucesiones viene dada respectivamente por:

A) $\Delta\left(a_n + b_n\right) = \Delta a_n + \Delta b_n$.

B) $\Delta\left(a_n - b_n\right) = \Delta a_n - \Delta b_n$.

C) $\Delta\left(a_n \cdot b_n\right) = \left(\Delta a_n\right) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot \left(\Delta b_n\right)$.

D) $\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{(\Delta a_n) \cdot b_n - a_n \cdot (\Delta b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}}$ con $b_n \neq 0\, \forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

**Demostración:**

A)

$$\begin{aligned}
\Delta\left(a_n + b_n\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(a_{n+1} + b_{n+1}\right) - \left(a_n + b_n\right) \\
&= \left(a_{n+1} - a_n\right) + \left(b_{n+1} - b_n\right) \\
&= \Delta a_n + \Delta b_n
\end{aligned}$$

Una consecuencia de esta propiedad, por ejemplo, es que si $(a_n)$ y $(b_n)$ son dos sucesiones monótonas crecientes, también lo será la sucesión suma de aquellas dos.

B)

$$\begin{aligned}
\Delta\left(a_n - b_n\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(a_{n+1} - b_{n+1}\right) - \left(a_n - b_n\right) \\
&= \left(a_{n+1} - a_n\right) - \left(b_{n+1} - b_n\right) \\
&= \Delta a_n - \Delta b_n
\end{aligned}$$

C)

$$\begin{aligned}\Delta\left(a_n \cdot b_n\right) &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n \\ &= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1} + a_n \cdot b_{n+1} \\ &= \left(a_{n+1} - a_n\right) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right) \\ &= \left(\Delta a_n\right) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot \left(\Delta b_n\right)\end{aligned}$$

Una forma equivalente:

$$\begin{aligned}\Delta\left(a_n \cdot b_n\right) &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n \\ &= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_n + a_{n+1} \cdot b_n \\ &= \left(a_{n+1} - a_n\right) \cdot b_n + a_{n+1} \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right) \\ &= \left(\Delta a_n\right) \cdot b_n + a_{n+1} \cdot \left(\Delta b_n\right)\end{aligned}$$

Caso particular donde uno de los factores es una sucesión constante ($a_n = k\,\forall n,\ n \in \mathbb{N}$ con $k \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\Delta\left(k \cdot b_n\right) &\overset{\text{def}}{=} k \cdot b_{n+1} - k \cdot b_n \\ &= k \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right) \\ &= k \cdot \Delta b_n\end{aligned}$$

D)

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &\overset{\text{def}}{=} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \\ &= \frac{a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1}}{b_n \cdot b_{n+1}} \\ &= \frac{a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n + a_n \cdot b_n}{b_n \cdot b_{n+1}} \\ &= \frac{\left(a_{n+1} - a_n\right) \cdot b_n - a_n \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right)}{b_n \cdot b_{n+1}} \\ &= \frac{\left(\Delta a_n\right) \cdot b_n - a_n \cdot \left(\Delta b_n\right)}{b_n \cdot b_{n+1}}\end{aligned}$$

Una forma equivalente:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n}\\ &= \frac{a_{n+1}\cdot b_n - a_n\cdot b_{n+1}}{b_n\cdot b_{n+1}}\\ &= \frac{a_{n+1}\cdot b_n - a_n\cdot b_{n+1} - a_{n+1}\cdot b_{n+1} + a_{n+1}\cdot b_{n+1}}{b_n\cdot b_{n+1}}\\ &= \frac{(a_{n+1}-a_n)\cdot b_{n+1} - a_{n+1}\cdot(b_{n+1}-b_n)}{b_n\cdot b_{n+1}}\\ &= \frac{(\Delta a_n)\cdot b_{n+1} - a_{n+1}\cdot(\Delta b_n)}{b_n\cdot b_{n+1}}\end{aligned}$$

**Observación 2.5** Nótese que, para los casos del producto y el cociente de sucesiones, hemos encontrado dos expresiones para las respectivas derivadas discretas. A priori se podría pensar que las mismas no son equivalentes, sin embargo lo son.

**Ejemplo 2.4** *Estudiar la monotonía de la sucesión* $(d_n)$ *tal que* $d_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 5$. *En caso de existencia, se deben indicar los términos de la sucesión que son iguales para valores de n consecutivos, y su valor.*

Utilizando los Teoremas 2.2 y 2.3 se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta d_n &= \Delta\left(-n^3+6n^2-11n+5\right)\\ &= \Delta\left(-n^3\right)+\Delta\left(6n^2\right)-\Delta\left(11n\right)+\Delta\left(5\right)\\ &= -\Delta\left(n^3\right)+6\Delta\left(n^2\right)-11\Delta\left(n\right)+\Delta(5)\\ &= -\left(3n^2+3n+1\right)+6\left(2n+1\right)-11\cdot 1+0\\ &= -3n^2-3n-1+12n+6-11\\ &= -3n^2+9n-6\end{aligned}$$

No es difícil encontrar que la expresión hallada para $\Delta d_n$ se anula cuando $n = 1$ o $n = 2$, por lo que

$$\Delta d_n = -3(n-1)(n-2)$$

Ahora notemos que:

- Si $n = 0$, entonces $\Delta d_n = -6 < 0$.
- Si $n = 1$ o $n = 2$, entonces $\Delta d_n = 0$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, entonces $\Delta d_n = \underbrace{-3}_{<0}\underbrace{(n-1)}_{>0}\underbrace{(n-2)}_{>0} < 0$

Luego, $\Delta d_n \leq 0\,\forall n,\ n \in \mathbb{N}$. Esto es, $(d_n)$ es monótona decreciente (**no** en forma estricta).

De que $\Delta d_n = 0$ cuando $n = 1$ se deduce que $d_{1+1} - d_1 = 0$, o sea, $d_1 = d_2$.

De que $\Delta d_n = 0$ cuando $n = 2$ se tiene que $d_{2+1} - d_2 = 0$, es decir, $d_2 = d_3$.

En resumen, $d_1 = d_2 = d_3 = -1$ (este último valor puede obtenerse calculando $d_1$).

# 3. Ejercicios

1. Estudiar la monotonía de cada una de las sucesiones reales de variable natural $(a_n)$ dadas a continuación por su término $n-$ésimo. En caso de existencia, se deben indicar los términos de $(a_n)$ que son iguales para valores de $n$ consecutivos, y su valor.

   *a*) $a_n = 2n - 6$.
   *b*) $a_n = 5 - n$.
   *c*) $a_n = 9 - n^2$.
   *d*) $a_n = 3n^2 - 3n + 3$.
   *e*) $a_n = 192 - 107n + 18n^2 - n^3$.
   *f*) $a_n = 506n - 39n^2 + n^3$.
   *g*) $a_n = \frac{1-n}{n+2}$.
   *h*) $a_n = \frac{4n-8}{n+4}$.

2. *a*) Considera la siguiente tabla:

*Tabla 2. Resultados para resolver la parte a) del ejercicio* 2.

| | |
|---|---|
| $a_n = n^{(2)} = n(n-1)$ | $\Delta a_n = 2n$ |
| $a_n = n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$ | $\Delta a_n = 3n^{(2)}$ |
| $a_n = n^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)$ | $\Delta a_n = 4n^{(3)}$ |
| | $n^2 = n^{(2)} + n$ |
| | $n^3 = n^{(3)} + 3n^{(2)} + n$ |
| | $n^4 = n^{(4)} + 6n^{(3)} + 7n^{(2)} + n$ |

Los tres primeros resultados son similares a los que verán en derivadas de funciones reales de variable real; los dos que le siguen sirven para verificar los resultados de los casos 3 y 4 de la Tabla 1 y el último es útil para calcular $\Delta n^4$.

Justifica la segunda columna y generaliza los tres primeros resultados.

*b*) Estudiar la monotonía de cada una de las sucesiones reales de variable natural $(a_n)$ dadas a continuación por su término enésimo. En caso de existencia, se deben indicar los términos de $(a_n)$ que son iguales para valores de $n$ consecutivos, y su valor.

1) $a_n = n^4 - 30n^3 + 263n^2 - 234n$.
2) $a_n = 578n - 657n^2 + 82n^3 - 3n^4$.

3. En la Figura 5 se da la representación gráfica de una sucesión $(a_n)$. Representa gráficamente en el mismo sistema cartesiano la derivada discreta de dicha sucesión. ¿Es $(a_n)$ monótona? Justifica tu respuesta.

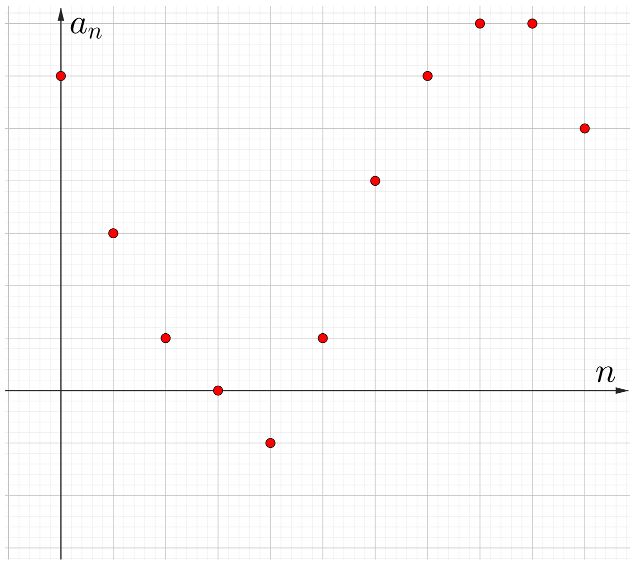



*Figura 5. Representación gráfica de $(a_n)$*

4. En la Figura 6 se da la representación gráfica de la derivada discreta de una sucesión $(a_n)$. Representa gráficamente en el mismo sistema cartesiano a dicha sucesión. ¿Es $(a_n)$ monótona? Justifica tu respuesta. Nótese que el punto en color rojo pertenece a la representación gráfica de $(a_n)$.

5. Informar el término enésimo de una sucesión polinómica de grado 3 que sea monótona decreciente y tal que $a_7 = a_8 = a_9 = 10$.

6. Estudiar la monotonía de la sucesión $(a_n)$ siendo:

*a*) $a_n = n \cdot \mathrm{e}^n$.

*b*) $a_n = \frac{1}{\mathrm{e}^n}$.

*c*) $a_n = \frac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}$.

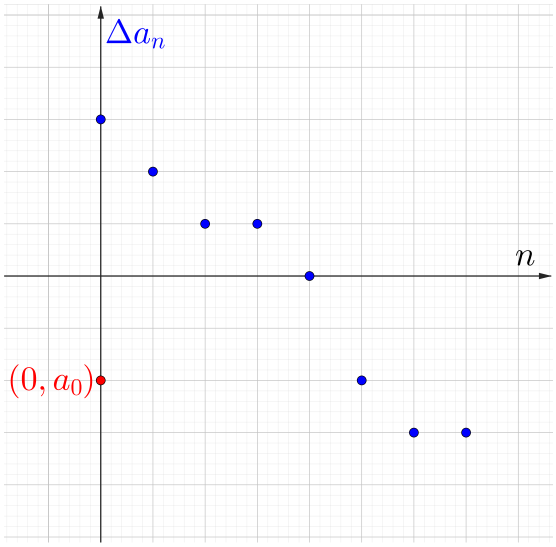



*Figura 6. Representación gráfica de* $(\Delta a_n)$

# 4. Conclusiones

En Uruguay, no existe evidencia de alguna experiencia docente de implementación del concepto de derivada discreta que se abordó a lo largo del presente artículo, a nivel de Bachillerato. Es por ello que el presente trabajo es una invitación a los docentes para que trabajen dicho concepto con la intención de evaluar si dicha experiencia previa al abordaje de un curso de cálculo diferencial tradicional, redunda en una mejora de los aprendizajes en matemática de sus estudiantes.

Si bien existen muy pocos intentos a nivel internacional para el tratamiento del concepto de derivada discreta, los mismos se centran en aspectos más técnicos que didácticos, y no hay tampoco indicadores de los logros que los estudiantes de un curso de cálculo infinitesimal clásico puedan haber adquirido a través de la introducción del concepto de derivada discreta que nos ha convocado en el presente material.

# Referencias

[1] CATONE, C., *Bringing Calculus into Discrete Math via the Discrete Derivative*, 2019, `https://doi.org/10.1080/07468342.2019.1530553`

[2] FERNÁNDEZ, J., *Matemática 2 - 2º bachillerato diversificado - Diversificación científica*, 1ª Edición. Editorial Contexto, Montevideo, Uruguay, 2019.

[3] FERNÁNDEZ, W., *Matemática II de Bachillerato 2º Año Diversificación Científica*, 3ª Edición. Ediciones del Palacio, Montevideo, Uruguay, 2015.

[4] GLEICH, D., *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums*, 2005, `https://www.cs.purdue.edu/homes/dgleich/publications/Gleich%202005%20-%20finite%20calculus.pdf`

[5] HERRERA, D., *Discrete Calculus and Finite Sums*, 2016, https://princeton.learningu.org/download/bc7e982a-7974-459c-8286-c201d2236718/M352_Discrete%20Calculus%20and%20Finite%20Sums.pdf

[6] LARSON, R., *Cálculo 1 De una variable*, 9ª Edición. McGrawHill, México, 2010.

[7] LARSON, R., *Precálculo*, 8ª Edición. Cengage Learning, México, 2012.

[8] STEWART, J., *Cálculo Trascendentes tempranas*, 8ª Edición. Cengage Learning, México, 2018.

[9] STEWART, J., *Precálculo*, 5ª Edición. Cengage Learning, México, 2007.

[10] THOMAS, G., *Cálculo Una variable*, 12ª Edición. Pearson, México, 2010.

## Agradecimientos

*A Julia y Emilia: mis hijas, los dos motores que hacen que mi vida tome vuelo día a día.*

*Al excelentísimo profesor Jorge Moretti por sus invalorables apreciaciones y sugerencias tanto en aspectos técnicos como didácticos.*

**Sobre el autor:**
*Nombre:* Duberly González Molinari
*Correo electrónico:* dugonzalez@ces.edu.uy
*Institución:* Inspección en Matemática de la Dirección General de Educación Secundaria de la República Oriental del Uruguay.

Experiencias Docentes

# Application of Fractal Geometry in the construction of antennas: an assessment of activities in context by engineering students

Victoria Artigue, Joel Gak, María de los
Ángeles Fanaro, Gabriela Mombrú, José Job Flores-Godoy

Revista de Investigación

Volumen XII, Número 1, pp. 057–070, ISSN 2174-0410
Recepción: 23 May'22; Aceptación: 30 Jun'22

1 de abril de 2023

**Abstract**

This paper presents the students' perceptions about the implementation of a teaching proposal, based on the application of mathematics, in particular linear algebra applied to fractal antennas. The didactic interest in Fractal Geometry is recent, constituting a relevant problem, due to its enormous application possibilities. This geometry, very different from the Euclidean geometry, has not yet been widely addressed in Mathematics Education, although it is proposed in the curricula. We applied a 20-item survey to 26 students of a first year of engineering career, to gather their opinions. It was found that engineering students increased their motivation and took advantage of the potential of the proposal, by experiencing mathematics in engineering situations such as fractal antennas.

**Keywords:** mathematics in context, linear algebra, Fractal Geometry, multi-band antennas, engineering students.

## 1. Introduction

This work is part of a teaching and learning model that is being promoted by the Universidad Católica del Uruguay, which involves the development of transversal abilities in students through interdisciplinary activities. One of the thematic axes in the so-called Strategic Plan 2019-2021 is: "Excellence in interdisciplinary and transversal learning, facing a disruptive world" (p.3), within which the priority objective is to achieve transversal curricular integration of the different programs of the courses.

Traditionally, mathematics teachers in engineering programs tend~~s~~ to transmit knowledge with calculations that already exist in textbooks, solving problems with the students that know~~s~~ and repeat~~s~~ the shown method even if there is no creation on their part (Mendible, 2007). It should be noted that, in the training of future engineers, the study of formal mathematics is not an objective in itself, although they need to mathematize problems. This generates a cognitive conflict in the student who, in general, faced mathematics and engineering separately during his career (Camarena-Gallardo, 2009).

In this sense, it was proposed to teach some elements of Fractal Geometry (from now on FG) in two different subjects courses for university Engineers: in an introductory research project for the Industrial Engineering career, and in a linear algebra course for the second year of various Engineering careers (computer science, electronics, food, and audiovisual) at the Faculty of Engineering and Technology. In both cases, an activity was proposed that was developed with a different modality in each case, and consisted of the design, implementation and operation analysis of an antenna based on the fractal Sierpinski triangle. The design of the activity was carried out by professors from the Engineering Department and Exact and Natural Sciences Department.

In this work, the complete teaching proposal is presented, emphasizing those activities related to linear algebra, and the perception of students when addressing cross-curricular integration in a mathematics course is analyzed.

## 2. Framework: Math in context

This work focuses on the teaching-learning processes that occur when students face mathematics through its applications. This requires the development of an ability known as mathematical modelling, that is the creation or use of mathematical models when solving problems in context (Blum & Niss, 1991).

One of the educational objectives for the engineering students is to provide them with conceptual and functional tools that helps incorporating mathematical modeling as a cyclical process when solving an application problem (Mendible, 2007). An applied problem in mathematics is framed in a situation or context of the real world, as well as the questions that links mathematical concepts with said situation (Blum, et al., 1991). The implementation of this type of problems not only develops mathematical and modeling skills, but also generates greater interest in the subject and promotes diversified thinking in students (Alsina, 2007).

The theory called "Mathematics in the Sciences Context", is based on three main assumptions: mathematics is a tool in science and an educational subject, mathematics has a function specific to each level of education, and knowledge must be considered integrated (not fragmented) (Camarena-Gallardo P, 2009). Regarding the student's own activity, the objective is for them to be able to use mathematical knowledge in other areas that require it in their professional field.

One of the focuses of electronics has been miniaturization (Moore, 1965), and antennas have not been the exception. Effort is being devoted to making them small and to operate at different frequencies. Its structure must therefore include different sizes, and it must make efficient use of the space it occupies. It is pertinent to think that the antennas designed with FG can contemplate these characteristics: be multi-band (due to the self-similarity property) and very small (infinite lengths in finite areas).

FG was born in a context that gives great importance to geometry and visual mathematical analysis of real and concrete situations (measuring the shores of a country), in particular it began by studying aspects of nature. In other words, FG is naturally gifted for this approach to mathematics in the context of science.

## 2.1 Why Fractal Geometry in linear algebra?

In the field of mathematics teaching, FG is recognized for its potential to study and/or recover many mathematical notions, and for the great number of applications it has. However, an analysis of the researches that propose its teaching in high school and first years of university (Artigue, Fanaro & Lacués, 2021), showed that the way in which this geometry is taught is by making reference to the visual, and its aesthetic aspect. This way offers very few possibilities for a student to interact with these mathematical objects, without going further than calculating areas, perimeters, and fractal dimensions in very specific cases. Thus, for example, certain geometric shapes obtained in a fixed number of iterations are presented and introduced as a "fractal" without establishing that the fractal is the limit figure of that iteration.

FG studies geometric objects that are the product of iterating a procedure, either geometric or algebraic infinitely. There was (and still is) much controversy within mathematics itself about how to define these objects. The term fractal, from the Latin "fractus" (adjective meaning interrupted or irregular) was introduced by the mathematician Benoit B. Mandelbrot in 1975 (Dyson, 1978), who observed that nature is so complex that the Euclidean Geometry (EG) is not enough to study it, as in the case of natural forms such as a cloud, a mountain, or the coasts of countries.

In this way, FG allows us to describe a large part of the world around us, establishing mathematical models to study irregular and fragmented forms of nature, considering them as complex structures based on the repetition of simpler structures. There are several disciplinary fields that uses FG: medicine, geology, physics, technology, among others, and, in all of them, FG explains issues that EG does not reach (Fusi & Sgreccia, 2020).

In accordance with the strategic plan mentioned above and with the Syllabus of the linear algebra course taught in the different careers offered at the university, it is proposed to use the potential of FG to study fractal antennas.

An interesting starting point is to consider that fractals are figures, whose main characteristics are self-similarity and the intervention of two fundamental parameters that define the other key concept, that of fractal dimension: the number of parts into which the object is divided and the size of those parts (Castilblanco Hernández & Montana Páez, 2018). Thus, it is assumed that there are two elements that characterize the FG: self-similarity and dimension, in this case called fractal dimension.

The property of self-similarity is not fulfilled in the same way in any fractal, there are different types of self-similarity according to the number of points in which the presence of identical copies of itself can be appreciated (Artigue, et. al, 2021). But, if one is looking for a mathematical formulation of self-similarity that can be addressed in a linear algebra course, it is necessary to refer to the concept of similarity of EG to study those fractals that possess self-similarity of the strict type.

A similarity transformation in the plane is defined as a function of the plane in the plane obtained by composing a homothety with an isometry (rotation, translation or symmetry); these geometric transformations are studied in the linear algebra course from a matrix point of view and as linear transformations as well. For the study of fractals, these transformations must be contractive with a homothety ratio between zero and one, so that when applied they reduce the distance between any two points of the image figure.

These transformations must be applied iteratively, constituting a System of Iterated Functions (SIF). With the SIF mathematicians achieved a unity in such diversity, defining geometric transformations of the plane in the plane through affine transformations in a matrix form (Rubiano, 2009) using linear algebra resources.

A SIF must account for the transformations that are applied to the original figure called seed. It must provide the necessary information regarding the number of transformations that compose it and their characteristics, such as: the homothety ratio or contractivity ratio, the relative positions with respect to the seed, and their translation or rotation, the order in which they are applied.

Regardless of the original figure or seed, the limiting behavior of the SIF guarantees that each fractal algorithm gives rise to one limiting figure, and only one (Pérez Medina, 2007). Therefore, each set formed by similarity transformations defines a fractal image called SFI attractor, which always exists and is unique (Moreno-Marin, 2002). This aspect endows fractals with the property of strict self-similarity (Pérez Medina, 2007).

In the linear algebra course and in the classic texts of this subject, the concept of dimension is traditionally defined as the number of vectors that a basis of a certain Vector Space presents (Grossman & Flores-Godoy, 2019), that is, the extension of the concept of Euclidean dimension. In the case of the concept of dimension referring to fractal figures, an elementary construction for the self-similarity dimension, applicable to fractals with strict self-similarity, is the following: consider a straight line, a square and a cube (figures with Euclidean dimension one, two and three respectively). Each of the sides of the three figures is divided by a random number, take for example by four, i.e. in ratio r=1/4. Let N be the function that counts the number of congruent subsets as a function of 1/r when performing this division. For example, in the line N(4)=4 segments, or 4; in the square N(4)=16, or $4^2$, and in the cube N(4)=64, or $4^3$. The same construction can be performed if we change the ratio, in general, if r=1/k, we will obtain in each object, N(k)= $k^1$ segments, N(k)= $k^2$ squares and N(k)= $k^3$ cubes (Peitgen, Jürgens & Saupe, 2004) (Figure 1).

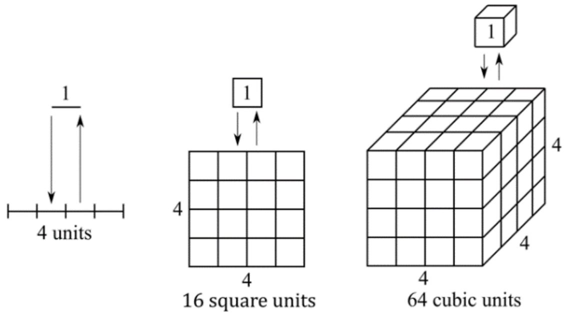



*Figure 1. Self-similarity dimension with reason r=1/4. Source: Peitgen, et., al.*

Considering the above, and from the knowledge we have of the Euclidean dimension, it can be established that the self-similarity dimension is the power d to which the similarity factor *k* must be raised. Starting from this idea, it is postulated that it is also valid to apply it for example, in the Koch Curve since it possesses strict self-similarity and therefore can be divided into congruent figures. Thus, if $r$=1/3, then N(3)=4, and therefore $4=3^d$ from which it follows that $d=log4/log3$ (Binimelis, 2017).

Although this reconstruction is the most used when teaching fractals, the proposal adopted a definition that does not require support in the EG and that involves the number of congruent parts into which each iteration of a fractal can be divided, and the similarity factor of each of these parts with the seed (Artigue, et. al, 2021).

# 3. The proposed activities and their implementation with linear algebra students

The linear algebra course developed in 2021 had a duration of one curricular semester (4 months), with distance modality due to the COVID-19 pandemic. It included a group laboratory practice to build a fractal antenna. The total number of students who participated was 26. Throughout the course, activities related to the FG that were proposed, are summarized in Table 1.

*Table 1. Teaching activities*

| Name of the activity | Instruction | Goal |
|---|---|---|
| 1. Videos about fractal antennas | Study a video about fractal antennas and identify their main advantages. | Introduce the mathematical concept of fractal and its characteristic properties. |
| 2. Mathigon | Interact with the Mathigon website and carry out all the activities that are proposed in the book. | |
| 3. Construction in GeoGebra | Design in GeoGebra the fourth iteration of the Cantor Set and Sierpinski Carpet fractals. | Identify the geometric transformations necessary for the construction of fractals. Determine these transformations in matrix form. Use the command ApplyMatrix in GeoGebra. |

| | | |
|---|---|---|
| 4. Self-similarity and Dimension | Use the definition proposed in the course notes of strict self-similarity and fractal dimension | Mathematically justify the strict self-similarity and the dimension of a fractal. |
| 5. Design of a fractal antenna | Design in GeoGebra a fractal antenna based on the Sierpinski triangle given certain parameters. | Use geometric transformations, ApplyMatrix command or create new tool to design in GeoGebra a fractal antenna based on the Sierpinski triangle. |
| 6. Construction of a fractal antenna | Build the antenna in a printed circuit on a copper plate. | |
| 7. Study of the behavior of the built antenna | Use software-defined radios to analyze antenna behavior | Measure the characteristics of the designed antennas by using software defined radios (SDR) available in the Engineering Department. |

The third activity was proposed after having dealt with matrix operations. Worked with matrix transformations, associating the geometric transformation and the corresponding matrix. The MatrixApply command in GeoGebra was used in some cases, in others the possibility of creating a "new tool". This provided the kick-off to determine the corresponding SIF for the Sierpinski triangle (Figure 2).

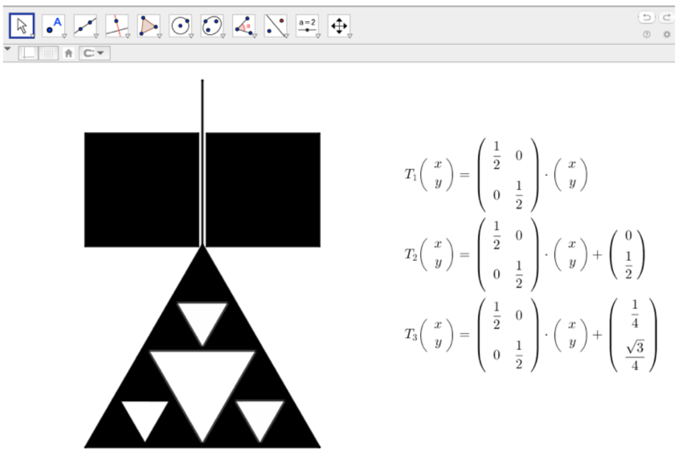



*Figure 2. GeoGebra design of the antenna based on the Sierpinski triangle, production made by a student.*

The sixth activity is based on the design and implementation of fractal antennas for UHF band, using the Sierpinski triangle (Sandoval & Vire, 2008). Although the size of the antenna is specified, it was modified and adjusted to the size of the copper substrate available in the electronics laboratory (10cm by 10cm), once the design was ready and the scales were verified, proceeded to the creation of the antenna. For this it was necessary to have the specific materials, which were: a plate, scissors, markers, copper board, acetate sheet and ferric acid. With these materials, the design was printed on the acetate sheet to pass through heat with iron to the copper plate (homemade sublimation process). Markers were used to re-mark the design in case the transfer had any details. Next the copper board was placed in a container with Ferric acid to remove the areas of copper that were not part of the antenna. The antenna connector was assembled with a numeric milling machine, in order to make the necessaries holes, then the connector was welded with tin to achieve electrical connection (Figure 3 shows the procedure performed by one of the groups).

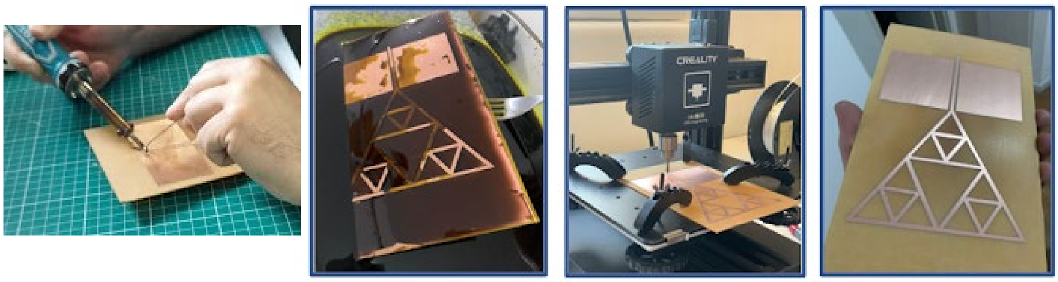


*Figure 3. Antenna constructor procedure by students.*

As last activities, the implemented antenna was measured using a HackRF software defined radio (Great Scott Gadgets) (Figure 4). The actual results were far from the expected most likely because of the rudimentary way the antennas were built. This is not an issue, this is not an Applied Electromagnetic or Antennas Design course, is just an excuse in the algebra course in order to achieve the predefined learning result or abilities.

*Figure 4. Experimental setup using HackRF software.*

## 4. Methodology

The objective of this work is to analyze the perception of the potentiality of the proposal to learn FG in a transversal way with the construction of antennas, by students of various engineering careers. To achieve this objective, the following question is formulated:

Is the mathematical-didactic potentiality of the proposal on FG perceived and developed by engineering students of linear algebra course?

Understanding the didactic-mathematical potentiality of the proposal as the possibility of:

- contributing to learning the concepts of self-similarity and dimension, as well as in the mathematical description of a fractal,

- positively valuing the use of technological tools such as applets, GeoGebra, videos and interactive sites among others,

- generate interest in the study of mathematics and, positively, appreciate the interaction of mathematics with situations specific to their training as engineers.

Within the evaluation of the linear algebra course corresponding to first-year engineering careers, a questionnaire was elaborated for the assessment of 26 students, who answered it at the end of the implementation of the proposal. At the beginning of the questionnaire, two questions were posed asking the students to evaluate the course, selecting one option (from bad to excellent) and justifying their selection. Then a set of statements were proposed for which each student had to rate with a Likert scale (Johns R., 2010) of four levels of agreement: Strongly Disagree (1), Disagree (2), Agree (3) and Strongly Agree (4). The questionnaire has paired items, one expressed in a positive sense and the other in a negative sense, asking about the same aspect.

## 5. Results

A descriptive and qualitative analysis of the responses to the general course evaluation questions, indicates that the course was evaluated as very good (50%) to excellent (50%). The assessment of the activities was for 85% of the students as interesting and very interesting. Among the aspects of the proposal that stood out the most, they mentioned collaborative work; the application of mathematics in fractal antennas; the use of software; the dynamism and laboratory practice; and fractals as something different in the mathematics class. Some student comments in the first course overview questions that exemplify these statements are as follows:

E1: "I found the topic of fractals very interesting, especially being able to apply it to concrete cases, and the same with matrices. Also, for abstract concepts like dimension, I feel that interactive activities like the Mathigon book helped a lot. It was also great to do the antenna, and it was a lot of fun when we dissolved an aluminum pan. I really enjoyed doing a project like this instead of a classic exam. I feel like I learned a lot and enjoyed the process, it wasn't a stressful closure like it usually is in other subjects."

E2: "I found the activities interesting and specifically the final assignment, as it takes us out of our comfort zone and participate in an activity that involves several areas and practical work which is entertaining."

E3: "I think the fractal topic was a good choice because it broke away from conventional math courses and thus was fun and more enjoyable."

Regarding the possibility presented by the proposal to contribute to the learning of the concepts of self-similarity and dimension and the description of a fractal, the results are encouraging. Although 69% of the students recognized some difficulty in constructing a fractal using elements of linear algebra (Q7), 77% of the students maintained that the definition of strict self-similarity presented facilitated their understanding of fractal dimension (Q4). In turn, 69% of the students stated that understanding that the fractal dimension can be a non-integer number is not so difficult (Q6). Finally, 81% of the students recognized the importance of their knowledge of basic geometry in explaining the construction of some fractals (Q3).

In the assessment of the use of the technological tools, almost all students (96%) indicated that the interactive materials helped in understanding the characteristics of fractals (Q1), although for slightly less than half of the students (46\%) the necessary knowledge of GeoGebra represented some difficulty (Q2). Despite this obstacle, 73% admitted that using GeoGebra was rewarding in constructing a particular iteration of a fractal (Q5).

As for the possibility of generating interest in the study of mathematics, 85% consider that studying fractals made them think about new issues, such as infinite processes, patterns or operations that repeat indefinitely (Q9). Almost all (92%) accept that fractals represent current mathematics with cutting edge technological applications (Q12), while 69% disagree with the idea that mathematics is too abstract and without applications (Q13).

Regarding the study of mathematics in context, almost all students (92%) positively valued the incorporation of fractal antennas in the course (Q16). More than half of them (62%) recognized that learning about fractals has a lot to do with their professional training (Q10). Thus 85% expressed that they would like to know more about fractals and their uses in other areas (Q11). Close to 73% agreed that studying mathematics in context represents an aid to their study (Q14). Almost 73% disagreed that the construction of the antenna was difficult even though it was done in a group (Q17), and 92% expressed that the collaborative work helped to make the construction of the antenna an easy task (Q18). Almost all students (96%) expressed excitement when they saw that the antenna worked (Q19), and the same percentage agreed with the importance of incorporating in-context activities in mathematics courses to strengthen skills for future engineers (Q20).

## 5.1 Quantitative analysis

Students Likert scores (R. Johns, 2010) per question item were determined. The internal precision of the sample was tested using Cronbach's alpha coefficient (Bartolucci F. et al., 2015), obtaining a value of $\propto = 0.827$. For each question, we formulated the following null hypothesis:

- H0: Engineering students of a linear algebra course did not perceive or develop the mathematical-didactic potentiality of the proposal on FG, since their mean has a score of 2.
- H1: Engineering students of a linear algebra course did perceive and develop the mathematical-didactic potentiality of the proposal on FG, since their mean has a score greater than 2.

A one-sided hypothesis contrast test was performed for each question, establishing a confidence level of 0.1% ($\propto=0.001$). The analysis was performed with the statistics software SPSS (IBM Corp) as presented in Table 2. The values presented show that all the hypotheses were rejected at a significance level of $p<0.001$. This allows us to conclude that the proposal was very well accepted for this population of engineering students, since scores of two or three (agreement and total agreement in the positive valuation statements) were obtained.

*Table 2. Hypothesis Contrast Test Per Item.*

**One-Sample T Test**

Test value = 2

| | t | df | Significance P-value One-Tailed | Significance P-value Two-Tailed | Difference in means | 99% Confidence Interval of the Differences Lower | 99% Confidence Interval of the Differences Upper |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q1 | 14,423 | 25 | <,001 | <,001 | 1,615 | 1,30 | 1,93 |
| Q2 | 3,638 | 25 | <,001 | ,001 | ,577 | ,13 | 1,02 |
| Q3 | 7,994 | 25 | <,001 | <,001 | 1,115 | ,73 | 1,50 |
| Q4 | 6,374 | 25 | <,001 | <,001 | 1,000 | ,56 | 1,44 |
| Q5 | 5,436 | 25 | <,001 | <,001 | 1,000 | ,49 | 1,51 |
| Q6 | 3,942 | 25 | <,001 | <,001 | ,654 | ,19 | 1,12 |
| Q7 | 2,004 | 25 | ,028 | ,056 | ,231 | -,09 | ,55 |
| Q8 | 6,429 | 25 | <,001 | <,001 | 1,038 | ,59 | 1,49 |
| Q9 | 6,791 | 25 | <,001 | <,001 | 1,192 | ,70 | 1,68 |
| Q10 | 3,682 | 25 | <,001 | ,001 | ,615 | ,15 | 1,08 |
| Q11 | 8,719 | 25 | <,001 | <,001 | 1,154 | ,78 | 1,52 |
| Q12 | 10,916 | 25 | <,001 | <,001 | 1,346 | 1,00 | 1,69 |
| Q13 | 5,204 | 25 | <,001 | <,001 | 1,000 | ,46 | 1,54 |
| Q14 | 6,845 | 25 | <,001 | <,001 | 1,038 | ,62 | 1,46 |
| Q15 | 5,354 | 25 | <,001 | <,001 | ,962 | ,46 | 1,46 |
| Q16 | 10,718 | 25 | <,001 | <,001 | 1,269 | ,94 | 1,60 |
| Q17 | 6,845 | 25 | <,001 | <,001 | 1,038 | ,62 | 1,46 |
| Q18 | 12,127 | 25 | <,001 | <,001 | 1,538 | 1,18 | 1,89 |
| Q19 | 12,559 | 25 | <,001 | <,001 | 1,423 | 1,11 | 1,74 |
| Q20 | 14,423 | 25 | <,001 | <,001 | 1,615 | 1,30 | 1,93 |

Then, the Likert score per student was measured considering the 20 survey questions. Therefore, in this case the Likert scale was in the range of 20 (strongly disagree with all items) - 80 (strongly agree with all items), representing the distribution of the students' score according to the Likert scale, with a mean value of $\mu$=61.42 and standard deviation of $\sigma$=7.34. Figure 4 shows the score histogram, where each bar contains the number of students who obtained the same score, where it can be noted that out of 26 students, 18 (70%) scored in the interval [54.076; 68.764] ([$\mu$-$\sigma$, $\mu$ +$\sigma$]), and a total of 21 students (81%) between 54 and 73 points in total on the Likert scale, indicating that their assessment about the potentiality of the proposal was high.

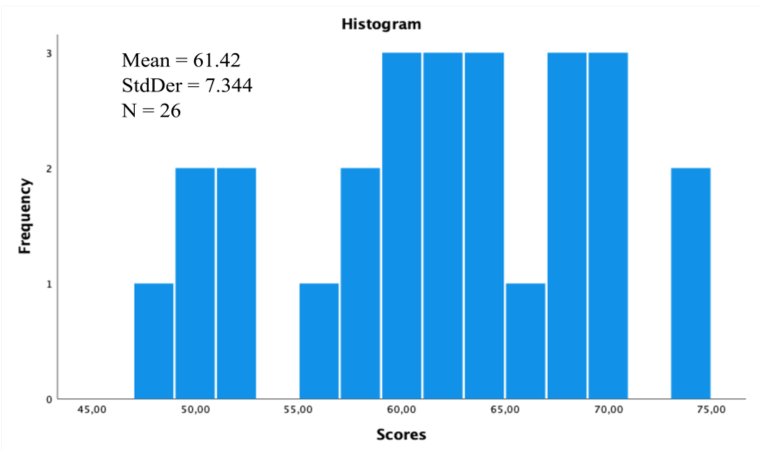



*Figure 5. Distribution of the number of students according to the total score in the Likert Scale questionnaire.*

## 6. Conclusions

The objective of this work was to know the assessment of engineering students of an interdisciplinary teaching proposal between mathematics and telecommunications. The focus of the proposal was the design, implementation and analysis of the operation of an antenna based on a known fractal object, involving professors from the Engineering Department and Natural Sciences Department. After implementing the proposal, students responded anonymously to a questionnaire that surveyed the extent to which they appreciated the didactic-mathematical potentiality of the proposal in their training as future engineers.

The analysis of the questionnaire indicates a very good acceptance of the teaching proposal on essential aspects of FG, since the students were enthusiastic about the activities with the software and the construction of the antenna. This offers an encouraging outlook regarding the possibilities that a multidisciplinary teaching will be well accepted by the students and will have a positive impact on their learning and their appreciation of Mathematics as a tool for modeling situations typical of their field of action as engineers.

Although these results encourage revising the proposal and making some changes involving the use of more sophisticated and specialized computer tools, such as the use of Phyton, which students at this level are familiar with, there are still some challenges for further research. For example, to design the greatest possible number of thematic units of the subject linear algebra, seeking to teach mathematics from a more genuine sense, which is to model engineering situations.

## 7. Acknowledgements

This paper was supported by the Vicerrectoria de Investigación e Innovación at Universidad Católica del Uruguay, with its program "Students approach to research".

## References

[1] ALSINA, Claudi. *Teaching Applications and Modelling at Tertiary Level*, pp. 469–474, Boston, MA: Springer US, 2007, Available: https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

[2] ARTIGUE, Victoria, FANARO, María de los Ángeles & LACUES, Eduardo. *Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría fractal en la escuela secundaria*, Pensamiento Matemático, vol. 11, no. 2, pp. 75–92, 2021.

[3] BARTOLUCCI, F., BACCI, D. & GNALDI, M. *Statistical Analysis of Questionnaires*. Taylor & Francis Ltd, 2015. available online at: https://www.ebook.de/de/product/24619181/francesco bartolucci silvia bacci michela gnaldi statistical analysis of questionnaires.html

[4] BINIMELIS, María Isabel. *Una nueva manera de ver el mundo. La geometría fractal*, España: RBA editores, 2011.

[5] BLUM, Werner & NISS, Mogens. *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction*, Educational Studies in Mathematics, vol. 22, no. 1, pp. 37–68, 1991.

[6] CAMARENA-GALLARDO, Patricia. *Mathematical models in the context of sciences*. In Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education, M. Blomhøj and S. Carreira, Eds. Monterrey, Mexico: Roskilde University, pp. 117–131, 2009.

[7] CASTIBLANCO HERNANDEZ, S. E. & MONTANA PAEZ, M. Y. *Geometría y dimensión: representación y caracterización de objetos 2D, 3D y 4D*. Tesis de Licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas Bogota, Colombia, 2018.

[8] DYSON, F. *Characterizing irregularity: Fractals. form, chance, and dimension,* Benoit B. Mandelbrot. Translation and revision of French edition (Paris, 1975). Freeman, San Francisco, 1977. xviii, 366 pp., illus. Science, vol. 200, no. 4342, pp. 677–678, 1978.

[9] FUSI, F. & SGRECCIA, N. *¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? opiniones de especialistas en Geometría*, Epsilon, no. 105, pp. 31–50, 2020.

[10] GREAT SCOTT GADGETS. *HackRF One*, 2022. Accessed: 2022-03-30. available online at: https://greatscottgadgets.com/hackrf/one/

[11] GROSSMAN, Stanley & FLORES-GODOY, José Job. *Algebra Lineal*. Ciudad de Mexico: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A. de C. V, 2019.

[12] IBM CORP. IBM SPSS STATISTICS FOR WINDOWS. RELEASED 2020. ARMONK, NY: IBM CORP.

[13] JOHNS, R. *SQB methods fact sheet 1: Likert items and scales,* Accessed: 2022-03-30 available online at: https://www. sheffield.ac.uk/polopoly fs/1.597637!/file/likertfactsheet.pdf

[14] MATHIGON.ORG. Accessed: 2022-04-8, 2022, [Online]. Available: https://mathigon.org/

[15] MENDIBLE, A. & ORTIZ, J. *Modelización matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto.* Enseñanza de la Matemática, vol. 12-16, pp. 133–150, No. Extraordinario, 2007.

[16] MOORE, G. E. *Cramming more components onto integrated circuits, reprinted from electronics,* volume 38, number 8, april 19, 1965, pp.114 ff.” IEEE Solid-State Circuits Society Newsletter, vol. 11, no. 3, pp. 33–35, sep 2006, 1965.

[17] MORENO-MARÍN, J. C. *Experiencia didáctica en Matematicas: construir y estudiar fractales*. Suma, vol. 40, pp. 91–104, 2002.

[18] PEITGEN, H.O., JURGENS, H. & SAUPE, D. *Chaos and Fractals*. Springer New York, 2004.

[19] PEREZ MEDINA, C. R. *Transformaciones afines lineales y fractales*, Monografía, Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matematicas, Bogota, Colombia, 2007.

[20] PLAN ESTRATÉGICO UCU 2019 – 2024. Universidad Católica del Uruguay. available online at: https: //ucu.edu.uy/sites/default/files/plan-estrategico-2019-2024.pdf

[21] RUBIANO ORTEGON, G. N. *Iteración y fractales* (con Mathematica®). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2009.

[22] SANDOVAL, F. & VIRE GUAMAN, S. G. *Diseño e implementación de antenas fractales para uhf*. Memoria de proyecto de fin de carrera, Universidad Técnica Particular de Loja, Escuela de Electrónica y Telecomunicaciones, Loja, Ecuador, 2008.

**Sobre el/los autor/es:**
*Nombre:* Victoria Artigue
*Correo Electrónico:* maria.artigue@ucu.edu.uy
*Institución:* Universidad Católica del Uruguay, Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Uruguay.

*Nombre:* Joel Gak
*Correo Electrónico:* jgak@ucu.edu.uy
*Institución:* Universidad Católica del Uruguay, Departamento de Ingeniería en Electrónica, Uruguay.

*Nombre:* María de los Ángeles Fanaro
*Correo Electrónico:* mariangelesfanaro@gmail.com
*Institución:* CONICET-NEES. Facultad de Ciencias Humanas, Argentina.

*Nombre:* Gabriela Mombrú
*Correo Electrónico:* gabriela.mombru@correo.ucu.edu.uy
*Institución:* Universidad Católica del Uruguay, Departamento de Ingeniería Industrial, Uruguay.

*Nombre:* José-Job Flores-Godoy
*Correo Electrónico:* jjobfg@gmail.com
*Institución:* Universidad Católica del Uruguay, Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Uruguay.

# Experiencias Docentes
# Situaciones de contraejemplo en contexto escolar. Una propuesta de clasificación

# Counterexample situations in a school context. A classification proposal

Edgardo Locia Espinoza

Armando Morales Carballo

Efrén Marmolejo Vega

Héctor Merino Cruz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XIII, Número 1, pp. 071–098, ISSN 2174-0410
Recepción: 19 Oct'22; Aceptación: 28 Nov'22

1 de abril 2023

**Resumen**

Si se asume la ley del tercero excluido los contraejemplos tienen un estatus bien definido en las matemáticas. En contraste, en la enseñanza de las matemáticas tienen solo un rol modesto, poco representativo del que tienen en la actividad matemática profesional. En este artículo, proponemos una clasificación de situaciones de contraejemplo, la cual es producto de trabajos anteriores y de una amplia revisión de libros escolares y no escolares, numerosas observaciones de clases y entrevistas a profesores, futuros profesores y estudiantes de matemáticas. Ilustramos cada categoría de esta clasificación con ejemplos tomados de la matemática escolar pretendiendo con ello propiciar el uso de los contraejemplos, por los profesores y los estudiantes de universidad, en la enseñanza.

**Palabras Clave:** Situaciones de Contraejemplo, Razonamiento, Matemáticas, Enseñanza Universitaria.

**Abstract**

If the law of the excluded third party is assumed, then the counterexamples have a well-defined status in mathematics. In contrast, they have only a modest role in the teaching of mathematics, not very representative of that in professional mathematical activity. In this work, we propose a classification of the Counterexample Situations, which is the product of previous works and an extensive review of school and non-school books, numerous observations of classes and interviews with teachers, future teachers and students. We illustrate each category of this classification with examples taken from school mathematics, thereby seeking to encourage the use of counterexamples, by teachers and university students.

**Keywords** Counterexample Situations, reasoning, mathematics, university education

# 1. Introducción

Una de las características distintivas de las matemáticas como ciencia es su estructura axiomática en la cual, el razonamiento deductivo juega un papel muy importante. Diversos investigadores sostienen que la apropiación del razonamiento deductivo por parte de los estudiantes incluso de universidad resulta muy compleja pues se enfrenta al obstáculo del razonamiento que los individuos tienen en la vida cotidiana en donde muchas reglas lógicas, comunes en matemáticas, son asumidas de manera diferente [4]. En particular, la ley del tercero excluido, la cual es uno de los pilares de la matemática llamada clásica, no es una ley natural en la racionalidad cotidiana [1]. En efecto, esta ley fue objeto de numerosas discusiones filosóficas en el periodo de crisis de los fundamentos de las matemáticas e incluso, en la rama de la matemática llamada intuicionismo, no es aceptada de manera general. En la matemática clásica (es decir, no intuicionista) existen demostraciones no constructivas o indirectas de existencia, que los intuicionistas no aceptan, porque recurren a la ley del tercero excluido [9].

Una consecuencia de asumir esta ley, es la posibilidad de utilizar contraejemplos para refutar afirmaciones de la forma *para todo* $x$, $p(x)$, demostrando que *existe* $x$ *tal que no* $p(x)$, mediante la exhibición de un objeto $x_0$, tal que no $p(x_0)$. Esto es así, desde que en la matemática clásica $\forall x\, P(x) \vee \neg(\forall x\, P(x)$, es equivalente a $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$. Por otro lado, Gelbaum y Olmsted [6] afirman que la actividad matemática consiste básicamente en dos tipos de procesos: la formulación de pruebas y la construcción de contraejemplos. En efecto, desde el origen de esta ciencia, la realización de conjeturas y los contraejemplos le acompañan en su desarrollo, recuérdense los diálogos de Sócrates, impulsando a descubrir vía la afirmación y el contraejemplo, constructos que resultan verdaderos o no en función de la suficiencia de las hipótesis de partida. En el mismo sentido, en su modelización de la construcción del conocimiento matemático, Lakatos [13] muestra la importancia de la lógica de la prueba y la refutación y el papel motor que tiene en ella el contraejemplo como un revelador de contradicciones. Esto muestra la gran importancia que tienen los contraejemplos en el trabajo del matemático profesional.

Esta práctica, de construir conjeturas y probarlas o refutarlas mediante contraejemplos, tiene un rol modesto en el ámbito de la enseñanza de la matemática, incluso en los cursos universitarios. En los niveles elementales de educación, el interés se centra más en el aspecto operatorio y algorítmico mientras que en el tratamiento de la demostración en cursos superiores de matemáticas, son predominantes los procedimientos deductivos, en concordancia con la estructura axiomática de las matemáticas, poniendo menos énfasis en la realización de conjeturas y, sobre todo, en el uso de contraejemplos, con los cuales puede promoverse la creatividad, el desarrollo del pensamiento crítico, el autorrespeto, la comunidad colaborativa en el aula de clases, la iniciativa, la originalidad, la lectura, la escritura, las habilidades auditivas y verbales, potenciando con ello el pensamiento matemático

El contraejemplo es consustancial a la búsqueda de la verdad. Balacheff [2] (p. 53), afirma que la verdad, es una actividad del emprendimiento matemático, en el que "las pruebas y refutaciones están necesariamente ligadas a las concepciones de los objetos matemáticos- las pruebas sirven a la construcción de objetos matemáticos y por lo tanto son irreducibles a la lógica formal". De aquí la importancia de la falsación, cuya mejor herramienta es el contraejemplo y juega un importante papel en la comprensión de la matemática. En los últimos años se han desarrollado diversas investigaciones relativas a la introducción del uso de contraejemplos en la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, Bustos y Zubieta [3], García y Morales [5], Knuth y Ko [11], Komatsu [12], Martínez y Detzel [16], Weber [19], Zazkis y Chernoff [20], coinciden en que los contraejemplos permiten profundizar en la comprensión conceptual, reducir o eliminar errores conceptuales comunes, mejorar las habilidades del pensamiento crítico y hacer que el aprendizaje sea más activo y creativo.

En este contexto, los autores del presente documento, han emprendido un trabajo de investigación encaminado a propiciar el uso de los contraejemplos en la enseñanza poniendo énfasis en su valor matemático y su virtud pedagógica. De manera más precisa, el trabajo que reportaron Locia, Morales, Merino y Marmolejo [15] sobre un estudio con profesores de nivel medio superior y de universidad permitió mostrar que algunos de ellos no solo reconocen a los contraejemplos cuando están completa y formalmente presentes en su forma lógica, sino que los reconocen en situaciones más amplias, menos rigurosas e incompletas, lo que evidencia una concepción didáctica diferente de la concepción lógica. Morales, Locia, Ramírez, Sigarreta y Mederos [17], muestran que los contraejemplos tienen un rol modesto en la enseñanza de la matemática, poco representativo del que tienen en la matemática profesional y ponen en evidencia cómo los contraejemplos permiten hacer una clasificación de conceptos que tienen ciertas relaciones entre sí. Hernández, Locia, Morales y Sigarreta [7], presentan una experiencia de construcción de definiciones en un contexto de debate entre estudiantes de universidad en el que el contraejemplo permitió ir afinando la definición de función convexa desde su versión intuitiva hasta llegar a la definición estándar aceptada en matemáticas. Locia y Antibi [14] proponen métodos para sistematizar la búsqueda de contraejemplos particulares partiendo de la constatación de que tradicionalmente, en los libros de texto y en los cursos de los profesores, los contraejemplos son exhibidos sin dar indicaciones ni procedimientos para encontrarlos.

Para la realización de los trabajos anteriores, fue necesario aplicar encuestas a profesores y estudiantes, realizar experimentos didácticos, observar directamente clases de matemáticas y revisar numerosos libros de matemáticas escolares y no escolares.

Más precisamente, en el debate entre estudiantes (de universidad que cursaban la asignatura de Cálculo IV de la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero, México) acerca de la definición de función convexa descrito en [7], los argumentos que daban los participantes incluían frecuentemente, conjeturas falsas que eran refutadas con contraejemplos exhibidos por sus pares. Las situaciones en las que aparecían estas conjeturas, fueron registradas y clasificadas. En segundo lugar, la encuesta aplicada en [15] (*¿qué se entiende por situación de contraejemplo?*) incluía la solicitud a los profesores participantes (de diferentes niveles educativos en el estado de Guerrero, México) de situaciones que se relacionaran con contraejemplos. Con los ejemplos que propusieron los participantes en estos dos experimentos didácticos se hizo una primera clasificación. En tercer lugar, en el marco de la asignatura Evaluación de la Licenciatura en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (dirigida a enseñantes de matemáticas en servicio de diferentes niveles para profesionalizar su práctica docente), se realizaron observaciones de sus cursos (de Cálculo y

Álgebra) poniendo especial interés al hecho de que si los profesores de bachillerato y de universidad, utilizan o no contraejemplos en sus clases. Estas. Por último, en la búsqueda de situaciones en las que se recurriera a contraejemplos en los textos de matemáticas, se revisaron, entre otros, los siguientes libros:

- *Análisis Matemático*, Tom M. Apostol [21],
- *Calculus*, volúmenes I y II, Tom M. Apostol [22],
- *A survey of Modern Algebra*, Garret Birkohff y Saunders Maclane [23],
- *Algèbre générale* , Adina Calvo y Bernard Calvo [24],
- *Algèbre linéaire*, Adina Calvo y Bernard Calvo [25],
- *Álgebra Abstracta, primer curso*, John Fraleigh. [26],
- *Counterexamples in analysis*, Bernard Gelbaum y John Olmsted [6],
- *Les contre-exemples en mathématiques*, Bertrand Hauchecorne [8],
- *Cálculo vectorial*, Jerrold Marsden y Anthony Tromba [27],
- *Calculus, Cálculo infinitesimal*. Michael Spivak, [28].

Tales acciones tuvieron como producto integrador la presente propuesta de categorización de diferentes situaciones de contraejemplo, entendiendo por *Situación de Contraejemplo*, cualquier situación en la que se tiene una conjetura susceptible de ser refutada por un contraejemplo. Con esta clasificación se pretende mostrar a los profesores y estudiantes de universidad, que el contraejemplo adquiere sobre todo su valor pedagógico cuando está situado en una problemática que justifica su interés.

# 2. Diferentes tipos de situaciones de contraejemplo

Hemos agrupado en varias categorías los diferentes tipos de situaciones que hemos encontrado después de este análisis, en las cuales puede aparecer el contraejemplo.

## 2.1 ¿Recíproca verdadera?

Muchos teoremas son planteados bajo forma de implicación: "$p \Rightarrow q$". La pregunta ¿La recíproca es verdadera? puede dar lugar a una situación de contraejemplo.

Esta situación puede resultar muy útil y formadora sobre todo porque nos podemos dar cuenta de que, en nuestra enseñanza, numerosos son los estudiantes que no alcanzan a distinguir la diferencia entre una condición necesaria y una condición suficiente e incluso existen otros que consideran las implicaciones como equivalencias [4]. Esta opinión es compartida por algunos profesores de los niveles preuniversitario y universitario como lo hemos constatado en diversos seminarios y cursos para profesores en la Universidad Autónoma de Guerrero.

**Ejemplo 1**. En las notas de un curso de análisis dirigido a profesores en formación, se encontró lo siguiente: se demuestra en el curso que, si dos series son convergentes entonces su suma es convergente. Más precisamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ converge.}$$

Formulemos la afirmación recíproca:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

¿Esta afirmación es verdadera? La respuesta es "NO ". Para demostrarlo es suficiente con dar un contraejemplo: $\sum \frac{1}{2(n+1)}$, no converge, $\sum -\frac{1}{2(n-1)}$, tampoco converge, pero

$$\sum \left(\frac{1}{2(n+1)} + \left(-\frac{1}{2(n-1)}\right)\right)$$

es convergente. En efecto,

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{n^2-1} \text{ y } \sum \frac{1}{n^2-1}$$

es convergente (un contraejemplo más sencillo sería con $\sum \frac{1}{\mathrm{n}}$ y $\sum -\frac{1}{\mathrm{n}}$).

**Ejemplo 2**. Consideremos el teorema siguiente: Sean $a$ y $b$ números reales tales que $a < b$ y sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f$ es continua sobre $[a,b]$ y derivable sobre $]a,b[$

$$f' \to l \text{ cuando } x \to a \Longrightarrow \text{que } f \text{ es derivable por la derecha en } a \text{ y } {f'}_d(a) = l.$$

Esta regla es a veces muy cómoda para afirmar que una función posee en un punto una derivada a la derecha o a la izquierda. ¡Pero cuidado, la recíproca es falsa!: una función $f$ puede ser derivable en un punto $a$ sin que $f'(a)$ sea igual al límite de $f'(x)$ cuando $x$ tiende a $a$. Dicho de otra manera, no hay ninguna razón para que la derivada de una función sea una función continua.

**Ejemplo**: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

En este caso:

- La función $f$ es derivable sobre $]-\infty, 0[$ y para todo número $x$ diferente de cero, se tiene $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.
- Para todo $x \neq 0$, se tiene que $\left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \leq 1$ por lo tanto $|f(x)| \leq x^2$. Puesto que $x^2$ tiende a cero cuando $x \to 0$, se deduce que $f(x) \to 0 = f(0)$ cuando $x \to 0$. La función $f$ es por lo tanto continua en cero.
- $f$ es derivable en cero y $f'(0) = 0$, porque $\frac{f(x)}{x} \to 0$ cuando $x \to 0$.
- Sin embargo $f'$ no tiene límite en cero porque $\cos \frac{1}{x}$ no tiene límite en cero.

Observaciones:

1. Para estar en posibilidad de formular la recíproca de una implicación, es necesario primero distinguir bien cuál es la hipótesis privilegiada en la escritura de esta implicación (la proposición $p$) y cuál es la conclusión (la proposición $q$). La mayor parte

de los teoremas o resultados cuentan con varias hipótesis (hipótesis específicas y no específicas) $\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ que implican la conclusión $q$. Es decir, son de la forma ($h_1$y $h_2$ y … y $h_k$) $\Rightarrow q$. En un sentido estricto, la recíproca de tal implicación es $q \Rightarrow$ ($h_1$ y $h_2$ y ... y $h_k$).

A menudo, para enfatizar un resultado importante del curso se hace jugar a una de las hipótesis, por ejemplo $h_1$, un rol más importante que las otras. En este caso, en la formulación del teorema, se dejan de lado las otras hipótesis y se pone énfasis sobre la implicación de $q$ por $h_1$. Esto se manifiesta en la forma de redactar un teorema. Por ejemplo, en la redacción siguiente:

Sea $h_2$ y ... y $h_k$. Demostrar que $h_1 \Rightarrow q$,

es sobre la hipótesis $h_1$ que se pone énfasis. En este caso la recíproca es

Sea $h_2$ y … y $h_k$. Demostrar que $q \Rightarrow h_1$ .

**Ejemplo**: En varios libros de texto y notas de curso que analizamos, se encuentran diversas maneras para motivar el estudio de la convergencia uniforme de sucesiones de funciones. Ciertos autores, como Apostol [22] y Spivak [28], introducen primero la noción de convergencia simple y enseguida subrayan que, si se tiene una sucesión convergente de funciones continuas, la función límite puede no ser continua. El problema consiste en buscar condiciones que garanticen la continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas. Se introduce entonces la noción de convergencia uniforme y se demuestra el teorema siguiente:

"Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones continuas sobre $X$. Si la convergencia de $f_n$ hacia $f$ es uniforme sobre $X$, entonces $f$ es continua sobre $X$".

Tenemos dos hipótesis explícitas en este teorema:

a) $h_1$: $(f_n)$ sucesión de funciones continuas,
b) $h_2$: $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ sobre $X$,

y la conclusión: $f$ es continua sobre $X$,

pero es claro que la redacción (y todo el contexto que acabamos de describir) pone énfasis sobre la implicación:

Convergencia uniforme de la sucesión $\Longrightarrow$ Continuidad de la función límite.

Así, cuando se habla de la afirmación recíproca (a veces diciendo que la convergencia uniforme es una condición suficiente y preguntando si esta condición es necesaria para la continuidad de este límite), se hace referencia a la afirmación:

(1) Continuidad de la función límite $\Longrightarrow$ Convergencia uniforme de la sucesión.

y se entiende implícitamente que la sucesión mencionada está constituida de funciones continuas (porque se ha fijado ya esta hipótesis). Sin embargo, como se dispone de dos hipótesis, se hubiera podido dar un peso mayor a la hipótesis $h_2$ y poner énfasis sobre la implicación:

Continuidad de las funciones $f_n \Longrightarrow$ Continuidad de la función límite,

dejando fija la hipótesis de que la convergencia de la sucesión $f_n$ hacia $f$ es uniforme. Así, se obtiene la afirmación recíproca:

(2) Continuidad de la función límite $\Longrightarrow$ Continuidad de las funciones $f_n$.

Las implicaciones (1) y (2) son ambas falsas. Para demostrarlo, es suficiente con exhibir un contraejemplo para cada una de ellas. Un contraejemplo para la implicación (1) será una sucesión $(f_n)$ tal que su límite $f$ sea continuo, con $f_n$ continua, para todo $n$, pero tal que la convergencia de $f_n$ hacia $f$ no sea uniforme. El contraejemplo clásico es dado por la sucesión $(f_n)$, $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, definidas $\forall n \in \mathbb{N}$, por

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ -2nx + 2, & \dfrac{1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es:

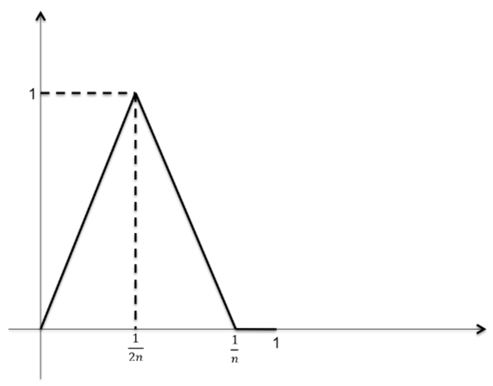



*Figura 1: Convergencia uniforme y continuidad*

y la función límite $f$ es la función idénticamente nula. Vemos bien que cada $f_n$ es continua, la función $f$ es continua pero la convergencia no es uniforme. En efecto, una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme es que la sucesión numérica $(\sup|f_n(x) - f(x)|)$ tienda a cero (El sup es tomado sobre el conjunto $[0,1]$). En el ejemplo dado, $\sup|f_n(x) - f(x)| = 1$ para todo $n$, entonces, la sucesión no puede converger a cero por lo que la convergencia de la sucesión, $(f_n)$ hacia $f$ no puede ser uniforme.

Para tener un contraejemplo para la implicación (2) necesitamos una sucesión $(f_n)$ que converja uniformemente a una función continua $f$, pero tal que, al menos una de las funciones $f_n$ no sea continua.

Sea $f_n: [0,1] \to [0,1]$,, definida para cada $n$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es:

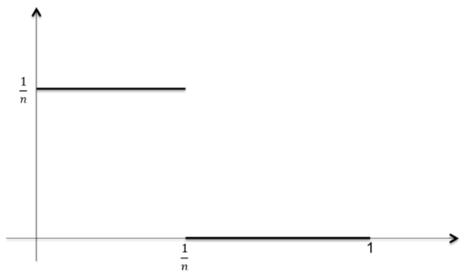



*Figura 2: Convergencia uniforme y continuidad*

Entonces $f_n$ converge uniformemente a $f \equiv 0$ porque para toda $n$, $\sup|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n} \to 0$, pero para todo entero $n \geq 1$, $f_n$ no es continua sobre $[0,1]$.

Observemos que para exhibir un contraejemplo hubiera sido suficiente que una sola función $f_n$ fuera discontinua.

2. Frecuentemente, en los libros de texto o en las exposiciones de los profesores, ciertos teoremas son expresados recurriendo al lenguaje cotidiano. Por consiguiente, la identificación de los elementos de la implicación es a veces verdaderamente difícil. Por

ejemplo, en varios textos se encuentra el resultado siguiente formulado más o menos de la misma manera;

*"no se modifica la naturaleza de una serie modificando un número finito de sus términos"*

Presentado de esta forma, no se alcanza a distinguir la hipótesis y la conclusión. Si lo ponemos en forma de implicación, se tiene:

*"Si se modifica un número finito de términos de una serie, entonces no se modifica su naturaleza"*

En este caso ¿tiene sentido la recíproca?

En teoría, toda implicación debe tener una recíproca. El problema que se plantea aquí es que la implicación no está formulada de manera correcta. En los dos términos ("antecedente" y "consecuente") hay ciertos hechos que se consideran implícitos en el lenguaje cotidiano. Por ejemplo, el verbo "modificar" que aparece en los dos componentes significa implícitamente que una serie es sometida a una acción para dar nacimiento a otra serie, la cual tendrá la misma naturaleza que la primera. Con esas consideraciones se obtiene la formulación correcta:

*"Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son tales que $u_n = v_n$ salvo para un número finito de términos, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son de la misma naturaleza"*

y, a partir de ahí, se obtiene la recíproca:

*"Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son de la misma naturaleza, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son tales que $u_n = v_n$ salvo para un número finito de términos"*

la cual es evidentemente falsa como lo muestra el contraejemplo $u_n = 2^{-n}$ y $v_n = 3^{-n}$. En efecto, las series $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}$ son de la misma naturaleza (convergentes), pero no tienen ningún término en común.

3. La cuestión de las recíprocas es una situación que se encuentra en varias ocasiones. Por ejemplo, la mayor parte de los teoremas que encontramos en análisis son teoremas que se refieren a condiciones suficientes (condiciones suficientes para la diferenciabillidad de funciones, para la integrabilidad, para la convergencia uniforme de sucesiones de funciones, etc.). Se presenta también cuando se tiene que establecer la igualdad de dos conjuntos $A$ y $B$. En efecto para demostrar que dos conjuntos $A$ y $B$ son iguales, a menudo se demuestra primero que $A \subset B$ y enseguida que $B \subset A$. En muchas ocasiones una de estas inclusiones no se verifica. A veces, para demostrar que dos series (o sucesiones) son de la misma naturaleza se analiza primero si la convergencia de la primera conlleva a la convergencia de la segunda y enseguida se analiza la implicación recíproca. Se encuentra una situación análoga cuando se pide establecer la equivalencia de dos normas. En este caso se sabe que dos normas definidas en un espacio vectorial $E$, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, son equivalentes si y solo si $\exists a > 0$ y $b > 0$ tales que $\|x\|_1 \leq a\|x\|_2$ y $\|x\|_2 \leq b\|x\|_1$, $\forall x \in E$. A menudo, una de estas desigualdades no es verdadera y para demostrarlo, se puede recurrir a un contraejemplo.

## 2.2 Restricción de definiciones

Frecuentemente, es necesario considerar varias definiciones cada vez más restrictivas para poder considerar resultados más precisos. Para comprender más estas definiciones es necesario mostrar que ciertas definiciones son efectivamente más restrictivas que otras dando ejemplos que verifiquen, por ejemplo, una de ellas solamente [8]. En algunos casos se llega a la situación de que las definiciones similares no guardan entre ellas ninguna relación de dependencia.

**Ejemplo**: Cuando en análisis se estudian las series de funciones, se introducen diferentes tipos de convergencia. Por ejemplo:

Sea $\sum u_n(x)$ una serie cuyo término general es una función de $X$ en $\mathbb{C}$ ($X$ conjunto cualquiera). Pongamos $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} u_p(x)$ y $Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} |u_p(x)|$ (sumas parciales de rango $n$).

**Convergencia simple**: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge simplemente sobre $X$, si $(S_n(x))$ converge para cada $x$ del conjunto $X$.

**Convergencia absoluta**: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge absolutamente sobre $X$, si $(Q_n(x))$ converge para cada $x$ del conjunto $X$.

**Convergencia uniforme**: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge uniformemente sobre $X$, si $(S_n(X))$ converge uniformemente sobre $X$.

**Convergencia normal**: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge normalmente sobre $X$ si existe una sucesión numérica $(\alpha_n)$, $\alpha_n \geq 0$, independiente de $x$, tal que $\sum \alpha_n$ converge y $\forall x \in X, |u_n(x)| \leq \alpha_n$, o de manera equivalente, en el caso en el que las funciones $u_n$ sean acotadas sobre $X$, se dice que $\sum u_n(x)$ serie convergente, converge normalmente sobre $X$, si la serie numérica $\sum \|u_n\|_\infty$ es convergente. (donde $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in X} |u_n(x)|$).

Saber qué relación guardan entre ellas estas nociones puede resultar muy formador. Diremos que una noción o propiedad $p$ es más restrictiva que otra propiedad $q$, si todo objeto que posee la propiedad $p$, también posee la propiedad $q$ y, existe al menos un objeto que posee la propiedad $q$ que no posee la propiedad $p$ (o de manera equivalente $p \Rightarrow q$ pero $q \not\Rightarrow p$).

Así, es posible demostrar que toda serie de funciones que es normalmente convergente es también absolutamente convergente y que toda serie de funciones absolutamente convergente, es también simplemente convergente. Por consecuencia toda serie de funciones normalmente convergente es simplemente convergente. De la misma manera, es posible demostrar que toda serie de funciones que es normalmente convergente es también uniformemente convergente y que toda serie de funciones uniformemente convergente es también simplemente convergente. Se pueden plantear las preguntas siguientes:

¿Toda serie uniformemente convergente es también absolutamente convergente?

¿Toda serie absolutamente convergente es también uniformemente convergente?

¿Toda serie uniformemente convergente es también normalmente convergente?

¿Toda serie que es absolutamente convergente es también normalmente convergente?

¿Toda serie simplemente convergente es también absolutamente convergente?

¿Toda serie simplemente convergente es también uniformemente convergente?

Las respuestas a todas estas preguntas es "NO" y es posible encontrar contraejemplos que lo demuestren.

**Serie uniformemente convergente que no converge absolutamente**. Sea $X = [-1,0]$; consideremos la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n}$. Es claro que esta serie converge simplemente (por el teorema de las series alternadas), pero no converge absolutamente, pues la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Mostraremos ahora que la serie converge uniformemente sobre $X$. Si denotamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

tenemos:

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n} \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right|$$

pero puesto que $x\epsilon[-1,0]$, la serie de término general $\frac{x^n}{n}$ es alternada, por lo tanto:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{k+1} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Por la desigualdad

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{k+1}$$

concluimos que la serie dada converge uniformemente sobre $X$.

**Serie absolutamente convergente que no converge uniformemente**. La serie $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolutamente sobre $\mathbb{C}$, pero no converge uniformemente sobre $\mathbb{C}$. En efecto, $u_n(z) = \frac{z^n}{n!} \nrightarrow 0$ uniformemente sobre $\mathbb{C}$ porque si $z = x + iy$, $\|u_n\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}} \left|\frac{z^n}{n!}\right| \geq \sup_{x\geq 0} \frac{x^n}{n!} = +\infty$ . Entonces, por la condición necesaria de convergencia uniforme de series, la serie no converge uniformemente.

**Serie uniformemente convergente que no converge normalmente**. Hemos visto en el ejemplo 1 una serie que converge uniformemente sin ser absolutamente convergente, y por lo tanto a fortiori, sin ser normalmente convergente.

**Serie absolutamente convergente que no es normalmente convergente**. En la serie del ejemplo 2 se tiene convergencia absoluta sin tener convergencia uniforme, y por lo tanto a fortiori, sin tener convergencia normal.

**Serie simplemente convergente que no es absolutamente convergente**. La serie del ejemplo 1 es una serie simplemente convergente (pues converge uniformemente) pero no converge absolutamente.

**Serie simplemente convergente que no es uniformemente convergente**. La serie del ejemplo 2 siendo absolutamente convergente, converge también simplemente, pero hemos visto que no converge uniformemente.

A partir de todas estas informaciones estamos en posibilidad de establecer las relaciones entre todas las nociones definidas al inicio. Podemos resumir la información en el diagrama siguiente.

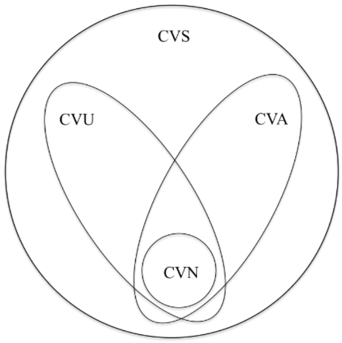



*Figura 3: Diferentes tipos de convergencia*

Vemos claramente que la noción de convergencia normal (CVN) es la más restrictiva. Las nociones de convergencia uniforme (CVU) y aquella de convergencia absoluta (CVA) no guardan este tipo de relación, incluso podemos decir que en cierto sentido son "laterales". La noción de convergencia simple (CVS) es la más amplia.

En matemáticas encontramos a menudo este tipo de relaciones entre diferentes nociones. Podríamos citar otros casos. Por ejemplo, las nociones de función continua, función uniformemente continua, función Lipschtziana y función absolutamente continua, en análisis. En álgebra, encontramos las nociones de grupo, anillo, anillo entero, cuerpos, espacios vectoriales, etc. en las que podríamos también determinar este tipo de jerarquización.

**Observación**. Esta categoría (restricción de definiciones) puede ser considerada como una forma de utilización de la categoría "recíproca de un teorema" que se presenta frecuentemente en la enseñanza de las matemáticas.

## 2.3 Ampliación del conjunto de validez

Se trata del proceso siguiente: se tiene una propiedad válida para cierto dominio $A$ de objetos (una afirmación del tipo $\forall x \in A, p(x)$): se extiende o se amplía el dominio $A$ a un dominio $B$ ($A \subset B$) de tal manera que la escritura $p(x)$ tenga sentido para los $x$ de $B$; se pregunta entonces si la propiedad continúa siendo cierta para todos los objetos de la clase $B$ (¿$\forall x \in B, p(x)$?). En términos más breves, se pregunta si la propiedad continúa siendo cierta en un caso para el cual no ha sido establecida. En la enseñanza, este procedimiento es muy común. Se le encuentra, por ejemplo, cuando se introducen los diferentes sistemas de números.

más amplio nos preguntamos si encontramos las mismas propiedades que teníamos antes de prolongar.

**Ejemplo 1**: La noción de anillo en álgebra tiene por primer objeto generalizar los conjuntos de números $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ provistos de la adición y la multiplicación. Así, un anillo es un grupo conmutativo $(A, +)$ provisto de una segunda ley de composición interna denotada de manera multiplicativa, la cual es asociativa, distributiva en relación a la adición y que posee un elemento unidad denotado por 1. Se dice que el anillo es conmutativo si la multiplicación es conmutativa. Así, los conjuntos de números $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ provistos de la adición y de la multiplicación pertenecen a una clase especial de anillos conmutativos llamados *anillos íntegros* que tienen la propiedad siguiente: El producto de dos elementos es igual a cero si y solamente si, uno de ellos es cero. Ciertos resultados que nos son familiares para los conjuntos de números $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ y que son verdaderos también para cualquier anillo íntegro son puestos en duda en el caso general de un anillo conmutativo.

Por ejemplo, sobre cada anillo conmutativo no nulo $A$, se puede construir el anillo de los polinomios con coeficientes en $A$ (denotado por $A[X]$). Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pertenece a $A[X]$, se dice que un elemento $x$ de $A$ es raíz de $P$ si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ es cero. La aplicación $\tilde{P}$ de $A$ en $A$ que a cada $x$ hace corresponder $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se llama aplicación polinomial asociada a $P$. Cuando el anillo de base es un anillo íntegro (por ejemplo $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) se sabe que un polinomio de grado $n$, no puede admitir más de $n$ raíces.

¿Esta propiedad continúa siendo cierta cuando se toma un anillo más general como anillo de base?

Para adecuarlo a nuestro esquema: Sea $\mathcal{A}$ la clase de todos los anillos conmutativos, $\mathcal{A}_I$ la clase de todos los anillos íntegros y $p(A)$ la propiedad, "todo polinomio de grado $n$ que pertenece al anillo $\mathcal{A}[X]$ admite a lo más $n$ raíces". Se sabe que la afirmación siguiente es verdadera: $\forall A \in \mathcal{A}_I, p(A)$. De acuerdo con la definición de anillo y de anillo íntegro se sabe que $\mathcal{A}_I \subset \mathcal{A}$. Con esta consideración planteamos la pregunta: ¿ $\forall A \in \mathcal{A}, p(A)$? La respuesta es "NO".

Para demostrarlo es suficiente con dar un ejemplo de anillo en el cual la propiedad no sea válida. Tomemos el anillo $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; la ecuación $x^2 = 4$ posee cuatro soluciones: $x_1 = \bar{2}$, $x_2 = \bar{4}$, $x_3 = \bar{8}$ y $x_4 = \overline{10}$. De la misma manera la ecuación $x^2 + \bar{3}x + \bar{2} = \bar{0}$, posee cuatro soluciones $y_1 = \bar{2}$, $y_2 = \bar{7}$, $y_3 = \overline{10}$, $y_4 = \overline{11}$.

El resultado que afirma que $a$ es raíz de $P$ si y solamente si $X - a$ divide a $P$ permanece válido, pero tenemos dos factorizaciones diferentes: $X^2 + \bar{3}X + \bar{2} = (X - \bar{2})(X - \bar{7}) = (X - \overline{10})(X - \overline{11})$.

**Ejemplo 2**. En esta categoría ubicamos también el procedimiento que consiste en generalizar resultados a partir de casos particulares. Por ejemplo, en Marsden-Tromba [27] hemos encontrado el procedimiento siguiente: se define primero la noción de derivadas parciales de orden superior a uno de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Se exhiben dos ejemplos de cálculo de todas las derivadas parciales de orden 2 de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de las cuales se presentan aquí las cuatro derivadas parciales mixtas. Las funciones son

$$f(x, y) = x^n y^n \quad \text{y} \quad \varphi(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$$

Las derivadas segundas mixtas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = mnx^{m-1}y^{n-1} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2y^2 - x^2}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Se constata que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Enseguida se plantea la pregunta: ¿Este resultado es verdadero en general, es decir, es verdadero para cualquier función real con dos variables, que admita derivadas parciales de orden 2? En este momento se presenta un contraejemplo a esta afirmación:

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{y} \quad f(0,0) = 0$$

Para esta función tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

En la búsqueda de las condiciones para que la igualdad sea verdadera se establece el teorema:

*"Sea $f$ una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Si $f$ admite en el punto $x$ derivadas parciales continuas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ se tiene que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$"*

No es difícil verificar, en el ejemplo anterior que las derivadas parciales de segundo orden no son continuas en el punto (0,0).

**Observación**. A veces cuando se amplía de esta manera la clase $A$, la propiedad considerada en el conjunto $B$ no tiene sentido. Esto se debe al hecho de que ciertas nociones que se utilizan para formular la conjetura no pueden ser ampliadas al nuevo dominio $B$.

**Ejemplo**: Sea $(x_n)$ una sucesión de elementos de $\mathbb{R}$. Se conoce el siguiente resultado:

$(x_n)$ *acotada superiormente* $\Longrightarrow$ $(x_n)$ *tiene una mínima cota superior.*

Se puede considerar el conjunto $\mathbb{R}$ como un subconjunto del conjunto $\mathbb{C}$. Pero la afirmación

$(x_n)$ *acotada superiormente* $\Longrightarrow$ $(x_n)$ *tiene una mínima cota superior,*

no tiene ningún sentido, porque no existe un orden en $\mathbb{C}$ comparable con aquel que existe en $\mathbb{R}$.

## 2.4 Necesidad de las hipótesis

Un teorema en general tiene varias hipótesis. Para comprender bien su mecanismo y visualizar mejor su campo de aplicación es a menudo interesante saber si ninguna de ellas es superflua [8]. Si suprimimos algunas de ellas, estamos ante un nuevo "teorema", del cual hay que decir si es verdadero o falso. Eso da lugar a una situación de contraejemplo.

**Ejemplo 1**

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones continuas, simplemente convergentes hacia $f$ sobre $X$.

**Teorema**: Si $f_n$ converge uniformemente sobre $X$ a $f$, entonces $f$ es continua.

¿Es que la hipótesis de la convergencia uniforme es superflua? La respuesta es "no".

Un contraejemplo lo proporciona la sucesión de funciones $(f_n)$ definida por, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = x^n, x \in [0,1].$$

Se tiene, para $x \in [0,1[$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$ y, si $x = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = 1$. Entonces, la sucesión converge simplemente, pero no uniformemente, a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

la cual, es una función discontinua.

**Ejemplo 2** [8]. La convergencia simple no implica la convergencia uniforme pero el teorema de Dini nos da condiciones suficientes para que la convergencia simple hacia $f$ de una sucesión $(f_n)$ de funciones numéricas sobre un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ implique la convergencia uniforme. Esas condiciones son:

1. $f_n$ es continua.
2. $A$ es compacto.
3. $\forall x \in A$, la sucesión $(|f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Mostremos que cada una de estas tres condiciones es necesaria para el establecimiento del teorema de Dini.

**Supresión de la condición 2**: Definamos $f_n\colon ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ . Entonces para $x$ fijo la sucesión $\left(\frac{1}{nx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ decrece y converge a 0, lo que muestra la convergencia simple de la sucesión $(f_n)$ a 0. Las condiciones 1 y 3 del teorema de Dini se verifican, pero la convergencia de $(f_n)$ no es uniforme pues $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ para todo $n$ por lo tanto la sucesión $(a_n)$ en donde $a_n = \sup\limits_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$, no tiende a 0.

**Supresión de la condición 3**: Definamos, para $n \geq 2$, $f_n(x) = (n+1)x$, para $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(x) = -(n+1)x + \frac{2(n+1)}{n}$, para $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ y $f_n(x) = 0$ para $x \in [\frac{2}{n}, 1]$.

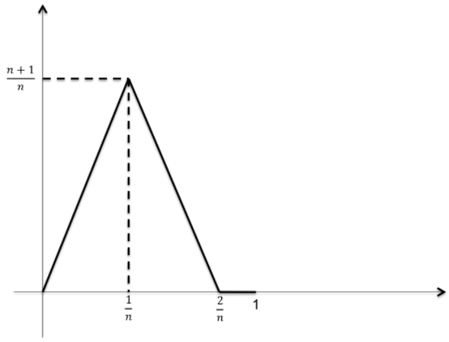



*Figura 4: Supresión de la condición 3*

Para $x > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{2}{N} \leq x$ entonces para $n \geq \mathrm{N}$, $f_n(x) = 0$, lo que muestra que la sucesión $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Como $f_n(0) = 0$, la sucesión de funciones $(f_n)$ converge sobre el compacto [0,1] a la función nula. Por otra parte, $a_n = \sup_{x\in]0,1[} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} \geq 1$ por lo tanto la convergencia de la sucesión $(f_n)$ no es uniforme, aunque las condiciones 1 y 2 del teorema de Dini se verifiquen así como una condición ligeramente diferente de 3 que es que la sucesión $(\sup|f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente; su límite 1 es evidentemente no nulo.

**Supresión de la condición 1**: El conjunto $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ es numerable. Llamemos $x_1$, $x_2$, $x_3$,…, sus elementos y definamos para $n \in \mathbb{N}$, $f_n$, por $f_n(x) = 0$, si $x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, $f_n(x) = 0$ si $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , y $f_n(x_q) = 1$ si $q > n$.

Para $x \notin \mathbb{Q}$, la sucesión $(f_n(x))_n$ es nula y convergente a 0; para $x$ racional, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_q$ y si $n \geq q$ se tiene que $f_n(x) = f_n(x_q) = 0$ , lo que muestra que la sucesión $(f_n(x))_n$ converge a 0: la sucesión de funciones $(f_n)$ converge a la función nula. Sin embargo, la convergencia no es uniforme puesto que $f_n(x_{n+1}) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ aunque las condiciones 2 y 3 del teorema de Dini se verifiquen.

**Observaciones**.

- Un análisis similar puede hacerse, por ejemplo, a las hipótesis de teoremas como el de Rolle, del valor medio o de Cauchy.
- Desde el punto de vista matemático, esta categoría "Necesidad de las hipótesis" es equivalente a la extensión de propiedades o ampliación de conjunto. En el ejemplo del teorema de Dini, cada vez que se suprime una de las hipótesis el campo en el que se quiere aplicar el resultado es ampliado. En el ejemplo de los anillos y de los anillos íntegros cuando se tienen las propiedades, tratadas primero en los anillos íntegros y enseguida en los anillos en general, es porque se suprime la condición de integridad. La distinción se da en el ámbito didáctico.

## 2.5 "Cota" de una definición

Cuando se formula la definición de una noción, nos situamos primero en un conjunto de objetos. Una vez se formula la definición para el conjunto $A$, $A$ se divide en dos partes disjuntas. En la primera están todos los objetos del conjunto $A$ que satisfacen la definición; en la otra están todos los objetos que no satisfacen esta definición. A menudo se presentan ejemplos pero se exhiben también objetos que no satisfacen la definición (contraejemplos) contribuyendo así a una mejor comprensión. En efecto según Lakatos [13], para conocer verdaderamente en profundidad cierta noción debemos estudiarla no solamente en su forma normal, usual, común sino en sus estados críticos. Si se quiere, por ejemplo, comprender la noción de una función continua, es necesario considerar igualmente funciones discontinuas. Así, una función discontinua es un contraejemplo de la noción de función continua. Estos contraejemplos actúan como cotas de la definición y contribuyen a precisar mejor el sentido.

Por ejemplo, cuando se define la noción de sucesión convergente nos situamos en el conjunto $A$ de todas las sucesiones (numéricas, por ejemplo) y se explicitan todas las características que una sucesión debe tener para que sea convergente (es decir para todo $\varepsilon > 0, \exists N \geq 0$: ...), pero la definición es considerada muy abstracta y es necesario exhibir un ejemplo, es decir, una sucesión que satisfaga la definición. Este ejemplo servirá para volver más clara la definición, pero ella adquirirá mucho más sentido si se toma conciencia de que existen sucesiones que no son convergentes.

Ejemplo: La sucesión cuyo término general es $(-1)^n$ no es convergente (se dice que es oscilante). Una sucesión que no es convergente se llama divergente.

De la misma manera la noción de anillo íntegro toma más sentido cuando se sabe que existen anillos que no son íntegros; se comprende mejor la utilidad de la noción de función cuando se sabe que existen relaciones que no son funciones; un alumno que nunca ha encontrado funciones no derivables podrá pensar que todas las funciones son derivables, etc. Así, cada vez que se está en presencia de una definición, se tiene la posibilidad de tener una situación de contraejemplo preguntándonos si existen objetos que no satisfacen la definición que se acaba de formular.

## 2.6 ¿Propiedad análoga verdadera?

La analogía es un procedimiento muy utilizado en matemáticas. Se pueden constatar que la historia de los conocimientos matemáticos, los matemáticos más creadores y fecundos han puesto en evidencia el papel eminente de la analogía para el descubrimiento de nuevas verdades [10] (Knobloch, 1991) y [18] (Polya 1958). En la enseñanza este procedimiento es una herramienta frecuentemente empleada para explicar mejor las significaciones de las nociones y el funcionamiento de las propiedades. Sobre todo, cuando se considera que las nociones puestas en juego son de un nivel de abstracción muy elevado.

La analogía puede también dar lugar a situaciones de contraejemplo de la manera siguiente: se tienen ciertas propiedades válidas para una clase de objetos $A$ ($\forall x \in A, p(x)$). Se observa cierta analogía entre los objetos de la clase $A$ y los objetos de otra clase $B$. Se pregunta si los objetos de la clase $B$ poseen las propiedades válidas en $A$ (¿($\forall x \in B, p(x)$?).

**Ejemplo 1**: En un curso de análisis matemático la introducción de la integral generalizada, o integral impropia de la forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

puede hacerse después de haber estudiado las series. Se puede entonces apoyar sobre una cierta analogía entre estas dos nociones. Se trata entonces de determinar qué propiedades verdaderas en el caso de las series pueden ser transferidas por analogía a las integrales generalizadas de este tipo. Se hace primero una lista de las principales propiedades (válidas para las series no necesariamente de términos positivos):

1. Modificación de número finito de términos: No se modifica la naturaleza de una serie modificando un número finito de sus términos.
2. Criterio de Cauchy: Toda serie que verifica el criterio de Cauchy es convergente.
3. Operaciones sobre las series convergentes: La suma de dos series convergentes es convergente. El producto de un número por una serie convergente es convergente.
4. Series absolutamente convergentes: Si una serie es absolutamente convergente, es convergente (ver la definición de convergencia absoluta en el ejemplo del apartado 1.2 en la pag. 10).
5. Condición necesaria de la convergencia:

$$\sum a_n \text{ es convergente } \Rightarrow a_n \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty$$

Para cada una de estas propiedades se pregunta o se pide encontrar una propiedad análoga para las integrales generalizadas. Antes de responder a esta pregunta es necesario primero saber en qué términos esas propiedades deben ser formuladas. Es decir, precisar bien qué nociones que se relacionan con integrales jugarán el rol análogo a aquellas de las series. Así, por ejemplo, la propiedad análoga a la propiedad de la modificación de un número finito de términos se expresa por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ y } \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ son de la misma naturaleza,}$$

la condición del criterio de Cauchy es formulada por: Sea $F(X) = \int_a^X f(x)dx$, $X \in [a, +\infty[$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists X_0 \in \mathbb{R}, \forall X, Y \geq X_0\ |F(X) - F(Y)| \leq \varepsilon)$$

Pero de hecho es solamente la condición necesaria de convergencia la que plantea la utilización de un contraejemplo, todas las otras son propiedades verdaderas en el caso de las integrales generalizadas. En efecto, la propiedad análoga para las integrales puede ser formulada de la manera siguiente:

$$\text{Si } \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ existe, entonces } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

La pregunta que se plantea es: ¿Esta propiedad es verdadera? Es posible demostrar con la ayuda de un contraejemplo que la respuesta a la pregunta es " NO".

Por ejemplo, tomemos $f$ como en la figura siguiente.

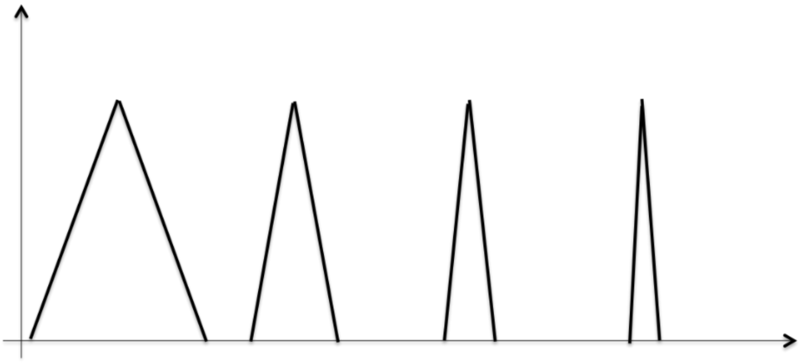


*Figura 5: Integral impropia convergente y* $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$

Esta función es no negativa, su integral es convergente (si las bases de los triángulos son adecuadamente elegidas, por ejemplo $2^{-n}$) y no tiende a 0 cuando $x$ tiende a $+\infty$.

Se termina esta parte del curso diciendo que este resultado es verdadero si se agrega la condición de la existencia del límite de la función en el infinito, es decir:

$$\text{Si} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ y } \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existen, entonces } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

**Ejemplo 2**: Se dota al espacio $\mathbb{R}^2$ del *orden lexicográfico*, denotado por $\leq_L$ y definido por la relación: $(a,b) \leq_L (c,d) \Leftrightarrow (a < c)$ o $(a = c, b \leq d)$. Es posible demostrar que $\leq_L$ es una relación de orden total sobre $\mathbb{R}^2$. En este sentido esta relación de orden es análoga a la relación de orden tradicional para $\mathbb{R}$. Ahora bien, en $\mathbb{R}$ se tiene la propiedad de que todo subconjunto acotado superiormente admite una mínima cota superior. ¿Esta propiedad continúa siendo verdadera para los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dotado del orden lexicográfico? La respuesta es " NO".

Tomemos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por la igualdad $P = ]-1,1[\times \{0\}$. Mostremos que el conjunto de cotas superiores es igual al conjunto $M = \{(x,y): x \geq 1\}$. Sea $(x,y)$ una cota superior de $P$; tenemos que, si $a \in ]-1,1[$, $(a,0) \leq_L (x,y)$, lo cual se escribe $a < x$ o ($a = x$ y $0 \leq y$). Si $x < 1$ se tendrá una contradicción eligiendo un elemento $a$ de $]-1,1[$ tal que $x < a < 1$, por lo tanto $x \geq 1$.

Recíprocamente, es claro que todo elemento de $M$ es una cota superior de $P$. Mostrar ahora que $P$ no admite mínima cota superior es lo mismo que probar que $M$ no tiene un elemento más pequeño.

Supongamos que $(x,y)$ sea el elemento más pequeño de $M$; entonces como $(x, y-1)$ es un elemento de $M$, $(x,y) \leq_L (x, y-1)$, lo que implica que $y \leq y-1$. Se obtiene una contradicción: por lo tanto $M$ no admite un elemento más pequeño y $P$ no tiene mínima cota superior.

## 2.7 Efecto de sorpresa

Ciertas nociones después de su primer estudio dan la impresión de que un resultado debe ser verdadero. A veces ese resultado resulta falso. Si esta íntima convicción surge, es que la noción intuitiva que se tiene es errónea [8]. Este tipo de situación tiene un carácter subjetivo, porque de un lado las intuiciones no son de la misma naturaleza para cada individuo y, por otro lado, depende también de la familiaridad que se tiene con la noción en cuestión. En muchas ocasiones, exhibir algunos contraejemplos a estas ideas preconcebidas permite rectificar esta intuición errónea. Cuando se revisan tareas o exámenes encontramos en muchas ocasiones este tipo de situación. Ciertos alumnos que estudian análisis piensan, por ejemplo, que una sucesión positiva decreciente debería tender a cero.

**Ejemplo 1**: Consideremos la afirmación: "Toda función continua en 0 es continua sobre una vecindad de 0".

Muchas personas tienen la impresión de que esta afirmación es verdadera, porque la noción intuitiva que se tiene de continuidad de una función a menudo hace referencia a una noción geométrica que se asimila al hecho de poder dibujar su gráfica sin despegar el lápiz del papel. Sin embargo, la afirmación es falsa.

**Contraejemplo**: Definamos $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$, si $x$ es racional y $f(x) = 0$, si no. Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $|f(x)| \leq |x|$ por lo tanto para $\varepsilon > 0$, si $|x| < \varepsilon$ entonces $|f(x)| < \varepsilon$, lo que prueba la continuidad de $f$ en 0. Por otro lado, si $a \neq 0$, $f$ no es continua en $a$ y esto se demuestra de la manera siguiente. Se quiere mostrar que $f$ no es continua en $a \neq 0$, es decir

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta\ y\ |f(x) - f(a)| > \varepsilon$$

Se conoce la propiedad "entre dos reales existe un racional y un irracional". Sea $a \in \mathbb{Q}$ y $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Entonces, existe $x \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ y $x \notin \mathbb{Q}$; se tiene entonces, $|x - a| < \varepsilon$ y $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Se opera de igual manera con $a \notin \mathbb{Q}$ considerando un racional $x \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

**Ejemplo 2**. Este ejemplo ha sido planteado en muchas ocasiones a muchos futuros profesores de matemáticas: Si $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ sobre $]\alpha, +\infty[$, $\forall \alpha > 0$ ¿$(f_n)$ converge uniformemente a $f$ sobre $]0, +\infty[$?

La gran mayoría de los estudiantes están convencidos de que la respuesta a esta pregunta es "SI". Siempre resultan sorprendidos cuando se les exhibe el contraejemplo siguiente:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{1 + n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, no es difícil demostrar que la sucesión cuyo término general es la función presentada converge simplemente a 0 sobre $\mathbb{R}$ y uniformemente sobre $]\alpha, +\infty[$, $\forall \alpha > 0$. Sin embargo, no converge uniformemente sobre $]0, +\infty[$ (para detalles, ver el ejemplo 2 del epígrafe 2.9. "Otras situaciones").

## 2.8 ¿Estabilidad?

Se trata de una situación que se presenta muy frecuentemente en todos los dominios de las matemáticas. Se tiene un conjunto de objetos que tienen cierta propiedad, y sobre este conjunto se define cierta operación (suma, producto, composición, etc.) o bien una "transformación" de sus elementos (derivación de funciones, transformaciones geométricas del plano. etc.). En muchos casos los objetos resultantes conservan la propiedad de los objetos de partida (la suma de dos sucesiones convergentes es una sucesión convergente, la unión de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto, la derivada de una función polinómica es una función polinómica, una homotecia conserva la medida de los ángulos y el paralelismo, un isomorfismo entre dos conjuntos ordenados conserva la relación de orden, etc.) pero existen también muchos casos en los que las propiedades no son estables para ciertas operaciones o transformaciones.

**Ejemplo 1**. ¿El producto de dos elementos de orden finito de un grupo es de orden finito? Sean $f$ y $g$ los elementos de $S_{\mathbb{Z}}$ (grupo de permutaciones de $\mathbb{Z}$) definidas por

$f(m) = m + 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$ $\quad$ $g(m) = m - 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$

$f(m) = m - 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$ $\quad$ $g(m) = m + 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$

Se tiene entonces $f \circ f = g \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$ por lo tanto, $f$ y $g$ son elementos de orden 2 de $S_{\mathbb{Z}}$, pero para todo entero $k$ se tiene que $(g \circ f)^k(0) = 2k$, por lo tanto, el subgrupo $\langle g \circ f \rangle$ es infinito.

**Ejemplo 2**. ¿La imagen de un conjunto cerrado por una función continua, es un conjunto cerrado?

**Contraejemplo**: La función continua arctan envía el conjunto cerrado $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ el cual no es cerrado.

Se pueden citar numerosas situaciones de ese tipo: ¿La suma de dos sucesiones divergentes es divergente? ¿El producto de dos series absolutamente convergentes es absolutamente convergente? ¿En $\mathbb{C}[X]$, la suma de dos polinomios irreducibles es irreducible?¿En un espacio vectorial, la intersección de dos familias linealmente dependientes es linealmente dependiente?

**Observación: Inversión del orden de paso al límite en relación a otras operaciones.**

La cuestión de saber si es posible invertir el paso al límite en relación a otras operaciones se presenta en numerosas ocasiones. En realidad, se trata de cierto tipo de estabilidad que se podría llamar *estabilidad por paso al límite*. El interés primordial es responder a preguntas del tipo siguiente: si cada una de las funciones de una sucesión $(f_n)$ posee cierta propiedad (por ejemplo, continuidad, diferenciabilidad o integrabilidad), ¿la propiedad es transferida a la función límite $f$? A veces se obtienen propiedades que son verdaderas, pero en muchos casos los resultados obtenidos son falsos.

**Ejemplo 1**. Sea $f$ una función (de un espacio métrico en otro espacio métrico) y $x_0$ un elemento del dominio de $f$ ¿Para toda sucesión $(x_n)$ convergente a $x_0$, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$? O de manera equivalente; ¿tenemos la propiedad $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$? En este caso, la propiedad en cuestión es la caracterización por sucesiones de la noción de continuidad en un punto. Entonces se puede afirmar que la propiedad es verdadera si y solamente si, la función $f$ es continua en $x_0$.

**Ejemplo 2**. Sea $(f_n)$ que converge simplemente a $f$ ¿La continuidad de cada una de las funciones $f_n$ en $x_0$, implica la continuidad de la función $f$ en $x_0$? O bien ¿$\forall n, \lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$? Sin hipótesis suplementarias (como la convergencia uniforme), estamos obligados a responder no a la pregunta planteada de esta forma tan general. Podríamos encontrar un contraejemplo en el ejemplo 1 del epígrafe "*Necesidad de la hipótesis*".

**Ejemplo 3**. Sea $(f_n)$ una sucesión que converge a $f$ ¿$\forall n, \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$? o bien ¿$\forall n, \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$?

De nuevo, la respuesta a la pregunta es negativa. Construimos un contraejemplo considerando una sucesión de funciones $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica tiene el aspecto siguiente:

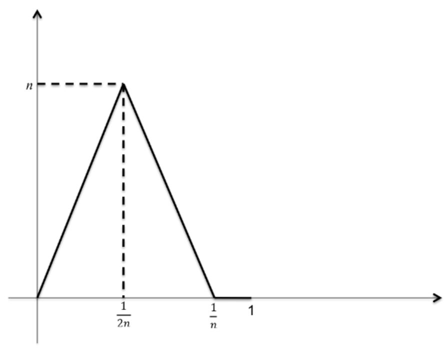



*Figura 6: Convergencia e integración*

No es difícil mostrar que tal sucesión tiene por límite la función nula por lo que la integral de la función límite es 0. Pero la integral de cada función de la sucesión es igual a $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, en este caso, no se puede invertir el paso al límite con la integración de funciones.

**Observación**: Durante todo el siglo XVIII, la tesis de que el límite de cualquier sucesión de funciones continuas es una función continua, era considerada verdadera. Se consideraba un caso especial del "principio de continuidad" de Leibniz y, en particular, del principio según el cual, si una cantidad variable posee en todos sus grados cierta propiedad su límite poseerá esta misma propiedad. Cauchy fue el primero (1821) que intentó hacer la demostración de que toda serie convergente de funciones continuas tiene siempre una función límite continua. La existencia de contraejemplos a la afirmación de Cauchy (proporcionados fundamentalmente por Fourier: $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots$) demostró su falsedad y dio lugar a un debate en el cual participaron matemáticos tales como Abel y Dirichlet. Seidel, veintiséis años después de la "prueba" de Cauchy, resolvió finalmente el problema con el descubrimiento de la convergencia uniforme [13].

**Ejemplo 4**. Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones definidas sobre un intervalo $I$ de $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, y sea $x_0$ un punto de la adherencia de $I$ en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $x$ de $I$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge a $f(x)$, y que para cada $n$, $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. ¿Podemos decir entonces que, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, y que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$? Dicho de otra manera ¿podemos decir que $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$? La respuesta es negativa (por lo menos sin hipótesis suplementarias). Tomemos por ejemplo $I = ]-1,1[$, $f_n(x) = (-1)^n x^n$ y $x_0 = 1$. Entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x}$ y $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = (-1)^n$. No podemos entonces invertir en este caso la suma con el paso al límite.

## 2.9 Otras situaciones

Agrupamos en esta rúbrica, las situaciones que no entran en ninguna de las ocho rúbricas anteriores. Por ejemplo, cuando se pregunta si una aplicación es inyectiva de $E$ en $E$, se puede, para demostrar que no lo es, encontrar elementos $a$ y $b$ de $E$ distintos, tales que, $f(a) = f(b)$. Cuando se procede así, la terminología "contraejemplo" es raramente utilizada. Sin embargo, en el plano estrictamente matemático y en el plano de la heurística, la situación es del mismo tipo que las ocho anteriores.

**Ejemplo**: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ ¿Es $f$ inyectiva? Este problema es equivalente a:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - x$¿Es verdadera la siguiente propiedad $P: \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$? Para demostrar que esta propiedad es falsa, es suficiente encontrar un par $(x, y)$ de números reales tal que $f(x) = f(y)$ pero $x \neq y$: Sean $x = 1$, $y = -1$. Observamos que $f(1) = 0 = f(-1)$ pero $1 \neq -1$. En realidad, la propiedad $P$ de la que se trata en el problema es la definición de función inyectiva.

Existen en matemáticas definiciones que pueden dar lugar a este tipo de situaciones. Podemos mencionar, por ejemplo: Sea $f: A \rightarrow B$

- $f$ inyectiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall (x, y) \in A^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- $f$ sobreyectiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\big(\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)\big)$,
- $f$ creciente (respectivamente, decreciente) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall (x, y) \in A^2, x \leq y \ \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ (respectivamente, $f(x) \geq f(y)$).

El caso es similar cuando se dispone de caracterizaciones (condiciones equivalentes) o de condiciones necesarias para que un objeto posea cierta propiedad. Por ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f$ continua en $x_0$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
  La caracterización por sucesiones es:

$$\forall (x_n) \text{ de elementos de } A, \ ((\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0) \Rightarrow \ (\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0))$$

- $f_n$ converge uniformemente hacia $f$ en $A \Rightarrow \forall (x_n)$ de elementos de $A$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (f_n\,(x_n) - f(x_n)) = 0$
- $f$ admite un límite $l$ en $x_0$ $\Rightarrow \forall V$ vecindad de $x_0$, la restricción $\varphi$ de $f$ a $V$, admite también a $l$ como límite en el punto $x_0$.
- $(a_n)$ converge a $l \Rightarrow$ $\forall (a_{n_k})$ subsucesión de $(a_n)$, $a_{n_k}$ converge a $l$.
- $A$ acotado $\Rightarrow \forall (x_n)$ de elementos de $A$, $x_n$ no tiende a $+\infty$.

Podríamos mencionar muchos más, pero nos limitaremos a dar algunos ejemplos clásicos que pueden incluirse en esta categoría.

**Ejemplo 1**. "¿La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ es continua en 0?"

Observamos que la respuesta es "NO" y para demostrarlo es suficiente encontrar una sucesión $(x_n)$ de números reales, tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ pero $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq 0$.

Se demuestra así que la propiedad. "$\forall (x_n)$ de números reales, $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0$" es falsa.

**Ejemplo 2**. Sea $(f_n)$ definida por, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{1 + n^2 x^2}$, ¿Esta sucesión converge uniformemente a la función cero sobre $\mathbb{R}$?

La respuesta es " NO " y para demostrarlo, es suficiente encontrar una sucesión $(x_n)$ de números reales tal que $|f_n(x_n)|$ no tiende a cero (condición necesaria para la convergencia uniforme).

En este caso es suficiente tomar $x_n = \frac{1}{n}$ pues $f_n(x_n) = \frac{\text{sen}(1)}{2}$ no tiende a cero.

**Ejemplo 3**. Otro ejemplo muy clásico de ese tipo de situación es:

$$f: \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

"¿$f$ tiende a cero en (0,0)?" Si esto fuera verdadero. Para toda recta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \lambda x\}$, que pasa por el origen tendríamos $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = 0$. Ahora bien, si $y = \lambda x$, $f(x,y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Ahora bien $\frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq 0$ si $\lambda \neq 0$, por ejemplo, si $\lambda = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la función $f$ no tiende a 0 en (0,0).

# 3. Consideraciones finales

En la enseñanza de las matemáticas el profesor no sólo debe comunicar los conocimientos matemáticos sino que debe hacerlos producir, al menos en parte, como resultantes de una actividad humana a la cual se quiere iniciar a los estudiantes. Sin embargo, en la presentación axiomática, los contraejemplos son borrados de la historia de la construcción de los conocimientos. Una vez que el trabajo de construcción está terminado, el andamiaje de los contraejemplos desaparece del texto; este sólo puede ser restablecido -al menos en parte- por el lector (profesor o estudiante), como actividad de interrogación y de comprensión del texto. Esta restauración, evidentemente es muy parcial. Desde este punto de vista, si los procesos de producción matemática por los alumnos deben parecerse (aunque sea en lo mínimo) a los utilizados por los matemáticos, entonces no se parecerán mucho a los textos por los cuales las matemáticas se manifiestan a ellos y a sus profesores. Por consecuencia, provocar, manejar e interpretar actividades matemáticas de los estudiantes, exigirá de sus profesores dos tipos de conocimientos irreductiblemente muy diferentes, uno relativo a los textos y el otro relativo al proceso de construcción de los conocimientos matemáticos. La clasificación de las situaciones de contraejemplo presentada en este trabajo, pretende aportar elementos en ese sentido a los profesores y estudiantes de universidad.

Por otro lado, es conveniente separar, por una parte, el aspecto puramente matemático y lógico y, por otra las situaciones de enseñanza en las que aparece el contraejemplo. Esta separación ilustra el interés de la didáctica de la matemática que otorga una importancia especial en nuestra enseñanza a las situaciones en las cuales se desarrolla la transmisión del saber. En este sentido, todas las categorías que acabamos de definir en este documento, pueden ser consideradas englobadas en la misma situación matemática o lógica. Desde el punto de vista didáctico, hemos hecho la distinción tomando en cuenta el funcionamiento en el contexto de la enseñanza. Sin embargo, esta categorización no es ni exhaustiva ni disjunta. Podríamos considerar otras más. Además, una situación dada puede ser clasificada en más de una de estas categorías. Por ejemplo, hay situaciones que pueden clasificarse en la categoría "ampliación de conjunto" pero también en la categoría "necesidad de las hipótesis". De la misma manera, la categoría "restricción de definiciones" puede considerarse un caso particular de la categoría "recíproca de un teorema", pero la aparición de definiciones cada vez más restrictivas para acotar resultados más precisos es una situación que aparece frecuentemente en la enseñanza de las matemáticas, por lo que hemos querido hacer una categoría aparte. Otro ejemplo está relacionado con el siguiente enunciado *¿Todo límite de una sucesión de funciones continuas es también una función continua?* Podemos presentar este problema:

- Insistiendo sobre la estabilidad de la continuidad por paso al límite. La situación puede ser ahora asociada a la rúbrica *"¿estabilidad?"*,
- Insistiendo sobre el hecho sorprendente de que incluso si todas las funciones son continuas el límite no es forzosamente una función continua. La situación puede ser entonces asociada a la rúbrica "*efecto de sorpresa*".

## Referencias

[1] ARSAC, Gilbert, MANTE, Michel. Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), pp. 247-280, Springer, Holanda, 1997.

[2] BALACHEFF, Nicolas. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Ed Una Empresa Docente, Bogotá, 2000.

[3] BUSTOS, Álvaro y ZUBIETA, Gonzalo. Descubrimiento de Conocimiento Matemático Mediante la Reformulación de Conjeturas Falsas en un Ambiente de Pruebas y Refutaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), pp. 117-136, RACO, España, 2015.

[4] DURAND-GUERRIER, Viviane. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education* 40, pp. 373–384, Springer, Holanda, 2008. DOI 10.1007/s11858-008-0098-8

[5] GARCÍA, Orlando y MORALES, Luisa. El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13, pp. 161-175, FISEM, España, 2013. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/35/archivo14.pdf

[6] GELBAUM, Bernard y OLMSTED, John. *Counterexamples in analysis*. Holden Dav, Inc, Estados Unidos, 1964.

[7] HERNÁNDEZ, Juan, LOCIA, Edgardo, MORALES, Armando y SIGARRETA, José María. El Contraejemplo en la Elaboración de la Definición de Función Convexa por Estudiantes Universitarios. *Información tecnológica*. 30(1), pp. 185-202, CIT, Chile, 2019. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642019000100185

[8] HAUCHECORNE, Bertrand. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses Edition Marketing, Francia, 2007

[9] KLEENE, Stephen. *Introduction to Metamathematic*s.: North-Holland Publishing Company, Holanda, 1997.

[10] KNOBLOCH, Eberhard, (1991) L'analogie et la pensée mathématique. *Mathématiques et philosophie. De l'antiquité à l'age classique*. Pp. 217-237, Editions du CNRS, Francia, 1991.

[11] KNUTH, Eric J. y KO, Yi-Yin. Validating Proofs and Counterexamples Across Contente Domains: Practices of Importance for Mathematics Majors. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32, pp. 20-35. Springer, Estados Unidos, 2013.

[12] KOMATSU, Kotaro. Counter-examples for Refinement of Conjectures and Proofs in

Primary School Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), pp. 1-10, Springer, Estados Unidos, 2010.

[13] LAKATOS, Imre. *Pruebas y refutaciones: Ensayo sobre la lógica del descubrimiento matemático*. Cambridge University Press, Madrid, 1976.

[14] LOCIA, Edgardo y ANTIBI, André. Resolución de problemas de existencia de objetos que verifican una propiedad dada y de búsqueda de contraejemplos. *La demostración en contexto escolar*. Pp. 65-89 Universidad Autónoma de Guerrero, México, 2019.

[15] LOCIA, Edgardo; MORALES, Armando; MERINO, Héctor y MARMOLEJO, Efrén. Situación de contraejemplo y su utilidad en la actividad de enseñanza de la matemática. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 17(61), pp. 1-17, FISEM, España, 2021.

[16] MARTÍNEZ, Rosa y Patricia DETZEL. El Lugar que Ocupa el Contraejemplo en la Enseñanza de la Matemática, *III Reunión Pampeana de Educación Matemática,* Volumen III, pp. 531-537 Santa Rosa, La Pampa, Argentina, 2010.

[17] MORALES, Armando; LOCIA, Edgardo; RAMÍREZ, Melvis; SIGARRETA, José María y MEDEROS, Otilio. The Theoretical didactic approach to the counterexample in mathematics. *International Journal of Research in Education Methodology*. 9, pp. 1510-1517, Kalsha Publications, India, 2018.

[18] POLYA, George. *Les mathématiques el le raisonnement plausible*. Gauthier.Villars. París, 1958.

[19] WEBER, Keith. How Syntactic Reasoners can Develop Understanding, Evaluate Conjetures, and Generate Counterexamples in Advanced Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior,* 28, pp. 200-208, Springer, Estados Unidos, 2009.

[20] ZAZKIS, Rina. Y CHERNOFF, Egan. What Makes a Counterexample Exemplary? *Educational Studies in Mathematics,* 68, pp. 195-208, Springer, Holanda, 2008.

**Libros revisados para la búsqueda de Situaciones de Contraejemplo**

[21] APOSTOL, Tom. *Análisis Matemático*. Reverté Ediciones. España, 1972

[22] APOSTOL, Tom. *Calculus*, volúmenes I y II. Reverté Ediciones. España, 1999

[23] BIRKOHFF, Garrett y MACLANE, Saunders. *A survey of Modern Algebra*. Mac Millan Company. Estados Unidos, 1970.

[24] CALVO, Adina y CALVO Bernard. *Algèbre générale*. Masson, Francia, 1996

[25] CALVO, Adina y CALVO Bernard. *Algèbre linéaire*. Masson, Francia, 1995

[26] FRALEIGH, John. *Álgebra Abstracta*, primer curso. Adison Wesley Iberoamericana. Estados Unidos, 1988.

[27] MARSDEN, Jerrold y TROMBA, Anthony. *Cálculo vectorial*. Adison Wesley Iberoamericana. Estados Unidos, 1991

[28] SPIVAK, Michael. *Calculus, Cálculo infinitesimal*. Reverté Ediciones. España, 1992

**Sobre el/los autor/es:**

*Nombre:* Edgardo Locia Espinoza

*Correo Electrónico:* lociae999@hotmail.com

*Institución:* Universidad Autónoma de Guerrero, México.

*Nombre:* Armando Morales Carballo
*Correo Electrónico:* armando280@hotmail.com
*Institución:* Universidad Autónoma de Guerrero, México.

*Nombre:* Efrén Marmolejo Vega
*Correo Electrónico:* efrenmarmolejo@yahoo.com
*Institución:* Universidad Autónoma de Guerrero, México.

*Nombre:* Héctor Merino Cruz
*Correo Electrónico:* hmerinoc@gmail.com
*Institución:* Universidad Autónoma de Guerrero, México.

# Historias de Matemáticas

# Un problema sobre probabilidad del siglo XVII. Huygens y Hudde

# A seventeenth-century probability problem. Huygens and Hudde

José Antonio Camúñez Ruiz, María Dolores Pérez Hidalgo

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XIII, Número 1, pp. 099–126, ISSN 2174-0410
Recepción: 04 Nov'22; Aceptación: 01 Dic'22

1 de abril de 2023

**Resumen**

Tras la publicación de su pionero tratado sobre Cálculo de Probabilidades, en 1657, Huygens vuelve esporádicamente a este asunto a instancia de amigos y familiares, a través de correspondencia con ellos. En 1665 se da una de estas circunstancias, a instancias de su amigo Hudde. Entre ambos se cruza una correspondencia sobre resolución de problemas concretos en juegos de azar entre los que aparecen varias variantes, que los autores van introduciendo a lo largo de la correspondencia, sobre el problema que ellos mismos llamaron del cara y cruz. Van poniéndose de acuerdo en las condiciones del problema conforme avanza la correspondencia y, entonces, van coincidiendo en soluciones y resoluciones, usando un lenguaje algebraico del siglo XVII. En este trabajo presentamos traducciones al español de los fragmentos de la correspondencia que tratan con este problema, y llevamos a cabo la resolución de las diferentes variantes con lenguaje algebraico actual, pero imitando la forma de resolver de ellos. Proponemos estos problemas como ayuda en la docencia de esta materia para estudiantes que se inician en este tipo de cálculo.

**Palabras Clave:** Cálculo de probabilidades, Huygens, Hudde, problema del cara y cruz.

**Abstract**

Following the publication of his pioneering treatise on the Calculus of Probabilities, in 1657, Huygens sporadically returns to this issue at the urging of friends and family, through correspondence with them. In 1665 one of these circumstances occurs, at the urging of his friend Hudde. Between the two there is a correspondence on solving specific problems in games of chance among which several variants appear, which the authors introduce throughout the correspondence, on the problem that they themselves called the heads and tails. They agree on the conditions of the problem as the correspondence progresses and, then, they agree on solutions and resolutions, using a 17th century algebraic language. In this work we present translations into Spanish of the fragments of the correspondence that deal with this problem, and we carry out the resolution of the different variants with current algebraic language, but imitating the way of solving them. We propose these problems as an aid in the teaching of this subject for students who are starting in this type of calculation.

**Keywords:** Calculus of probabilities, Huygens, Hudde, heads and tails problem

# 1. Introducción

En 1657 se publica el primer texto sobre cálculo de probabilidades, *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Sobre el cálculo en juegos de azar), de la que es autor el científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695). El texto es el fruto de sus reflexiones y cálculos tras pasar unos meses en París, en 1655, un año después de producirse la famosa correspondencia entre los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662), que vivía en París, y Pierre de Fermat (1607-1665), residente en Toulouse. Entre los investigadores de la ciencia hay bastante acuerdo sobre el hecho de que dicha correspondencia estableció las bases sólidas para la construcción del nuevo cálculo. Pero dicha correspondencia no fue publicada hasta más tarde, en 1665, después de la muerte de Pascal. Los matemáticos del círculo de amistad de Pascal, en París, tuvieron conocimiento de la misma y fueron los que informaron a Huygens sobre su contenido. Realmente, informaron sobre los problemas abordados por ambos matemáticos, pero apenas sobre los métodos de resolución. En esta visita a París no pudo entrevistarse con el propio Pascal, dado que este se encontraba en una de sus retiradas espirituales en las que rechazaba cualquier visita. A su vuelta a Holanda informa a su maestro en matemáticas en la Universidad de Leiden, Frans von Schooten (1615-1660), sobre los nuevos conocimientos relacionados con el azar. Éste, que estaba preparando la publicación de una obra de carácter enciclopédico sobre matemáticas, *Exercitationum Mathematicarum*, le anima a que redacte sobre estos nuevos conocimientos con objeto de incorporarlos como uno de los anexos de la citada obra. Y así fue. En 1657, cuando Huygens tenía 28 años, se publica en latín la obra de von Schooten, y como un apéndice de la misma, el texto de Huygens. Tres años más tarde, en 1660, se publica la versión en holandés, con título *Van Rekeningh en Spelen van Geluck*.

El tratado consta de un prefacio con dos cartas, una de Schooten y otra de Huygens, 14 proposiciones, donde las 3 primeras establecen los principios básicos, las que van desde la 4ª a la 9ª resuelven el problema de los puntos (reparto de una apuesta en juegos inacabados) en situaciones simples, y las últimas resuelven problemas relacionados con lanzamiento de dados. El tratado se completa con 5 problemas propuestos, y no resueltos, para el lector, en el que el último de ellos, el 5º, es el conocido como "problema de la ruina del jugador". De los 5 problemas propuestos, el 1º, el 3º y el 5º, iban acompañados de su solución, pero no de su resolución. En cambio, en el 2º y 4º, relacionados con la extracción de bolas a ciegas de una urna que contiene bolas blancas y negras, no se expone ni solución ni resolución.

Del tratado destacamos la tercera proposición, la que se emplea para hacer la valoración de un juego, y clave para la resolución posterior de los problemas. La traducción literal de la versión latina es:

*Siendo p el número de casos en que me puede corresponder a, y q el número de casos en que puede hacerlo b, asumiendo que todos los casos son igualmente posibles, mi esperanza será igual a* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Se usa la palabra "expectatio" para valorar un juego, término que ha dado lugar a la esperanza matemática, operador tan utilizado, tanto en modelización estadística como en estadística inferencial.

En el prefacio del tratado, antes citado, Huygens reconoce la primacía de los genios franceses sobre este tipo de especulaciones:

> *Es necesario saber por otra parte que hace ya cierto tiempo que algunos de los más Célebres Matemáticos de toda Francia se han ocupado de este género de Cálculo, con el fin de que nadie me atribuya el honor de la primera Invención que no me pertenece.*

Pero en una carta a van Schooten fechada en 20 de abril de 1656, cuando ya se estaba preparando la publicación del texto, Huygens informa sobre su desconocimiento con respecto a los métodos de cálculo empleados por ellos:

> *La dificultad de este asunto está, precisamente, en poder comprender lo que surge del agudo ingenio de Pascal, que no ha contado nada, por lo que el mayor esfuerzo es continuar aseverando lo que, seguramente, fue investigado por él en su mayor parte, así como por Fermat. Los principios en los que se basan no han podido ser descubiertos hasta ahora.*

Respecto a los documentos publicados por él, aquí se acaba la aportación de Huygens al cálculo de probabilidades. Su rica vida científica tomó otros derroteros, relacionados con la astronomía o la física. Ahora bien, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, la Academia Holandesa de las Ciencias procede a la publicación de las obras completas de Huygens, recogiendo en las mismas lo publicado y lo no publicado por este autor, siendo esto último lo constituido por su inmensa correspondencia con científicos de toda Europa, y lo recogido en hojas sueltas y cuadernos manuscritos en los que el autor ensaya resoluciones de diversos tipos de problemas. En total, la Academia publica 22 tomos. Aquí es donde descubrimos que Huygens dedicó algo más de tiempo al cálculo de probabilidades y, casi siempre, a instancia de colegas o de su propio hermano, Lodewijk. Así, en el Tomo I encontramos la correspondencia previa a la publicación de su tratado, donde aparecen las dudas y discusiones con su maestro van Schooten. En el Tomo XIV aparece el propio tratado, y siendo acompañado de 9 apéndices que en su momento no fueron publicados, y que incluyen resoluciones manuscritas de diversos problemas de azar en diversos momentos de su vida. Y en el Tomo V nos encontramos la correspondencia que Huygens se cruzó con su compatriota Johann Hudde (1628-1704), en 1665, sobre resolución de algunos problemas concretos relacionados con juegos de azar, algunos de los cuales son objeto de nuestra investigación en este trabajo, y la correspondencia con su hermano Lodewijk (1631-1699) en 1669, en la que ambos hermanos discuten sobre el parámetro más adecuado para definir una tabla de vida: vida media o vida mediana, todo ello generado por la tabla de esa característica que aparecía en el texto de John Graunt (1620-1674), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, publicado en Londres 1662, y al que ambos tuvieron acceso.

En el trabajo que presentamos analizamos una parte de la correspondencia con Hudde de 1665, la que se dedicó a un problema concreto, que los propios autores denominaron "el problema del cara y cruz". Presentamos la traducción al castellano de los fragmentos de cartas donde aparece el problema, y la resolución dada por los autores al mismo, donde muestran su habilidad algebraica, su elegancia en la escritura de estas cartas, y sus intuitivas reflexiones sobre el asunto. Johann Hudde era amigo personal de Huygens, había coincidido con él, siendo estudiantes en Leiden, ambos discípulos de von Schooten, y en el momento de producirse la correspondencia vivía en Ámsterdam, mientras que Huygens permanecía en La Haya, razón por la cual se genera la misma, de la que nos ha llegado la mayoría de las cartas a través de las citadas Obras Completas (que se sepa, al menos tres de esas cartas han desaparecido).

Como profesores de esta materia, hemos probado incluir en los contenidos de asignaturas de iniciación al cálculo de probabilidades, la resolución de problemas de origen histórico como el que describimos en este texto. Detectamos una motivación especial por parte de nuestros alumnos, al conocer el contexto en el que se originan y la forma de resolver de los autores.

En el siguiente apartado exponemos nuestras traducciones al español, con nuestros comentarios, de los fragmentos de las cartas en los que se trata el problema que nos ocupa, y en el apartado 3º las resoluciones de estos autores con un lenguaje algebraico actual.

## 2. Fragmentos de la correspondencia Huygens-Hudde de 1665

Desconocemos la razón exacta por la que se originó esta correspondencia, pues la primera carta de esta serie no se conserva. Sospechamos que la misma fue provocada por la presencia al final del tratado de dos problemas en los que, como se ha dicho, no se mostraba ni resolución, ni solución. Recordamos, problemas 2º y 4º, ambos dedicados a calcular la probabilidad de ganar de cada uno de los jugadores participantes en un juego, consistente en la extracción al azar de una urna que contiene bolas blancas y negras. Pensamos que Hudde le envió la solución de ambos problemas en un momento anterior a abril de 1665, con la esperanza de que Huygens le manifestase la corrección o coincidencia de soluciones. Esto dio pie a una correspondencia, de la que se conserva 11 cartas (5 cartas de Huygens a Hudde, y 6 de Hudde a Huygens), en el periodo comprendido entre abril y agosto de ese año. Ya hemos informado que la Academia Holandesa de las Ciencias recoge en el Tomo V de las Obras Completas de Huygens esta correspondencia, y 5 apéndices escritos por Hudde, que son los manuscritos donde este autor ensayaba las resoluciones de los problemas planteados, y en el Tomo XIV, los apéndices II, III, IV y V del Tratado, que son las hojas sueltas donde Huygens realizaba sus propios cálculos, ensayos de resolución y disquisiciones sobre los problemas. Hemos de decir que, en las cartas que se remitían los autores no mostraban su forma de proceder, solo los resultados finales que, cuando no coincidían, generaban discusiones entre los mismos en las siguientes cartas. Añadimos, también, que los autores escribían principalmente en holandés y en latín. También, algunas notas en francés. La Academia Holandesa publica toda la obra de Huygens en la lengua en la que él redactaba y, también, en francés. Nosotros realizamos nuestra investigación usando las traducciones al español de la versión en francés de las cartas y apéndices que aparecen en las citadas Obras Completas.

Inicialmente, los problemas no se planteaban con toda la precisión necesaria, y eso era lo que daba lugar a esas diferentes interpretaciones. El transcurso de la correspondencia servía para ir incorporando hipótesis precisas sobre los problemas planteados y, así, llegar a coincidencias en los resultados. De hecho, en la 2ª carta de la serie, la de Hudde a Huygens de 5 de abril, leemos:

*Carta de Hudde de 5 de abril de 1665.*

> *Después de haber revisado mis cálculos sobre estas dos cuestiones, aunque únicamente a la carrera, pues era suficiente por el momento, y sin haber encontrado fallo alguno, no osaría, sin embargo, de acusaros de error, tanto menos cuando vos escribís, de forma muy expresa, que estáis en lo cierto y que no habéis calculado con error. Entonces, he pensado si no podría encontrarse algún doble sentido en el enunciado de las cuestiones y, que vos*

*habéis interpretado de una forma y yo de otra, y hemos resuelto cada uno cuestiones diferentes, y así, en lugar de dos, dos pares.*

En el contexto de esta correspondencia, además de los dos problemas ya citados de final del tratado, los autores plantean e intentan resolver, con mayor o menor éxito, otros problemas que iban surgiendo de la inventiva de ambos. Podemos resumir diciendo que, en total fueron dos tipos de problemas, los de extracción de bolas de una urna, y los de lanzamientos a cara y cruz, y que de este último tipo hemos contado hasta cinco variantes distintas. Son los problemas que analizamos en este trabajo.

*Carta de Huygens del 4 de abril de 1665.*

De esta carta sólo se conserva el resumen que Huygens tenía la precaución de redactar cuando la enviaba para tener referencias de lo que escribía, ante posibles discusiones posteriores. La fecha que disponemos es la del resumen. Seguramente, la carta fue enviada en fechas anteriores, pues la respuesta de Hudde fue enviada el 5 de abril, un día después de la fecha del resumen. En este resumen, Huygens contrasta los "números" de sus soluciones a los problemas de extracción de bolas de la urna (problemas 2 y 4 del final del tratado), con los de su interlocutor. Cuando estos autores hablan de números lo que están mostrando son los números con los que se pueden construir las probabilidades de ganar en el juego de cada uno de los jugadores (es decir de qué forma se construyen las probabilidades a partir de estos números). Al final del párrafo, encontramos la primera cita del problema de cara y cruz:

*Números, de las dos cuestiones de azar, distintos a los de él, es decir, en lugar de sus números 232, 159, 104, yo encuentro 4, 6, 9, y en lugar de sus 14 y 19, yo encuentro 35 y 64. Estoy seguro de que los míos son buenos.* ***Le propongo la cuestión de cara o cruz.***

*Carta de Hudde de 5 de abril de 1665.*

Volvemos de nuevo a esta carta de Hudde, a la parte en que entra en el problema al que nos referimos. Cuando los autores formulan la pregunta ¿cuánto pierde o cuánto gana un determinado jugador por participar en un determinado juego?, lo que están valorando es la esperanza de las ganancias (diferencia entre lo que recauda y lo que apuesta) de ese jugador por participar. O sea, usan la esperanza matemática como instrumento de valoración del juego para cada jugador. Si esa esperanza es positiva, los autores entienden que el jugador "gana" y, si es negativa, que "pierde". El valor de esa esperanza es la cantidad que responde a la pregunta sobre cuánto gana o cuánto pierde. Una vez que un jugador ha adquirido el compromiso de participar en el juego y si, calculada su esperanza, ésta sale negativa con una cantidad $a$, entonces si dicho jugador quiere renunciar a su participación en el mismo, ha de pagar al jugador contrario esa cantidad $a$. En ese sentido ha de entenderse la frase del fragmento que va a continuación, y que hemos señalado en negrilla:

*A continuación, en lo que respecta a la cuestión que me habéis propuesto como si fuese fácil y simple, aunque a mí me ha exigido bastante meditación, a saber:*

*"A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquél que consiga cara[1] tomará todo lo que está puesto; y A lanza el primero cuando nada ha sido puesto aún. Se pregunta, ¿cuánto pierde A si acepta este juego?* ***¿O cuánto se podría dar a B para***

[1] Hudde ha omitido, por descuido, este fragmento de frase que debería ser intercalado ahí: "debe poner cada vez un ducado, pero el que consiga cruz". Consultar la carta de Huygens del 10 de mayo.

***poder concluirlo?***", *he querido pensar al mismo tiempo, y he encontrado que B, en estas condiciones, conseguirá de provecho 1/6 de un ducado. Por lo menos, esto es cierto en el sentido en que yo interpreto las palabras: pero que hace, si nosotros no tuviésemos del mismo modo dos o más cuestiones, de manera que éste podría ser muy bien vuestro turno, en caso de diferencia, de descubrir el doble sentido. Estoy curioso por saber si coincidiremos, aunque no tengo duda, por lo menos si entendemos las palabras en el mismo sentido.*

*Carta de Huygens del 10 de abril de 1665.*

De nuevo, de la respuesta de Huygens, de 10 de abril, sólo disponemos el resumen que el propio autor redactó:

*Es cierto que ambos hemos calculado bien, y esto es debido al doble sentido que se le puede dar a ambas cuestiones. En la cuestión de cara o cruz, su solución, la de que A perdería 1/6 de un ducado, no coincide con la mía que es 4/27 de un ducado.*

*Carta de Hudde de 5 de mayo de 1665.*

A lo largo de esta correspondencia observamos como, por descuido, los autores intercambian entre sí los efectos que ejercen en el juego el hecho de lanzar cara o cruz.

*La cuestión que vos me habéis propuesto por primera vez en una carta del 4 de abril*[2] *se enuncia así:*

*"A y B lanzan por turnos a cara o cruz bajo la condición de que aquél que lance cara pondrá cada vez un ducado, pero el que lance cruz, cogerá todo lo que está puesto, y A lanza el primero cuando nada ha sido puesto aún. La cuestión es, ¿cuánto pierde A por entrar en el juego? o ¿cuánto debería entregar a B para poder concluirlo?"*

*En mi respuesta*[3] *del 5 de abril yo recojo todas estas mismas palabras, de manera que las subrayadas, que vos me escribís*[4] *que no están en mi carta, deberían haber sido errores dada la rapidez con que las copié, lo que ha podido ocurrir aquí, tanto más como que la misma palabra "werpt"*[5] *precede y sigue inmediatamente. Encuentro también haber respondido a esta cuestión, que en esta condición B sacará de provecho 1/6 de un ducado, al menos que fuese cierto en el sentido que yo atribuía a las palabras, pero que, quizás, de esta cuestión podríamos extraer aún dos o más. Pues, como no se había precisado aquí el número de lanzamientos o de veces que se debía poner un ducado, ni indicado expresamente su indeterminación, me parecía que aún quedarían razones para dudar si en la cuestión, quizás, podría haber sido omitido algo sobre la determinación de las veces, o, si no, si se podría explicarlo por una vez de una parte y de otra, o bien, tenerlo por indeterminado. Esta última suposición me habría parecido la más probable, y también, supe después por vuestra misiva del 10 de abril que vos lo entendíais así, como se concluye de las palabras: ahora bien, para evitar en lo que sigue cualquier doble sentido, añadiría aún que entiendo que cada vez que A o B lancen cara, deben poner un ducado, de manera que alguna vez hay varios ducados puestos, antes de que por primera vez se lance cruz, es decir, que se coja todo lo que ha sido puesto. Pero como en vuestra carta precedente*[6] *aún aparecen a propósito*

[2] En la primera carta que se conserva de la correspondencia.
[3] En la segunda carta que se conserva de la correspondencia.
[4] Carta que está desaparecida.
[5] El equivalente a "cruz" en holandés.
[6] En la primera carta que se conserva de la correspondencia.

> *de esta cuestión las palabras:* ***Vos os ocupareis tan fácilmente de examinar esto, que parece no exigir mucho cálculo, de forma que sólo es necesario encontrar el camino para conseguir lo que se desea****; y como había más cálculo en el sentido indeterminado que en el susodicho sentido determinado, elegí provisionalmente éste con preferencia al otro, de manera que mi solución contempla la cuestión así propuesta: A y B lanzan por turnos a cara o cruz, bajo la condición de que aquel que lance cara, pero sólo por 1ª vez, pondrá un ducado, etc. Y vos tomáis la cuestión en este sentido: A y B lanzan por turnos a cara o cruz, bajo la condición de que aquel que lance cara, siempre, pondrá un ducado, etc. Pero, sin embargo, aunque no más que vos mismo, yo no puedo ver que aún queda algo de incertidumbre en los términos de la cuestión, a pesar de ello, los resultados que hemos encontrado no coinciden, pues siguiendo vuestro cálculo A perdería 4/27 de un ducado, y según el mío, 2/9.*

*Carta de Huygens de 10 de mayo de 1665.*

En esta carta, Huygens le comenta a su interlocutor que existe la posibilidad de proponer una amplia variedad de problemas relacionados con juegos de azar, aunque, añade también, tiene dudas sobre si vale la pena dedicar tiempo a este tipo de especulaciones.

> *La razón por la cual os proponía la cuestión de cruz o cara era únicamente porque, al mostrarme lo que vos habíais escrito con respecto al cálculo en los juegos de azar, añadíais que no pensabais que se pudiese proponer aún alguna cosa particular en esta materia. Porque la susodicha cuestión me vino a la mente poco después, me parece bien de vos la propuesta como asunto de nueva especulación, la que me habéis enviado. Creo que ahora habréis percibido, al igual que yo, que esta cuestión es distinta a todas las que se encuentran en mi Tratado impreso, y que se podría imaginar aún otras más, distintas entre ellas, y exigiendo más meditación. Pero la utilidad no es suficientemente grande como para emplear mucho tiempo. En cuanto a la cuestión que habéis querido proponerme como conclusión de vuestra última, al principio me pareció bastante difícil, pero la he terminado con más facilidad de lo que yo creí.*

La cuestión que Hudde le plantea, de la que escribe Huygens, era una más relacionada con la extracción al azar de bolas de una urna. Continúa la carta y aparece de nuevo el problema de cara y cruz, con una nueva versión del mismo.

> *Puesto que, en mi cuestión de cruz o cara, la condición de A es peor, puesto que él lanza primero, entonces cuando nada ha sido puesto aún, se podría plantear cuánto deberían poner al principio A y B (es decir, cada uno una misma suma) para que, desde el inicio, ceteris positis ut prius, sus condiciones sean equivalentes. No sé hasta qué punto será difícil esta cuestión, puesto que aún no la he pensado. Tampoco la he planteado para demandaros la solución, sino únicamente porque me ha venido a la mente, como emanando de la cuestión que vos habéis propuesto últimamente. Sólo os pido que me hagáis saber, a la vista de lo cual, si hemos obtenido igual resultado.*

*Carta de Hudde de 29 de junio de 1665.*

En esta carta, Hudde le envía la solución a la última versión del problema. También, coincide con Huygens sobre la utilidad o no de dedicarle tiempo a este tipo de problemas.

> *… en lo que respecta a la siguiente cuestión, sobre la que no habéis reflexionado aún, a saber:*

*A y B lanzan por turnos a cruz o cara, en la condición de que aquél que lance cruz pondrá un ducado, pero aquél que lance cara cogerá todo lo que está puesto; y A lanzará el primero. Se pide, cuánto deberán poner A y B desde el principio, es decir, cada uno una misma suma, para hacer que las condiciones de A y B sean las mismas; encuentro como solución de esta cuestión 1+1/3 ducados que deben poner entre ambos, o 2/3 cada uno. Y no puedo creer que me haya equivocado en estos cálculos, dado que los he hecho por dos caminos distintos y que los dos, uno con y el otro sin Álgebra, son los mismos que he empleado para solucionar las tres cuestiones más difíciles que se encuentran en vuestro Tratado. Sin embargo, como estas cuestiones no os parecen (ni a mí tampoco) de tal utilidad como para emplear mucho tiempo, no quiero aseguraros con total rotundidad que he calculado bien en todo esto, sería posible también que me hubiese equivocado de vez en cuando en alguna pequeña letra, como ocurrió en la segunda de las 5 cuestiones que vos habéis propuesto al final de vuestro Tratado.*

*Carta de Huygens de 7 de julio de 1665.*

Después de un texto extenso en el que el autor reflexiona sobre su resolución y la resolución de su interlocutor en el caso de los problemas sobre extracción al azar de bolas de una urna, Huygens muestra su coincidencia con Hudde en la solución de la última versión del problema:

*En cuanto a mi última cuestión de cruz o cara, para hacer iguales las chances de A y B, aquí encuentro el mismo resultado que vos, a saber, que cada uno debe poner al principio 2/3 de un ducado.*

*Carta de Hudde de 20 de julio de 1665.*

Esta carta es la más extensa de la serie. Hudde empieza a mostrar sus procedimientos. La discusión está centrada en los problemas de urnas, donde hay más descuerdo entre ambos, pues parece manifestarse que usan métodos distintos:

*En mi última*[7] *creía estar tan seguro de haber calculado todo bien (apoyándome, como vos escribíais, en los diferentes cálculos llevados a cabo, siguiendo dos vías diferentes, y que no eran nuevos sino los mismos con los que yo había resuelto las principales cuestiones contenidas en vuestro pequeño Tratado de "Rekening in spelen van geluk"*[8]*, y obtenido los mismos resultados que vos), que no he previsto la corrección de mis resultados obtenidos, sino que, todo lo contrario, estaba esperando que vos también estabais descubriendo el error de vuestros diferentes resultados, como yo había encontrado el mío con respecto a la 1ª cuestión y vos habíais tomado parte, y que, una vez puesto de acuerdo, con vuestra respuesta habríamos dado un final a estos cálculos en juegos de azar. Pero reconozco que nunca me ha llamado tanto la atención, ni se me ha mostrado más inesperado, que vuestra última del 7 del corriente que es la respuesta a mi precedente, en la cual veo que os habéis tomado la molestia de retomar con ardor vuestras meditaciones, más o menos procedentes de vuestra memoria, después de algún tiempo de descanso y que, sin embargo, al final habéis encontrado el mismo resultado que antes de 207/343, en lugar del mío, 9/245, añadís que no dudáis, de ningún modo, que yo, al revisar mis cálculos, encontraría que vuestro resultado es correcto.*

[7] Carta de Hudde del 29 de junio.

[8] Es el título en holandés del tratado de Huygens

Después, dado su desacuerdo con Huygens en los problemas de urnas, duda sobre la coincidencia de metodologías, aun habiendo coincidido en la solución de la última versión del cara y cruz.

> *Pero que, sin embargo, en vuestra última cuestión de cruz o cara, para convertir en iguales las chances de A y de B, habéis encontrado el mismo resultado que yo, a saber, que desde el inicio cada uno debería poner2/3 de un ducado.*
>
> *¿Cómo pueden estar bien, decidme vos, mis pensamientos tras leer todo esto por primera vez? Pues comprendí enseguida que no podíamos seguir considerando más nuestro acuerdo en alguna de nuestras 4 cuestiones, aunque en la primera y en la última los resultados fuesen los mismos de una parte y de otra, a la vista de que la regla general que vos teníais para cuestiones parecidas no estaría conforme con la mía, puesto que, de otra forma, vuestros dos resultados 207/343 y 105/131, habrían debido concordar con los míos de 9/245 y 0; pero que, probablemente, el acuerdo en las cuestiones primera y última habría nacido de la igualdad de las susodichas letras a, b, c, d, que en las otras han sido supuestas desiguales.*
>
> *Mis primeros pensamientos cayeron sobre mí mismo. ¿Estaría, quizás, de nuevo equivocado en mi cálculo? Sin embargo, hay poca posibilidad de que sea así, a la vista de que he calculado todo con dos métodos diferentes y que me habían dado resultados correctos en otras cuestiones, y que los he encontrado conformes. Pero, lo que vos conseguís en la 1ª cuestión, ¿no puede lograrse en las otras? Ciertamente; pero creo también que el fundamento de este error ha sido planteado de noche, mientras estabais medio dormido, y que yo he estado presente en mis otros cálculos con los sentidos muchos más despiertos. ¿Es que el Señor de Zuilichem[9] (estando ahora en posesión de mi regla general que, como otras, es de tal naturaleza que un único ejemplo entre un número infinito y, habitualmente, un ejemplo fácil de determinar, puede indicar la falsedad cuando no es buena) estaría, pues, aún equivocado? Y esto cuando, habiendo casi olvidado por completo sus razonamientos anteriores, ¿ha retomado de nuevo el asunto con ardor? He aquí lo que aún me parecía menos posible, en particular, al tener en cuenta la habilidad y finura de ideas que vos habéis alcanzado, en más alto grado que otros, en el asunto de los juegos de azar; y sobre todo cuando, al mismo tiempo, yo acababa de considerar el rango que ahora vos ocupáis entre los sabios y los más excelentes matemáticos de este siglo. Desde luego, si entonces hubiese estado obligado a arriesgar una chance con vos bajo las citadas condiciones, habría querido perder algo para ser excusado. Digo "algo", pero sin tener presente en tal caso mis razonamientos y, sin embargo, acordándome muy bien de la atención que le había prestado, me fiaba un poco de mis propias fuerzas. No obstante, dejé en ese instante el asunto a la mitad y suspendí mi opinión hasta un nuevo examen. Estaba dispuesto a volverme al campo para buscar algún descanso y, fuera del hormigueo y de la agitación de los ciudadanos, concentrar mis ideas que, desde hacía algún tiempo habían estado distraídas y dispersas por las desgracias de la República; e incluso, experimentando sobre mí mismo, saber hasta qué punto, en estos tiempos turbados, podría mantenerme tranquilo y libre de cualquier temor. Pero veo que las más altas montañas aparecen entre el dicho y el hecho, que nada es más fácil que descubrir el camino que lleva a la tranquilidad y nada es más difícil que seguirlo:*

[9] Es el título nobiliario de Huygens.

*Rex est qui metuit nihil,*

*Rex est quique cupit nihil.*[10]

*Ahora bien, como vuestra regla general, que se adapta a esta última cuestión, debe ser aplicable también, necesariamente, a las precedentes, tal como vuestra primera cuestión de cruz o cara, se sigue claramente que, según ella podemos únicamente por azar encontrar resultados concordantes con la fracción de la primera cuestión y, por consiguiente, también de la última, que se deriva con muy poco cambio.*

*Y ahora creo que vos estáis también, por lo menos, tan sorprendido como lo estaba yo; pues, según me parece, no esperabais corrección a vuestras correcciones, aun diciendo lo contrario al final de vuestra carta, aunque sólo bromeando. Y quizás, sonreiréis ahora conmigo, de nuevo, viendo que hemos intercambiado tantas cartas de una y otra parte sobre estas cuestiones de juegos de azar, y que no hemos avanzado, sino que, más bien, hemos retrocedido, a la vista de que ahora no queda una sola cuestión sobre la que podamos asegurar estar completamente de acuerdo. Pero me parece, sin embargo, que comienza a llegar el momento de conseguir el final de este asunto, que ha durado bastante. El camino más corto para llegar será que os muestre uno de mis métodos, por el cual he resuelto todas las cuestiones de juegos de azar que hemos propuesto que, en su orden, son las cuatro que siguen; y así podría demostrar al mismo tiempo lo que he dicho arriba con respecto a vuestros resultados 207/343 y 105/131.*

*1ª Cuestión propuesta por vos.*

*A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquél que lance cara, pondrá un ducado, pero aquél que lance cruz se quedará con todo lo que hay puesto. Y A lanza el primero cuando aún no hay nada puesto. Se pide, ¿cuál es la ventaja de A cuando se compromete en esta partida, o cuánto debería dar a B para poder concluir?*

*Hemos dado los dos como respuesta que A perdería así 4/27 de un ducado.*

*4ª Cuestión propuesta por vos.*

*A y B lanzan por turnos a cruz y cara, bajo la condición de que aquél que lance cara pondrá un ducado, pero aquél que lance cruz arramblará con todo lo que ha sido puesto; y A lanzará el primero. Se pregunta, ¿cuánto deberán poner A y B al principio, es decir, cada uno una misma cantidad, para conseguir que las condiciones de A y B lleguen a ser iguales?*

*Aquí damos los dos la misma solución, a saber, 2/3 de un ducado como lo puesto por cada parte.*

Y entonces Hudde describe su método de cálculo para el caso de la extracción al azar desde una urna, e indica que es el mismo método que el que ha usado para resolver los problemas de cara y cruz.

*Carta de Huygens de 28 de julio de 1665.*

*Creo ahora que pronto llegará un final para nuestras cuestiones sobre juegos de azar, pero hasta aquí no lo tenemos, y veo con asombro los singulares incidentes, que nos retienen tanto tiempo. No debéis pensar que yo bromeaba cuando decía al final de mi última*[11] *que*

[10] Rey es el que no teme nada, Rey es el que no desea nada.
[11] En la carta de Huygens del 7 de julio.

*esperaba de nuevo alguna corrección, pues nunca he tenido tal confianza en mí mismo como para creer que en el cálculo e incluso en el razonamiento no estaría sujeto a error, y ahora me siento aún más tímido que antes, viendo que el Señor Hudde, después de haber revisado su cálculo hasta 2 o 3 veces, y después de haber corregido con una mente despierta lo que había errado dormitando, y habiendo encontrado todo por dos vías diferentes, que le dan el mismo resultado— viendo todo esto, digo yo, sin embargo, él ha podido equivocarse. Estará, sin duda, extrañamente sorprendido de pensar esto, y todavía más cuando yo osaría a afirmar que no ha habido fallos en mis cálculos y que, cuando él y yo hemos obtenido un mismo resultado para una misma cuestión, yo he calculado correctamente y él mal. Todo esto lo haré ver aquí, no obstante, salvo corrección.*

Se van aclarando las condiciones o hipótesis del problema:

*Pues bien, debéis saber que al plantear mis cuestiones he omitido por descuido añadir al final que yo entendía que el juego no debía concluir antes de que algo hubiese sido puesto de una parte o de otra. Se deduce que vos habéis supuesto que si A, al inicio, lanza cruz, o bien, extrae una ficha blanca, el juego estaría concluido; y reconozco que mi descuido ha sido la primera causa. Pero vuestro fallo en el cálculo me ha impedido observar que provenía de algún malentendido, pues me di cuenta poco después de haber enviado mi última*[12] *que esta omisión podría dar lugar a otra interpretación de mis problemas y no podía, sin embargo, presumir que esto estaba ocurriendo en efecto, al ver que vos habíais encontrado el mismo resultado que yo, de* $\frac{4}{27}$*, en la cuestión de cruz o cara*[13]*: dicha concordancia es ciertamente muy singular.*

*Carta de Hudde de 21 de agosto de 1665.*

Es una larga carta. En la misma, Hudde expone sus métodos. Es la última que se conserva de esta serie. Seguramente, hubo alguna carta respuesta por parte de Huygens, dado que Hudde le reclamaba en esta. De la carta hemos seleccionado algunos fragmentos:

*No haber vuelto hasta anteanoche de un pequeño viaje al interior es la causa de que no os haya respondido antes a vuestra última, en la cual veo que tengo razón para creer que por fin habremos encontrado el desenlace completo de nuestras cuestiones sobre juegos de azar. A esto hemos llegado, como habitualmente se llega cuando se disputa, y después de media docena de horas de discusiones, habiendo encontrado por fin, con todo discutido, el verdadero status Quaestionis, llegándose en un momento a entenderse.*

*Pero me extraño con vos de tantas circunstancias singulares con las que nos hemos encontrado aquí. Y como no las conocíais aún todas, y para que al mismo tiempo pudieseis ver que yo nunca había calculado con error, ni incluso en lo que cambié en otro momento y llamé fallo, con el fin de que pudieseis conocer al mismo tiempo mi otro y primer método; -me tomaría aún el trabajo de deciros, cómo he considerado y calculado la cosa desde la primera vez. Y para hacerlo ordenadamente, debería retomarlo desde el comienzo.*

*Pues sois vos quién ha sido el primero en escribirme una carta*[14] *sobre estas cuestiones de juegos de azar, en la cual habéis corregido dos resultados que os había dado para las*

[12] En la carta de Huygens del 7 de julio.
[13] En la carta de Hudde del 29 de junio.
[14] En la primera carta que se conserva de esta correspondencia. Carta de Huygens del 4 de abril.

*cuestiones 2ª y 4ª incluidas al final de vuestro pequeño Tratado de los juegos de azar, que se encuentran sin su fracción*[15]*, con lo que pudisteis ver si concordaban con las vuestras; a continuación me proponéis resolver vuestra primera cuestión de cruz o cara, en estos términos: A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquel que lance cara pondrá un ducado cada vez, pero que aquél que lance cruz tomará todo lo que hay puesto. Y A lanza el primero cuando nada ha sido puesto aún. La cuestión es ¿cuánto pierde A cuando entra en este juego, o cuánto debería dar a B para poder acabar?*

*Después de haber mostrado en mi respuesta*[16] *que había un doble sentido para estas 2ª y 4ª cuestión que habéis planteado, y que vuestros números tenían relación con uno de los dos sentidos y los míos con el otro, daba también 1/6 de un ducado como la solución de esto, pero añadía con premeditación estas palabras: pero quién sabe si estaremos incluso en dos o varias cuestiones; y, por consiguiente, muy bien podría ser vuestro turno, en caso de diferencia, de buscar el doble sentido. Tengo curiosidad por saber si estaremos de acuerdo, aunque no lo dudo, al menos si entendemos las palabras en el mismo sentido.*

*En vuestra respuesta a esto*[17] *me dejáis completamente fuera de fallo en lo que concernía al error sospechado, y atribuís la causa únicamente a vos mismo, por no haber planteado de forma conveniente y sin equívocos estas dos cuestiones; …*

*A continuación, en cuanto a la otra cuestión de cruz o cara vos disipáis tan netamente, como si hubieseis conocido mis pensamientos cuando yo calculaba, el doble sentido que había encontrado, diciendo: Ahora bien, para evitar en lo que sigue cualquier doble sentido, añadiría aún esto, que entiendo que cada vez que A o B lanzan cara, deben poner un ducado, de manera que, a veces, pueden encontrarse puestos muchos ducados, antes de que por primera vez se lance cruz, es decir, antes de que se coja todo lo que ha sido puesto. No puedo ver que ahora quede aquí alguna incertidumbre, pero dudo si la cuestión es tomada por vos en esta acepción, puesto que vuestro cálculo, según el cual A perdería 1/6 de un ducado, no coincide con el mío, pues encuentro que A pierde 4/27 de un ducado.*

*A esto os he respondido*[18] *de nuevo, que no había tomado la cuestión en este sentido indeterminado, aunque lo hubiese pensado, añadiendo mi razón; pero por provisión en este sentido: A y B lanzan por turnos a cruz o cara, bajo la condición de que aquél que lance cara pondrá un ducado pero únicamente por primera vez, etc; pero (continuaba yo) aunque no más que vos mismo, no podía ver que quedase aún alguna incertidumbre en los términos de la cuestión, aunque los resultados que encontramos no concuerdan: pues siguiendo vuestro cálculo A perdería 4/27 de un ducado, y según el mío 2/9. Y en esta carta os he propuesto por primera vez mi cuestión del juego equivalente, formada de las palabras de vuestra cuestión, tantas como el enunciado podía sufrir.*

*Ahora, en vuestra respuesta*[19] *a ésta encuentro la razón por la que vos me habéis propuesto esta cuestión de cruz o cara; a saber, porque juzgáis que era de otra categoría de cuestiones de todas las que se encontraban en vuestro Tratado impreso, y porque, al mostraros lo que yo había calculado con respecto a algunos juegos de azar, habría añadido que no pensaba que algo singular pudiese aún ser propuesto en esta materia. ¿No habría*

[15] Que aparecen en el Tratado sin su solución.
[16] En la segunda carta que se conserva de esta correspondencia. Carta de Hudde del 5 de abril.
[17] En la carta de Huygens del 10 de abril.
[18] En la carta del 5 de mayo.
[19] En la carta del 10 de mayo.

> *dicho que no pensaba que en esta materia algo singular podría ser aún propuesto, cuyos fundamentos no estuviesen comprendidos en lo que yo había escrito en estas hojas de papel? Puesto que yo había resuelto más cuestiones, incluso siguiendo otras formas, que no se encontraban en vuestro Tratado. Seguramente creo haber querido decir únicamente esto, y permanezco aún en la misma opinión.*

A continuación, Hudde explica su forma de resolver, que nosotros mostraremos en el siguiente apartado, pero con un lenguaje actualizado.

Siguen otros fragmentos (aquí el autor usa la palabra chance como sinónimo de probabilidad o, incluso, esperanzas):

> *Cuando tenía calculado esto, calculé también, por añadidura y de la misma manera, la chance de B, y encontré que B ganaba en un sentido 1/6 y en el otro 2/9 de un ducado, lo que concuerda con lo que precede. La razón por la que yo interpretaba primero la cuestión en este primer sentido antes que en el 2º, aparecería aquí claramente, puesto que, proponiendo esta cuestión, vos habéis añadido que yo me prestaría más fácilmente a buscar la solución que se admitía que no necesitaba mucho cálculo, pero que únicamente el camino era encontrar para alcanzar el objetivo, -no podía aplicar estas palabras a este 2º cálculo, pero sí al 1º. Y como estaba somnoliento y era el momento de dormir, no me parecía adecuado hacer este cálculo en la incertidumbre sino, más bien, haceros conocer con mi solución que esta cuestión, igual que los dos precedentes, no estaba exenta de equívoco, y a continuación esperar sobre esto vuestra propia determinación posterior. Pero, ¿cuál puede ser, pensáis ya vos, la razón de este cambio? Al regresar a casa, del viaje, juzgaba que lo mejor sería, antes de enviaros esta carta, examinar aún una vez más si sabría encontrar de dónde obtenéis vuestra fracción de 4/27 que, de nuevo, afirmabais[20] ser la cierta. Y reconozco que esta investigación me ha costado 3 veces tanto tiempo como todo el resto. No pensaba más que en un doble sentido de las palabras, tales como ellas eran, como ahora habéis buscado ya, con reflexión, quitando todo equívoco, y además yo no había percibido otro. No pensaba en un fallo de mi cálculo, puesto que no podía creer haberlo cometido, después de haber encontrado el mismo resultado, y esto para dos números bastante diferentes, puesto que las progresiones infinitas eran totalmente distintas de una parte y de otra. No podía más dudar de mi razonamiento, dado que se apoyaba en un Teorema bastante simple, el cuál era, según creo, el 1º de vuestro Tratado[21].*
>
> . . .
>
> *Después de haber ensayado, tanto esto como aquello, pensé por fin que A, al lanzar cruz y así concluir el juego, acabaría ganando tanto de esta manera como lo que pierde por la condición del juego. Ahora bien, en este pensamiento donde se puede caer fácilmente[22] hay, evidentemente, un doble sentido en la palabra ganar; pues se puede tomar de manera que, al lanzar A cruz, B no tendría que dar nada a A, y en tal sentido ya había encontrado la fracción de 1/6 y de 2/9, y vos lo habíais copiado; o bien, en el sentido que A, al lanzar cruz, ganaría, es decir, recibiría tanto de B como lo que perdería por la condición del juego.*
>
> . . .

[20] En la carta de 10 de mayo.

[21] Se refiere a la tercera proposición del Tratado de Huygens, que hemos citado en la introducción.

[22] Sobre la propia carta de Hudde y en este lugar concreto Huygens escribe "esto no me parece, en absoluto".

*Veis, pues, que esta cuestión de cruz o cara que habéis propuesto es mucho más fecunda que las 2ª y 4ª situadas al final de vuestro Tratado, las cuales no son más que duplicadas, mientras que ésta ha engendrado al menos otras dos, como había presumido en mi última respuesta.*

. . .

*En fin, Señor, veis que el esfuerzo que me he tomado para conciliar nuestros pensamientos, y que he tendido en todas nuestras cuestiones sobre juegos de azar, sin embargo, para las tres últimas no ha conseguido aún lograrlo antes de que mis cálculos generales os hayan llegado, si os place explicar con más precisión vuestra opinión. A esto, pues, en lo que sigue (si de nuevo algo similar ocurriese) sería mejor prestar atención: pues podéis estar seguro que de lo contrario me empeñaría muy fácilmente en el mismo laberinto, por ser desafortunado al adivinar vuestra opinión y, sin embargo, estar dispuesto al más alto grado de armonía en nuestros pensamientos.*

## 3. Soluciones a los problemas de cara y cruz dadas por los dos autores

Los jugadores, A y B, lanzan una moneda equilibrada en un juego a cara o cruz, siendo A el primero en lanzar. Por lo tanto, la secuencia continua de jugadas es ABABAB ... Si se lanza cruz, el jugador que lo lance debe poner un ducado en la mesa. Si se lanza cara, el jugador que lo lance se lleva todo lo que hay en la mesa. A lo largo de la correspondencia los autores intercambian, descuidadamente, el papel del lanzamiento cruz y lanzamiento cara. En las soluciones que vamos a aportar siempre usaremos el lanzamiento de cruz como el caso en que hay que poner un ducado por parte del que lo lanza, y el de cara como el caso contrario que, para cada versión del problema tendrá un significado distinto. Al comienzo del juego, no hay nada en la mesa. Para entender mejor la exposición que sigue presentamos 2 ejemplos de posibles resultados de este juego (representamos por + el suceso salir cruz en un lanzamiento, y por c, el suceso salir cara):

- Si, por ejemplo, se observó la secuencia de jugadas + + + + + + c, o sea, el juego se ha resuelto en 7 lanzamientos, en los que los 6 primeros han sido + y el séptimo ha sido c, tenemos que el jugador A ha tenido que poner 3 ducados, por las tres + lanzadas en 1º, 3º y 5º lugar, y el jugador B también ha puesto 3 ducados por las cruces lanzadas en 2º, 4º y 6º lugar. Como la cara lanzada en séptimo lugar ha sido lanzada por A, entonces este jugador se lleva todo lo que está en la mesa, 6 ducados, de los que 3 son puestos por él, y 3 puestos por B. Por tanto, la ganancia del jugador A, con este resultado, sería de 3 ducados.
- Si, por ejemplo, se observó la secuencia + + + c, o sea, el juego fue resuelto en 4 lanzamientos, y la cara fue lanzada por B, el jugador A ha puesto 2 ducados (por las + lanzadas por él en 1º y 3º lugar), y el jugador B ha puesto 1 ducado (por la cruz lanzada por él en 2º lugar). Entonces, cuando se va a realizar el 4º lanzamiento hay en la mesa 3 ducados. El 4º lanzamiento lo realiza B y obtiene c. Se lleva todo lo que está en la mesa, 3 ducados, de los que 1 lo ha puesto él y 2 los ha puesto el jugador A. La ganancia del jugador B con este resultado es de 2 ducados. La pérdida del jugador A, por lo tanto, es de 2 ducados.

### *1.1 Soluciones de Hudde a las dos primeras variantes*

En el supuesto de Hudde, si el juego comienza con el lanzamiento de una cara, el juego concluye. En ese caso la ganancia de A sería 0, igual que la de B. Por tanto, para que haya dinero en la mesa todos los juegos deben proceder necesariamente con una secuencia de cruces seguida de una única cara.

*3.1.1 Primera variante de Hudde del problema*

En sus pensamientos iniciales, Hudde supone que cada jugador pone únicamente 1 ducado en la primera ocasión que le sale +. En el resto de + que le van saliendo a cada jugador antes de que salga c ya no ponen nada sobre la mesa. La siguiente tabla muestra la secuencia de posibles resultados:

*Tabla 1.* Posibles resultados de la primera variante de Hudde del problema de cara y cruz.

| Posibles resultados del juego | Ganador del juego | Probabilidad de que se dé ese resultado | Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento | Ganancia del jugador A |
|---|---|---|---|---|
| c | A | $(1/2)^1 = 1/2$ | 0 | 0 |
| + c | B | $(1/2)^2 = 1/4$ | 1 | -1 |
| + + c | A | $(1/2)^3 = 1/8$ | 2 | 1 |
| + + + c | B | $(1/2)^4 = 1/16$ | 2 | -1 |
| + + + + c | A | $(1/2)^5 = 1/32$ | 2 | 1 |
| + + + + + c | B | $(1/2)^6 = 1/64$ | 2 | -1 |
| + + + + + + c ⋮ | A ⋮ | $(1/2)^7 = 1/128$ ⋮ | 2 ⋮ | 1 ⋮ |

*Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hudde.*

Fijándonos en la tabla anterior, la pérdida esperada de A sería:

$$(-1)\cdot\frac{1}{4}+(-1)\cdot\frac{1}{16}+(-1)\cdot\frac{1}{64}+\cdots=-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\right]=\underbrace{-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}}_{\substack{\Uparrow \\ \text{Progresión geométrica de razón} \\ \frac{1}{4}\text{ y primer término }\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{3}$$

Y la ganancia esperada de A sería:

$$1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{32}+1\cdot\frac{1}{128}+\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{4}\right)^7+\cdots=\underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}}_{\substack{\Uparrow \\ \text{Progresión geométrica de razón} \\ \frac{1}{4}\text{ y primer término }\left(\frac{1}{2}\right)^3}}=\frac{1}{6}$$

Por tanto, el saldo esperado para el jugador A (diferencia entre ganancia y pérdida esperada): $\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$, que coincide con la solución dada por Hudde en su carta de 4 de abril, cuando escribe *he encontrado que B en estas condiciones, conseguirá de provecho 1/6 de un ducado.*

*3.1.2 Segunda variante de Hudde del problema*

Posteriormente, los dos autores coinciden en el supuesto de que los jugadores pondrán sobre la mesa 1 ducado cada vez que lancen +. Veamos ahora la solución de Hudde para este caso. Recurrimos de nuevo a la construcción de una tabla de posibles resultados:

*Tabla 2.* Posibles resultados de la primera variante de Hudde del problema de cara y cruz.

| Posibles resultados del juego | Ganador del juego | Probabilidad de que se dé ese resultado | Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento | Ganancia del jugador A |
|---|---|---|---|---|
| c | A | $(1/2)^1 = 1/2$ | 0 | 0 |
| + c | B | $(1/2)^2 = 1/4$ | 1 | -1 |
| + + c | A | $(1/2)^3 = 1/8$ | 2 | 1 |
| + + + c | B | $(1/2)^4 = 1/16$ | 3 | -2 |
| + + + + c | A | $(1/2)^5 = 1/32$ | 4 | 2 |
| + + + + + c | B | $(1/2)^6 = 1/64$ | 5 | -3 |
| + + + + + + c | A | $(1/2)^7 = 1/128$ | 6 | 3 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

*Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hudde.*

Igual que antes, calculamos la pérdida esperada del jugador A:

$$(-1)\cdot\frac{1}{4}+(-2)\cdot\frac{1}{16}+(-3)\cdot\frac{1}{64}+\cdots=-\underbrace{\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right]=-\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}}_{\substack{\text{Progresión aritmético-geométrica de razón } \frac{1}{4} \\ \text{y nº naturales en la parte aritmética}}}=-\frac{4}{9}$$

Y el ingreso esperado de A:

$$1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{32}+3\cdot\frac{1}{128}+\cdots=\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^5}+\frac{3}{2^7}+\cdots=\underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}}_{\substack{\text{La misma progresión aritmético-geométrica de la obtenida para} \\ \text{el valor esperado de lo que pierde el jugador A}}}$$

Por tanto, la diferencia de ambas cantidades nos dará el **beneficio esperado del jugador A** en este juego:

$$\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$$

Es el resultado que ofrece Hudde en su carta de 5 de mayo: *"los resultados que hemos encontrado no coinciden, pues siguiendo vuestro cálculo A perdería 4/27 de un ducado, y según el mío, 2/9"*

*3.2 Solución de Huygens a su propia variante*

Huygens supone que el juego no concluye hasta que por lo menos un ducado ha sido puesto sobre la mesa. Por tanto, se admite la posibilidad de una secuencia de caras al principio en las que ni uno ni otro deposita dinero. En el caso de Hudde, recordamos que, si en el primer lanzamiento, efectuado por A, salía cara, el juego concluía sin ganancia ni pérdida para ninguno de los jugadores. Bajo la propuesta de Huygens podría darse, por ejemplo, esta secuencia de lanzamientos: c c c c + + + c, o sea, tras 8 lanzamientos ha ganado el jugador B por ser el primero que consigue cara tras haberse puesto dinero sobre la mesa. Según esa secuencia, en los cuatro primeros lanzamientos, ninguno de los dos lo ha puesto. En el 5º lanzamiento el jugador ha puesto un ducado, en el 6º ha sido el jugador B el que lo pone, en el 7º de nuevo pone un ducado el jugador A, y en el 8º el jugador B consigue c por lo que se lleva los 3 ducados que hay sobre la mesa, de los que 1 ha sido puesto por él y 2 por A, por lo que la ganancia de B ha sido de 2 ducados, y la pérdida de A es 2 ducados. Desde luego, si la secuencia completa está formada por un número par de lanzamientos, entonces ganará B y, si es impar, ganará A.

Vamos a distinguir dos posibles situaciones:

- **Número par de caras al principio de la secuencia**, o sea, antes de la primera cruz, incluyendo aquí la posibilidad de 0 caras. Después se puede suceder un número par o impar de cruces y, por último, una cara. Esta última sucesión tiene una valoración para A, o sea, un

$-\frac{2}{9}$, según hemos visto en el apartado anterior, dado que la primera cruz es lanzada por A.

La tabla que sigue nos muestra la ley de probabilidad que rige los lanzamientos pares y previos de caras y sus correspondientes valoraciones para el jugador A:

*Tabla 3.* Posibles resultados de la primera variante de Huygens del problema de cara y cruz, para el caso de una secuencia inicial par de caras.

| Nº de caras en la secuencia inicial | Probabilidad de que se dé ese número de caras | Valoración de este resultado para el jugador A |
|---|---|---|
| 2 | $(1/4)^1 = 1/4$ | $(1/4)^1\cdot(-2/9)$ |
| 4 | $(1/4)^2 = 1/16$ | $(1/4)^2\cdot(-2/9)$ |
| 6 | $(1/4)^3 = 1/64$ | $(1/4)^3\cdot(-2/9)$ |
| 8 | $(1/4)^4 = 1/256$ | $(1/4)^4\cdot(-2/9)$ |
| 10<br>⋮ | $(1/4)^5 = 1/1024$<br>⋮ | $(1/4)^5\cdot(-2/9)$<br>⋮ |

*Elaboración propia a partir de las conjeturas de Huygens.*

La suma de la última columna nos proporciona la valoración del juego para el jugador A en el caso en el que secuencia inicial de caras sea par. Aquí hemos de añadir un sumando más, el que corresponde a no salir cara al principio (también con valoración $-\frac{2}{9}$). Entonces, poniendo este sumando al principio:

$$\left(-\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+\cdots=\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=$$
$$=\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{4}{3}=-\frac{8}{27}$$

- **Número impar de caras al principio de la secuencia**, o sea, antes de la primera cruz. En este caso es el jugador B el que lanza la primera cruz. La secuencia inicial de caras, entonces, se describe en la siguiente tabla:

*Tabla 4.* Posibles resultados de la primera variante de Huygens del problema de cara y cruz, para el caso de una secuencia inicial impar de caras.

| Secuencia inicial de caras | Nº de caras en la secuencia inicial | Probabilidad de que se dé ese número de caras |
|---|---|---|
| c | 1 | $(1/2)^1 = 1/2$ |
| c c c | 3 | $(1/2)^3 = 1/2\cdot(1/4)$ |

| | | |
|---|---|---|
| c c c c c | 5 | $(1/2)^5 = 1/2 \cdot (1/4)^2$ |
| c c c c c c c | 7 | $(1/2)^7 = 1/2 \cdot (1/4)^3$ |
| c c c c c c c c c ⋮ | 9 ⋮ | $(1/2)^9 = 1/2 \cdot (1/4)^4$ ⋮ |

*Elaboración propia a partir de las conjeturas de Huygens.*

La suma de la última columna es la de una progresión geométrica de razón 1/4, y primer término 1/2. Dicha suma es 2/3.

El análisis de la secuencia de resultados de los lanzamientos posteriores se puede analizar con independencia del número de caras lanzadas en la secuencia inicial, o sea, siendo válido el resultado que obtengamos para cualquiera que sea dicho número inicial de caras. En la tabla que sigue describimos esos posibles resultados teniendo en cuenta que quien lanza la primera cruz es el jugador B.

*Tabla 5.* Posibles resultados de la primera variante de Huygens del problema de cara y cruz, en la situación posterior a la secuencia inicial de caras.

| Posibles resultados del juego después de la secuencia inicial de caras | Ganador del juego | Probabilidad de que se dé ese resultado | Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento | Ganancia del jugador A |
|---|---|---|---|---|
| + c | A | $(1/2)^2 = 1/4$ | 1 | 1 |
| + + c | B | $(1/2)^3 = 1/8$ | 2 | -1 |
| + + + c | A | $(1/2)^4 = 1/4^2$ | 3 | 2 |
| + + + + c | B | $(1/2)^5 = 1/32$ | 4 | -2 |
| + + + + + c | A | $(1/2)^6 = 1/4^3$ | 5 | 3 |
| + + + + + + c ⋮ | B ⋮ | $(1/2)^7 = 1/128$ ⋮ | 6 ⋮ | -3 ⋮ |

*Elaboración propia a partir de las conjeturas de Huygens.*

El ingreso esperado del jugador A sería:

$$1\cdot\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^4}+3\cdot\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{4}{9}$$

Y la pérdida esperada para este jugador:

$$(-1)\cdot\frac{1}{2^3}+(-2)\cdot\frac{1}{2^5}+(-3)\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$$

Combinamos ganancia y pérdida: $\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$. Y este resultado es válido para cualquier número de caras inicial. Entonces, multiplicamos por la suma de las probabilidades de todas las posibles secuencias de caras iniciales:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{27}$$

Esta es la ganancia esperada de A si se produce un número impar de caras al principio de la secuencia.

Por último, combinamos la ganancia esperada del jugador A para el caso de una secuencia inicial par de caras con esa misma ganancia para una secuencia impar:

$$-\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=-\frac{4}{27}.$$

Es el resultado que Huygens defiende en esta correspondencia.

*3.3 Solución de Huygens y Hudde a otra variante del problema*

Como hemos visto, a lo largo de la correspondencia los autores van introduciendo hipótesis y matices que generan nuevas versiones del problema inicial. En la que resolvemos ahora, los dos coincidieron rápidamente en la solución. Podemos decir, que es la versión del problema en la que menos discusión hubo para su resolución. El enunciado del problema podría ser:

"Los jugadores A y B lanzan una moneda justa en un juego a cara o cruz siendo A el primero en lanzar. Si se lanza cruz, el jugador que la haya lanzado debe poner un ducado en la mesa. Si se lanza cara, el jugador que la lance coge todo lo depositado en la mesa. Al inicio de juego la mesa tiene en depósito una cantidad desconocida $M$, habiendo puesto la mitad cada jugador. Se pregunta cuánto debe valer $M$ para que el juego sea justo".

La idea de juego justo era inherente a los primeros estudiosos del cálculo de probabilidades: un juego es justo si, al iniciarse el juego, la esperanza de la ganancia de cada jugador es nula (ni ganancia ni pérdida esperada para cada jugador al inicio del juego).

Como se ha dicho, en la solución y resolución de este problema los dos autores coinciden. Mostramos esa resolución en un lenguaje actual. Inicialmente, sobre la mesa hay una cantidad

*M*, de manera que siendo A el primero que lanza, si lanza cara entonces se acaba el juego y el jugador A coge esa cantidad *M* y, por tanto, la ganancia de A sería, *M*/2. Con este punto de partida construimos la siguiente tabla de posibles resultados para este juego.

*Tabla 6.* Posibles resultados de la segunda variante de Huygens y Hudde del problema de cara y cruz.

| Posibles resultados del juego | Ganador del juego | Probabilidad de que se dé ese resultado | Ducados que hay en la mesa cuando se va a realizar el último lanzamiento | Ganancia del jugador A |
|---|---|---|---|---|
| c | A | $(1/2)^1 = 1/2$ | $M$ | $\frac{M}{2}$ |
| + c | B | $(1/2)^2 = 1/4$ | $M+1$ | $-\frac{M}{2}-1$ |
| + + c | A | $(1/2)^3 = 1/8$ | $M+2$ | $\frac{M}{2}+1$ |
| + + + c | B | $(1/2)^4 = 1/16$ | $M+3$ | $-\frac{M}{2}-2$ |
| + + + + c | A | $(1/2)^5 = 1/32$ | $M+4$ | $\frac{M}{2}+2$ |
| + + + + + c | B | $(1/2)^6 = 1/64$ | $M+5$ | $-\frac{M}{2}-3$ |
| + + + + + + c ⋮ | A ⋮ | $(1/2)^7 = 1/128$ ⋮ | $M+6$ ⋮ | $\frac{M}{2}+3$ ⋮ |

*Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hygens y Hudde.*

Según la tabla, el ingreso esperado de A sería:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{M}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{M}{2}+2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{M}{2}+3\right)+\cdots=$$

$$=\frac{M}{2}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{M}{3}+\frac{2}{9}$$

Y la pérdida esperada de A:

$$\left(-\frac{M}{2}-1\right)\frac{1}{4}+\left(-\frac{M}{2}-2\right)\frac{1}{16}+\left(-\frac{M}{2}-3\right)\frac{1}{64}+\cdots=$$
$$=\left(-\frac{M}{2}\right)\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right]-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots\right)=$$
$$=-\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{4}{9}=-\frac{M}{6}-\frac{4}{9}$$

El saldo entre ingresos y pérdida ha de ser 0: $\frac{M}{3}+\frac{2}{9}-\frac{M}{6}-\frac{4}{9}=0$. De aquí obtenemos

$M=\frac{4}{3}$. Cada jugador debe poner $\frac{2}{3}$ de ducado en el juego.

*3.4 Solución de Huygens y Hudde a la última variante del problema*

La última variante del problema de lanzar a cara y cruz también fue propuesta por Huygens a Hudde, en el contexto de esta correspondencia, pero desconociéndose la fecha, dado que no se dispone de la carta que contenía su enunciado. Se sabe que Huygens trabajó en este problema el 15 de julio de 1665, donde obtiene la ventaja de A que es -1/6 ducado. En el Anexo V del Tratado de Huygens (se encuentra en el tomo XIV de las Obras Completas) escribe este autor en el último apartado de este anexo:

> *15 de julio de 1665.*
>
> *En las Págs. 19 y 20*[23] *hemos intentado la solución de la siguiente cuestión que aquí será resuelta:*
>
> *A y B lanzan cada uno en su turno a cruz (croix) o cara (pile), con la condición de que aquel que lance cara pondrá cada vez un ducado en la apuesta, pero el que lance cruz recibirá cada vez un ducado si hay algo puesto. Y A lanzará el primero cuando aún no hay nada en la apuesta, y el juego no acabará antes de que algo haya sido puesto, y se jugará hasta que todo haya sido acabado. Se pide cuál es la desventaja de A. Hace* $\frac{1}{6}$ *de un ducado.*

También tenemos el apéndice nº 1447 (según numeración de las Obras Completas), incluido en el Tomo V de las mismas) de Hudde, que debe estar fechado después del 21 de agosto de 1665, en el que obtiene el equivalente: se espera que B gane 1/6 de ducado. Leemos en dicho anexo:

> *Solución de una cuestión relacionada con la ventaja y desventaja de dos jugadores.*
>
> *A y B juegan sin que nada haya sido puesto, y estipulan que aquél que lance cara pondrá un ducado, y el que lance cruz, cogerá un ducado, con la condición de que A lanzará el primero. Se pide la ventaja de B. Respuesta* $\frac{1}{6}a$.

[23] Estas páginas del manuscrito contienen cálculos que corresponden en parte a los que aquí siguen, pero que no fueron terminados.

Mostramos, a título de anécdota, la resolución que Hudde incluye en este apéndice. En ésta, el autor admite la interpretación de Huygens sobre la manera en que el juego debe concluir, es decir, supone que el juego no concluye antes de que algo haya sido puesto de una parte o de otra. Está claro, pues, que este anexo debe ser posterior a las cartas del 28 de julio (de Huygens a Hudde) y del 21 de agosto (de Hudde a Huygens). Se utiliza el símbolo $\propto$ como signo igual. Hudde comienza indicando que *a* es igual a un ducado.

*Tabla 7.* Resolución literal de Hudde de una de las variantes del problema de cara y cruz, traducida al español.

$a \propto$ un ducado

| | | |
|---|---|---|
| Ventajas y desventajas de B. | | |
| $x$ | Cuando A debe lanzar sin que nada haya sido puesto. | $x \propto \frac{z-x}{2}$. Luego $3x \propto z$. |
| | Por consiguiente<br>Cuando B debe lanzar sin que nada haya sido puesto, él tiene $-x$ | |
| $z$ | Cuando ha sido puesto un ducado por A y B debe lanzar.<br>La desventaja del lanzamiento, cuando por A y por B ha sido puesto *uno* contra *uno*, y que A debe lanzar. | $z \propto \frac{a-y}{2}$ |
| | Por consiguiente | $-y \propto \frac{z-a+q}{2}$. Luego |
| $-y$ | Cuando ha sido puesto 2 contra 2 y que A debe jugar, la desventaja es de nuevo $-y$. | $-2y \propto z-a+q$.<br>Cuando ahora se pone en lugar de $z$ y de $q$ los valores que se han encontrado, se obtiene<br>$-2y \propto \frac{a-y}{2} - a + \frac{-2y+a}{2}$<br>y llega tras la reducción |
| Nota.<br>Si se quisiera negar este corolario[24] la | | |

[24] En el siguiente anexo (documento nº 1448) Hudde se esfuerza inútilmente en llegar a una solución sin hacer uso del corolario en cuestión.

| | | |
|---|---|---|
| cuestión es imposible de encontrar, si no es por una progresión.[25] | | $-4y \propto -3y + 2a - 2a$<br>donde añadiendo $3y$ en los<br>dos lados<br>$-y \propto 2a - 2a$, luego<br>$-y \propto 0$.<br>Pero $z$ era $\propto \frac{a-y}{2}$. Luego<br>$z \propto \frac{1}{2}a$. Luego $3x \propto \frac{1}{2}a$ y<br>$x \propto \frac{1}{6}a$.<br>Quod erat Demonstrandum. |
| $q$ | Cuando dos ducados han sido puestos por A y por B, y B debe lanzar. | $q \propto \frac{-2y+a}{2}$ |

*Elaboración propia a partir del apéndice de Hudde.*

Veamos una resolución con lenguaje algebraico actual.

Suponemos que A es el primero en lanzar, y que la secuencia de lanzamientos es la misma que en todas las versiones anteriores, ABABAB … Al inicio del juego nada hay puesto sobre la mesa. Si se lanza cruz, el jugador que lo lanza debe poner un ducado en la mesa. Si se lanza cara el jugador debe coger un ducado de la mesa si la misma no está vacía. Por tanto, debe haber al menos un ducado en la mesa. El juego, entonces, continúa hasta que la mesa se queda vacía.

Si se produce una secuencia inicial de caras, durante la misma el juego no concluye y no se aporta nada a la mesa. Por tanto, nos interesan las secuencias a partir de la primera cruz. Contando esa primera cruz, el número de lanzamientos que haga que el juego concluya ha de ser par, dado que por cada lanzamiento que genera el depósito de un ducado debe haber otro equivalente más adelante para la retirada del mismo.

La siguiente tabla nos ilustra sobre el proceso en el que se podría desarrollar este juego. Hay que tener en cuenta que, cuando en la secuencia a partir de la primera cruz se produzca la coincidencia entre el número de cruces y el número de caras, el juego concluye:

*Tabla 8.* Posibles resultados de la última variante de Huygens y Hudde del problema de cara y cruz.

[25] En el anexo nº 1449 Hudde intenta demostrar por medio de una progresión que el valor de $y$ es igual a cero.

| Número previo de caras antes de la primera cruz | Número de lanzamientos a partir de la primera cruz (incluyendo esta cruz) | Posibles resultados a partir de la primera cruz | Probabilidad de que se dé ese resultado | Ganancia del jugador A |
|---|---|---|---|---|
| Número par, incluyendo la posibilidad de 0 caras | 2 | + c | $(1/2)^2 = 1/4$ | -1 |
| | 4 | + + c c | $(1/2)^4$ | 0 |
| | 6 | + + + c c c | $(1/2)^6$ | -1 |
| | | + + c + c c | $(1/2)^6$ | +1 |
| | 8 | + + + + c c c c | $(1/2)^8$ | 0 |
| | | + + + c + c c c | $(1/2)^8$ | -2 |
| | | + + + c c + c c | $(1/2)^8$ | 0 |
| | | + + c + c + c c | $(1/2)^8$ | +2 |
| | | + + c + + c c c | $(1/2)^8$ | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

*Elaboración propia a partir de las conjeturas de Hygens y Hudde.*

De la tabla se deduce que, para 4 lanzamientos, la ganancia esperada de A es 0: $0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0$.

También, para 6 lanzamientos: $-1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0$.

También, para 8 lanzamientos: $0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0$

$(-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$. Ahora bien, esa pérdida de 1/4 se puede dar para todas las posibles secuencias previas pares de caras, Cuyas probabilidades suman:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{1}{3}$. A esto hay que sumarle el caso en que no hay caras al principio de la secuencia: $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. Por tanto, la ganancia esperada de A en el caso de una secuencia previa par de caras es:

$$\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{3}.$$

Una tabla similar a la anterior se puede construir para el caso en el que el número de caras antes de la primera cruz sea impar. En este caso, el jugador que lanza la primera cruz es B. Podemos copiar la tabla cambiando sólo los signos correspondientes a las ganancias del jugador A. Igual que antes, todos los valores esperados de ganancia se anulan salvo en el primer caso, en el que la esperanza de A sería $1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Esto sería para cualquier número impar de lanzamientos previos de caras, cuyas probabilidades suman:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{2}{3}.$$

Por tanto, la ganancia esperada de A cuando se produce un número previo impar de caras es $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$.

Combinando el caso previo con el número par de caras con el del número impar tenemos $\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$. Tal y como obtuvieron los dos autores, coincidiendo una vez más en sus soluciones.

## 4. Conclusiones

El nuevo cálculo de probabilidades se estaba consolidando. Tras las bases establecidas por Pascal, Fermat, y el propio Huygens con su tratado, nuevos problemas, con sus soluciones, se iban incorporando paulatinamente. En un principio, casi todos relacionados con juegos de azar. Entonces, para estos autores los problemas abordados no dejaban de ser más que un divertimento matemático. Tanto Huygens como Hudde lo ponen de manifiesto en la correspondencia cuando dudan sobre el tiempo que han de dedicar a la resolución de este tipo de problemas. Ellos no entran en situaciones reales de juegos de azar reales. No son jugadores, son científicos. Todavía, la aplicación práctica del cálculo de probabilidades no se considera. En este contexto surge la correspondencia de 1665 entre ambos autores e, incluida en ella, un problema sobre lanzamiento de una moneda equilibrada que, en el devenir de la propia correspondencia, acaba generando varias versiones distintas, que se van resolviendo de manera correcta. Ya se vislumbra la necesidad de máxima precisión en el enunciado de los propios problemas, de establecimiento de hipótesis claras y perfectamente delimitadas, con objeto de evitar malos entendidos y limitar así la lectura de distintos posibles enunciados, dependiendo de quién sea la persona que lee. Los autores muestran imaginación en la construcción de los enunciados y una importante habilidad de cálculo, con un álgebra incipiente, más engorroso que el actual. La suma de progresiones geométricas y aritmético-geométricas son un ejemplo de ese dominio. La incorporación de estos problemas en la docencia, para alumnos que se inician en este tipo de cálculo, es un aliciente interesante.

## Referencias

[1] DAVID, F. N. (1962). *Games, Gods and Gambling.* Charles Griffin & Co. Ltd., London.

[2] FREUDENTHAL, H. (1980). Huygens' Foundations of Probability. *Historia Matemática*, 7, 113-117.

[3] HACKING, I. (1975). *The emergence of probability.* Cambridge University Press.

[4] HALD, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* John Wiley & Sons. New York.

[5] HOLGATE, P. (1984). The Influence of Huygens' Work in Dynamics on his Contribution to Probability. *International Statistical Review*, 52, 2, 137-140.

[6] HUYGENS, C. *Oeuvres Complètes*. 22 volúmenes. Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. 1888-1950. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, V, y XIV.

[7] KENDALL, M.G. (1956). The beginnings of a probability calculus. *Biometrika,* 43, 1-14.

[8] PEARSON, K. (1978). *The History of Statistics in the 17th and 18th centuries.* Charles Griffin & Company Limited, Sussex.

[9] REIERSOL, O. (1968). Notes on some propositions of Huygens in the Calculus of Probability. *Nordisk Matematsk Tidskrift*, 16, 88-91.

[10] SCHNEIDER, I. (1980). Christiaan Huygens's Contribution to the Development of a Calculus of Probabilities. *Janus* LXVII, 269-279.

[11] SHOESMITH, E. (1983). Expectation and the Early Probabilists. *Historia Mathematica*, 10, 78-80.

[12] STIGLER, S. M. (1986). *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900.* The Belknap Press of Harvard University Press. London.

[13] TODHUNTER, I. (1865) *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

**Sobre los autores:**
*Nombre:* José Antonio Camúñez Ruiz
*Correo Electrónico:* camunez@us.es
*Institución:* Universidad de Sevilla, España

*Nombre:* María Dolores Pérez Hidalgo
*Correo Electrónico:* mdperez@us.es
*Institución:* Universidad de Sevilla, España

# Historias de Matemáticas

# Mujeres pioneras de la Matemática española

# Pioneer women of Spanish Mathematics

Juan Núñez Valdés, Adolfo Vázquez Ruiz, Rafael Vázquez Ruiz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XII, Número 1, pp. 127–146, ISSN 2174-0410
Recepción: 13 Abr'22; Aceptación: 01 Jun'22

1 de abril de 2023

**Resumen**

En esta comunicación se presentan las biografías de quince mujeres españolas pioneras de las Matemáticas en nuestro país. El objetivo principal es ponerlas como modelos y referentes ante la sociedad, para la que son prácticamente desconocidas, incluso aún remitiéndonos únicamente al mundo de las Matemáticas en España. Y, sin embargo, todas ellas abrieron el camino que luegon seguirían muchas otras mujeres, influyendo, por tanto, decisivamente, en la elevada presencia actual de la mujer en la Matemática española.

**Palabras Clave:** Mujeres pioneras, licenciadas en Matemáticas, Historia de las Matemáticas, María Sordé Xipell, María del Carmen Martínez Sancho.

**Abstract**

This communication presents the biographies of fifteen Spanish women pioneers of Mathematics in our country. The main objective is to put them as models and references to society, for which they are practically unknown, even still referring only to the world of Mathematics in Spain. And yet, all of them opened the door for many other women to follow, thus decisively influencing the high current presence of women in Spanish Mathematics.

**Keywords:** Pioneer women, Women graduates in Mathematics, History of Mathematics, María Sordé Xipell, María del Carmen Martínez Sancho.

## 1. Introducción

Actualmente, los matemáticos, una vez terminados sus grados (anteriormente, licenciaturas) pueden desempeñar muchas funciones en el ejercicio de sus carreras profesionales (en toda esta comunicación y por razones únicamente de brevedad, usaremos el masculino para referirnos a los dos géneros, reconociendo, no obstante, la igualdad de ambos géneros y asumiendo todos los últimos avances que se han producido en la sociedad en materia de igualdad, no solo los referidos al lenguaje y escritura). Así encontramos matemáticos que se dedican a la docencia, tanto en centros de Secundaria y Bachillerato como en los universitarios, al igual que, también, en academias y centros privados, a la investigación, también tanto en Universidades como en otros organismos y centros dedicados a ella, como puede ser el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, por ejemplo, a la gestión, bien para dirigirlas o bien para organizar actividades en el ámbito de las entidades a las que pertenecen, a la empresa o a centros financieros, en los que desarrollan una gran capacidad de proyectos teóricos y prácticos, además de tener también, generalmente, la responsabilidad de la actividad informática de los mismos, y, en general, a muchísimas otras actividades que no hace mucho, podemos hablar de lo que llevamos de siglo o así, era impensable que un matemático se pudiera dedicar a ellas.

Sin embargo, anteriormente, la única salida existente para un matemático, salvo, obviamente, muy escasas excepciones, era exclusivamente la docencia, generalmente en centros de Secundaria y Bachillerato y algo menos en los centros universitarios. A esa labor se dedicaban todos los que, tras duros e ímprobos esfuerzos, puesto que la carrera es considerada una de las más duras, conseguían licenciarse e iniciar sus carreras profesionales.

Por otra parte, hasta hace relativamente poco tiempo, la mujer se encontraba con numerosísimas complicaciones si decidía iniciar estudios universitarios, puesto que tanto las leyes vigentes de la época como la propia consideración de la sociedad en lo que se refería al papel que debía desempeñar una mujer en la misma se lo impedían.

Al objeto entonces de contextualizar cuáles eran, por un lado, las condiciones en las que por aquella época se encontraba la carrera de Matemáticas (denominada entonces Ciencias Exactas), y por otro la situación de las mujeres a la hora de tratar de realizar estudios universitarios, dado que hasta primeros del siglo XX a las mujeres les estaba prácticamente vedado iniciar estos estudios, a los que únicamente podían acceder solicitando permisos reales especiales, que generalmente eran desatendidos y que cuando no lo eran, venían acompañados de condiciones draconianas, es conveniente hacer las siguientes puntualizaciones.

Una vez creado en el año 1900 el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, el 18 de julio de ese mismo año se promulgó un nuevo plan de estudios, el plan propuesto por el Ministro Antonio de García Alix[1], en el cual las secciones que se impartían en la Facultad de Ciencias de las Universidades pasaban a ser cuatro: Exactas, Físicas, Químicas y Naturales. En ese tiempo, la única Universidad en la que se impartían esas cuatro secciones fue la de Madrid[2] (en el resto no se impartían todas por falta de medios, tanto materiales como humanos), la cual además conservó el monopolio de concesión de títulos del grado de doctor hasta 1954. Pues bien, en los primeros años del siglo 20 únicamente había Facultad de Exactas en tres Universidades españolas: Madrid, Barcelona y Zaragoza.

Por lo que se refiere al acceso de la mujer a los estudios universitarios, no fue hasta la Real Orden de 8 de marzo de 1910, promulgada por el ministro Álvaro de Figueroa y Torres, I conde de Romanones[3], en tiempos del rey Alfonso XIII, cuando se les permitió a las mujeres poder

[1] Antonio García Alix, (1852-1911), abogado y político murciano, fue ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes durante la regencia de María Cristina de Habsburgo-Lorena y ministro de Hacienda y ministro de Gobernación durante el reinado de Alfonso XII.

[2] En Madrid, la Universidad se conocía en aquel tiempo con el nombre de Universidad Central de Madrid, denominación que se mantuvo hasta 1943, cuando se suprimió el adjetivo Central de su nombre, llamándose únicamente Universidad de Madrid hasta 1970. En esa fecha se estableció la actual denominación de Universidad Complutense de Madrid.

[3] Álvaro Figueroa y Torres (1863 -1950), I conde de Romanones, fue presidente del Senado, presidente del Congreso de los Diputados, varias veces ministro y tres veces presidente del Consejo de Ministros durante el reinado de Alfonso

matricularse en las universidades sin necesidad de consulta a la superioridad, como era exigido anteriormente, lo que produjo que muchas mujeres aprovecharan esa posibilidad para iniciar estudios universitarios, aunque primeramente se encontraban con un protocolo establecido para su asistencia a clase, que las obligaba a estar en las aulas separadas de sus compañeros, con quienes no les estaba permitido tampoco hablar en los pasillos entre clase y clase, a permanecer en la antesala de los profesores y a que cuando el bedel anunciaba el comienzo de las clases, tenían que ser acompañadas por un catedrático para entrar en el aula y ocupar allí la mesita supletoria destinada a ellas. Todavía en 1928, el catedrático de Matemáticas Sixto Ríos y sus compañeros se sorprendían de que la estudiante zaragozana Remedios Ruiz Feixas (citada más adelante en esta comunicación), que estaba estudiando el doctorado, estuviera siempre a su lado, acompañada por su madre, tanto dentro como fuera de las clases, escuchando sus conversaciones (Martín, 2016, p. 2).

Por otra parte, es un hecho constatado que en Matemáticas se cuenta con bastantes referentes matemáticos masculinos de esa época o anteriores. Nombres de eminentes matemáticos extranjeros como Euler, Gauss, Riemann o Hilbert se hacen hueco entre las páginas de muchos libros didácticos y de divulgación sobre Matemáticas. También, aunque con bastante menos frecuencia, se hallan nombres de matemáticos españoles (entre ellos Julio Rey Pastor, Luis Antonio Santaló y Pedro Puig Adam) y con aún mucha menor frecuencia, casi nunca en realidad, pueden encontrarse nombres de matemáticas españolas (quizás la más reconocida, aunque no mucho tampoco, pueda ser la gallega María Josefa Wonenburger Planells, quien desarrolló parte de su carrera investigadora en Estados Unidos y Canadá).

De acuerdo con todas las consideraciones anteriores, el objetivo principal de esta comunicación es sacar a la luz la memoria de algunas mujeres pioneras de la Matemática española, mujeres que en las primeras décadas del siglo XX, desafiando todos los inconvenientes y trabas de todo tipo que se les ponían por delante, sobre todo aquellos de género que acabamos de comentar, lograron sus licenciaturas en Matemáticas y consiguieron ejercer sus carreras, dedicándose la mayoría de ellas, como veremos, a la docencia, fundamentalmente en centros de Segunda Enseñanza.

El mérito de estas mujeres es grande, pues sin duda alguna contribuyeron a abrir el camino por el cual transitaron después muchas otras mujeres que, siguiendo su ejemplo, consiguieron también licenciarse en Matemáticas y no solamente continuar con las actividades profesionales de docencia que estas habían ejercido sino también incrementar estas actividades pasando a desarrollar otros roles, que son los que actualmente desempeñan los matemáticos en la actualidad. Por ello no es de extrañar que los autores las consideremos como verdaderos referentes y ejemplos para la totalidad de las mujeres en la actualidad.

Como se ha indicado, estas mujeres cuyos nombres, fecha y Universidad en la que se licenciaron en Matemáticas pueden verse en la Tabla 1, ejercieron su actividad profesional en las primeras décadas del siglo XX. De muchas de ellas hay escasa información en la literatura, presumiblemente ocasionada por los destrozos ocasionados por ambos bandos en archivos y registros durante el transcurso de la Guerra Civil. Eso ha complicado mucho el trabajo de investigación y ha hecho que los autores hayan establecido el inicio de ese triste episodio como fecha tope de las licenciaturas de las mujeres que se tratan en este estudio.

---

XIII. Estaba considerado en su época como uno de los grandes terratenientes de España, siendo además accionista de importantes empresas españolas de la época.

*Tabla 1. Mujeres pioneras de la Matemática española.*

| Licenciada en Matemáticas | Universidad | Fecha de licenciatura |
|---|---|---|
| Victoria Beatriz Baylos Corroza | Central de Madrid | 1931 |
| María Capdevila D'Oriola | Barcelona | 1928 |
| Paz Vicenta Esponera Andrés | Zaragoza | 1935 |
| Águeda Gimeno Payá | Central de Madrid | 1927 |
| Carolina Jiménez Butigieg | Zaragoza | 1930 |
| María del Carmen Martínez Sancho | Central de Madrid | 1926 |
| Rosa Obrador Parpal | Islas Baleares | 1934 |
| Esperanza Oller Alemany | Barcelona | 1932 |
| Nemesia Rodríguez Fernández-Llamazares | Sin datos | |
| Irene Roig Mota | Barcelona | 1916 |
| María del Pilar Rojas Gutiérrez | Central de Madrid | 1926 |
| María de los Remedios Ruiz Feixas | Zaragoza | 1931 |
| Ascensión Serret de Andrés | Barcelona | 1915 |
| María Sordé Xipell | Barcelona | 1914 |
| Rosa Vila Coro | Barcelona | 1925 |

# 2. Mujeres pioneras de la Matemática española

En esta sección se presentan, por orden alfabético de apellidos, las biografías de 15 mujeres españolas que se licenciaron en Matemáticas en nuestro país en las primeras décadas del siglo XX. Todas ellas constituyen un antes y un después en la presencia de la mujer en la Matemática Española y obviamente, son todas las que están, aunque no están todas las que son, puesto que la falta de referencias y documentos en las diferentes fuentes consultadas sobre algunas otras mujeres matemáticas de la época, aparte también razones de extensión, han hecho a los autores restringirse a ese número.

## 2.1 Victoria Beatriz Baylos Corroza (Universidad Central de Madrid, 1931)

Victoria Beatriz Baylos Corroza nació en 1908 en Estella (Navarra). Tuvo cuatro hermanos: Hermenegildo, profesor y abogado que desempeñó el cargo de letrado mayor del Consejo de Estado, Antonio, inspector de trabajo y escritor, Daniel y Encarnación (Poveda, 2014, p. 74).

Estudió el Bachillerato en el Instituto San Isidro de Madrid, apareciendo a partir del curso 1921-1922 en las listas de mejores estudiantes del centro (Poveda, 2014, p. 312). Finalizado este, se matriculó en la Sección de Ciencias Exactas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid en 1926, finalizando la carrera en 1931 (P4).

Durante el período de la II República Española simultaneó la enseñanza en el Colegio de Nuestra Señora de Loreto con las clases en el Instituto-Escuela de Madrid y en la asociación estudiantil de Universitarias católicas.

En enero de 1934 ingresó en el Cuerpo Nacional de Estadística, convirtiéndose en la primera mujer que ingresaba en ese cuerpo, la única mujer entre todos los que ingresaron, la primera persona que entraba en el cuerpo en posesión de una licenciatura universitaria y también la única licenciada en Ciencias Exactas (Poveda, 2014, p. 112). Su ingreso supuso un antes y un después en lo que se refiere a la presencia de las mujeres en ese cuerpo, pues ya en 1945, de los 241 funcionarios en activo que trabajaban en el mismo, 22 eran mujeres (9.1%), de las cuales, 3 tenían estudios universitarios, entre ellas, la propia Victoria Baylos (Rey, 2011, p. 134).

Su etapa como miembro del Instituto Nacional de Estadística fue muy fructífera: el 11 de octubre de 1972 fue nombrada subdirectora general de Estudios y Análisis Económicos (B6) (cargo en el que cesó el 6 de octubre de 1973 (B7)) y el 25 de ese mismo mes y año se la nombró Consejera del Consejo Superior de Estadística (B8). Por Orden del 30 de abril de 1979 se le concedió la medalla al Mérito en el Trabajo de plata con ramas de roble (B9).

Más allá del Instituto Nacional de Estadística, tomaría el cargo de contador en el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias de Madrid el 14 de febrero de 1940 (Poveda, 2014, p. 599).

Políticamente conservadora, fue una de las socias fundadoras de la Hermandad de San Isidoro, en la que en 1934 ejerció como Consiliaria de Ciencias. Además, a partir de 1936 ocupó la secretaría de la Agrupación Profesional de Doctores y Licenciados en Ciencias y Letras (Poveda, 2014, p. 223-224).

Victoria Baylos estuvo siempre muy comprometida con sus ideas políticas. A causa de ellas fue perseguida durante la Guerra Civil, por lo que tuvo que solicitar protección en el Consulado de Bolivia. En julio de 1938 comenzó a trabajar clandestinamente en la organización falangista Auxilio Social en Madrid (organismo surgido para atender las necesidades de los perjudicados por la situación bélica) y aportó parte de sus ingresos a la organización Socorro Blanco (fundada por la sección femenina de la Comunión Tradicionalista, que sirvió de "quinta columna" para el bando republicano). Según una declaración jurada que ella misma prestó más tarde, el 3 de mayo de 1941 (Poveda, 2014, p. 541):

> *Trabajé en la clandestinidad contribuyendo con una cantidad mensual en Socorro Blanco e ingresando en cuanto tuve noticia en Auxilio Social, en cuya Organización fui Jefe de Conexión y realicé cuantos Servicios me fueron encomendados.*

Ese mismo año, en los inicios del regimen franquista, Victoria fue confirmada en sus derechos para seguir ejerciendo como funcionaria (en aquel momento, como encargada de curso del instituto Beatriz Galindo) por la resolución de la Orden del 19 de noviembre de 1941. Aparte, también sería depurada de su cargo de auxiliar especializada de Comercio del Ministerio de Industria y Comercio (Poveda, 2014, p. 527).

Victoria Baylos falleció el 21 de abril de 2003 en Madrid (D3). En su esquela aparece mencionada "Palmas Académicas de la República Francesa". En opinión de los autores, ya que este hecho no queda mencionado en ninguna fuente, es plausible que Victoria Baylos hubiese recibido la condecoración de la "Orden de las Palmas Académicas" de la República Francesa, otorgada por ese país a personas influyentes en la cultura y la educación.

## 2.2 María Capdevila D'Oriola (Universidad de Barcelona, 1928)

María Enriqueta Teresa Montserrat Capdevila D'Oriola (Figura 1), nacida en Cabestany (Francia), el 6 de agosto de 1905, fue la primera mujer que llegó a ser catedrática de Instituto de Matemáticas en España.

Se licenció en Matemáticas en la Universidad de Barcelona en 1928 y este mismo año fue nombrada catedrática interina de Matemáticas del Instituto de Zafra (Badajoz).

Dos años después obtuvo por oposición la cátedra de Lengua y Literatura Francesas del Instituto de Alcoy (Alicante). Volvió a opositar en 1933 y ganó la cátedra de Lengua y Literatura Francesas del Instituto de Figueras (Girona). Entre medio de esos años, en 1931, fue becada por la Junta de Ampliación de Estudios durante nueve meses para estudiar teoría de funciones y los espacios de Hilbert en el Seminario de Matemáticas de la Universidad de la Sorbona, en París, con el profesor Gastón Juliá (Núñez, Arroyo, Rodríguez, 2012).

*Figura 1. María Capdevila*

Ella deseaba hacer el doctorado en la Universidad Central de Madrid, pero finalmente no lo consiguió, aunque sí participó en la docencia universitaria. En el curso 1931/32 fue contratada como profesora auxiliar de Astronomía General y Física del Globo en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, convirtiéndose de esa forma en la primera mujer profesora de Matemáticas de ese centro. Desafortunadamente, la Guerra Civil interrumpió su carrera y a su final fue sometida a un proceso de depuración, aunque afortunadamente recuperó en 1940 su plaza de catedrática de Instituto en Figueras.

Se jubiló como catedrática del Instituto Jaume Balmes de Barcelona y falleció en esta ciudad en 1993 (Núñez, Arroyo, Rodríguez, 2012).

## 2.3 Paz Vicenta Esponera Andrés (Universidad de Zaragoza,1935)

Paz Vicenta Esponera Andrés, también conocida como Paz del Patrocinio de San José de Calasanz, nació el 11 de abril de 1903 en Zaragoza, en el seno de una familia acomodada.

Sus primeros estudios los realizó en escuelas religiosas, pues sus padres querían que ella recibiese una educación cristiana. Inició los estudios primarios en un colegio de su ciudad de la Fundación Educativa La Merced, del cual pasó en 1916 al colegio san José de Calasanz, donde estudiaría hasta 1925. Antes de terminar el Bachillerato, cursó los estudios de peritaje y profesorado mercantil y ya cumplidos los 25 años ingresó en el noviciado escolapio de Andéraz (Navarra), donde se le entregó el hábito escolapio el 17 de enero de 1929 y tomó el nombre de Paz del Patrocinio de San José de Calasanz. Profesó el 27 de agosto de 1931, año en el que en ese mismo verano aprobó el bachillerato, y se matriculó en la Universidad de Zaragoza para estudiar Ciencias Exactas, simultaneando esos estudios con la impartición de clases en el colegio Calasanz, donde ella había estudiado, al haber sido destinada allí para ello por la Orden (Labarta, sin fecha).

Paz Esponera se licenció en la Universidad de Zaragoza en solo dos años, en 1935 (Ausejo, 2009), con unos brillantes resultados, que fueron recogidos por la prensa. Ella sería la primera religiosa licenciada en Ciencias Exactas en Zaragoza.

Por lo que se refiere a su docencia, trató siempre de inculcar en sus alumnas el que se decidieran a estudiar una carrera de ciencias. También destacó como directora de este mismo colegio, ya que durante su mandato se renovó tanto el material educativo como la infraestructura del centro, en el que, además de impartirse Primaria y Bachillerato, empezaron también a impartirse a partir de 1949 los estudios de Magisterio.

Desde 1959 a 1983 estuvo destinada en colegios de la Orden de Andéraz y Logroño, en los que llegó a ocupar los cargos de vicesuperiora y consultora local y provincial. En sus últimos años de vida, especialmente desde 1984, presentaba notables síntomas de demencia. Su fallecimiento tuvo lugar el 23 de marzo de 1993, en Zaragoza (Labarta, sin fecha).

## 2.4 Águeda Gimeno Payá (Universidad Central de Madrid, 1927)

Águeda Gimeno Payá nació en Jaén en fecha no conocida, al igual que tampoco se dispone de datos referidos a sus estudios de Bachillerato.

En 1922 se matriculó en la Sección de Ciencias Exactas de la Universidad Central de Madrid, licenciándose en 1927. Ese mismo año ingresó en la Sociedad Matemática Española, asociación en la que permaneció hasta 1932, residiendo en Priego de Córdoba (Magallón, 2004, p. 322). Previamente, ya había publicado dos artículos en 1925 y 1926, respectivamente, de ejercicios resueltos en la Revista Matemática Hispanoamericana (Magallón, 2004, p. 350).

Sebastián Barahona, cronista oficial de Mengíbar (Jaén) y ex - alumno de Águeda Gimeno publicó en su blog que ella fue profesora de Ciencias Naturales en el Instituto Albariza de Enseñanza Secundaria de esa localidad (Barahona, 2014).

Fue admitida junto a otros 51 opositores en el Concurso de provisión de una plaza de Catedrática de Matemáticas entre los Institutos Nacionales de Segunda Enseñanza de Gerona, Mahón y Las Palmas (Web 1). Sacó por oposición la cátedra de Matemáticas del actual Instituto Virgen del Carmen, de Jaén, en el que permaneció más de 30 años, ocupando cargos de dirección, entre ellos la secretaría a partir de 1960, percibiendo un salario de 5000 pesetas anuales (D1) y (B1).

No obstante, también tuvo algunos tropiezos en su brillante carrera, pues aspiró a una plaza de profesora del curso de Matemáticas del Instituto-Escuela de Madrid, en una convocatoria en la que ella, al igual que María de los Remedios Ruiz Feixas y Nemesia Rodríguez Fernández-Llamazares, igualmente citadas en esta aportación, quedaron excluidas, siendo Rosa Bernis Madrazo quien la obtuvo (Poveda, 2014, p. 389).

## 2.5 Carolina Jiménez Butigieg (Universidad de Zaragoza, 1930)

Nacida en Madrid, Carolina Jiménez Butigieg (Figura 2) tiene el honor de haber sido la primera mujer licenciada por la sección de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, en la que permaneció entre los años 1926 y 1930 (Web 2), dato que se conoce a pesar de que no se han conservado documentos vinculados a su estancia en la universidad.

Su carrera académica, dedicada fundamentalmente a la docencia en la enseñanza privada, estuvo muy influenciada por sus creencias religiosas. Ingresó en la Orden de las Teresianas, llegando a ser Madre Provincial en 1957. Entre ese año y 1969 ocupó los puestos de primera consultora y vice-superiora general del Gobierno General elegido en el VIII Capítulo General de la compañía (Webs 2 y 3).

*Figura 2. Carolina Jiménez*

Su imagen ha llegado hasta nuestros días en forma de caricatura (Figura 3) gracias a "Pioneras Ilustradas", una exposición que se inauguró el 21 de diciembre de 2021 (con fecha de finalización abril de 2022) en la Sala África Ibarra, de Zaragoza, centrada en las primeras mujeres universitarias españolas.

*Figura 3. Caricatura de Carolina por Ester Laguna*

## 2.6 María del Carmen Martínez Sancho (Universidad Central de Madrid, 1926)

Nacida en Toledo, el 8 de julio de 1901, María del Carmen Martínez Sancho (Figura 4) tiene el honor de ser la primera mujer española doctora en Matemáticas.

María del Carmen Martínez se matriculó en 1918 en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid, teniendo la suerte de que en el primer curso, común a las licenciaturas de Ciencias, Medicina y Farmacia, tuvo como profesores en las asignaturas de Matemáticas a Cecilio Jiménez Rueda (Geometría Métrica) y a Julio Rey Pastor (Análisis Matemático), quienes la orientaron hacia la rama de Ciencias Exactas, disciplina en la que se licenció en diciembre de 1926.

Un año después se doctoró en esa disciplina con una tesis titulada “Concepto de función, funciones continuas y semicontinuas, sus propiedades”, dirigida por José María Plans y Freyre (Núñez, Ortiz, 2021, pp. 17-17).

En el curso 1928-1929 obtuvo la cátedra de Matemáticas del Instituto de Bachillerato de El Ferrol (A Coruña), del que pasó al Infanta Beatriz de Madrid. Solicitó por primera vez una beca de la Junta de Ampliación de Estudios para viajar al extranjero, que le fue denegada, pero pudo obtener del Ministerio de Instrucción una licencia de dos meses para viajar a Alemania con un grupo de quince estudiantes del Instituto-Escuela para visitar los centros del país.

En esa época también trabajó en el Laboratorio Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios, investigando sobre Geometría diferencial y Series infinitas. En 1930 le concedieron una pensión de la Junta de Ampliación de Estudios para realizar estudios de Geometría multidimensional en Berlín, ciudad en la que estuvo veinte meses (fue la primera mujer pensionada en esa ciudad). Durante esta estancia obtuvo una plaza en el Instituto de Guadalajara, que permutó por otra en el Instituto de Ciudad Real y fue propuesta para el Instituto-Escuela de Sevilla (actualmente Instituto Murillo), al que se incorporó a su regreso de Berlín. (Núñez, Ortiz, 2021, pp. 16-17).

*Figura 4. María del Carmen Martínez Sancho*

Posteriormente, obtuvo por oposición una plaza en la Universidad de Sevilla para ser auxiliar del profesor Patricio Peñalver Bachiller, catedrático y decano de la Facultad de Ciencias. Estuvo en este puesto hasta su jubilación en el curso 1957/58. Volvió a Madrid y entró a dar clases de forma altruista en el Colegio Jesús María, del barrio de Vallecas.

Falleció en San Pedro de Alcántara (Málaga) en 1995.

## 2.7 Rosa Obrador Parpal (Universidad de las Islas Baleares, 1934)

Tras Pilar Rojas de Antich (también citada en este artículo), Rosa Obrador Parpal, hija de Jaime Obrador y Casasnovas (primer teniente de la Guardia Civil) y Margarita Parpal y Villalonga, nacida el 7 de noviembre de 1910 en Mahón (Menorca, Islas Baleares), tiene el honor de ser la segunda mujer licenciada en Ciencias Exactas en la Universidad de las Islas Baleares (Magallón, 2004, p. 331).

Estudió el Bachillerato en el Instituto de Palma de Mallorca, en la promoción 1922-1928, siéndole expedido su título el 14 de noviembre de 1929. Se licenció en Ciencias Exactas en la Universidad de las Islas Baleares el 17 de septiembre de 1934, siendo tras Pilar Rojas de Antich, la segunda mujer que conseguía esa licenciatura en esa Universidad (Alenyà, 2014).

Tras terminar sus estudios, entró a formar parte del Colegio de Licenciados y Doctores de Baleares en 1934 (ella fue la segunda mujer en colegiarse, pues la primera había sido también Pilar Rojas de Antich, en 1931, de quien no se tienen apenas datos en la literatura) y se dedicó a la docencia en institutos de Segunda Enseñanza, trabajando en el Instituto femenino de Palma de Mallorca (B4, B5).

## 2.8 Esperanza Oller Alemany (Universidad de Barcelona, 1932)

Esperanza Oller Alemany nació el 18 de junio de 1911, en Barcelona, hija de José Oller Rabassa, médico de profesión, y Mercedes Alemany i Sabadell (Magallón, 2004, p. 331). Tuvo una relación de parentesco con Narcís Oller de Moragas, abogado y escritor, autor de la obra Pilar Prim, publicada en 1906, basada en parte en sus experiencias durante los veranos pasados junto al resto de la familia Oller Rabassa en Puigcerdá, donde acostumbraban a veranear (Web 4).

Se licenció en Matemáticas por la Universidad de Barcelona, en la que permaneció entre 1928 y 1932. Su acta de grado data del 29 de diciembre de 1932 (Magallón, 2004, p. 331).

Consta como víctima de la represión franquista en la provincia de Burgos entre los años 1936 y 1946. En 1962 opositó para acceder a una plaza vacante como profesora de Matemáticas de instituto (ese mismo año se presentaron, junto a ella, 171 aspirantes más para dichas vacantes(B2)).

## 2.9 Nemesia Rodríguez Fernández-Llamazares (sin datos, presumiblemente Universidad Central de Madrid)

Natural de Gancedo (León), Nemesia Rodríguez Fernández-Llamazares nació el 16 de noviembre de 1903 (Poveda, 2014, p. 76).

No se sabe exactamente ni cuándo ni dónde se licenció en Ciencias Exactas. Debió ser en la Universidad Central de Madrid, pues estaba alojada en la Residencia de Señoritas (fundada por la Junta de Ampliación de Estudios en octubre de 1915, cuya primera directora fue María de Maeztu).

Más tarde, se licenció en Magisterio y aprobó en 1930 las oposiciones a escuelas femeninas. Eligió formar parte de la terna que se precisaba para dar clases en el grupo escolar Menéndez Pelayo, en Madrid. Desde 1931 hasta 1932, en la Segunda República, impartió clases en el Instituto-Escuela como profesora aspirante, cesando en enero. Después, solicitó nuevamente una plaza como profesora de matemáticas en el mismo centro para el curso 1933-1934, pero no fue escogida y entre 1934 y 1937 fue profesora, en calidad de maestra nacional, del grupo escolar Joaquín Sorolla. En 1937 y según la Gaceta de la República nº 88, de 29 de marzo de 1937, le fue admitida su solicitud de excedencia voluntaria, pues se encontraba destinada como profesora de Matemáticas en un instituto elemental (Poveda, 2014, p. 76).

Aunque en los años inmediatos al estallido de la guerra civil se habían estado celebrando varios Cursillos de Selección y oposiciones a plaza de encargados de curso en Magisterio, el inicio de esta hizo que estas actividades se vieran paralizadas, por lo que los profesores solo pudieron completar los Cursillos de Selección, como fue el caso de Nemesia Rodríguez.

Afortunadamente para ella, una vez finalizada la guerra, pudo seguir impartiendo docencia, pasando a trabajar en el Instituto Pardo Bazán de Madrid (Poveda, 2014, p. 592).

Curiosamente, tanto en el Instituto-Escuela como en el instituto Pardo Bazán, Nemesia Rodríguez tuvo como compañera a la profesora Isabel García Lorca, hermana pequeña del famoso poeta granadino Federico García Lorca, que impartía la asignatura de Literatura en ambos centros. Finalmente, el 7 de diciembre de 1955 ingresó en el Cuerpo de Profesores adjuntos Numerarios.

Nemesia Rodríguez Fernández-Llamazares, quien en algunos documentos aparece como Nemesia Rodríguez Llamazares, estuvo casada con Joaquín Azcárraga y Urmaneta, con quien tuvo tres hijos: Gonzalo, Aurea y Álvaro (Poveda, 2014, p. 594)

## 2.10 Irene Roig Mota (Universidad de Barcelona, 1916)

Irene Roig Mota nació el 11 de febrero de 1894 en Cabra del Camp (Tarragona). Fue hija de José Roig, secretario del Ayuntamiento de la localidad, y Francisca Mota, maestra.

Estudió el Bachillerato en el Instituto General y Técnico de Reus (Tarragona) (Webs 5 y 6). A su finalización y siendo causa de, o al menos coincidiendo con, su ingreso con 18 años, en 1912, en la Universidad de Barcelona, la familia Roig Mota se trasladó a la capital catalana.

Irene Roig (Figura 5) permaneció en la Universidad de Barcelona entre los años 1912 y 1916, cuando se licenció en Ciencias Exactas, aunque en su expediente académico consta que estuvo matriculada de las asignaturas de Análisis Matemático y Química General para el curso 1911-1912, no habiendo sido examinada de las mismas. En ese expediente constan mayoritariamente calificaciones de notable y aprobados, exceptuando un sobresaliente con matrícula de honor en la asignatura de Física General (Webs 5 y 6).

*Figura 5. Irene Roig*

Además de realizar sus estudios en la Universidad de Barcelona, parece ser que Irene Roig cursó actividades de formación en la Universidad Central de Madrid a lo largo de su carrera (P2). También, entre 1916 y 1917 estudió unos cursos de español en la Escuela-Normal de Maestras de Mont-de-Marsan (consta en el archivo en el que se le concede el derecho a certificar sus estudios en el extranjero a su regreso que repitió dicho curso). Haría también lo propio entre 1917 y 1918 en la Escuela Normal de Toulouse.

Por lo que se refiere a su carrera profesional, Irene Roig sacó por oposición plaza de catedrática de Matemáticas de Instituto, trabajando en los Institutos de Orihuela, en 1933 (Magallón, 2004, p. 336) y Alcoy (Web 6). Durante su estancia en este último instituto fue expedientada y depurada por no seguir una enumeración de ideales del régimen franquista.

Fue miembro de la Sociedad Matemática Española entre los años 1911 y 1936 (Magallón, 2004, p. 299).

## 2.11 María del Pilar Rojas Gutiérrez (Universidad Central de Madrid, 1926)

María del Pilar Rojas Gutiérrez, nacida en la localidad cántabra de Torrelavega, finalizó sus estudios de la licenciatura de Ciencias Exactas en la Universidad Central de Madrid en 1926, después de haberlos iniciado en 1921 (P3).

En el curso 1926-1927 fue una de las 9 mujeres que entraron a trabajar (ella para impartir Matemáticas) en el Instituto San Isidro de Madrid, de los 32 ayudantes interinos propuestos por los respectivos catedráticos (Poveda, 2014, p. 430). Permaneció en ese centro también el siguiente curso, pero por causas que se desconocen, no llegó a trabajar ni en ese ni en ningún otro instituto madrileño durante la Segunda República (Poveda, 2014, p. 430).

## 2.12 María de los Remedios Ruiz Feixas (Universidad de Zaragoza, 1931)

María de los Remedios Ruiz Feixas, nacida en Córdoba (Martín, 2016), estudió el Bachillerato en el Instituto General y Técnico (también llamado Instituto Nacional de Segunda Enseñanza) de su ciudad. Tuvo un expediente brillantísimo: en el curso 1922-1923 obtuvo matrícula de honor en el primer curso de la asignatura de religión (Web 7). En el curso 1923-1924 la misma calificación en el primer curso de lengua latina, aritmética, y en el segundo curso de religión (Web 8). También, en el curso 1924-1925, matrícula de honor en el segundo curso de lengua latina, en el primero de lengua francesa, en geometría y en el tercer curso de religión (Web 9) y finalmente, en el curso 1925-1926, matrícula de honor en preceptiva y composición, álgebra y trigonometría, en el segundo curso de francés y en el primero de dibujo (Web 10).

Se licenció y se doctoró en Matemáticas en la Universidad de Zaragoza, siendo por tanto una de las escasas mujeres mencionadas en esta aportación que alcanzaron el grado de doctora.

Se conoce muy poco del ejercicio de su carrera profesional. El "Diario de Córdoba" de fecha viernes 18 de mayo de 1934 la sitúa en esa fecha como docente en el Instituto de Segunda Enseñanza de Linares (D2). En esa página del diario se la elogia por "*su gran talento en la docencia y erudición en el campo de las Matemáticas, tal como se pudo observar en una conferencia que dio en el Instituto de Linares sobre ecuaciones diofánticas*".

Falleció el 11 de diciembre de 2012, en Madrid.

## 2.13 Ascensión Serret de Andrés (Universidad de Barcelona, 1915)

Ascensión Serret de Andrés, nacida en Arévalo (Ávila), el 3 de mayo de 1894, fue de las primeras mujeres, junto a María Sordé Xipell (la primera de todas), Irene Roig Mota y Rosa Vila Coro, que cursó estudios universitarios en la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona (Webs 5 y 11).

Su padre, leridano de origen, ejercía de secretario en el ayuntamiento del municipio abulense, mientras que su madre era segoviana.

Hizo el Bachillerato en el Instituto General y Técnico de Castellón y a su finalización, en 1911, su familia se trasladó a Barcelona, donde ella se matriculó en la Universidad.

Finalizó la carrera de Matemáticas el 14 de junio de 1915, con un expediente brillantísimo, compuesto solo por sobresalientes y matrículas de honor (Web 5).

Ya como licenciada en Matemáticas, Ascensión Serret orientó el ejercicio profesional de su carrera hacia la investigación astronómica, ocupando entre los años 1918 y 1921 un puesto como ayudante en el observatorio Fabra de Barcelona, donde fue la primera mujer que trabajó en Astronomía. En colaboración con el astrónomo Josep Comas Solà (Barcelona, 1868 – 1937, astrónomo y divulgador científico) realizó valiosas observaciones y descubrimientos de planetas, cometas y nebulosas, además de obtener imágenes muy detalladas del astro rey (Web 11).

## 2.14 María Sordé Xipell (Universidad de Barcelona, 1914)

A María Sordé Xipell le cabe el honor de haber destacado en varios hechos relevantes. Fue la única mujer que estudió una licenciatura de Ciencias en España entre las 28 licenciadas universitarias en nuestro país entre 1900 y 1910, la primera mujer que se licenció en una Facultad de Ciencias en España y la primera mujer que se matriculó en la sección de Ciencias Exactas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, en 1906, siendo además la única mujer matriculada en esa Universidad en el curso 1906-1907. Después de ella hubo que esperar una década hasta que volvieran a matricularse en esa Sección de Ciencias Exactas de la Universidad de Barcelona tres mujeres más, Rosa Vila, Irene Roig y Ascensión Serret.

María Sordé Xipell nació en el número 4 bis, primer piso, de la calle del Regomir, de Barcelona, el 7 de septiembre de 1884. Era hija de un médico de Reus (Tarragona) y de una barcelonesa.

El 21 de septiembre de 1900 aprobó su examen de ingreso a los estudios de Bachillerato en el Instituto de Barcelona, estudios que finalizó a sus 22 años, en 1906. En su expediente académico aparece una mayoría de sobresalientes y matrículas de honor. De hecho, obtuvo la calificación de sobresaliente en los dos ejercicios finales del Bachillerato, realizados el 17 y el 30 de junio de 1906, respectivamente (Web 12).

En 1906, mismo año en el que finalizó los estudios de Bachillerato se matriculó en la Sección de Ciencias Exactas en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona. Al igual que en el de Bachillerato, en su expediente universitario se observan múltiples sobresalientes y matrículas de honor. Aunque la matrícula caducó el curso 1911-1912, ella pudo obtener su grado de licenciatura en la sección de Ciencias Exactas tras aprobar su ejercicio final de grado el 11 de febrero de 1914 (Web 12).

## 2.15 Rosa Vila Coro (Universidad de Barcelona, 1925)

Rosa Vila Coro nació el 3 de octubre de 1896, en Santiago de Compostela (Web 5). Pese a que en uno de los registros de identidad escolar de la facultad de Ciencias de Barcelona no se mencionan todos los apellidos del padre, comparando ese registro con otras fuentes y debido a la gran concordancia entre los nombres, apellidos y fechas con otros, existe una alta probabilidad de que sus padres fuesen Antonio Vila Nadal y Rosa Coro (Webs 13 y 14). Esto implicaría que su padre hubiera sido catedrático de Historia en Santiago de Compostela, adonde se había trasladado desde Barcelona, su ciudad natal, que su madre hubiese nacido en Donis (Lugo) y que ella tuviese 5 hermanos (Figura 6): Eugenio, médico; Antonio, oftalmólogo; José María, abogado; Avemaría, médico; y Mercedes, farmacéutica. Tanto de Antonio como de Avemaría se dispone de una biografía.

Rosa Vila inició sus estudios universitarios en 1913, en la Sección de Ciencias Exactas de la Universidad de Barcelona, licenciándose en 1925 con unas excelentes calificaciones, que la hicieron merecedora de recibir el Premio Extraordinario de la Facultad de Ciencias, en mayo de 1914.

*Figura 6. Los hermanos Vila Coro. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: Eugenio, Antonio, José María, Avemaría, Mercedes y Rosa.*

## 3. Otras mujeres pioneras de la Matemática española, de las que se desconoce si llegaron a licenciarse en Matemáticas

Todas las mujeres citadas anteriormente se licenciaron en las Facultades de Ciencias de las diferentes Universidades, sabiéndose con seguridad que lo hicieron en la Sección de Ciencias Exactas de las mismas. Sin embargo, pueden encontrarse en la literatura bastantes referencias de otras mujeres de la época que también se licenciaron en Ciencias, si bien se desconoce en la mayoría de los casos en qué sección lo hicieron, al no constar ese dato en la documentación encontrada. Por el ejercicio profesional que desempeñaron, dando clases de Matemáticas en Institutos de Segunda Enseñanza (algunas incluso ganaron sus cátedras en esa disciplina mediante concurso-oposición a esas plazas), todas esas mujeres están también muy relacionadas con las Matemáticas, aunque en las fuentes no se indique que alguna de ellas tuviese esa titulación. Entre ellas pueden citarse a **Juana Álvarez-Prida Vega** y **Elena Felipe González** (ambas presumiblemente licenciadas en Química), **Josefa María de los Dolores Pardo Gayoso, María del Plar Martínez Sanz** y **Amparo Alcedo y de la Espada** (esta última presumiblemente licenciada en Ciencias Naturales y seguramente ella y todas las anteriores, licenciadas en la Universidad Central de Madrid).

Por otra parte, es conveniente indicar que a las mujeres que en aquella época terminaban sus estudios de Bachillerato se les ofrecía la posibilidad de realizar durante unos meses unas prácticas en las escuelas anejas a las Escuelas Normales de Maestros, para sacarse ese título. De ahí que no es extraño que también se tengan referencias de muchas licenciadas, que aprovechando esa opción se sacaron también el título de maestras y luego, gracias a los estudios realizados en sus licenciaturas, tuvieron una actividad muy relacionada con las Matemáticas, como puede verse en la siguiente Tabla 2, extraída de Magallón (2004, p. 299) y completada con algunos nuevos datos por los autores.

*Tabla 2. Mujeres asociadas a la Socedad Matemática Esañola entre 1911 y 1936.*

| Nombre | Año de ingreso | Ciudad de ingreso | Licenciatura |
|---|---|---|---|
| Barrera, Josefa | 1912 | Madrid | Maestra |
| Capdevila d'Oriola, María Montserrat | | Barcelona | Matemáticas |
| Colino, María Silvia | | | |
| García Barriocañal, Josefa V. | 1925 | Logroño | |
| Gimeno, Águeda | 1927 | Córdoba | Matemáticas |
| Martín Bravo, Felisa | 1925 | Madrid | Física |
| Martínez E., María del Pilar | | | |
| Oña Esper, María del Carmen | 1914 | | Maestra |
| Pardo Gayoso, María de los Dolores | | | Física |
| Rigada Ramón, María de la | 1913 | | Maestra |
| Roig Mota, Irene | | | Matemáticas |

De ellas, las profesoras de Escuela Normal de Maestros Josefa Barrera y María de la Rigada fueron socias fundadoras de la Sociedad y formaron parte de su Junta Directiva en 1912, que estaba presidida por José Echegaray (Premio Nobel de Literatura en 1904) como Vocales Adjuntas.

Curiosamente, pertenecieron también a esa Sociedad Rosario Bornás Biurrun, catedrático del Instituto de Gijón, y Adoración Ruiz-Tapiador y Perezagua, catedrático del Instituto de Zaragoza, quienes, aunque por sus nombres pudieran no parecerlo, eran varones y no mujeres (Web 15).

# Referencias

[1] ALENYÀ, Miquel (2014), *Francesc Xavier de la Rosa Mayol.* Recuperado el 09/01/2022, de http://miquelcinema.blogspot.com/2014/10/

[2] BARAHONA VALLECILLO, Sebastián, *Estudios en Mengíbar en tiempos pasados (II PARTE).* Recuperado el 09/01/2022, de http://www.elblogdemengibar.com/

[3] BOLETINES OFICIALES DEL ESTADO:

- B1: BOE número 256, de fecha 5 de octubre de 1960. https://www.boe.es/boe/dias/1960/10/25/pdfs/A14836-14836.pdf.
- B2: BOE número 69, de fecha 21 de marzo de 1962. https://www.boe. es/boe/dias/1962/03/21/pdfs/A03899-03907.pdf.

- B3: BOE número 38, de fecha 13 de febrero de 1975. https://www.boe.es/boe/dias/1975/02/13/pdfs/A03096-03097.pdf.
- B4: BOE número 152, de fecha 25 de junio de 1964. https://www.boe.es/boe/dias/1964/06/25/pdfs/A08255-08267.pdf
- B5: BOE suplemento al número 218, de fecha 11 de septiembre de 1965. https://www.boe.es/boe/dias/1965/09/11/pdfs/C00001-00030.pdf
- B6: BOE número 249, de fecha 17 de octubre de 1972. https://www.boe.es/boe/dias/1972/10/17/pdfs/A18455-18455.pdf
- B7: BOE número 270, de fecha 10 de noviembre de 1973. https://www.boe.es/boe/dias/1973/11/10/pdfs/A21757-21757.pdf
- B8: BOE número 261, de fecha 31 de octubre de 1972. https://www.boe.es/boe/dias/1972/10/31/pdfs/A19421-19421.pdf
- B9: BOE número 158, de fecha 3 de julio de 1979. https://www.boe.es/boe/dias/1979/07/03/pdfs/A15184-15184.pdf

[4] DIARIOS.

- D1: Diario Digital, Universidad de Jaén. Recuperado el 09/01/2022, de https://diariodigital.ujaen.es/cultura-y-deporte/la-uja-inaugura-la-exposicion-primeras-universitarias-giennenses-1910-1960.

- D2: Diario de Córdoba (18 de mayo de 1934). https://prensahistorica.mcu.es/en/catalogo_imagenes/grupo.do?path=1002492680

- D3: ABC de Madrid (21 de abril de 2003), página 68. https://www.abc.es/archivo/ periodicos/abc-madrid-20030421-68.html

[5] JUNTA DE AMPLIACIÓN DE ESTUDIOS (1918). *Memoria correspondiente a los años 1916 y 1917*. Disponible en: http://simurg.bibliotecas.csic.es/viewer/image/CSIC000120256_1916_1917/1/LOG_0003/;jsessionid=51CE6D1CC524C0B2ABEBDBC1899143E6

[6] LABARTA ARAGUÁS, María Luisa, *Paz Vicenta Esponera Andrés*. Disponible en https://dbe.rah.es/biografias/30054/paz-vicenta-esponera-andres

[7] MAGALLÓN PORTOLÉS, Carmen, *Pioneras Españolas en las Ciencias*. C.S.I.C., 2004.

[8] MARTÍN RUBIO, Christian H. (2016). Mujeres matemáticas: ciertas perturbaciones de género. *Boletín de la SAPM*, p. 2.

[9] NÚÑEZ VALDÉS, Juan, ARROYO CASTILLEJA, María y RODRÍGUEZ ARÉVALO, María Luisa. (2012). María Capdevila D'Oriola, pionera de la Matemática española. *Revista Pensamiento Matemático* 2, 1-25.

[10] NÚÑEZ VALDÉS, Juan, ORTIZ RODRÍGUEZ, Isabel María, Mujeres matemáticas pensionadas por la Junta de Ampliación de Estudios, *Boletín Matemático de la Universidad de Almería* (2021), XV:2, 16-17.

[11] PARES: Portal de Archivos Históricos Nacionales.

- P1*: Gimeno Paya, Águeda*. Recuperado el 09/01/2022, de http://pares.mcu.es/ParesBusquedas20/catalogo/description/4371861?nm.
- P2: *Roig Mota, Irene*. Recuperado el 09/01/2022, de http://pares.mcu.es/ParesBusquedas20/catalogo/description/4383744?nm
- P3: *Rojas Gutiérrez, María del Pilar*. Recuperado el 09/01/2022, de http://pares.mcu.es/ParesBusquedas20/catalogo/description/4383781?nm.
- P4: *Baylos Corroza, Victoria Beatriz*. Recuperado el 09/01/2022, de http://pares.mcu.es/ParesBusquedas20/catalogo/description/4363709?nm

[12] POVEDA SANZ, María, *Mujeres y Segunda Enseñanza en Madrid (1931-1939)*. Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid, 2014.

[13] REY, Fernando Celestino, *Historia de los cuerpos especiales de estadística de la administración,* pp. 134, 88. A.E.S.E, 2011.

[14] Web 1: Filosofía en español. *Orden nombrando los Tribunales para las oposiciones a las Cátedras que se indican de los Institutos Nacionales de segunda enseñanza, y listas de los opositores admitidos y excluidos a las mismas*. Recuperado el 09/01/2022, de https://www.filosofia.org/hem/dep/boe/9320517i.htm.

[15] Web 2: Vicerrectorado de Cultura y Proyección Social de la Universidad de Zaragoza. *Pioneras de la Universidad de Zaragoza*. Recuperado el 09/01/2022, de http://pioneras.unizar. es/carolina-jimenez/

[16] Web 3: Irmãs Teresianas Brasil. *Quem somos A Companhia Santa Teresa de Jesus no Brasil*. Recuperado el 09/01/2022, de https://es.irmasteresianasbrasil.com.br/ teresianas-no-brasil.

[17] Web 4: Tarragonavintage (2020). *Esperanza Rabassa y Pont (Barcelona 1846-1929)* Recuperado el 09/01/2022, de https://tarragonavintage.wordpress.com/2020/04/11/esperanza-rabassa-y-pont-barcelona-1850-1929-esposa-de-narcis-oller-de-moragas/

[18] Web 5: Universitat de Barcelona, Centre de Recursos per a l'Aprenentatge i la Investigació. *Les primeres dones*. Recuperado el 09/01/2022, de https://crai.ub.edu/ca/coneix-el-crai/biblioteques/biblioteca-matematiques/exposicio-virtual-professores-UB/primeres-dones.

[19] Web 6: Archivo Histórico Provincial de Alicante. *Las Delicatessen del Archivo: Las maestras de la República en el Archivo*. Recuperado el 09/01/2022, de https://ceice.gva.es/documents/161634402/163458798/DELICATESSEN_LAS_MAESTRAS_DE_LA_REPUBLICA.pdf/c5971005-c67c-4bde-ae7b-90713f63e76f

[20] Web 7: Instituto general y Técnico de Córdoba. *Memoria leida en el solemne acto de apertura del curso de 1923 a 1924, acerca de su estado en el curso académico de 1922 a 1923*. Recuperado el 09/01/2022, de https://biblioteca.cordoba.es/biblioteca/BibDigital/OCR/ensenianza/1924_instituto_general_y_tecnico_de_cordoba-OCR.pdf

[21] Web 8: Instituto Nacional de 2ª Enseñanza de Córdoba. *Memoria leida en el solemne acto de apertura del curso de 1924 a 1925 acerca de su estado en el curso académico de 1923 a 1924*. Recuperado el 09/01/2022, de https://biblioteca.cordoba.es/biblioteca/BibDigital/OCR/ensenianza/1925_instituto_nacional_2da_ensenianza_cordoba-OCR

[22] Web 9: Instituto Nacional de 2ª Enseñanza de Córdoba. *Memoria leida en el solemne acto de apertura del curso de 1925 a 1926 acerca de su estado en el curso académico de 1924 a 1925*. Recuperado el 09/01/2022, de https://biblioteca.cordoba.es/biblioteca/BibDigital/OCR/ensenianza/1926_instituto_nacional_2da_ensenianza_cordoba-OCR. Recuperado el 09/01/2022.

[23] Web 10: Instituto Nacional de 2ª Enseñanza de Córdoba. *Memoria leida en el solemne acto de apertura del curso de 1926 a 1927 acerca de su estado en el curso académico de 1925 a 1926*. Recuperado el 09/01/2022, de https://helvia.uco.es/xmlui/bitstream/handle/10396/14076/Memoria_Vazquez%20Aroca_1927.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[24] Web 11: Universitat de Barcelona. (2015). Dones de Ciències, Memòria de la llum: femina per-fundet omnia luce. Recuperado el 09/01/2022, de http://www.ub.edu/arxiu/img/galeria/perfundet-omnia-lucet/slideshow_1.html?2

[25] Web 12; María Sordé: https://crai.ub.edu/ca/coneix-el-crai/biblioteques/biblioteca-matematiques/exposicio-virtual-professores-UB/primeres-dones

[26] Web 13: Col·legi Oficial de Metges de Barcelona. Galeria de Metges Catalans: 1000 Biografies. Antoni Vila Coro. Recuperado el 09/01/2022, de https://www.galeriametges.cat/galeria-fitxa.php?icod=JLG

[27] Web 14: Col·legi Oficial de Metges de Barcelona. Galeria de Metges Catalans: 1000 Biografies. Avemaria Vila Coro. Recuperado el 09/01/2022, de https://www.galeriametges.cat/galeria-fitxa.php?icod=KED

[28] Web 15: https://elgranerocomun.net/Junta-directiva-y-Lista-de-Socios.html

**Sobre los autores:**
*Nombre:* Juan Núñez Valdés
*Correo Electrónico:* jnvaldes@us.es
*Institución:* Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

*Nombre:* Adolfo Enrique Vázquez Ruiz
*Correo Electrónico:* adolfovr3@gmail.com
*Institución:* Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla, España.

*Nombre:* Rafael Adolfo Vázquez Ruiz
*Correo Electrónico:* ravazquezruiz@gmail.com
*Institución:* Facultad de Física. Universidad de Sevilla, España.

# Juegos y Rarezas Matemáticas

# A vueltas con las tangentes

# Around tangents

Francisco Javier García Capitán, Miguel Ángel Pérez García-Ortega, Antonio Roberto Martínez Fernández y Juan Luis Castaño Fernández

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XIII, Número 1, pp. 147–160, ISSN 2174-0410
Recepción: 14 oct'22; Aceptación: 5 feb'23

1 de abril de 2023

**Resumen**

En este artículo se plantea un problema sobre tangencias propuesto por nuestro amigo y compañero Juan José Isach Mayo que sirve de excusa para revisar distintas teorías sobre construcciones como la inversión o las transformaciones de Möbius en el plano complejo.

**Palabras Clave:** circunferencias tangentes, inversión, transformación de Möbius.

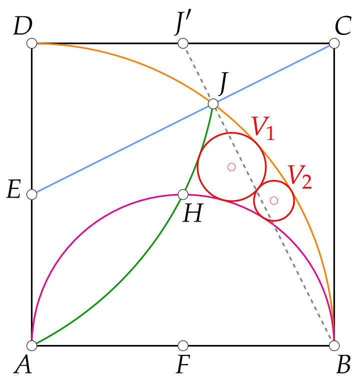
**Abstract**

In this article, it is presented a problem about tangencies proposed by our friend and colleage Juan José Isach Mayo that serves as an excuse to review different theories about constructions such as inversion or Möbius transformations in the complex plane.

**Keywords:** tangent circles, inversion, Möbius transformation.

## 1. Enunciado

Sobre un cuadrante de circunferencia de radio unidad se construye la siguiente figura, en la que $E$, $F$ y $J'$ son los puntos medios de los segmentos $AD$, $AB$ y $CD$, respectivamente, la curva que pasa por $A$, $H$ y $J$ es un arco de circunferencia, siendo $H$ el centro del cuadrado $ABCD$:




1. Calcúlese la sucesión de radios $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión de circunferencias de centros $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Demuéstrese que la sucesión de centros $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se encuentra sobre una cónica y determínese.

## 2. Solución mediante inversión (I)

Se ha modificado el enunciado original sustituyendo el radio unidad por un radio $R$ con el fin de utilizar segmentos en lugar de números. Esta práctica habitual es útil para que las fórmulas que se van obteniendo en el problema sean homogéneas, ya que todas las cantidades muestran su dimensión (véase Pedret Yebra, 2006, y García Capitán, 2006).

**1.** Si prolongamos $CE$ hasta cortar a $AB$ en $K$, resulta que $KB = 2R$ y $BC = R$, de donde $CK = \sqrt{5}R$ y entonces como, por potencia de un punto respecto de una circunferencia, $CJ \cdot CK = CB^2 = R^2$, resulta que

$$CJ = \frac{R^2}{\sqrt{5}R} = \frac{R}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}R}{5} = \frac{1}{5} \cdot CK\,.$$

En consecuencia, si $X$ e $Y$ son las proyecciones del punto $J$ sobre las rectas que contienen $CD$ y $CB$ respectivamente, resultará que

$$CX = \frac{2R}{5} \quad \text{y} \quad CY = \frac{R}{5}\,.$$

Si el punto $L$ es el simétrico de $C$ respecto de $D$, y $Q$ es el punto medio del segmento $LD$, resulta obvio que

$$QA = QK = QH = \frac{\sqrt{5}R}{2}\,.$$

Veamos también que $QJ = \frac{\sqrt{5}R}{2}$. En efecto, utilizando el el teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle QJY$,

$$QJ^2 = QX^2 + YJ^2 = \left(\frac{3R}{2} - \frac{2R}{5}\right)^2 + \left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{121R^2}{100} + \frac{4R^2}{100} = \frac{5R^2}{4}\,.$$

Para resolver el ejercicio se recurre a una inversión con centro el punto $B$ que intercambie los puntos $A$ y $K$, y las circunferencias con diámetros $(KB)$ y $(AB)$ en las perpendiculares a la recta que contiene $AB$ que pasan por los puntos $A$ y $K$ (pueden utilizarse otras inversiones alternativas). En dicho caso, la potencia $k$ de dicha inversión debe cumplir

$$k^2 = BA \cdot BK = R \cdot 2R \Rightarrow k = \sqrt{2}R\,.$$

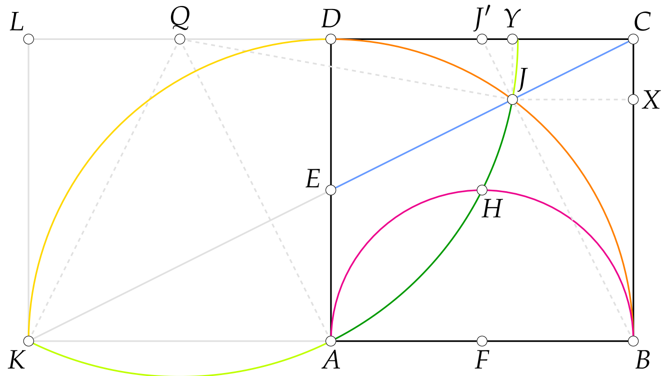



*Figura 1*

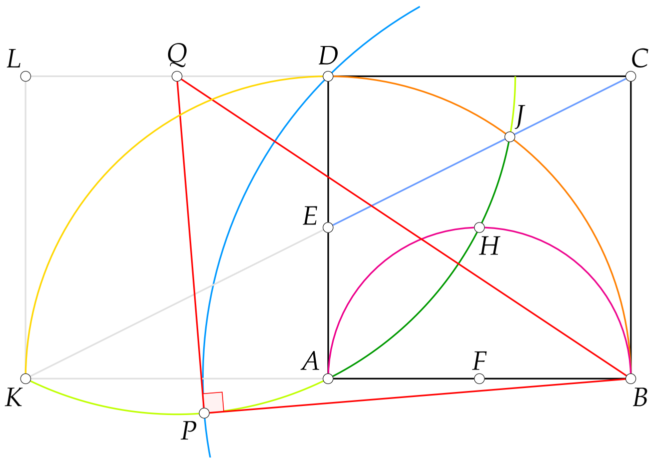



*Figura 2*

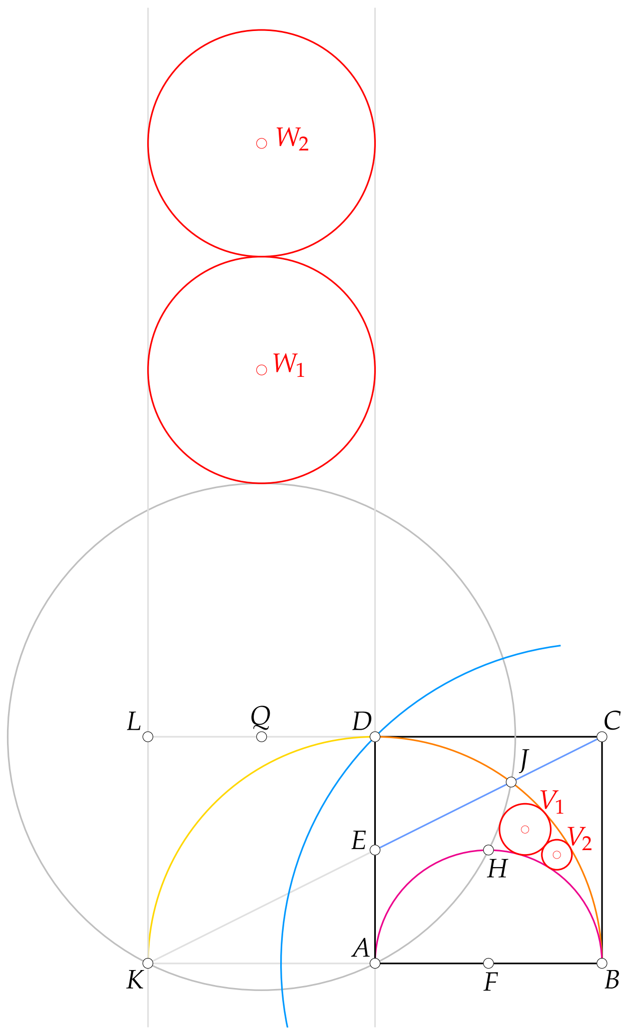



*Figura 3*

Por otro lado, si el punto $P$ es uno de los puntos de corte de las circunferencias $\left(Q, \frac{\sqrt{5}R}{2}\right)$ y $(B, \sqrt{2}R)$[1], como

$$BQ^2 = BC^2 + CQ^2 = R^2 + \frac{9R^2}{4} = \frac{13R^2}{4} = \frac{5R^2}{4} + 2R^2,$$

el triángulo $\triangle BPQ$ es rectángulo, es decir, ambas circunferencias resultan ortogonales, y por lo tanto la circunferencia $\left(Q, \frac{\sqrt{5}R}{2}\right)$ será fija mediante la inversión respecto de la circunferencia $(B, \sqrt{2}R)$.

Ahora la inversa de la circunferencia $(V_1, v_1)$ inscrita en el triángulo curvilíneo $BJH$ será la inversa de una circunferencia $\left(W_1, w_1 = \frac{R}{2}\right)$ tangente a las rectas que contienen $KL$ y $AD$ y a la circunferencia que une los puntos $A$, $H$ y $J$, esto es, la circunferencia $(Q, 5)$.

El radio $v_1$ se puede obtener con la fórmula

$$v_1 = \frac{w_1 k^2}{BW_1^2 - w_1^2} = \frac{\frac{R}{2} \cdot 2R^2}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(R + \frac{\sqrt{5}R}{2} + \frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{2R}{11 + 3\sqrt{5}}.$$

De la misma forma podemos obtener todos los radios:

$$\begin{aligned} v_n = & \frac{w_n k^2}{BW_n^2 - w_n^2} = \frac{\frac{R}{2} \cdot 2R^2}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(R + \frac{\sqrt{5}R}{2} + (2n-1)\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \\ = & \frac{2R}{7 + \sqrt{5} + 2(1+\sqrt{5})n + 2n^2}. \end{aligned}$$

**2.** Siendo $V_nF = \frac{R}{2} + v_n$ y $V_nA = R - v_n$, se tiene que $V_nA + V_nF = \frac{3R}{2}$, por lo que resulta que todos los centros $V_n$ están sobre una elipse $\mathcal{E}$ con focos $F$ y $A$, y con eje mayor $\frac{3R}{2}$ (figura 4).

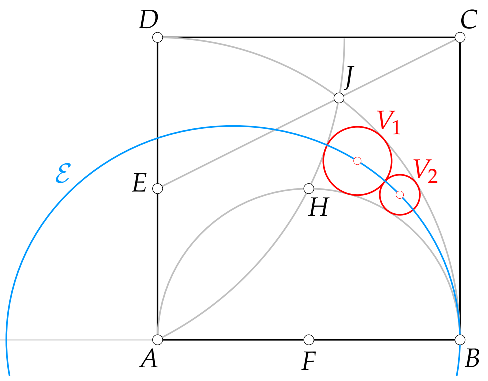



*Figura 4. La elipse $\mathcal{E}$ (en azul claro) marca la trayectoria de los centros de circunferencias tangentes buscadas.*

## 3. Solución mediante inversión (II)

**1.** Fijemos unos ejes rectangulares de coordenadas centrados en $A$ y tales que $B = (1, 0)$ y $D = (0, 1)$. Consideremos la inversión con respecto a la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $B$ y radio

[1] En general se denota $(X, r)$ a la circunferencia de centro el punto $X$ y radio $r$.

$\overline{AB} = 1$ y denotemos, como es habitual, por $X'$ al inverso de un punto $X \neq B$ con respecto a la circunferencia $\mathcal{C}$.

Entonces se tiene que:

i) La circunferencia (rosa) $AHB$ se transforma en la recta $AD$.

ii) La circunferencia (marrón) $DJB$ se transforma en la recta $FH$.

iii) El inverso del punto $J$ es el punto $J'$ de la imagen. En efecto: para hallar el inverso de $J$ tomamos la perpendicular a $BJ$ que pasa por $J$, que es la recta $EJ$ [2] y hallamos tomamos uno de los puntos de intersección de esta perpendicular con la circunferencia de inversión, como por ejemplo $C$. Ahora se toma la tangente por $C$ a la circunferencia de inversión, que es la recta $CD$, y entonces el inverso de $J$ será la intersección de esta tangente con la recta $BJ$, punto que es $J'$, que es lo que queríamos ver.

iv) El inverso del punto $H$ es el punto $D$. Esto se deduce fácilmente de la igualdad $\overline{BH} \cdot \overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$.

v) El inverso del punto $F = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ es el punto $F' = (-1, 0)$ es el punto . Como antes, se deduce de la igualdad $\overline{BF} \cdot \overline{BF'} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

vi) De iii), iv) y v) deducimos que la circunferencia (verde) $\mathcal{C}_H$ que pasa por $A$, $H$ y $J$ se transforma en la circunferencia $\mathcal{C}'_H$ que pasa por los puntos $A$, $F$ y $D$ (y también por $J'$).

Además, las circunferencias $(V_n)$ se transforman en las circunferencias tangentes $(V'_n)$, todas ellas de radio $\frac{1}{4}$. Véase la figura 5.

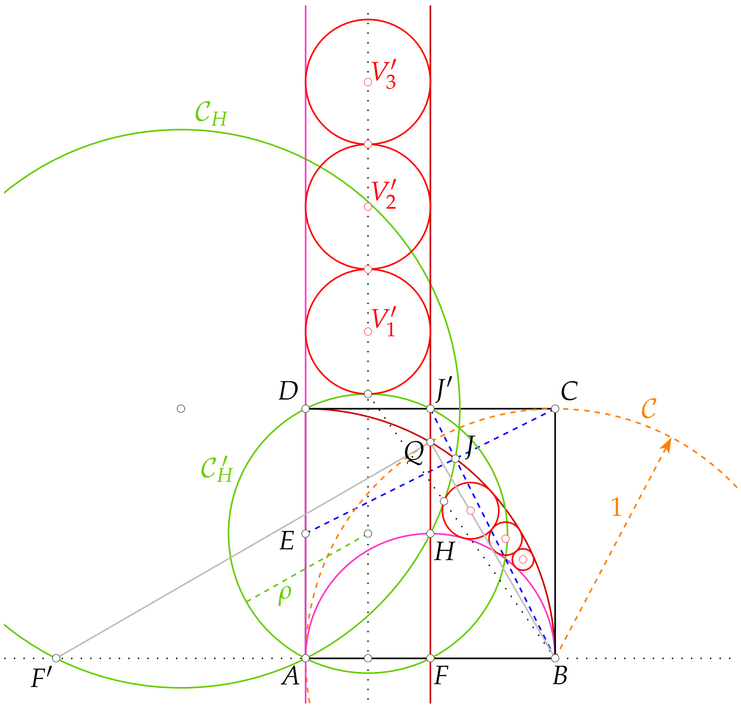



*Figura 5. Aplicando inversión al problema.*

[2] En efecto: según la notación de la figura 6, la semejanza de los triángulos rectángulos $CDE$ y $HPJ'$ nos da la igualdad de ángulos $\measuredangle PJ'H = \measuredangle ECD = \alpha$ y $\measuredangle HPJ' = \measuredangle CJ'P = \beta$. Al ser $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, deducimos que $\measuredangle J'JC = \frac{\pi}{2}$, con lo que $BJ' \perp EC = EJ$.

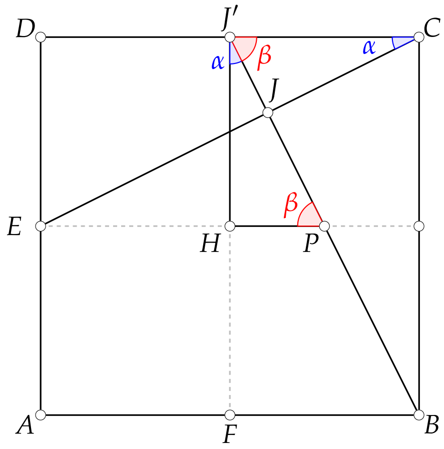



*Figura 6. Las rectas $BJ'$ y $EC$ son perpendiculares.*

Para hallar el radio $\rho$ de la circunferencia $\mathcal{C}'_H$ podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $ADF$, de donde obtenemos que $\rho = \frac{\sqrt{5}}{4}$. El punto de corte de $\mathcal{C}'_H$ con la recta $x = \frac{1}{4}$ es $T'_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \rho\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)$. Así, se obtiene fácilmente que las coordenadas de los centros $V'_n$ de las circunferencias inversas de $(V_n)$ resultan

$$V'_n = \left(\frac{1}{4}, \frac{\Phi + n}{2}\right),$$

donde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el número de oro.

Ahora usamos la relación que nos dice cómo se transforma el radio de una circunferencia bajo una inversión con respecto a una circunferencia de centro $O$ y radio $k$. Concretamente, se tiene que el radio $r'$ de una circunferencia inversa de una circunferencia con centro $M$ y radio $r$ que no pasa por el centro de inversión viene dado por

$$r' = \frac{r \cdot k^2}{|\overline{OM}^2 - r^2|}.$$

Particularizando en nuestro caso, tendremos que

$$v_n = \frac{\frac{1}{4}}{\left|\overline{BV'_n}^2 - \frac{1}{16}\right|}.$$

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\overline{BV'_n}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MV'_n}^2 = \frac{9}{16} + \frac{(\Phi+n)^2}{4},$$

luego

$$\overline{BV'_n}^2 - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{(\Phi+n)^2}{4},$$

y los radios de las circunferencias $(V_n)$ valen

$$v_n = \frac{1}{2 + (\Phi+n)^2}.$$

**2.** Observemos en primer lugar que aunque los puntos $V'_n$ están alineados, los puntos $V_n$ no tienen por qué estar sobre una circunferencia. Usando que la circunferencia $(V_n)$ es tangente exteriormente a la circunferencia $(F)$ y tangente interiormente a la circunferencia $(A)$, se tiene que

$$\overline{AV_n} + \overline{FV_n} = (1 - v_n) + \left(\frac{1}{2} + v_n\right) = \frac{3}{2},$$

por lo que los puntos $V_n$ están sobre la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos son $A$ y $F$ y que pasa por $B$ (véase la figura 7).

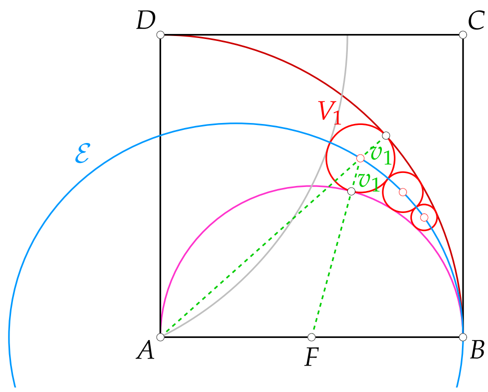



*Figura 7. Condiciones de tangencia y lugar geométrico que describen los puntos $V_n$.*

Nótese que para resolver este apartado no ha hecho falta conocer el valor concreto de $v_n$ calculado en el apartado 1.

## 4. Solución mediante inversión (III)

**1.** Considerando la inversión con respecto a la circunferencia $(B)$ cuyo radio es $b = 1$, se verifica que:

1) La circunferencia $(F)$ se transforma en la recta $AD$.

2) La circunferencia $(A)$ se transforma en la recta $FH$.

3) La circunferencia $(K)$ se transforma en la circunferencia $(G)$, cuyo radio es $g = \frac{\sqrt{5}}{4}$, ya que:

   i) El punto $A$ se mantiene fijo, por estar situado sobre la circunferencia de inversión.

   ii) El punto $H$ se transforma en el punto $D$, pues:

$$BD = \sqrt{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b^2}{BH}.$$

   iii) El punto $J$ se transforma en el punto $J'$, pues, como $CE \perp BJ$, los triángulos rectángulos $CJB$ y $J'CB$ son semejantes y, por tanto:

$$\frac{BJ}{b} = \frac{BJ}{BC} = \frac{BC}{BJ'} = \frac{b}{BJ'} \implies BJ' = \frac{b^2}{BJ}.$$

4) La sucesión de circunferencias $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo radio común es

$$u = \frac{AF}{2} = \frac{1}{4},$$

se transforma en la sucesión de circunferencias $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Además, como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$MU_n^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} + (2n-1)u\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{2n-1}{4}\right)^2 = \left(\frac{n+\Phi}{2}\right)^2,$$

siendo $\Phi$ el número de oro, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$v_n = \frac{b^2u}{|BU_n^2 - u^2|} = \frac{b^2u}{|MU_n^2 + (3u)^2 - u^2|} = \frac{b^2u}{|MU_n^2 + 8u^2|} =$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{n+\Phi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+\Phi)^2 + 2}.$$

**2.** Considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto $B$ y eje de abscisas en la recta $AB$, como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(U_n) \equiv \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{n+\Phi}{2}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

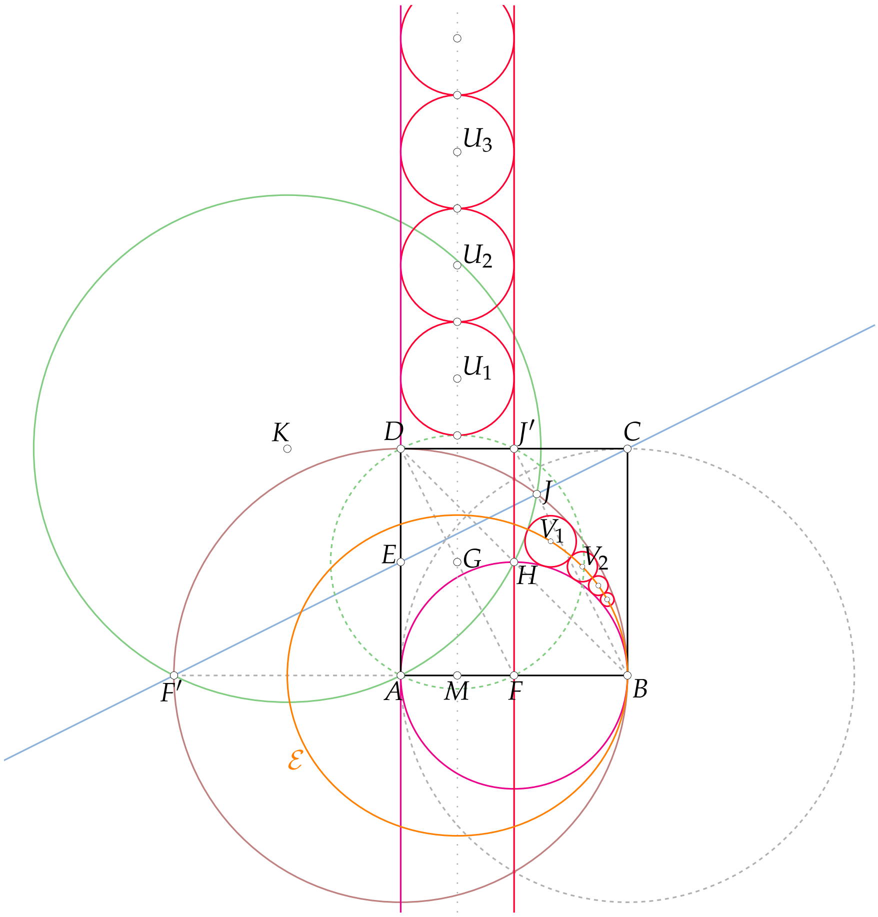



*Figura 8*

entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(V_n) \equiv \left((n+\Phi)^2+2\right)x^2 + \left((n+\Phi)^2+2\right)y^2 + 6x - 4(n+\Phi)y + 4 = 0\,,$$

y, por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \left(-\frac{3}{(n+\Phi)^2+2}, \frac{2(n+\Phi)}{(n+\Phi)^2+2}\right).$$

Finalmente, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\begin{aligned} AV_n + FV_n = &\sqrt{\left(-\frac{3}{(n+\Phi)^2+2}+1\right)^2 + \left(\frac{2(n+\Phi)}{(n+\Phi)^2+2}\right)^2} + \\ &+ \sqrt{\left(-\frac{3}{(n+\Phi)^2+2}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2(n+\Phi)}{(n+\Phi)^2+2}\right)^2} = \\ &= \frac{(n+\Phi)^2+1}{(n+\Phi)^2+2} + \frac{(n+\Phi)^2+4}{2\left((n+\Phi)^2+2\right)} = \frac{3}{2}\,, \end{aligned}$$

entonces el lugar geométrico que describe la sucesión de puntos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos son los puntos $A = (-1,0)$ y $F = \left(-\frac{1}{2},0\right)$ y cuya suma de distancias es igual a $\frac{3}{2}$.

## 5. Solución mediante transformaciones de Möbius

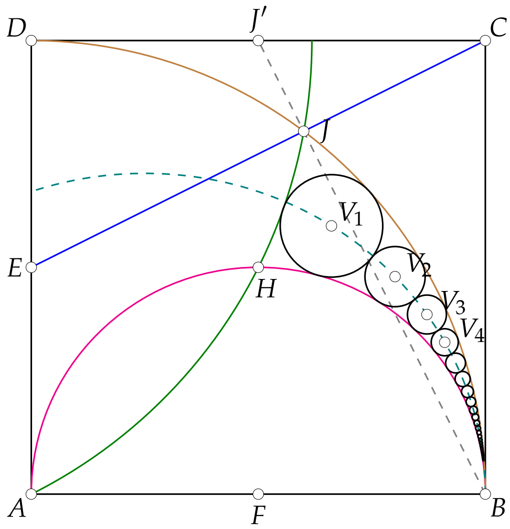



*Figura 9. Esquema del problema.*

Las circunferencias buscadas $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con centros en los puntos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y radios respectivos $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, son todas tangentes a la circunferencia con centro en $A$ y radio 1 y a la circunferencia con centro en $F$ y radio $\frac{1}{2}$. En esta propuesta de solución vamos a buscar una transformación de Möbius que convierta dichas circunferencias en rectas paralelas (véase Schwerdtfeger, 1979, § 2).

Identificamos el plano euclidiano con $\mathbb{C}$, y tomamos un sistema de referencia verificando

$$z_A = 0\,, \quad z_B = 1\,, \quad z_D = i\,.$$

Sea $G$ el punto simétrico de $B$ respecto de $A$, o sea, tal que su afijo sea $z_G = -1$ (véase la figura 10). Buscamos una función $\varphi$ definida por

$$\hat{\mathbb{C}} \ni z \to \varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d} \in \hat{\mathbb{C}}\,, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}\,, \quad ad-bc \neq 0\,;$$

y verificando, por ejemplo,

$$\varphi(z_A) = \varphi(0) = 0 = z_A\,, \quad \varphi(z_B) = \varphi(1) = \infty\,, \quad \varphi(z_G) = \varphi(-1) = -1 = z_G\,.$$

Si imponemos las dos primeras condiciones,

$$\varphi(0) = 0 \Longrightarrow b = 0\,,$$
$$\varphi(1) = \infty \Longrightarrow d = -c\,;$$

y de momento, sabemos que $\varphi$ ha de ser de la forma

$$\varphi(z) = \frac{az}{c(z-1)}\,.$$

Además, imponiendo también la condición restante,

$$\varphi(-1) = -1 \Longrightarrow \frac{-a}{-2c} = -1 \Longrightarrow \frac{a}{c} = -2\,.$$

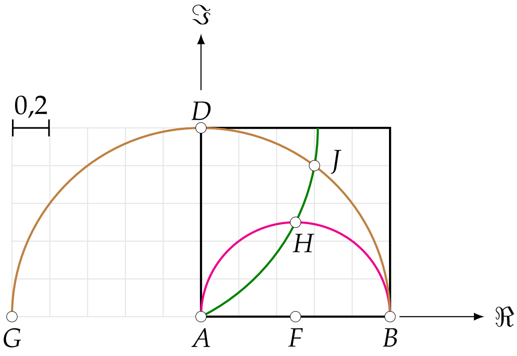



*Figura 10. Elementos importantes del problema.*

Por tanto, la función $\varphi$ buscada es

$$\varphi(z) = -\frac{2z}{z-1}\,,$$

y su inversa

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z}{z+2}\,. \tag{1}$$

Aplicamos la transformación $\varphi$ a los puntos[3] $D$, $H$ y $J$, y obtenemos

$$\varphi(z_D) = \varphi(i) = -1+i\,, \quad \varphi(z_H) = \varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\,, \quad \varphi(z_J) = \varphi\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right) = -1+2i\,.$$

Por tanto, la circunferencia con centro en $A$ y radio 1 se transforma en la recta $\Re(z) = -1$, la circunferencia con centro en $F$ y radio $\frac{1}{2}$ en la recta $\Re(z) = 0$ (el eje imaginario), y la circunferencia que pasa por los puntos $A$, $H$ y $J$ en la circunferencia

$$\left| z - \left(-\frac{1}{2}+i\right)\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}\,. \tag{2}$$

Todo esto se representa en la figura 11, en la que denotamos al transformado de cada punto $P$ del problema original por $P^*$. En el nuevo problema equivalente obtenido es inmediato calcular las circunferencias $\{\gamma_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, transformadas de las originales. Todas han de ser tangentes a las rectas verticales separadas una unidad, por lo que todas tienen radio $\frac{1}{2}$. Además, la primera de ellas, con centro en $W_1^*$, será también tangente a la circunferencia (2), y para cada $n \in \mathbb{N}$ la

[3] Se omite el cálculo de las coordenadas de $J$, por ser elemental.

circunferencia con centro en $W^*_{n+1}$ es tangente a la circunferencia con centro en $W^*_n$. A la vista de todo lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, los puntos $W^*_n$ serán los afijos de los números

$$w_n := -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + n - \frac{1}{2}\right) i = -\frac{1}{2} + \frac{2n + 1 + \sqrt{5}}{2}\, i\,.$$

Y si, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$a_n := 2n + 1 + \sqrt{5}\,, \tag{3}$$

la expresión anterior se puede simplificar de la forma

$$w_n = \frac{1}{2}(-1 + a_n i)\,.$$

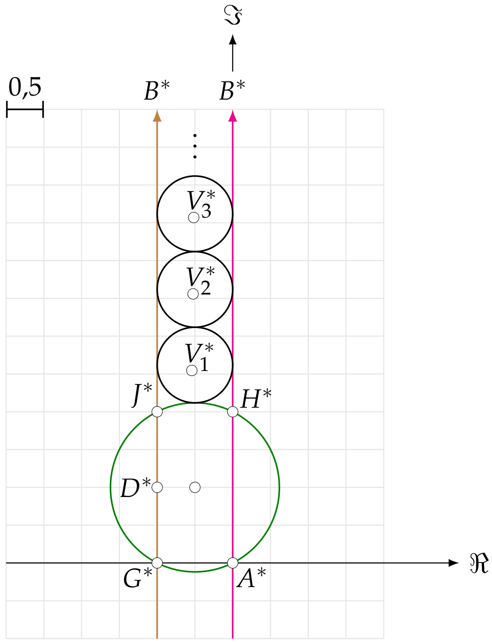



*Figura 11. Transformación de Möbius.*

El siguiente paso es recuperar los centros $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de las circunferencias originales. Si bien las transformaciones de Möbius convierten rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, en general no preservan los centros de las circunferencias. Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, y consideramos la circunferencia $\gamma^*_n$ con centro en $W^*_n$ y radio $\frac{1}{2}$, cuya ecuación será

$$\gamma^*_n \equiv \left| z - \frac{1}{2}\,(-1 + a_n)\, i \right| = \frac{1}{2}\,.$$

Vamos a obtener el conjugado de $p := -2$ respecto de dicha circunferencia, que llamaremos $q_n$, cuyo afijo es el punto $V^*_n$ (algunos se representan en la figura 11), y que verifica la relación

$$\begin{aligned}(q_n - w_n)(\bar{p} - \bar{w}_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow q_n &= \frac{1}{4(\bar{p} - \bar{w}_n)} + w_n = \\ &= \frac{1}{4\left(-2 - \frac{1}{2}(-1 - a_n i)\right)} + \frac{1}{2}\,(-1 + a_n i) =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(-3+a_n i)} + \frac{1}{2}\left(-1+a_n i\right) = \\
&= \frac{-(12+a_n^2) + a_n(8+a_n^2)\, i}{9+a_n^2}.
\end{aligned}
$$

Dado que $p = -2$ y $q_n$ son conjugados respecto de la circunferencia $\gamma_n^*$, en el problema original $\varphi^{-1}(p)$ y $\varphi^{-1}(q_n)$ también serán conjugados respecto de la circunferencia buscada $\gamma_n = \varphi^{-1}(\gamma_n^*)$. Ahora bien,

$$\varphi^{-1}(p) = \varphi^{-1}(-2) = \infty\,,$$

por lo que $c_n := \varphi^{-1}(q_n)$ será el centro de la circunferencia $\gamma_n$ y su afijo será el punto $V_n$. Operando,

$$c_n = \varphi^{-1}\left(\frac{-(12+a_n^2) + a_n(8+a_n^2)\, i}{9+a_n^2}\right) = \frac{a_n^2 - 4 + 4a_n i}{8+a_n^2}. \tag{4}$$

A partir de los resultados obtenidos procedemos a resolver los dos apartados del ejercicio.

1. La sucesión de radios $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada, por ejemplo, por la distancia de cada punto $V_n$ (de afijo $c_n$) a la circunferencia de centro $A$ y radio 1. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicando las relaciones (4) y (3) obtenemos

$$
\begin{aligned}
v_n &= 1 - |c_n| = 1 - \left|\frac{a_n^2 - 4 + 4a_n i}{8+a_n^2}\right| = 1 - \frac{\left|a_n^2 - 4 + 4a_n i\right|}{8+a_n^2} = 1 - \frac{|a_n + 2i|^2}{8+a_n^2} = \\
&= 1 - \frac{4+a_n^2}{8+a_n^2} = \frac{4}{a_n^2+8} = \frac{4}{(2n+1+\sqrt{5}\,)^2+8}.
\end{aligned}
$$

2. Los puntos de la sucesión $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están sobre la curva cuyas ecuaciones paramétricas se deducen inmediatamente de la expresión (4):

$$
\left.\begin{aligned}
\Re(z) &= \frac{t^2-4}{8+t^2} \\
\Im(z) &= \frac{4t}{8+t^2}
\end{aligned}\right\}, \ \forall t \in \mathbb{R}\,.
$$

Con el objetivo de identificar la curva vamos a dar una ecuación implícita de la misma. Para ello tenemos que eliminar el parámetro $t \in \mathbb{R}$ presente en ambas ecuaciones. Procedemos a hacerlo completando cuadrados, con idea de eliminar el término de primer grado de los numeradores.

$$
\begin{aligned}
\big(\Re(z)\big)^2 + \big(\Im(z)\big)^2 &= \left(\frac{t^2-4}{8+t^2}\right)^2 + \left(\frac{4t}{8+t^2}\right)^2 = \frac{(t^2-4)^2+16t^2}{(8+t^2)^2} = \\
&= \left(\frac{4+t^2}{8+t^2}\right)^2 = \left(\frac{8+2t^2}{2(8+t^2)}\right)^2; \\
\left(\Re(z) - \frac{1}{2}\right)^2 + \big(\Im(z)\big)^2 &= \left(\frac{t^2-4}{8+t^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4t}{8+t^2}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{t^2-16}{2(8+t^2)}\right)^2 + \left(\frac{8t}{2(8+t^2)}\right)^2 = \\
&= \frac{(t^2-16)^2+64t^2}{4(8+t^2)} = \left(\frac{16+t^2}{2(8+t^2)}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Tomando primero raíces cuadradas en ambos miembros de cada ecuación y sumándolas luego,

$$\sqrt{\left(\Re(z)\right)^2+\left(\Im(z)\right)^2}+\sqrt{\left(\Re(z)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\Im(z)\right)^2}=\frac{24+3t^2}{2(8+t^2)}=\frac{3}{2}.$$

Por tanto, la curva es una elipse[4] de focos $A$ y $F$ y de semieje mayor $\frac{3}{4}$,

$$|z|+\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}.$$

## Agradecimientos

Los autores agradecen a José Manuel Sánchez Muñoz su iniciativa creando y administrando el grupo de Telegram *Retos Matemáticos*, y la ayuda en la maquetación final de este artículo.

## Referencias

ALEXANDER, Daniel C. & KOEBERLEIN, Geralyn M. (2013). *Geometría*, 5ª Ed. Javier León Cárdenas (trad.). México D.F., México: Cengage Learning.

ALTSHILLER-COURT, Nathan (1881). *College Geometry. An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. 2nd ed. New York, USA: Dover Publications, Inc.

BUSER, Peter & COSTA, Antonio F. (2010). *Curso de Geometría Básica*. UNED. Madrid, España: Sanz y Torres.

COXETER, Harold S.M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. México D.F., México: Limusa.

COXETER, Harold S.M. & GREITZER, Samuel L. (1967). *Geometry Revisited*. New York, USA: The Mathematical Association of America (Inc.).

GARCÍA CAPITÁN, Francisco Javier (2006). «Inversión en Olimpiadas. Aplicación de la Inversión a la Resolución de Problemas». *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*, 27 (sep.-oct. 2006). ISSN: 1698-277X.

HIDETOSHI, Fukagawa & ROTHMAN, Tony (2008). *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. New Jersey, USA: Princeton University Press.

IVORRA, Carlos (2006). *Geometría*. Valencia, España: Universidad de Valencia.

JOHNSON, Roger A. (2007) [1929]. *Advanced Euclidean Geometry*, p. 186. New York: Dover Publ.

LACHLAN, R. (1893). *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*. London: Macmillan and Co.

M'CLELLAND, William J. (1891). *A Treatise on The Geometry of The Circle*. London: Macmillan and Co.

MONTESDEOCA DELGADO, Ángel (2012). *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*. Universidad de La Laguna. Santa Cruz de Tenerife.

[4] Se representa la parte relevante con línea de trazos en la figura 9 (pág. 155).

PEDOE, Daniel (1995). *Circles: A Mathematical View*. The Mathematical Assotiation of America (Incorporated).

PEDRET YEBRA, José María (2006). *Curso de Geometría Proyectiva para un amigo*. Esplugues de Llobregat, España.

PUIG ADAM, Pedro (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. 16ª Ed. Madrid, España: Euler.

PUIG ADAM, Pedro (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo II. Complementos*. 13ª Ed. Madrid, España: Euler.

SAPIÑA BORJA, Juan (1955). *Problemas Gráficos de Geometría*. Madrid, España

SCHWERDTFEGER, Hans (1979). *Geometry of Complex Numbers. Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry*. New York, USA: Dover Publications, Inc.

USUNÁRIZ BALANZATEGUI, Ubaldo & USUNÁRIZ SALA, Ignacio (2012). *Problemas de geometría*. Madrid, España: E.T.S.I. Minas, Universidad Politécnica de Madrid.

**Sobre los autores:**

*Nombre:* Francisco Javier García Capitán
*Correo electrónico:* garciacapitan@gmail.com
*Institución:* I.E.S. "Álvarez Cubero", Priego de Córdoba (Córdoba).

*Nombre:* Miguel Ángel Pérez García-Ortega
*Correo electrónico:* mianpg@gmail.com
*Institución:* I.E.S. "Bartolomé-José Gallardo", Campanario (Badajoz).

*Nombre:* Antonio Roberto Martínez Fernández
*Correo electrónico:* antoniorobert.martinez@murciaeduca.es
*Institución:* C.E.A. "Mar Menor", Torre Pacheco (Murcia).

*Nombre:* Juan Luis Castaño Fernández
*Correo electrónico:* juanlcast@gmail.com
*Institución:* Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).

# Cuentos Matemáticos

# Segundo jazz

Segundo jazz

Javier Rodrigo

Revista de Investigación

Volumen XIII, Número 1, pp. 161–164, ISSN 2174-0410
Recepción: 12 Dic'22; Aceptación: 09 Enr'23

1 de abril de 2023

**Resumen**

Este relato es un ejercicio de sinécdoque narrativa encuadrado en el taller de escritura creativa (nivel medio) de la Escuela de literatura Fuentetaja. El contenido matemático del relato es doble: por un lado, se trabaja el tema de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, por otro lado, los protagonistas del relato son estudiantes de matemáticas.

**Palabras Clave:** Ecuaciones Diferenciales, Ley de enfriamiento de Newton, Ley de enfriamiento de Stefan.

**Abstract**

This tale is an exercise of narrative synecdoche framed in the course of creative writing (medium level) of the school of literature "Fuentetaja". The mathematical content of the tale is twofold: on one hand, the topic of the differential equations and its applications is analyzed, on the other hand, the characters of the tale are young mathematicians.

**Keywords:** Differential Equations, Newton law, Stefan law.

## 1. Segundo jazz (Un fiambre en el aseo)

La invitación que recibieron los compañeros de carrera de Juan era una foto de un disfraz, y dentro del disfraz estaba el propio Juan. El pie de foto tenía unas palabras:

Queridos colegas. Quería celebrar mi licenciatura (y la vuestra) con una fiesta el próximo lunes a las 21 horas en Segundo Jazz.

Segundo Jazz era uno de los garitos que configuraban el circuito de jazz de la capital a finales de los ochenta y principios de los noventa. Un circuito en el que siempre actuaban los mismos: Jayme Marques, la Canal Street Jazz Band, Jorge Iturralde y, si había suerte, Tete Montoliú.

A los compañeros les sorprendió esa iniciativa de Juan, acostumbrados a su rol secundario. En realidad, no era una iniciativa suya. Sus dos hermanos estrenaban grupo de música, y pensaron que una fiesta privada era un buen banco de pruebas para el grupo.

Llegó el gran día y Juan presentó al grupo sin nombre: su hermano mediano en la voz, su hermano pequeño a la guitarra rítmica, un amigo de un amigo en la guitarra principal, bajo y batería.

Tras tres horas de fiesta y concierto, Juan recuperaba su anonimato habitual escondido en la barra del local, tomando copas y sonriendo a cualquiera que se le acercara, mientras el grupo sin nombre desgranaba canciones de los Stones, los ACDC y los primeros Guns and Roses, con los ojos inyectados en sangre del guitarrista principal haciendo los punteos.

Uno de los pocos malotes de la clase se acercó con cara de susto a un grupito de los que seguían el concierto.

- ¿Qué te pasa? Traes muy mala cara. ¿Te has metido algo en el baño?

- Hay un regalito en el aseo de los chicos.

- ¿Qué ocurre, le has preparado una raya a Juan en el lavabo? Juan es muy pringado, nunca toma drogas. Alcohol como mucho.

- No me estáis entendiendo. Tenéis que venir.

- El grupito se acercó al baño de los chicos. En uno de los reservados estaba el regalo: un cadáver con la cabeza metida en la taza.

- Hostia. Qué coño ha pasado aquí.

- Hay que cerrar el local y ver quién ha sido.

Una enorme nariz se abrió paso entre el grupo que colapsaba la puerta del aseo. La nariz pertenecía a Marcos, y era la brújula que marcaba el Norte a toda la clase. La flauta de Hamelin que seguían todos los demás, dirigidos algunas veces al paraíso y otras al borde del precipicio, según funcionara la intuición de aquel poderoso olfato.

- ¿Qué ha pasado aquí? Contadme.

Juan echó en falta en ese momento a Mar, la coquito, y a su tranquilidad para pensar en las situaciones difíciles. El cerebro de Mar no era lo único de ella que Juan echaba en falta en esa fiesta. Mar era su alter ego femenino en la clase, la rara que nunca encajaba del todo en ningún sitio. Eran casi vecinos y volvían siempre juntos de la Facultad, demostrando un entendimiento que nunca llegó a más. Mar estaba secretamente enamorada del guapo de la pandilla de Juan y Juan estaba secretamente enamorado de la guapa de la pandilla de Mar. Si a los veinte años mandara la razón y no el corazón, Juan y Mar se hubieran juntado y habrían dejado que los guapos ligaran entre ellos.

- No hay mucho que contar. Hemos entrado y hemos visto esto.

- ¿Le conoce alguien?

- Por lo poco que vemos, no.

Juan tenía la sensación de que un malo merodeaba la fiesta sin poder entrar. Ahora resultaba que el malo estaba dentro. Juan no creía que ninguno de los pardillos de sus compañeros fuera capaz de cometer un crimen. Sólo concebía un culpable, los ojos inyectados en sangre.

- ¿Quién fue el último de salir del baño?

El cerebro masculino de la clase habló.

- Nariz, ¿por qué crees que ha sido uno de nosotros?

- ¿Cómo dices, Fran?

- ¿No habéis aprendido nada de la Facultad?

El tono prepotente de Fran sorprendió a sus compañeros, acostumbrados a ver cómo disimulaba su descomunal talento para las matemáticas. Lo achacaron a los nervios por la situación.

- Podemos calcular la hora a la que murió utilizando la ley de enfriamiento de Newton. Sólo necesitamos calcular la temperatura ambiente, la temperatura del cuerpo ahora y dentro de un rato y resolver una ecuación diferencial lineal. Si murió antes de las 21, el autor no es uno de los nuestros.

La nariz retomó el mando de la situación.

- Héctor, ¿tienes un termómetro?

Héctor solía llevar de todo en su mochila.

Midieron las tres temperaturas y las dos hormiguitas de la clase se pusieron manos a la obra con la ecuación diferencial.

- Un momento, ¿quién nos dice que la temperatura en este bar no la rige la ley de Stefan? En ese caso la ecuación era de Bernoulli, ¿no? ¿Y cómo era el cambio?

- No, en ese caso la ecuación es de variables separadas. En todo caso, estamos todos muy borrachos como para hacer un cambio de variable. Linealizamos.

- Según nuestros cálculos, el fiambre está aquí desde ayer.

- Pues entonces estamos salvados. Salgamos de aquí.

- No tan deprisa. Cuando vea esto Segundo, nos denunciará.

Segundo era el dueño que daba nombre al pub. Se bastaba y se sobraba para ser también el camarero y el vigilante que echaba a patadas a los borrachos. Un hueso duro de roer.

- Nadie nos va a denunciar. Este hombre está en muchas mafias. Probablemente él tenga que ver con esta muerte, igual era un matón que habían mandado para cobrarle una deuda. Nos tenemos que quitar de encima a Segundo.

- ¿Qué dices, Nariz?

- No digo matarle, sólo dejarle fuera de combate. Luego tenemos que salir en dos filas ordenadas, como si fuera una evacuación.

Los ojos inyectados en sangre era el único que tenía suficiente vida canalla como para pelear con Segundo. Había pasado de ser el principal sospechoso a ser el principal aliado. Eso sí, no se iba a arriesgar poniéndose frente a él. Le dio un violento botellazo en la nuca, un golpe de conejo que derrumbó a Segundo, como en las películas.

Los chicos salieron del bar pisándose unos a otros, en un repentino tránsito de la vida de estudiante a la vida adulta. Una vida adulta con mil horas dadas de clase, o con miles de horas gastadas en una empresa que ni te va ni te viene. Vacías vidas adultas en las que al menos tenían una historia que contar, una leyenda para susurrar en los aniversarios de la promoción: el caso del fiambre encontrado en el servicio de caballeros del Segundo Jazz.

**Sobre el autor:**
*Nombre:* Javier Rodrigo
*Correo Electrónico:* jrodrigo@comillas.edu
*Institución:* Universidad Pontificia Comillas de Madrid, España.

## Críticas y reseñas

# Canal de Youtube y libros de matemática discreta y grafos

# Youtube channel and books on discrete mathematics and graphs

Cristina Jordán , Marina Murillo-Arcila y Juan B. Seoane Sepúlveda

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XIII, Número 1, pp. 165–169, ISSN 2174-0410
Recepción: 23 Sep'22; Aceptación: 30 Oct'22

1 de abril de 2023

**Resumen**

Un grupo de profesores universitarios hemos escrito sendos libros sobre matemática discreta y teoría de grafos dirigidos a aquellos lectores interesados en profundizar en el estudio de esta materia, que forma parte de los planes de estudios de Ingeniería Informática, así como de los cursos iniciales dentro de los estudios de Matemáticas. Como apoyo audiovisual a estos libros los autores han elaborado el canal de YouTube "El lado discreto de las mates".
**Palabras Clave:** matemática discreta, grafos, youtube, libros docentes, problemas resueltos.

**Abstract**

A group of university professors has written two books on discrete mathematics and graph theory aimed at those readers interested in deepening the study of this subject, which is part of the Computer Engineering curricula, as well as the initial courses in Mathematics studies. As audiovisual support for these books, the authors have created the YouTube channel "El lado discreto de las mates".

**Keywords:** discrete mathematics, graphs, youtube, teaching books, solved problems.

## 1. Introducción

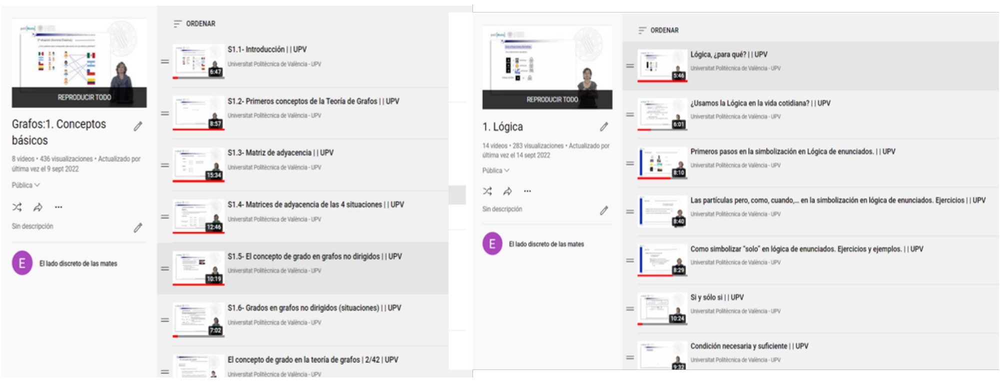
La trayectoria de un grupo de profesores universitarios impartiendo la materia de matemática discreta ha dado lugar a dos libros titulados: "Teoría de grafos y modelización. Problemas resueltos" ([5]) y "Problemas, cuestiones y aplicaciones de matemática discreta" ([4]). Estos textos son fundamentalmente libros de problemas resueltos, en los que cada capítulo comienza con un breve resumen teórico, cuyo único propósito es recordar los conceptos básicos para poder resolver dichos ejercicios.

Nos gustaría recalcar el enfoque pedagógico y aplicado de estos libros, que contienen una gran cantidad de ejercicios resueltos con detalle a los que se ha dado forma y estilo propios, adquiridos a lo largo de nuestra experiencia docente. Se presenta la resolución de todos los problemas de forma muy clara, a la vez que rigurosa, tratando de hacer la materia cercana y atractiva al lector.

La modelización, proceso consistente en transformar un problema real en uno abstracto, puede ser muy difícil. Por ello, en estos libros proponemos una extensa y variada gama de problemas de modelización en grado creciente de complejidad, provenientes de diferentes ámbitos, que muestran la aplicabilidad de la matemática discreta en general y más concretamente, en la teoría de grafos.

Dado el carácter autocontenido de estos textos, de utilidad en cursos de matemática discreta y de introducción a la teoría de grafos, los conocimientos previos necesarios para abordarlos son reducidos, limitándose a algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos y de programación.

En el canal de YouTube "El lado discreto de las mates" se puede encontrar una amplia variedad de vídeos que contienen la teoría necesaria para resolver los problemas presentados en estos libros, así como una amplia gama de ejemplos y ejercicios resueltos que complementan su contenido.




## 2. Libro: Problemas, cuestiones y aplicaciones de matemática discreta

Entre todos los temas que abarca la matemática discreta, este texto, distribuido en seis capítulos, se centra en la lógica, el principio de inducción, la teoría de conjuntos, el estudio de aplicaciones y relaciones binarias, y la teoría de la divisibilidad, con una breve introducción a la teoría de números.

El primer capítulo dedicado a la lógica introduce, en primer lugar, la simbolización, leyes e inferencia en lógica de enunciados. A continuación, se presenta el estudio correspondiente para predicados, prestando especial atención al papel que juegan los cuantificadores. Una amplia gama de ejercicios ilustran la utilidad de la lógica en el lenguaje y la vida cotidiana.

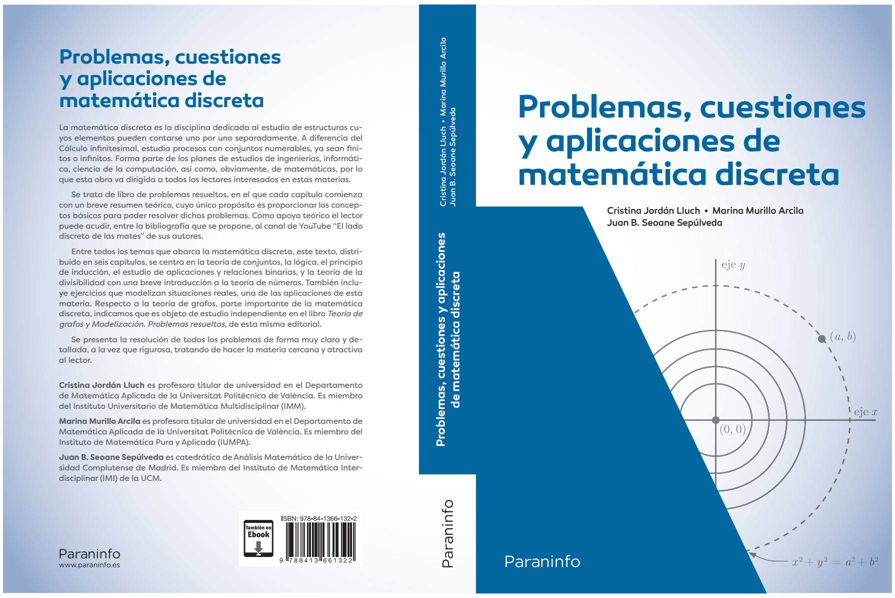
En el segundo capítulo se aborda el estudio del principio de inducción matemática, presentando problemas en los que se demuestran propiedades que involucran sumatorios, desigualdades y relaciones de divisibilidad (entre otros).

Una breve introducción a la teoría de conjuntos es el objetivo del tercer capítulo. En este capítulo presentamos problemas relativos a las operaciones entre conjuntos y las propiedades y leyes que las rigen.

El cuarto capítulo está dedicado al análisis de correspondencias y aplicaciones entre conjuntos. La definición de biyección da lugar a la introducción del concepto de cardinal. El teorema de inclusión-exclusión permite, tras una adecuada modelización, la resolución de diferentes cuestiones de la vida cotidiana.

En el quinto capítulo se analizan las relaciones definidas sobre conjuntos explorando sus propiedades y representación. Son de gran importancia los problemas dedicados a las relaciones de orden y equivalencia. Se presentan también ejercicios sobre ordenamiento topológico o clausuras de relaciones binarias.

En el último capítulo de este texto, trabajando en el conjunto de los números enteros, se hace una breve introducción a la teoría elemental de números. En él se plantean cuestiones de divisibilidad, ejercicios resolubles mediante el algoritmo de Euclides y ecuaciones en congruencias (entre otros resultados). Se presentan también problemas que se modelizan mediante ecuaciones diofánticas, así como algunas aplicaciones a la criptografía.




## 3. Libro: Teoría de grafos y modelización. Problemas resueltos

La teoría de grafos ha experimentado un gran auge en los últimos años. El origen de esta reside en su representación gráfica, consistente en diagramas de puntos y líneas que los unen, lo que facilita la descripción de numerosas situaciones, tanto de la vida real como del ámbito científico, que a su vez permite una aproximación algorítmica de los problemas. Esta vertiente algorítmica proporciona métodos y mecanismos para la resolución de un amplio y variado elenco de problemas presentes en numerosas áreas del conocimiento. Entre ellas podemos citar química, arquitectura genética, sociología, economía, no pudiendo olvidar tampoco sus aplicaciones en diferentes ramas de las matemáticas, tales como la teoría de grupos, optimización, álgebra lineal, etc.

En este texto, distribuido en cinco capítulos, abordamos los conceptos básicos de esta teoría trabajando con grafos dirigidos y no dirigidos, centrándonos en el estudio de la accesibilidad, conexión, problema del camino más corto y teoría de árboles, no incluyendo el análisis de grafos eulerianos y hamiltonianos. Son muchos los libros que tratan los grafos desde un punto de vista algorítmico, aunque los problemas de modelización que en ellos se plantean son mayoritariamente una aplicación directa de la teoría y sus algoritmos.

El primer capítulo está dedicado a la introducción de los conceptos básicos de la teoría de grafos, tales como grafos dirigidos y no dirigidos, grado y representación matricial. Se definen sucesiones gráficas y se explicita el algoritmo de Hakimi para su obtención.

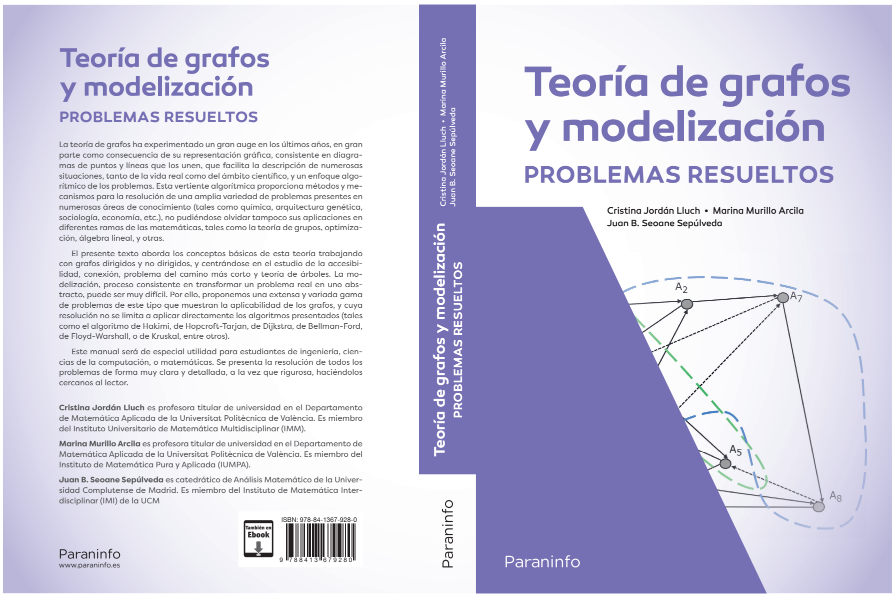
En el segundo capítulo abordamos, en primer lugar, el concepto de accesibilidad, introduciendo los algoritmos de búsqueda BFS y DFS. Este estudio nos conduce al concepto de conexión, básico en la teoría de grafos. Asimismo se analiza el concepto de orientabilidad, introduciendo el algoritmo de Hopcroft-Tarjan.

El tercer capítulo se centra en el estudio de grafos ponderados y en particular, en la resolución del conocido como problema de los caminos más cortos, para lo que se introducen los algoritmos de Dijkstra, Bellman-Ford y Floyd-Warshall.

En el cuarto capítulo estudiamos el concepto de árbol tanto en grafos no dirigidos como dirigidos. Se presenta el algoritmo de Kruskal para la obtención del árbol generador de mínimo coste, también conocido como árbol de recubrimiento mínimo.

Cierra el libro el quinto capítulo en el que, a modo de revisión, se propone una amplia variedad de problemas de modelización, que se resuelven utilizando los diferentes conceptos y algoritmos introducidos en los capítulos anteriores.

Es preciso destacar, que como apoyo audiovisual a este texto, se puede consultar la OCW "Estructuras matemáticas para la informática II" ([2]), el MOOC "Aplicaciones de la teoría de grafos a la vida real I" ([3]) y el comentado canal de Youtube ([1]). Cabe mencionar también el programa SWGraphs de libre acceso, disponible en el repositorio de la editorial Paraninfo, que servirá de ayuda para obtener la solución de los problemas de modelización que requieran de la aplicación de algún algoritmo.




## Referencias

[1] JORDÁN, C., *Canal de Youtube: El lado discreto de las mates*, shorturl.at/LOW07, 2022.

[2] JORDÁN, C., *OCW: Estructuras Matemáticas para la Informática-II*, http://www.upv.es/ocwasi/2010/6024 (Consultado última vez el 20/10/2021), 2010.

[3] JORDÁN, C. y CONEJERO, J. A., *MOOC: Aplicaciones de la teoría de grafos a la vida real (I)*, https://www.edx.org/course/aplicaciones-de-la-teoria-de-grafos-a-la-vida-real, edX, 2014.

[4] JORDÁN, C., MURILLO-ARCILA, M. y SEOANE-SEPÚLVEDA., J. B. *Teoría de grafos y modelización. Problemas resueltos,* Ed. Paraninfo 2022. ISBN: 9788413679280.

[5] JORDÁN, C., MURILLO-ARCILA, M. y SEOANE-SEPÚLVEDA., J. B. *Problemas, Cuestiones y Aplicaciones de Matemática Discreta,* Ed. Paraninfo 2022. ISBN: 9788413661322.

**Sobre el/los autor/es:**

*Nombre:* Cristina Jordán
*Correo electrónico:* cjordan@mat.upv.es
*Institución:* Instituto de Matemática Multidisciplinar ( IMM), Universitat Politècnica de València.

*Nombre:* Marina Murillo-Arcila
*Correo electrónico:* mamuar1@upv.es
*Institución:* Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada (IUMPA), Universitat Politècnica de València.

*Nombre:* Juan B. Seoane Sepúlveda
*Correo electrónico:* jseoane@mat.ucm.es
*Institución:* Instituto de Matemática Insterdisciplinar (IMI), Universidad Complutense de Madrid.

# Críticas y reseñas

# Programación en Rust

Santiago Higuera de Frutos

Revista de Investigación

Volumen XIII, Número 1, pp. 171–174, ISSN 2174-0410
Recepción: 01 Feb'23; Aceptación: 27 Feb'23

1 de abril de 2023

**Resumen**

Este artículo hace una reseña del libro *Programación en Rust*. Este libro permitirá a los programadores introducirse en el lenguaje de programación Rust. Se trata del lenguaje que está siendo utilizado por los desarrolladores de los principales sistemas operativos (*Windows, Linux, Android*) para sustituir al C y al C++, debido a las mejoras que introduce en relación a la seguridad del código generado, sin perder la velocidad que caracteriza a C.

**Palabras Clave:** Programación, Lenguaje Rust

**Abstract**

This article reviews the book *Programming in Rust*. This book will allow programmers to get introduced to the Rust programming language. It is the language that is being used by the developers of the main operating systems (*Windows, Linux, Android*) to replace C and C++, due to the improvements it introduces in relation to code security generated, without losing the speed that characterizes C.

**Keywords:** Programming, Rust language

# 1. Ficha técnica


**Título:** Programación en Rust
**Autor:** Santiago Higuera de Frutos
**Editorial:** Garceta Grupo Editorial
**Edición:** 1ª edición en castellano
**Fecha publicación:** noviembre 2022
**ISBN:** 978-84-1728-988-1
**Páginas:** 244

# 2. El libro

Desde el año 2015, de acuerdo con la encuesta anual que realiza Stack Overflow entre más de 80.000 programadores de todo el mundo, Rust ha resultado ser el lenguaje más apreciado (*The most loved language*).

Rust se creó con el objetivo de obtener un lenguaje de prestaciones similares o superiores a las de C o C++, pero poniendo énfasis en la seguridad del código, aspecto en el que estos lenguajes han dado lugar a numerosos problemas. Más del 70 % de los errores de seguridad en los productos de Microsoft o de Google Chrome están originados por fallos de seguridad en el manejo de la memoria.

Pero Rust no solo ofrece código seguro. Rust ofrece una documentación de alta calidad, permite la programación concurrente de manera eficiente y segura, permite programar Web Assembly, ofrece un alto rendimiento en el procesamiento de grandes cantidades de datos y, además, dispone de un compilador muy efectivo y un entorno de desarrollo completo, con servicios para documentación de programas, servicios para test unitarios o de integración, servicios para control de versiones y mucho más.

Rust es un lenguaje de código abierto. Inicialmente se desarrolló al amparo de la empresa Mozilla, que desarrolla el popular navegador Firefox, entre otros muchos programas. Desde 2021, el desarrollo está coordinado por la Fundación Rust, que es apoyada y financiada por las grandes empresas del software.

La mayores influencias en el lenguaje Rust provienen de SML, OCaml, C++, Cyclone, Haskell y Erlang. Desde su primera versión estable de enero de 2014, Rust se utiliza en los desarrollos de grandes empresas, como Amazon, Discord, Dropbox, Facebook (Meta), Google (Alphabet) y Microsoft. Actualmente, Rust se utiliza para desarrollar el nucleo de sistemas operativos como Linux, Windows y Android.

Rust no es un lenguaje orientado a objetos propiamente dicho, aunque se pueden emular muchas de las técnicas que se utilizan en ese paradigma de programación. La programación funcional sí casa mejor con la filosofía del lenguaje Rust, que sin ser un lenguaje funcional estricto, permite realizar una programación funcional eficiente. Puede ser una buena herramienta para pasarse a la programación funcional.

Por supuesto, todas estas ventajas que ofrece Rust son a costa de una curva de aprendizaje un poco más pendiente al principio. Programar en Rust requiere más esfuerzo que programar en otros lenguajes, como por ejemplo, Python. Pero los resultados que se obtienen compensan el esfuerzo dedicado y, a pesar de que se trata de un lenguaje relativamente nuevo, dispone ya de una amplia librería de utilidades que facilitan la programación dentro de cualquier ámbito.

En este libro se da una extensa y profunda introducción al lenguaje Rust. El libro no está pensado para personas que no sepan programar, sino más bien para programadores de otros lenguajes que quieran aprender a utilizar Rust. Se abordan y se explican detalladamente numerosos temas relacionados con la programación en lenguaje Rust. Se utilizan cientos de ejemplos de código que profundizan en numerosos aspectos del lenguaje. No obstante, es imposible en un solo libro abarcar la inmensidad de un lenguaje como este. Inevitablemente, algunos temas se explican de manera somera, a la espera de poderse ampliar en libros más específicos que el autor tiene en preparación.

## 3. Estructura y contenido del libro

El libro consta de 19 capítulos. El primer capítulo se dedica a explicar cómo instalar Rust, cómo poner a punto el entorno de desarrollo, y cómo hacer el típico programa *Hola mundo*. Los tres siguientes capítulos abordan las variables, los tipos de datos que ofrece el lenguaje y cómo implementar bifurcaciones, bucles y funciones. Se supone que el lector ya ha programado antes, por lo que se incide en aspectos como la diferencia entre una variable y el valor que guarda, o la forma de almacenar los valores en memoria. También se explica aquí la diferencia en programación entre una *sentencia*, que no devuelve ningún valor, y una *expresión*, que da lugar a un resultado. En Rust, a diferencia de otros lenguajes, las asignaciones son sentencias y las bifurcaciones son expresiones. También se explica la bifurcación *match*, característica del lenguaje Rust, que realiza una comprobación extensiva de que se han valorado todos los posibles resultados. Es una característica que sabrán apreciar los programadores.

El capítulo 5 explica en profundidad el concepto de *propiedad de los valores*; ésta es sin duda la característica distintiva de Rust respecto de otros lenguajes para el tratamiento de los valores almacenados en las variables. Aunque al principio puede resultar difícil acostumbrarse a operar en términos de *propiedad de los valores*, se trata de un concepto clave en la seguridad del código generado. El capítulo 6 se dedica a los *arrays* y los temas relacionados con cadenas de caracteres. El capítulo 7 introduce las *estructuras*, que son similares a los objetos de los lenguajes de programación orientados a objetos.

El capítulo 8 explica las enumeraciones. Se explica en él la enumeración *Option*, que da pie a otra de las características distintivas de Rust: la ausencia de valor nulo. En Rust no hay valores nulos, y esto le dota de un nuevo nivel de seguridad del código. El valor *null* lo inventó Tony Hoare, mientras trabajaba en el desarrollo del lenguaje *Algol*. Esto es lo que dijo unos años después:

> *Yo lo llamo mi error de mil millones de dólares... En ese momento, estaba diseñando el primer sistema completo de tipos para referencias en un lenguaje orientado a objetos. Mi objetivo era garantizar que todos los usos de las referencias fueran absolutamente seguros, con la verificación realizada automáticamente por el compilador. Pero no pude resistir la tentación de poner una referencia nula, simplemente porque era muy fácil de implementar. Esto ha llevado a innumerables errores, vulnerabilidades y bloqueos del sistema, que probablemente han causado mil millones de dólares en dolor y daños en los últimos cuarenta años. – (Tony Hoare, inventor de ALGOL)*

Tras hacer repaso en el capítulo 9 a algunas de las colecciones existentes en Rust, como los vectores o los *hash-maps*, también habituales en otros lenguajes, el capítulo 10 explica el concepto de *vida útil* de las referencias, otro de los conceptos distintivos de Rust y que aportan máxima seguridad en el manejo de la memoria. Se evita así la posibilidad de que existan *punteros colgados* (*dangling pointers*) apuntando a valores que ya han sido retirados de memoria. Es uno de los problemas de seguridad más recurrentes en lenguajes como C o C++, y que dan lugar a algunas de las mayores quiebras de seguridad existentes.

Los capítulos 11 y 12 explican la manera de utilizar los *traits* y tipos de datos *genéricos*, que proporcionan a Rust la posibilidad de trabajar de manera muy similar a la de los lenguajes orientados a objetos. El capítulo 13 se dedica a las *closures* y los *iteradores*, y se introduce al lector en la programación funcional. Los conceptos anteriores se completan en el capítulo 14 con la explicación de los diferentes tipos de punteros que se pueden utilizar.

En los capítulos 15 al 18 se habla de cómo dividir los programas en módulos, como hacer librerías de funciones, la gestión de la entrada y salida por pantalla y a ficheros y de cómo utilizar la extensa librería de utilidades externas existentes para Rust.

Por último, el capítulo 19 explica el funcionamiento del sistema integrado en Rust para documentar e implementar test en los programas. Rust permite utilizar test unitarios, test de integración y test de documentación, lo que favorece enormemente la programación con metodología *Test-Driven Development (TDD)*, minimizando los errores al codificar.

**Sobre el/los autor/es:**
*Nombre:* Santiago Higuera de Frutos
*Correo electrónico:* santiago.higuera@upm.es
*Institución:* Universidad Politécnica de Madrid

# Entrevista

# Miguel Ángel Morales Medina creador de «Gaussianos»

# Miguel Ángel Morales Medina creator of «Gaussians»

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XIII, Número 1, pp. 175–184, ISSN 2174-0410
Recepción: 14 mar'23; Aceptación: 28 mar'23

1 de abril de 2023

**Resumen**

En este artículo hablamos con Miguel Ángel Morales Medina, divulgador, docente y creador del blog «Gaussianos».

**Palabras Clave:** divulgación, entrevista, gaussianos, blog, docencia.

**Abstract**

In this article we interview Miguel Ángel Morales Medina, science communicator, teacher and creator of the blog «Gaussians».

**Keywords:** science communication, interview, scientific monologues, teaching.

Entrevistamos a Miguel Ángel Morales Medina, un matemático que quizás por su nombre resulte un tanto anónimo para el público en general, sin embargo si decimos que es el alma mater de *«Gaussianos»*, seguramente sea identificado rápidamente por la mayoría de nuestros lectores.

*Miguel Ángel*

Miguel Ángel Morales Medina (Puertollano – Ciudad Real, may. 1979) es licenciado en matemáticas por la Universidad de Granada, es un apasionado de la divulgación, matemático de vocación, y su deseo era dedicarse a la enseñanza y la investigación. Por diversas circunstancias eligió la docencia, y en la actualidad ayuda a muchos chicos y chicas a avanzar en su formación en la etapa de secundaria hasta llegar incluso a la universidad.

*– Buenas tardes, Miguel Ángel,*

Buenas tardes, ¡qué tal!

*– Muy bien. En primer lugar, decirte que es un lujo, un placer y un privilegio tenerte aqui con nosotros, y también que vas a ser nuestro conejillo de Indias, ya que eres el que va a comenzar este ciclo de entrevistas mediante videoconferencia. Esperamos que sea de tu agrado, y que disfrutemos con esta charla. Bueno, si te parece bien, voy a comenzar explicando un poquito cómo nos conocemos. Como ya muchos de nuestros amigos conocen, gestiono varios grupos de Telegram. En particular, uno llamado «Retos Matemáticos» https://t.me/Retos_Matematicos, donde hay gente con mucho talento, y uno de los compañeros de dicho grupo, César (estudiante de Grado de Matemáticas en la UNED), me comenta que te conocía y que había interactuado varias veces contigo, y que por qué no te proponía unirte a dicho grupo. César te lanza la invitación, y como te ocurre un poco como a mí, que te gusta enrolarte en cualquier proyecto matemático que te propongan, pues aceptas la invitación y te conviertes en un miembro muy activo del mismo hasta hoy.*

*– Vamos a empezar, si te parece, con la entrevista. Y la primera pregunta sería: ¿por qué Miguel Ángel se hace matemático?*

Pues, por lo que me cuentan mis padres, me gustan las matemáticas desde pequeñito. Supongo que desde mi más tierna infancia las veía como un juego de descubrimiento, algo parecido a «aquí tienes unas reglas: juega con ellas». A mí todo ese tipo de cosas me atraían y me llamaban mucho la atención. Ellos me ayudaron mucho en la medida que les fue posible a que yo avanzara, y parece ser que yo siempre pedía más y más. Además, siempre intentaba echar una mano a los compañeros cuando lo necesitaban. Y bueno, juntando unas cosas con otras, las matemáticas, que me gustaba ayudar y plantearme ser profesor, pues aquí hemos llegado. Si lo piensas, era muy sencillo, y una opción muy lógica.

*– ¿Tú qué crees, que el matemático nace o se hace?*

Yo creo que hay de los dos, aunque pienso que quizás haya más de los que se hacen. En algún momento he pensado lo contrario, pero ahora habiendo tenido contacto con muchos matemáticos e incluso con investigadores enrolados en otras disciplinas de la ciencia, y con docentes de matemáticas provenientes de ramas como las ingenierías, he podido comprobar que hay muchos que han ido haciéndose a lo largo de su trayectoria personal e incluso profesional y que, en principio, no se habían planteado siquiera la posibilidad de recorrer ese camino. En mi caso particular, creo que soy de los que nacieron con predisposición hacia la vocación docente de las matemáticas, pero reconozco que gente con capacidad para las matemáticas y además buenos matemáticos los hay nacidos y hechos.

*– Completamente de acuerdo contigo, Miguel Ángel. ¿Por qué te propones formar «Gaussianos»? Bueno, creo que a estas alturas no habrá ninguno de los que nos ven o nos lean que no lo conozca, ¡sería imperdonable, vaya! Desde mi punto de vista personal, debo decir que Gaussianos es, sin lugar a equívocos, el blog de divulgación matemática de mayor relevancia en el mundo de habla hispana.*

Bueno, pues te cuento, aunque antes de nada me gustaría que me permitieras pedirle disculpas a todos los seguidores del blog, ya que llevo un tiempo en el que por circunstancias profesionales no he podido desarrollarlo todo lo que me hubiera gustado y la creación de contenidos está un poco parada. Espero que sean un poco pacientes, porque dentro de poco retomaré la actividad.

La idea de crear «*Gaussianos*» surgió hace diecisiete años (ya casi ni me acuerdo), en el año 2006. En aquel año, los blogs estaban aún en pañales, y me empezó a interesar ese mundo. Creé un blog personal (que leían «cuatro gatos») donde hablaba de temas tan dispares como un comentario de una noticia deportiva, un vídeo gracioso que me había llegado y de vez en cuando alguna cosilla explicando algo de matemáticas que había considerado curioso o digno de que la gente que me leía conociera, porque a mí me gustaba. A uno de los que leían mis posts le gustaban también las matemáticas y el mundo de la divulgación, y me planteó la posibilidad de crear un blog con ese tipo de contenidos, ya que no conocía demasiados en la red. Así fue como en junio de 2006 nace el blog. Este compañero, por circunstancias personales, tuvo que dejarlo después de prácticamente de un año, y entonces decidí continuar con el proyecto de forma individual, y hasta ahora.

*– Bueno, yo tengo que decirte que, como usuario del blog, te doy la enhorabuena por tu labor y agradecimiento eterno a tu dedicación en representación de la comunidad matemática, opositores y gente con inquietudes por la divulgación y que gracias a ti hemos aprendido un montón de esta bella disciplina.*

Pues el agradecimiento es mutuo, José Manuel: muchísimas gracias a todos los seguidores por haber ayudado a que «Gaussianos» creciera de esta forma, ya que me han dado la energía suficiente para continuar con este proyecto. Al fin y al cabo, los contenidos creados se hacen por y para la gente que te sigue.

*– Bueno, pues toca ahora mojarte. Eres docente, pero imagínate que fueras elegido legislador. ¿Qué te atreverías a cambiar en el sistema educativo actual?*

[Risas] ... Disculpa por las risas pero ... ¡la preguntita se las trae! La verdad es que no sabría decirte así de repente qué cambiaría. Lo que reconozco es que la implementación de la LOMLOE, cómo está diseñada y cómo se nos está pidiendo a los profesionales de la docencia que llevemos a cabo los cambios que propone, y sobre todo la manera y los plazos, creo que no han sido los más adecuados; tanto nosotros docentes, que somos los que los tenemos que aplicar, como los chicos, que van a ser los que van a recibir toda esa oleada de cambios, no los hemos podido aprovechar al máximo. Resumiendo, no sabría qué cambios hacer, pero desde luego, si hubiera estado en mi mano, no habría hecho estos cambios con tan poco margen de respuesta.

*– Eres uno de los divulgadores de referencia en España, pero supongo que tendrás espejos en los que mirarte. ¿A qué divulgadores estimas o admiras?*

A ver, lo primero es reconocer que en este país hay muchos y muy buenos divulgadores en este momento, aunque hace años éramos muy poquitos los que estábamos en esto de la divulgación por internet. Yo voy a citar a uno que desde mi punto de vista es uno de los mejores, y que debo reconocer que se convirtió para mí en un modelo a seguir en mis comienzos: el autor del «Blog del Tío Petros» (https://tiopetrus.blogia.com/) .... Supongo que todo el mundo lo sabe, pero, si no, comentar que *El tío Petros y la conjetura de Goldbach* es una novela del griego Apostolos Doxiadis. Bueno, pues antes de crear «Gaussianos», el autor de ese blog ya había dejado de escribir en él, aunque está aún vigente y se pueden leer sus contenidos, y tenía artículos de divulgación muy del estilo a como yo posteriormente buscaba escribir cuando tenía en mente desarrollar el proyecto de mi blog. No quiero equivocarme, por eso no te puedo decir exactamente el nombre del autor de dicho blog (que nos perdone si nos está viendo o leyendo). Ya te digo que no era un blog demasiado extenso (apenas funcionó un año y medio), pero su manera de escribir, contar y divulgar contenidos matemáticos, a veces incluso bastante complicados para el público en general, me motivó para decir «esto es lo que yo quiero hacer». Bueno, y respecto a los divulgadores conocidos actuales, yo tengo que reconocerte que tengo especial predilección por Clara Grima. Ella ha reconocido en varios medios que su trayectoria divulgativa la comenzó en «Gaussianos», y que fue donde escribió su primer artículo de divulgación «para adultos», como ella dice. Fíjate en todas las cosas que ha hecho después en su carrera como divulgadora. Además, yo la conozco personalmente, tengo amistad con ella. Como con todo el mundo, puedo estar más o menos de acuerdo con ella en distintas maneras de ver o entender el mundo que nos rodea, pero en el tema divulgativo de matemáticas reconozco que es mi debilidad. Por supuesto, hay muchísimos más, nombraría a Tito Eliatron (José Antonio Prado Bassas) ...

*– ¡Hombre! Nuestro Tito, también compañero del grupo de Telegram «Retos Matemáticos». Habrá que enrolarle en una entrevista de éstas también ... [Risas].*

De hecho, hace nada ha sacado libro, y encima es una bellísima persona. Citaría a Santi García Cremades, Pedro Daniel Pajares[1], ... Hay gente muy buena, gente también quizás no

[1] Consúltese el número anterior de Pensamiento Matemático (Vol. XII, Núm. I, abr. 2022) donde le entrevistamos.

demasiado conocida … Raúl Ibañez, que es un profesor de la Universidad del País Vasco y que lleva haciendo divulgación desde mucho antes que yo, Marta Macho …

*– Efectivamente, en el País Vasco tenemos a varios como Marta, Pedro Alegría (ambos amigos de Pensamiento Matemático), Raúl Ibañez, etc. ¡Hay tantos y tan buenos que …!*

¡Hay muchos y muy buenos! Y es muy complicado quedarse sólo con uno. Pero vamos, como te he dicho, siempre que me preguntan cito al autor del blog que te he comentado porque me influyó en gran medida. Tenemos muchos en toda la geografía española a nivel internet, quizás algo más en redes sociales, porque parece que ese medio se ha comido un poco al blog, pero estoy segurode que el fenómeno blog va a volver a resurgir.

*– Te voy a hacer una pregunta un poco peliaguda … Quizás falten voces críticas contra la situación de la educación en general y de la educación matemática en particular. España, según el último informe de la OCDE, lidera la tasa de jóvenes sin terminar bachillerato o equivalentes con un 28 %, frente al 17 % de nuestros vecinos portugueses y muy lejos de Irlanda o Polonia, con un 7 % y un 5 % respectivamente. ¿Se trata de ser políticamente correcto o crees que hay mucho aún por hacer?*

Hombre, esos datos indican que hay mucho que hacer. La verdad es que desconozco la situación de la educación en otros países europeos ni cómo ha evolucionado en ellos en lo que se refiere a leyes educativas y demás, pero a mí me da la sensación con lo que yo conozco, que es desde hace ya unos años (imagino que hay mucha gente que conoce la educación mucho antes que yo incluso), que las leyes que se quieren implantar tienen muchas veces mucho más de ideología que de cambio significativo de la educación, vengan del bando del que vengan, y en otras ocasiones tengo la sensación de que lo que se va haciendo es simplemente «parchear». Yo ya sé que lo que te voy a decir ahora es una idea muy manida, pero considero que debería haber un pacto por la educación con independencia del color político que se tenga, pero que se debería hacer algo en lo que todo el mundo estuviera lo más de acuerdo posible, de manera que los cambios realizados tuvieran una duración más allá de los años de legislatura que unos u otros tengan.

*– Estoy de acuerdo contigo. Creo que la educación en ningún caso debería ser una herramienta electoralista por parte de ningún partido y que se utilizara como arma arrojadiza en lugar de pensar en consensuar y buscar los puntos en común que se pudieran tener.*

¡Eso es! No puede ser que se utilice para poner de manifiesto únicamente que se piensa diferente desde un punto legislativo, y que sólo se piensa en quitar lo que el anterior ha hecho. Desgraciadamente, así estamos hoy día, y los que acaban perdiendo son los que deben recibir esa educación, que son los chicos y chicas que tenemos en las escuelas. Entonces, ¿es un asunto complejo?, sin duda, yo personalmente no sé como hacerlo (si lo supiera, pues seguramente estaría legislando en un puesto con mayor influencia o con más atribuciones), pero lo que es cierto es que mientras vayamos «parcheando» no vamos a arreglar el problema que tenemos de manera global, y que a la larga no va a resultar ser la solución óptima.

*– ¿Crees que se enseñaban mejor las matemáticas antes, cuando tú y yo éramos estudiantes de BUP y COU? … [Risas]*

¡Jo, es que hace ya mucho de eso! … [Risas] Tengo que hacer un ejercicio de memoria bastante serio … Mira, yo creo que ahora tenemos muchas más posibilidades para poder enseñarlas mejor. Para alguien «joven» que nos vea o nos lea ahora, voy a decir algo que puede resultarle impensable: ¡yo acabé la carrera sin conexión a internet! Conocí internet en alguna sala de ordenadores de la facultad, pero en casa no tenía internet, no tenía la posibilidad de poder buscar información en la red de ningún tipo, de hecho tenía que irme a una biblioteca y consultar innumerables libros, y ya no digamos acceso a medios audiovisuales como ahora para poder impartir formación, explicar conceptos o procedimientos de distintas maneras alternativas, etc. Aquello era impensable. Por lo tanto, creo que ahora hay muchos más medios para poderle sacar mucho más partido al proceso de enseñanza. Yo es que creo que el cómo acaban saliendo las cosas no depende exclusivamente de quién da clase, sino que depende también de quién la recibe. Igual en esto que acabo de decir influya que yo ahora lo veo desde la perpectiva del formador (el otro lado de la barrera), pero yo creo que ahora veo algún tipo de cosas que antes no se veían; en general, siempre ha habido gente con distintos grados de implicación en el aprendizaje, pero considero que el proceso formativo de un alumno se ve ahora desde una perspectiva distinta. Hace poco leía o escuchaba una frase (no recuerdo de quién) que ponía de manifiesto que ahora el alumnado en general ve el proceso educativo como un obstáculo para llegar al objetivo, que es simplemente la obtención del título, en lugar de disfrutar del proceso en sí mismo y no verlo como un obstáculo sino un camino del que debes sacar provecho para que, cuando de verdad se obtenga el título, éste refleje con fidelidad la capacidad del alumno. Y esa responsabilidad de lo que está ocurriendo no es únicamente de nuestros estudiantes, y creo que todos tenemos que ver con que ellos tengan esa manera de interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que la familia, los profesores, los medios de comunicación, en general todo el entorno influyente en ellos tenemos que tener cuidado para que puedan rectificar esa perspectiva errónea, en mi opinión. Siempre ha habido mayor o menor afinidad por parte del alumnado con una materia o con un determinado profesor, eso entra dentro de la normalidad, pero, desde mi punto de vista (insisto en que es una visión personal y que puede ser errónea), creo que antes estudiar y progresar en el proceso formativo se veía por parte del alumno de una manera distinta a como lo puede ver ahora.

*– Supongo que, como hacemos todos en nuestro día a día, autoevaluas tu actividad docente, ¿qué crees que es lo que te hace cada día mejor docente?*

Claro, por supuesto que me autoevalúo, no sé si a diario, pero lo hago en muchas ocasiones. Intento sobre todo analizar si mi labor está siendo efectiva, sobre todo cuando los resultados no son todo lo buenos que podría esperar. De hecho, esa autoevaluación me ha llevado a cambiar muchas cosas de mi cotidianidad docente desde que empecé a dar clase. Por ejemplo, intento utilizar muchos más recursos adecuados (no exclusivamente digitales, necesariamente) a las necesidades de mis alumnos con el fin de que puedan aprovechar mi labor formativa de manera más efectiva. Yo llevo dando clase en academias desde 2003, y me incorporé a la educación pública en 2016, y desde entonces hasta ahora el acceso a contenidos, y sobre todo a las tic's, me ha hecho que tenga que esforzarme en ponerme al día, pero aún me queda mucho camino para poder sacarle todo el provecho que a mi me gustaría a mi labor docente, sobre todo en el aula.

*– Miguel Ángel, te considero digamos un «alma inquieta». ¿Qué proyectos de futuro rondan tu cabeza?*

Lo primero, como ya te he comentado antes, intentar sacar más tiempo libre para retomar la actividad divulgadora en «Gaussianos». A corto plazo, no hay mucho más. Llevo rondando la posibilidad de poder hacer alguna cosa divulgativa en vídeos cortitos, que siempre la he tenido en mente, pero de momento no hay nada materializado. Puede ser que sea sólo una cuestión de echar a andar.

*– ¿Quizás un libro con anécdotas como las que estás acostumbrado a contarnos en «Gaussianos»?*

Esa idea la tengo en mente desde hace mucho, efectivamente. Imagínate, diecisiete años con el blog dan para mucho. Desde luego, materializar el blog en un libro sería algo que me encantaría hacer en un futuro, por supuesto.

*– No eres papá, ¿verdad? Si lo fueras, ¿recomendarías a tu hijo que estudiara matemáticas? Es más: ¿le recomendarías que fuera profesor de matemáticas?*

¡Sí! Sin lugar a dudas. Mi licenciatura (bueno, ahora son grados de cuatro años) me costó, teníamos un temario densísimo, pero he de reconocer que a mí me encantó, disfruté mucho en aquellos años de universidad. Por mucho que me costara, sobre todo los primeros años, como supongo que les pasará a la mayoría de los chicos que se incorporan ahora al Grado de Matemáticas. De hecho, conozco varios casos de chicos brillantes en bachillerato que se han chocado contra un muro al llegar al grado. Pero es normal, los comienzos son como aprender un idioma nuevo. Llegas pensando que sabes mucho, y la primera semana te das cuenta de que todo lo que sabías era practicamente nada, por eso te comento que es como aprender un nuevo idioma, y cuando empiezas a entender, porque hay algo en tu cabeza que de repente cambia y te permite hacerlo, esa sensación es maravillosa. Por eso te digo que yo le recomendaría a mi hijo que estudiara matemáticas. Y sobre ser profesor, me gusta mi trabajo, me lo paso bien con los chicos, disfruto enseñando, razones más que suficientes para recomendárselo a un hijo o una hija, por supuesto.

*– En este país, no tenemos matemáticos de renombre. ¿Qué consideras que se necesita para tener un Tao, un Wiles, una Mirzakhani o un Perelman? Porque creo que hay muchos, pero quizás ninguno que sobresalga a este nivel internacional.*

Yo creo que nos hace falta financiación y mucha paciencia. Por mucho que se diga que un matemático únicamente necesita papel y lápiz, eso podría ser suficiente en otra época. Ahora se necesita financiación, porque se necesitan equipos computacionales potentes, se necesitan proyectos colaborativos para avanzar de manera conjunta en distintas líneas de investigación, lo cual conlleva estancias y viajes a lugares en los que se está trabajando en disciplinas afines a la de un investigador, etc. Y sobre el tema de la paciencia, creo que es fundamental, no se puede pensar de manera cortoplacista en pagar a un investigador dos años, y si no se obtienen resultados inmediatos tangibles abandonar la financiación, entre otras cosas porque las matemáticas no funcionan con esos plazos. Entonces, sin ninguna de estas dos cosas, financiación y paciencia, difícilmente tendremos una figura del más alto nivel. Es necesario que, desde los más altos estamentos, los dirigentes de nuestro país apuesten por la financiación de la ciencia en general, y de las matemáticas en particular, y que se tenga paciencia en la obtención de resultados, ya que no se puede esperar una inmediatez y resultados tangibles y de aplicación directa.

*– ¿No crees, Miguel Ángel, que es parte de nuestra cultura? Yo, por ejemplo, envidio (de manera sana) otros países, como EEUU, donde no creo que los investigadores sean infinitamente mucho mejores que los que pueda haber aquí. Sin embargo, sí que es verdad que existe una cultura que apuesta por la divulgación o el interés por las matemáticas, incluso orientada hacia un público profano. Precisamente, eso es lo que echo de menos ver en este país, precisamente esa cultura (aunque, siendo justos, se están haciendo cosas en publicaciones como el ABC o El País), y que dichas carencias son motivo para la falta de una verdadera apuesta por los estamentos dirigentes, ¿verdad?*

Si lo piensas desde el punto del legislador, él piensa que va a estar cuatro años y se pregunta si le va a sacar un rendimiento electoral a dicha inversión, sabiendo que seguramente los resultados no se van a poder contrastar hasta dentro de un periodo mayor a ese. Todo se resume en que, si no obtiene rédito político con dicha inversión, pues entonces no la hace. Y en cuanto al comentario que haces respecto a la cultura, yo es que meto todo eso en parte en lo que te comento sobre la paciencia. No podemos esperar resultados inmediatos en esto, como en muchos otros ámbitos de la vida cotidiana, sin paciencia. Precisamente a nivel social, creo que, con respecto a lo que antes hablábamos en la educación de antaño, uno de los factores que están precisamente deteriorando nuestro sistema educativo es la ausencia de paciencia en nuestra cotidianidad: lo queremos todo de manera inmediata, satisfactoria y si puede ser con el menor esfuerzo posible. Todo ello lo juntas y nos lleva precisamente a que en este país no exista una figura de la talla mundial de los que has nombrado anteriormente.

*– Tendrás, supongo que como todos, un matemático preferido. El mío es, vaya por delante, Bernhard Riemann. ¿Entiendo que el tuyo es Carl F. Gauss, por eso lo de «Gaussianos»?*

Bueno, el tuyo no está mal ... [Risas]. Reconozco que Gauss es uno de ellos, evidentemente, y posiblemente el que más junto con otro que para mí es fundamental y que ahora te citaré. Gauss, recuerdo en mi época de estudiante que aparecía siempre en todos los ámbitos de la ciencia.

*– ¡Es verdad! En mi época de estudiante, entre él y Cauchy me tenían frito, porque aparecían en todos*

*los ámbitos.*

[Risas] ... Fíjate, y si citamos ya a Euler, pues ¡otro grande! que aparece en un montón de sitios. De todos ellos, me quedo con Gauss, porque era una persona que si publicaba algo era porque lo tenía todo atado, no era de los que soltaba las cosas y a ver qué pasa. Esa manera de entender las cosas quizás también le llevó a que no avanzara en ciertos aspectos (como precisamente las geometrías no euclideanas), no fuera a ser que no tuviera las cosas bien cerradas y amarradas y se le adelantara alguno. Pero hay que reconocer que ayudó a que avanzaran un montón de campos de las matemáticas. Y luego, he de reconocerte que yo he tenido especial predilección por Pierre de Fermat, el primer matemático amateur (porque era un hombre de leyes). Una cosa que me encanta de él es ese carácter «vacilón» que tenía, que le hacía presumir muchas veces de que no enseñaba la demostración de algún resultado y «casi» siempre acertar. Y además, te diré que a mí la Teoría de Números siempre me ha gustado mucho, y Fermat era un fan incondicional y a la postre un especialista en dicha teoría, ayudando a que avanzara muchísimo.

*– Fíjate lo que significó para la historia de las matemáticas «aquel margen» en la Aritmética de Diofanto de Fermat y hasta donde nos llevó (el último teorema de Fermat), ¿verdad?*

[Risas] ... ¡350 años tuvieron que pasar! Yo, desde luego, lo que pienso es que él [Fermat] tenía algo en mente que seguramente tendría algún pequeño fallo que en ese momento en que escribió esa nota no fue capaz de vislumbrar. Si no, es difícil de entender dicho comentario, ya que se necesitaron 350 años y teorías superavanzadas de teoría analítica de números (formas modulares) para demostrar dicho resultado.

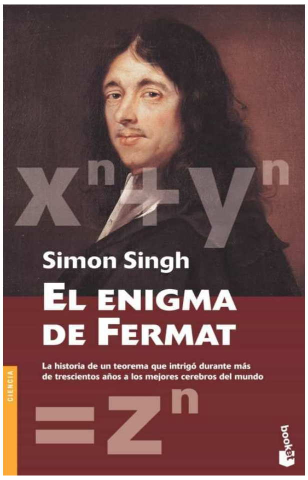
*– De hecho, creo que la demostración de Andrew Wiles del UTF son más de cien páginas, y encima se demuestra como un pequeño corolario de un resultado de una importancia superior que es la demostración de la hasta entonces conjetura de Taniyama-Shimura.*

Para quien no la conozca, invitamos a que lo haga porque es una historia interesantísima lo que supuso para Wiles dicho reto, ocho o nueve años de trabajo incansable.

*– De hecho, hay un documental dirigido por Simon Singh que narra la historia precisamente de su proceso para demostrar dicho teorema.*

Simon Singh tiene incluso un libro muy interesante que narra esta historia ...

*– ¡Exacto! De hecho, se lo recomendamos a todo el mundo [el documental] porque es relativamente sencillo encontrarlo. A mí personalmente hay una escena que me sobrecoge y es cuando Andrew Wiles descubre que su demostración tenía un pequeño problema y que, para que dicha demostración fuera válida, Wiles tenía el margen de un año para rectificarla sin que nadie se le adelantara, y ver cómo el británico se emocionaba de la presión personal que había supuesto aquel año para él, ya que de no hacer ese esfuerzo cualquiera podría tirar por la borda quizás el esfuerzo de toda una vida de trabajo.*




*«El Enigma de Fermat» de Simon Singh (Ariel, 2015)*

Además, hay que tener precisamente en cuenta que ese año que tardó en solventar dicho error (con la ayuda de su compañero Richard Taylor), muy posiblemente le condujo a que perdiera el premio de la medalla Fields, porque dicha medalla únicamente se puede otorgar a investigadores matemáticos menores de 40 años, y él en dicho caso estaría rondando dicha edad. Se llevó posteriormente el premio Abel, pero la medalla Fields se le resistió precisamente por aquel fatídico año. Una historia apasionante el UTF, la cantidad de grandes matemáticos que uno a uno han intentado sin éxito demostrar la conjetura que Fermat anotó en dicho margen.

*– Después de esta apasionante charla que estamos teniendo te voy a hacer una pregunta, aunque ya*

*creo vislumbrar tu respuesta. ¿Por qué crees que «Gaussianos» tiene tanto éxito? Yo te voy a dar mi opinión, conociéndote un poquito ya: en tus artículos se siente que eres una auténtico apasionado de las matemáticas y su historia ¿verdad?*

Sí, reconozco que así es. Yo quizás he tardado mucho en valorar todo esto, quizás porque cuando era joven resultaba muy complicado acceder a ciertos textos en los que se pusieran de manifiesto los logros obtenidos por los matemáticos desde un punto de vista divulgativo. Por eso, en mi caso, hasta que no estuve ya en la Universidad de Granada, no tuve acceso a textos tan especializados, pero desde entonces sigo enganchado y me encanta leer y aprender sobre este tema. Yo creo que el éxito (si se le puede llamar así) de «Gaussianos» y la masiva aceptación que siempre ha tenido en el mundo de la divulgación ha sido precisamente por la pasión que he puesto y que pongo, en general, en la vida, y en particular en las matemáticas. He hablado de resultados sencillos y muy complicados, con menor o mayor acierto, pero siempre poniéndole muchísimas ganas. Siempre he pensado en cómo debería contar las cosas para que les resultara atractivo y ameno incluso a aquellos que no sabían demasiado sobre lo que estaba contando, .

*– Bueno, yo he de decirte que cuando ponemos un reto en el grupo de Telegram, (para quien no lo sepa, en dicho grupo nos juntamos compañeros, digamos, con inquietudes matemáticas afines, algunos dirían «frikis» [Risas], gente con un talento desbordante, unos profesores de universidad, otros de secundaria, estudiantes, opositores, etc, y nos planteamos retos y presentamos soluciones a los mismos), yo personalmente puedo dar fe que cuando aceptas meterte en algún problema de los que se proponen, participando muchas veces incluso de forma muy activa, disfrutas con las propuestas que se hacen, en multitud de casos intervienes efusivamente en las conversaciones que se generan en torno a dichos problemas y hasta propones nuevas alternativas y ampliaciones de dichos retos.*

Reconozco que últimamente no he podido participar en todos los retos como me hubiera buscado por lo apretado de mi tiempo libre, pero he de admitir que, aunque no lo haya hecho, siempre he procurado leeros línea a línea, porque me interesan los temas que tratáis, las propuestas que hacen los compañeros, etc. Yo reconozco que he sido en ese sentido muy egoista con respecto a «Gaussianos», porque lo he utilizado como vía de aprendizaje en mi propio beneficio. Admito que cuando acabé la carrera había multitud de temas que desconocía, y el blog me permitió que investigara y a la vez aprendiera con él, hasta llegar incluso a conocer en la actualidad algunos de esos temas en profundidad.

*– ¿Con quien te gustaría colaborar? Lo mismo, nos lee o nos ve y se anima con esta invitación que hacemos.*

Pues, como te he dicho antes, afortunadamente a día de hoy creo que no tengo ningún matemático con nombre y apellidos con el que no haya tenido la suerte de haber colaborado ya. Conozco muchos y muy buenos matemáticos a los que en su día brindé la posibilidad de que nos contaran en el blog su experiencia tanto en investigación, docencia, divulgación o simplemente su día a día, y afortunamente siempre han aceptado mi invitación. Hombre, ¿gente de fuera del país? Pues si alguno de los cracks que has citado antes quisiera colaborar conmigo, … imagínate a Terry Tao … [Risas] Tao ahora mismo es ¡DIOS! Como se interese por algún tema, seguro que saca algo provechoso de ello … Además, él también tiene su blog, y aunque, evidentemente, no puedo acercarme ni de lejos a cualquier tema en los que esté metido, sería un lujo poder colaborar con él de manera conjunta.

*– Además, Tao es un tío superactivo. Hace poco me ponía en contacto con uno de sus doctorandos y ayudante precisamente por recabar información para un libro que escribo (que por cierto llevo años haciéndolo sin darlo por finalizado, pero bueno) sobre la hipótesis de Riemann, y precisamente su ayudante me decía que el tío no para, dirige un montón de tesis doctorales todos los años, escribe, posiblemente sea uno de los que más cerca están de la demostración de la hipótesis que he citado antes, y, en definitiva, literalmente ¡no para! Además, desde pequeñito se podía intuir en lo que se ha convertido … Bueno, es que decíamos precisamente en el grupo de Telegram que «Tao, será lo quiera ser, y llegará hasta donde él quiera».*

De todo por lo que se interesa acaba sacando algo positivo y provechoso. Posee una mente privilegiada y es muy activo en todo en lo que se involucra. Bueno, iba a cometer el error de decir «muy activo en su campo», ¡su campo es toda la matemática! [Risas] Pues resumiendo, con gente del calibre de Tao estaría encantado de poder cumplir ese deseo de poder colaborar en algún proyecto de divulgación, o bien desde un punto de vista conjunto, o que se pusiera en contacto conmigo porque estuviera interesado en escribir algo en mi blog.

*– Bueno, nosotros hemos lanzado la invitación, ahora que Tao se anime y se moje . . . [Risas]*

¡Eso! A ver si entre la tesis vigésimocuarta y vigésimoquinta encuentra un par de días y escribe algo conmigo . . . [Risas]

*– Bueno Miguel Ángel, ¿te he apretado mucho las clavijas?*

¡Noooo! [Risas] La verdad es que he pasado un rato muy bueno charlando contigo; he estado muy a gusto, cosa que ni dudaba siquiera. Tenía claro que la cosa iba a transcurrir de manera muy amena, como así ha sido. Quería agradecerte que hayas pensado en mi, sobre todo para empezar este ciclo de entrevistas o videoentrevistas que quieres llevar a cabo. Y espero que a todos los que nos lean y nos vean les resulte esta charla interensante. Comentar también a ese público que, para cualquier cosa que consideren oportuna, pueden ponerse en contacto conmigo a través de distintas vías como el blog, redes sociales y demás.

*– Pues por mi parte, Miguel Ángel, agradecerte enormemente que hayas accedido a concederme esta entrevista en este formato. Que ha sido un lujo y un placer contar contigo. Que disfrutamos diariamente de tu presencia en «Retos Matemáticos», y que es una pasada poder presumir de ser compañero tuyo. Muchísisimas, muchísimas gracias por tu presencia y un fuerte abrazo.*

Gracias a vosotros y hasta pronto.

## Enlaces de interés

– Blog «Gaussianos»: https://www.gaussianos.com/

– Twitter: https://twitter.com/gaussianos.

– Instagram: https://www.instagram.com/gaussianos/

– Facebook: https://www.facebook.com/gaussianos/

– Youtube: https://www.youtube.com/gaussianosblog

– Pinterest: https://www.pinterest.es/gaussianos/

**Sobre el autor:**

*Nombre:* José Manuel Sánchez Muñoz
*Correo electrónico:* jmanuel.sanchez@educarex.es
*Institución:* G.I.E. Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid. I.E.S. Jaranda, Jarandilla de la Vera, Cáceres. Consejería de Educación de la Junta de Extremadura.

Esta revista fue 100% maquetada
con software de código abierto

G.I.E Pensamiento Matemático

MAIC