

Investigación

La probabilidad en libros de texto chilenos de matemática de 7° y 8° de Educación Primaria

Probability in Chilean mathematics textbooks for 7th and 8th grade of Primary Education

Matías Beltrán-Rodríguez, María José General-Leiva, Tamara Torres-Aravena,
Danilo Díaz-Levicoy

Revista de Investigación



Volumen XIV, Número 1, pp. 17-34, ISSN 2174-0410
Recepción: 12 Dic'23; Aceptación: 28 Feb'24

1 de abril de 2024

Resumen

En esta investigación se analizaron las actividades propuestas para el aprendizaje de la probabilidad en los libros de texto de séptimo y octavo de Educación Básica en Chile de dos ediciones (pública y privada), comparando y categorizándolas según su significado, demanda cognitiva y contexto. La metodología, de tipo cualitativa, se basó en el análisis de contenido. Los resultados muestran el predominio del significado clásico de la probabilidad, de las tareas de procedimiento con conexión y de las actividades sin contexto.

Palabras Clave: Probabilidad, Libro de texto, Educación Básica, Matemática.

Abstract

In this research, we analysed the activities proposed for learning probability in the textbooks of seventh and eighth grade of Basic Education in Chile of two editions (public and private), comparing and categorising them according to their meaning, cognitive demand and context. The qualitative methodology was based on content analysis. The results show the predominance of the classical meaning of probability, procedural tasks with connection and activities without context.

Keywords: Probability, Textbook, Primary Education, Mathematics.

1. Introducción

A nivel internacional, en los últimos años, la estadística y la probabilidad han cobrado un importante rol en la sociedad, pues, a lo largo de su vida, el ser humano se ve enfrentado a gran cantidad de información a través de los medios de comunicación, la cual suele ser presentada a través de elementos estocásticos, por lo que se hace necesario adquirir la capacidad de lectura e interpretación de dicha información (Holmes, 1980). Así también, Batanero (2006) recalca la importancia de poseer herramientas para orientar la acción ante situaciones de incertidumbre presentes en la vida cotidiana o profesional.

Lo anterior, recibe el nombre de *cultura o alfabetización probabilística*, definida por Gal (2012) como la “capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real” (p. 4), pues, es importante desarrollar en la sociedad un pensamiento crítico, considerando además que la probabilidad tiene utilidad y aplicabilidad en diversos campos del conocimiento (Bennett, 1999; Everitt, 1999).

En Chile, el Ministerio de Educación (MINEDUC) ha implementado dos cambios curriculares, siendo el primero en el año 2009 con la incorporación del eje temático de *Datos y Azar*, incluyendo el tratamiento de la Estadística desde el primer ciclo de la Educación Básica, y la Probabilidad desde el segundo ciclo de Educación Básica (MINEDUC, 2009). Posteriormente, el año 2012, se incorpora el eje temático *Datos y Probabilidades*, cuyo tratamiento se da de forma continua a lo largo de la Educación Básica (MINEDUC, 2012).

Estos cambios se ven reflejados en las actuales bases curriculares, donde se observa el estudio de la probabilidad desde los primeros años de escolaridad, principalmente a través del registro de datos de juegos aleatorios, de manera manual en 2° y 3° año básico e incluyendo software educativo en 4° año. Se espera que desde 5° año básico los estudiantes sean capaces de describir eventos y las posibilidades de ocurrencia de estos, de forma cualitativa, para luego llegar a conjeturar acerca de tendencias de resultados obtenidos en la repetición de un experimento. Para los últimos cursos de Enseñanza Básica, se pretende que los estudiantes sean capaces de explicar las probabilidades de eventos, vinculando estas al significado intuitivo y frecuencial, haciendo también una comparación con la probabilidad obtenida de manera teórica a través de la definición clásica, apoyándose de diagramas de árbol o tablas (MINEDUC, 2018).

Todo lo anterior, mencionado en el currículum, debe estar en concordancia con el tratamiento que se da a la probabilidad en los libros de texto, pues este recurso es un nivel de *transposición didáctica* (Chevallard, 1991), es decir, que presenta una propuesta y tratamiento didáctico del saber a enseñar. Esto hace del libro de texto, una herramienta importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, lo que se ve reflejado en el presupuesto destinado por el Estado para adquirir libros de texto que son distribuidos en colegios públicos y particulares subvencionados, el cual asciende a US \$52 millones cada año (Biblioteca Nacional del Congreso [BCN], 2020).

Otro factor a tener en cuenta, y que suma importancia al libro de texto en el aula (Díaz-Levicoy et al., 2016), es la limitada formación del profesorado chileno en la enseñanza de la probabilidad tanto en conocimiento didáctico como disciplinar (Vásquez y Alsina, 2015a),

situación que motivaría su uso frecuente, sin mayor análisis del tratamiento que se da a su contenido mediante las actividades planteadas en este recurso.

De acuerdo con la pregunta de investigación, el presente estudio busca analizar las actividades sobre probabilidad propuestas en los libros de texto de matemática para séptimo y octavo año de Educación Básica en Chile.

2. Marco teórico

2.1. Significados de la probabilidad

Batanero (2005) realiza un estudio en el cual parte de un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos, considerando seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto por una institución de enseñanza y el personal. Además, analiza los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido considerados para la enseñanza de la probabilidad.

La autora destaca que un objeto matemático puede enseñarse desde diversos niveles de complejidad, por lo que su significado puede ser diferente en diversas instituciones escolares. En este caso, al analizar el concepto de probabilidad es importante tener en cuenta que las diferencias de significado pueden reflejar las distintas concepciones que intervienen en la solución de problemas, y ayuda a entender los errores que se cometen. A lo largo de la historia, diferentes significados se han asociado al concepto de probabilidad, entre ellos:

Significado intuitivo. Este significado se origina a partir de los juegos de azar, son ideas intuitivas comunes en todas las civilizaciones primitivas que no han estudiado la probabilidad, de igual manera usan expresiones coloquiales para cuantificar sucesos inciertos y su creencia en ellos.

Significado clásico o laplaciano. Está basado en la definición de probabilidad de Laplace (1985): “una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables, y cuyo denominador, el número de todos los casos posibles” (p. 28). Esta definición trae restricciones como que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades e indica la necesidad de reducir los acontecimientos con casos igualmente posibles.

Significado frecuencial. Se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse (Von Mises, 1952), aceptando la existencia teórica de dicho límite, cuya frecuencia relativa observada es una aproximación, pues no se obtiene el valor exacto de la probabilidad, es decir, sólo es una estimación.

Significado subjetivo. Es lo que se entiende cuando la regla de Bayes permite transformar las probabilidades a priori de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades a posteriori que incluye información de los datos observados.

Significado matemático. Diferentes autores a lo largo del siglo XX contribuyeron al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Kolmogorov dedujo una axiomática que han aceptado todas las escuelas, en la cual la probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios.

2.2. Demanda cognitiva

Stein et al. (2000) establecen distintos niveles de demanda cognitiva presentes en tareas matemáticas. Las autoras definen el concepto de demanda cognitiva como “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para resolver exitosamente la tarea” (p. 11). En esta clasificación se encuentran las tareas de bajo nivel de demanda cognitiva y de alto nivel de demanda cognitiva.

Las tareas con *bajo nivel de demanda cognitiva* consisten en memorizar o utilizar algoritmos en ausencia de un contexto o significado adicional, como se describen a continuación:

Tareas de memorización. Son aquellas que reproducen hechos aprendidos previamente como reglas, fórmulas o definiciones de memoria, pues para su resolución no existe un procedimiento. En cuanto a las instrucciones, estas no son ambiguas.

Tareas de procedimiento sin conexión. Son definidas como aquellas enfocadas en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar comprensión matemática. En estas tareas se utilizan procedimientos, algoritmos, ya sean específicamente solicitados o bien basados en las instrucciones de la tarea. El trabajo requerido no tiene conexión con los conceptos o significados que subyacen a los procedimientos que están siendo utilizados.

Por otro lado, las tareas con *alto nivel de demanda cognitiva* son aquellas en que los estudiantes pueden también utilizar procedimientos, pero de una forma tal que construyan conexiones para comprender conceptos y significados. Además, se busca que exploren y razonen para llegar a una respuesta que tenga sentido y se pueda justificar.

Tareas de procedimiento con conexión. Son aquellas cuyos procedimientos sugeridos (implícita o explícitamente) para su resolución, tienen una conexión cercana con ideas conceptuales que subyacen de dichos procedimientos. Este tipo de tareas pueden ser representadas de múltiples maneras como diagramas visuales, símbolos, situaciones problemas, etc. Su principal foco es la comprensión.

Tareas de hacer matemática. Son aquellas que exigen un pensamiento complejo y no algorítmico, pues no hay un camino sugerido para su resolución, por lo que exige que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos o relaciones matemáticas. Exigen un esfuerzo cognitivo considerable y pueden implicar cierto nivel de ansiedad para el estudiante debido a la impredecible naturaleza de la solución del problema.

3. Antecedentes

Diversos autores han estudiado el tratamiento que se da a la temática de probabilidad en los libros de texto, destacando entre sus investigaciones el análisis de las situaciones problemas, lenguaje, conceptos-definiciones, contextos, entre otros. En el siguiente apartado se presentan algunos de los estudios más relevantes sobre libros de texto, tanto en estadística como en probabilidad.

Gea et al. (2013) analizan las situaciones problemas sobre la correlación en ocho libros de texto en el primer curso de Bachillerato. Entre los aspectos estudiados se encuentran el signo de la correlación, la intensidad de la dependencia, los contextos de aplicación, clasificando estos

últimos en seis categorías: fenómenos biológicos, estudio en ciencias, deportivos, economía, educativos, sociología y demografía. De este análisis se destaca el gran número de tareas descontextualizadas, entre las que se encuentra la categoría *expresión matemática*, lo que se contradice a las recomendaciones en la enseñanza actual, pues, de acuerdo con Wild y Pfannkuch (1999) uno de los modos fundamentales de razonamiento estadístico es la integración de la estadística con el contexto.

Vásquez et al. (2019) utilizan la adaptación de los niveles de demanda cognitiva creada por Salcedo (2015) para analizar esta en las tareas matemáticas relacionadas con estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Primaria chilena. En cada texto, se consideraron ejercicios, actividades y/o problemas de unidades y lecciones que abordaban temas de estadística y/o probabilidad, clasificándolas de acuerdo con la taxonomía antes mencionada. Se analizaron un total de 189 tareas matemáticas, entre las cuales un bajo porcentaje se vincula al estudio de la probabilidad, centrándose la mayor cantidad en 2° y 4° de Primaria, reflejando un desequilibrio en cuanto a la cantidad de tareas presentadas en los libros de texto para el aprendizaje de la probabilidad y la estadística, lo que va en desmedro del desarrollo de una adecuada cultura probabilística. Además, en cuanto a la demanda cognitiva, se observó un predominio de tareas de alto nivel de demanda cognitiva, donde destacan las que se vinculan a procedimientos con conexión. Por esto, se hace necesario que el profesorado esté atento a la hora de planificar sus clases, de manera que este desequilibrio presente en los libros de texto no sea reflejado en el aprendizaje de los estudiantes.

Vásquez y Alsina (2015b) presentan un análisis sobre la presencia de la probabilidad a partir de sus significados, mediante la identificación de situaciones problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones. Se analizaron seis libros de texto edición 2013 distribuidos por el MINEDUC. Los resultados arrojan diferencia en los significados de la probabilidad trabajados a través de situaciones problemas, observándose escasamente aquellas vinculadas al enfoque subjetivo, al contrario de las vinculadas al significado frecuencial. En cuanto al lenguaje común y probabilístico, se presenta una predominancia de expresiones vinculadas al significado frecuencial y laplaciano, manifestándose un mayor énfasis en el desarrollo de la probabilidad desde dichos enfoques. Los conceptos y definiciones trabajados en los libros de texto muestran que estos están asociados en su mayoría a los significados frecuencial, intuitivo y clásico de la probabilidad, y en menor frecuencia aquellos relacionados al significado subjetivo. Finalmente, los autores recalcan la gran influencia de las directrices de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en los libros de texto, y un desajuste en cuanto a lo establecido en las directrices curriculares chilenas.

Por su parte, Gómez-Torres et al. (2014) estudian el tratamiento de los significados de la probabilidad en 10 libros de texto españoles, a través de la identificación y clasificación de conceptos y propiedades presentes en ellos. En cuanto a los conceptos, se observaron aquellos propios del significado intuitivo en todos los ciclos, mientras que los significados clásico, frecuencial y subjetivo, sólo en los últimos dos. En la Serie 2 se presenta con mayor atención conceptos del significado clásico, mientras que la Serie 1 también desarrolla conceptos del significado frecuencial. Por otro lado, en cuanto a las propiedades, se observa la presencia continua de propiedades del significado intuitivo, mientras que las propiedades fundamentales de los significados clásico y frecuencial se presentan gradualmente, con mayor frecuencia del primero y escasa atención a la experimentación. Los autores destacan que la presentación de la probabilidad en los libros de texto podría conducir a un uso diferenciado de los significados de

la probabilidad dependiendo de la editorial y el ciclo educativo, por lo que se sugiere mejorar la formación de docentes en la probabilidad y su estadística.

Seguidamente, Gómez-Torres et al. (2015) analizan, a través de situaciones problemas, lenguaje, procedimientos, propiedades y argumentos, el tratamiento que se da a los significados de la probabilidad en 10 libros de texto de Educación Primaria en España. De sus resultados destaca el análisis hecho sobre el lenguaje utilizado, observando un uso frecuente de expresiones cotidianas sobre formales, el menor uso de lenguaje simbólico a diferencia del numérico, presentándose los números enteros desde el primer ciclo, mientras que se presentan las fracciones en segundo ciclo, junto con la aparición del significado frecuencial y clásico. El uso del lenguaje tabular se asocia en un inicio a la presentación de datos, avanzando para el final de la educación primaria al uso de tablas de frecuencias. Se encuentra presente en las series analizadas los diagramas de barras, de sectores, pictogramas y diagramas de árbol, aunque de este último no se hace una conexión explícita con el cálculo de eventos compuestos. Los autores destacan la riqueza del lenguaje en los libros de texto como componente comunicativo para el desarrollo de la alfabetización probabilística, destacando especialmente el verbal y numérico.

4. Método

4.1. Paradigma y tipo de investigación

La presente investigación es de tipo cualitativa (Salgado, 2007), sustentada en el paradigma interpretativo, el que se caracteriza por no concebir la medición de la realidad, sino su percepción e interpretación, como una realidad cambiante, dinámica, dialéctica, que lleva en sí sus propias contradicciones (Rivera 2010).

4.2. Diseño y técnica de investigación

Para estudiar las actividades de probabilidad en libros de texto se ha recurrido al diseño de estudio de casos, que se entiende como el “estudio de un fenómeno contemporáneo”, considerando los textos distribuidos por el MINEDUC y de una editorial privada de amplio uso a nivel nacional.

Respecto de la técnica de investigación, se utiliza el análisis de contenido, definido como una “técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto” (Krippendorff, 1990, p. 28). El proceso de análisis de contenido se ha realizado de forma cíclica e inductiva, como se recomienda en el análisis de datos cualitativos. Se realizaron varias lecturas de los capítulos, elaboración progresiva de las categorías y una revisión continua y constante antes de llegar a los resultados planteados.

Las unidades de análisis consideradas en este estudio están basadas en investigaciones previas y el marco teórico desarrollado en el capítulo anterior. Estas se detallan a continuación:

Significados de la probabilidad. Se hace referencia a los distintos significados asociados al concepto de probabilidad. Hemos utilizado los definidos por Batanero (2005) los cuales son: 1) intuitivo; 2) clásico o laplaciano; 3) frecuencial; 4) subjetivo; 5) matemático.

Niveles de demanda cognitiva. Se consideran los cuatro niveles definidos por Stein et al. (2000): 1) tareas de memorización; 2) tareas de procedimiento sin conexión; 3) tareas de procedimiento con conexión; 4) hacer matemática.

Contextos. Se destaca la importancia de relacionar problemas planteados en un contexto dado, tal como se plantea en los Marcos y pruebas de evaluación PISA (OCDE, 2013). Se consideran los cuatro contextos definidos en el marco de matemáticas para clasificar las preguntas elaboradas por dicho estudio. Estos son: 1) *Personal.* Se centra en actividades propias del estudiante, su familia y grupo de iguales, tales como compras, transporte, deporte, viajes, etc.; 2) *Profesional.* Las preguntas pueden referirse a cualquier nivel de la mano de obra, desde el trabajador no especializado hasta profesionales. Se incluyen actividades tales como cálculo de costos, contabilidad, control de calidad, mediciones, etc.; 3) *Social.* Se centra en la comunidad, local, nacional o global, entre los que se pueden encontrar los sistemas electorales, las políticas públicas, la demografía, estadísticas nacionales, etc., destacando la perspectiva comunitaria; 4) *Científico.* Se relaciona con la aplicación de la matemática al mundo natural y, también con la ciencia y la tecnología. Pueden incluir problemas relacionados con la meteorología, la ecología, la medicina, la genética y el propio mundo de las matemáticas.

En cada sección de los libros de texto se analizaron las actividades sugeridas para los estudiantes, es decir, ejemplos, ejercicios, talleres, evaluaciones y desafíos. El análisis se realizó en cada actividad, la que puede estar formada por diversas tareas, y se contabilizaron todas las categorías observables en las unidades de análisis, que, en el caso de los contextos, la demanda cognitiva o los significados de la probabilidad pueden ser más de uno. Esta situación hace que la suma de los porcentajes sea mayor a 100 en las tablas de resumen de la información.

Finalmente, para asegurar la objetividad en la clasificación de las actividades según cada unidad de análisis, especialmente los significados de probabilidad y nivel de demanda cognitiva, cada integrante de la investigación analizó y clasificó las diferentes actividades de forma personal, para luego ser comparadas en conjunto. Se consideró el criterio de coincidencia del 75%. De esta forma se logró categorizar todas las actividades propuestas en los cuatro libros de texto, llegando a un completo acuerdo de las unidades de análisis que demandaban mayor atención.

Cada categoría de las unidades de análisis será explicada y ejemplificada en el apartado de resultados.

4.3. Contexto y muestra

En Chile, actualmente, existen tres grupos de establecimientos educacionales, cada uno con un tipo de financiamiento distinto. Por una parte, los establecimientos municipales se financian fundamentalmente de aportes del Estado, recibiendo un monto por estudiante que asiste a clases y son administrados por los municipios. Por otra parte, los establecimientos privados son financiados únicamente por aportes de cada estudiante matriculado. Por último, existen los establecimientos particulares subvencionados, financiados de manera compartida entre el estado chileno y los estudiantes (Bellei et al., 2010).

Para este estudio, se eligió una de las editoriales más usadas en la educación pública y privada en Chile. Por un lado, la editorial SM se ha adjudicado la licitación de las ediciones de textos para el MINEDUC, los que son utilizados en los centros públicos y particulares

subvencionados y las ediciones utilizadas en los centros privados, como se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Libros de texto incluidos en el análisis

Código	Nivel	Título	Autores	Editorial	Edición
T1	7° Básico	Texto del estudiante Matemática 7° Básico	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P.	SM	2017
T2	8° Básico	Texto del estudiante Matemática 8° Básico	Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P.	SM	2017
T3	7° Básico	Sé protagonista Matemática 7° Básico	Schwerter, S., Aguilar, M. y Maulén, M.	SM	2014
T4	8° Básico	Sé Protagonista. Matemática 8° Básico	Castro, C., Curiche, A. y Vega, M.	SM	2014

Los códigos T1 y T2 hacen referencia al texto del estudiante de Matemática de 7° y 8° básico, respectivamente, cuya edición se realiza para el MINEDUC y es utilizada en las instituciones escolares subvencionadas por el Estado. A su vez, los códigos T3 y T4 hacen referencia en adelante al libro de texto Sé Protagonista de 7° y 8°, respectivamente. Si bien la editorial es la misma que la de los textos públicos anteriormente mencionados, esta edición es creada para ser utilizada en instituciones escolares particulares, debiendo pagar el costo asociado a estos.

5. Resultados

5.1. Actividades analizadas

En la Tabla 2 se muestra la distribución de las actividades analizadas para esta investigación. De ella se observa que los libros de texto editados para el MINEDUC concentran la mayor cantidad de actividades relacionadas con probabilidad, reuniendo entre ambos cursos (7° y 8°) el 60% de ellas. La cantidad de actividades fluctúa entre 42 y 80, en el texto de 8° de la edición privada y 7° del texto editado para el MINEDUC, respectivamente.

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de las actividades analizadas

Curso	Frecuencia	Porcentaje
7° M (T1)	80	30,5
8° M (T2)	79	30,2
7° P (T3)	61	23,3
8° P (T4)	42	16,0
Total	262	100

5.2. Significados de la probabilidad

Esta unidad de análisis está relacionada con los significados de la probabilidad que establece Batanero (2005). De acuerdo con el análisis de los libros de texto, se han observado tareas en las que intervienen los siguientes significados.

Significado intuitivo. Tiene relación con el uso de la probabilidad en situaciones de incertidumbre mediante expresiones coloquiales que expresan el grado de creencia frente a dichas situaciones. El único ejemplo encontrado se muestra en la Figura 1, en ella el estudiante debe comparar los grados de creencia de tres situaciones diferentes, eligiendo la que tiene mayor probabilidad asignada.

2. Analiza la siguiente situación.

En un parque de diversiones se dispone de tres tipos de juegos en los que gana el participante que acierte al color rojo.

¿En cuál de los juegos anteriores es más probable ganar? Justifica tu elección.

Figura 1. Ejemplo de actividad de significado intuitivo (T1, p. 352)

Significado clásico. El uso de la probabilidad relacionado con este significado se observa en actividades que enfocan su desarrollo en el uso práctico del cálculo de probabilidades de sucesos sencillos, aplicando la razón entre casos favorables y casos totales. Un ejemplo de esta categoría se muestra en la Figura 2, donde el estudiante debe calcular la razón entre casos favorables y totales para obtener la respuesta a la pregunta planteada.

17. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara y un sello al lanzar dos monedas simultáneamente?

A. 0,25

B. 0,3

C. 0,5

D. 0,75

Figura 2. Ejemplo de actividad de significado clásico (T4, p. 254)

Significado frecuencial. Las actividades en las cuales se desarrolla este significado utilizan la probabilidad a través de la aproximación de la frecuencia relativa observada en experimentos que se pueden repetir un gran número de veces. La Figura 3 muestra un ejemplo de actividad que abarca la probabilidad desde el enfoque frecuencial, en la cual se pide al estudiante comparar las probabilidades de cada suceso y estimar el porcentaje de cada color de bolitas.

6. Considera el experimento de extraer una bolita, registrar su color en la tabla, devolverla, y repetirlo 2000 veces.

a. Completa la tabla.

Extracción de una bolita		
Color	f	f_{rel}
Rojo	1329	
Azul	671	

b. ¿Qué observas de las probabilidades frecuenciales?

c. ¿Qué se espera de la probabilidad de cada suceso?

d. Estima el porcentaje de bolitas de cada color.

Figura 3. Ejemplo de actividad de significado frecuencial (T1, p. 345)

Otros. Esta categoría se ha creado, dado que estas actividades no se han podido asociar a alguno de los cinco significados de la probabilidad definidos por la literatura. La Figura 4 muestra un ejemplo de este tipo de actividades, en la cual el estudiante debe clasificar distintos experimentos según su naturaleza.

Ejercicios resueltos

1. Clasifica cada experimento como determinístico o aleatorio.

- a. Abrir un libro y observar el número de la página. → Aleatorio
- b. Lanzar un dado y observar el número de puntos obtenido. → Aleatorio
- c. Calcular el promedio de mis notas en Matemática a fin de año. → Determinístico
- d. Analizar si el agua a 100 °C inicia su proceso de ebullición. → Determinístico
- e. Extraer una bolita roja de una urna con bolitas rojas y azules. → Aleatorio
- f. Observar si amanece mañana. → Determinístico
- g. Predecir el ganador de una competencia de atletismo. → Aleatorio

Figura 4. Ejemplo de actividad categoría Otros (T3, p. 236)

En la Tabla 3 se muestra la distribución de los significados de la probabilidad en las actividades analizadas. En ella se observa que sobre el 60% de las actividades, en cada uno de los textos, trabaja la probabilidad desde el enfoque clásico o laplaciano. El enfoque frecuencial se trabaja en una menor proporción, alcanzando un 31% de las actividades en la edición privada del libro de texto de 7° básico. No se observan actividades que trabajen el significado subjetivo ni matemático de la probabilidad, y sólo se presenta una actividad que abarca la probabilidad desde el enfoque intuitivo.

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según significado de probabilidad

Significado	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Intuitivo	1(1,3)	0(0)	0(0)	0(0)	1(0,4)
Clásico	49(61,3)	77(97,5)	38(62,3)	35(83,3)	199(76)

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según significado de probabilidad

Significado	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Frecuencial	19(23,8)	0(0)	19(31,1)	0(0)	38(14,5)
Otros	12(15)	2(2,5)	4(6,6)	8(19)	26(9,9)
Total	80(100)	79(100)	61(100)	42(100)	262(100)

5.3. Nivel de demanda cognitiva

Esta unidad de análisis está relacionada con definir y caracterizar los distintos niveles de demanda cognitiva presentes en las tareas matemáticas establecidos por Stein et al. (2000). De acuerdo con el análisis de los libros de texto, se han observado tareas que exigen los siguientes niveles de demanda cognitiva:

Memorización. En estas actividades los estudiantes deben clasificar experimentos dados, según definiciones aprendidas, reconocer elementos del espacio muestral y casos favorables en experimentos y eventos simples, respectivamente. Además, deben leer información presentada a través de imágenes o tablas. En el ejemplo de la Figura 5 el estudiante debe definir algunos conceptos probabilísticos.

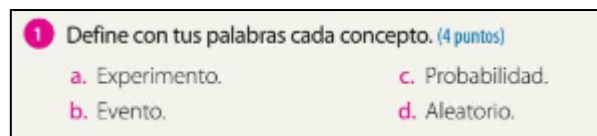


Figura 5. Ejemplo de actividad de memorización (T2, p.336)

Procedimiento sin conexión. Este tipo de actividades se caracterizan por exigir al estudiante reconocer eventos simples y compuestos por medio de los elementos del espacio muestral, describir este y reconocer casos favorables en experimentos compuestos de baja complejidad mediante diagramas de árbol. Además, deben realizar cálculos simples a través del principio multiplicativo para determinar la cardinalidad del espacio muestral en situaciones dadas. En la Figura 6 se presenta un ejemplo en el cual el estudiante debe definir los casos favorables de cada suceso.

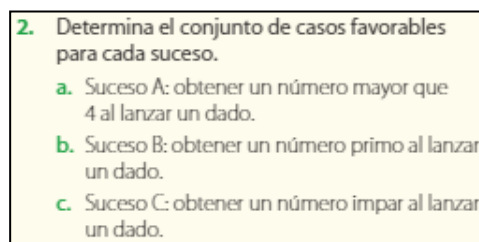


Figura 6. Ejemplo de actividad de procedimiento sin conexión (T1, p. 348)

Procedimiento con conexión. Estas actividades se caracterizan por exigir comprensión de los conceptos involucrados. En ellas los estudiantes avanzan al cálculo de probabilidades utilizando la fórmula establecida por Laplace, o bien estimando estas a través de la interpretación de gráficos y frecuencias, además de analizar y comparar probabilidades de

eventos compuestos diferentes, dentro de un mismo experimento. En el ejemplo de la Figura 7 el estudiante debe hacer uso de la fórmula trabajada en el significado clásico, recordando y reconociendo conceptos como casos favorables y casos totales (espacio muestral) en el contexto dado.

8. Se anota la venta de 544 productos de una cafetería. Estima la probabilidad de que al escoger una persona, esta haya comprado un café con endulzante.

Venta de una cafetería	
Tipo de café	Frecuencia
Con endulzante	204
Sin endulzante	340

Figura 7. Ejemplo de actividad de procedimiento con conexión (T1, p. 345)

En la Tabla 4 se muestra la distribución de los niveles de demanda cognitiva en las actividades analizadas. Con respecto a las tareas de memorización, se observa que los libros de texto editados para el ministerio presentan más actividades de este tipo que los de edición privada, en ambos niveles. Las actividades de procedimiento sin conexión están presentes en todos los textos analizados, el porcentaje en el T1 comparándose con el T3 es mayor, mientras que, la diferencia no es significativa en las actividades de los textos de 8° año. En el nivel de tareas con conexión se presentaron mayoritariamente en los T3 y T4. Con los datos obtenidos se puede dar cuenta que el análisis arroja que hay mayor porcentaje de tareas de memorización en los textos públicos y el mayor porcentaje de tareas con conexión se concentra en los textos privados.

Tabla 4. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según nivel de demanda cognitiva

Demanda cognitiva	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Memorización	11(13,8)	9(11,4)	5(8,2)	2(4,8)	27(10,3)
Procedimiento sin conexión	33(41,3)	23(29,1)	20(32,8)	14(33,3)	90(34,4)
Procedimiento con conexión	40(50)	50(63,3)	39(63,9)	31(73,8)	160(61,1)
Total	80(100)	79(100)	61(100)	42(100)	262(100)

5.4. Contexto

Esta unidad de análisis tiene relación con los cuatro contextos descritos en los marcos y pruebas de evaluación PISA (OCDE, 2013). Respecto al entorno en el cual están descritas las actividades analizadas dentro del libro de texto, podemos observar los siguientes contextos.

Contexto personal. Las actividades se relacionan con acciones que una persona puede realizar en un día normal. En la Figura 8 se observa este tipo de ambiente personal porque hace referencia a un viaje a una ciudad en la cual se realiza un tour para una cantidad de turistas.

Aplica

5. En un tour por Valparaíso hay 20 turistas: 8 son franceses, 5 japoneses, 6 ingleses y 1 alemán.

a. Determina los casos favorables para el suceso "que el primero en subir al bus sea japonés".

b. ¿Cuál es la probabilidad de este evento, si todos tienen la misma probabilidad de subir primero al bus?

Figura 8. Ejemplo de actividad de contexto personal (T1, p. 348)

Contexto profesional. Son actividades que aluden a un contexto netamente laboral. En la Figura 9 se detalla una actividad donde se menciona una empresa y se pide las combinaciones posibles de su producto.

3. Resuelve los problemas.

a. Una determinada zapatilla se fabrica en 3 estilos diferentes y en 4 colores distintos. Si la zapatería desea mostrar a su clientela pares de zapatillas en todos los estilos y colores disponibles, ¿cuántos pares distintos deberán colocar en la vitrina?

Figura 9. Ejemplo de actividad de contexto profesional (T2, p. 339)

Contexto social. Aquí se incluyen las actividades centradas en la sociedad, ya sea una comunidad local o global. Por ejemplo, en la Figura 10 se puede observar que la actividad se centra en una patente, objeto que individualiza dentro de una comunidad al vehículo.

7. **Desafío.** Supón que una patente de automóvil está formada por cuatro letras seguidas de dos números. Las letras pueden ser tomadas de las 27 del abecedario castellano y los números, de los dígitos del 0 al 9.

BB • BB – 10

a. Si se elige una patente de automóvil al azar, ¿de cuántas formas se podría elegir?

b. Si se elige una placa de automóvil al azar, ¿de cuántas formas se podría elegir de tal manera que no se repita ningún número ni letra?

Figura 10. Ejemplo de actividad de contexto social (T2, p. 343)

Contexto científico. Son actividades que hacen uso de la matemática dentro del mundo de la ciencia. En la Figura 11 se muestra un ejemplo de estas actividades, en el que se menciona un laboratorio y la creación de un medicamento específico, es decir, se está trabajando una situación propia de la aplicación de las matemáticas en la ciencia.

1. Un laboratorio farmacéutico crea dos medicamentos, alercín y alergiol, para mejorar los síntomas de la alergia al polen. Se realiza un experimento para saber cuán eficaces son estos medicamentos, obteniéndose que alercín logra que 72 pacientes mejoren de 90 a los que se le aplicó, mientras que alergiol logra mejoras en 42 de 75 pacientes. ¿Cuál de los dos medicamentos es más eficaz? Explica tu procedimiento.




Figura 11. Ejemplo de actividad de contexto científico (T1, p. 357)

Otros. Aquí se presentan las actividades donde el contexto no tuvo cabida en ninguno de los anteriormente mencionados. Se incluyen aquellas que se desarrollan en un contexto de juegos de azar, sin la participación de uno o más personajes y actividades sin contexto. En la Figura 11, se observa una actividad formulada sin contexto claro.

15. ¿Cuántas claves distintas se pueden formar con una vocal seguida de un dígito?

A. 5
 B. 10
 C. 45
 D. 50

Figura 12. Ejemplo de actividad cuyo contexto no se encuentra en las categorías anteriores (T4, p. 254)

En la Tabla 5 se muestra la distribución de los contextos involucrados en las actividades analizadas en los cuatro libros de texto. De esta se puede observar que no se presenta ninguna actividad asociada a un contexto social en el T1, siendo esta unidad la que menos frecuencia presenta en la totalidad de las actividades. Por otro lado, el contexto definido que más se manifiesta en todos los libros de texto es el personal, alcanzando el 42% en el T4. Cabe mencionar que la tabla muestra que las actividades donde el contexto no está definido dentro de las otras son las que más frecuencia presentan.

Tabla 5. Frecuencia (y porcentaje) de las actividades analizadas según su contexto

Contexto	MINEDUC		SM		Total
	7°	8°	7°	8°	
Personal	20(25)	23(29,1)	19(31,1)	18(42,9)	80(30,5)
Profesional	3(3,8)	3(3,8)	1(1,6)	1(2,4)	8(3,1)
Social	0(0)	2(2,5)	1(1,6)	3(7,1)	6(2,3)
Científico	2(2,5)	3(3,8)	2(3,3)	1(2,4)	8(3,1)
Otros	56(70)	48(60,8)	47(77)	30(71,4)	181(69,1)
Total	80(100)	79(100)	61(100)	42(100)	262(100)

6. Conclusión

En esta investigación se han categorizado las actividades propuestas en los libros de texto para la enseñanza de la probabilidad, donde se obtuvieron importantes hallazgos en sus análisis, comparando con aportes realizados por distintos autores en investigaciones anteriores. Además, estas unidades de análisis pueden ser de utilidad para estudios en otros niveles y contenidos matemáticos.

Respecto de los significados de la probabilidad que intervienen en las actividades analizadas, estos no conciben con lo establecido en las actuales bases curriculares, concordando con lo señalado en Vásquez y Alsina (2015b) en su estudio sobre objetos matemáticos en libros de texto chilenos de Educación Básica. En cada uno de los libros de texto utilizados en el presente estudio se da tratamiento a la probabilidad desde los enfoques frecuencial y clásico, dejando de lado aquellas actividades que utilizan el significado intuitivo. Estos resultados, al diferir con lo mencionado en las directrices curriculares en el 7° año, hacen necesario un rol activo del profesorado para cubrir esta falta de contenido. En este sentido, es importante que los profesores se encuentren informados sobre las actualizaciones de las bases curriculares (MINEDUC, 2018) para desarrollar una visión completa de la probabilidad, impidiendo desarrollar vacíos en la enseñanza al no trabajar estos contenidos desde todas las aristas o enfoques correspondientes.

Sobre el total de las actividades analizadas, se presenta un predominio de aquellas con alto nivel de demanda cognitiva, específicamente de las tareas de procedimiento con conexión, lo que concuerda con lo expuesto por Vásquez et al. (2019) en su estudio sobre cómo se fomenta el estudio de la estadística y la probabilidad en los libros de texto chilenos de 1° a 6° de Educación Básica. Sin embargo, al comparar las ediciones: privada y pública, se observa una pequeña tendencia a desarrollar actividades de baja demanda cognitiva por parte de las ediciones públicas, mientras que las ediciones privadas presentan una ventaja respecto a las de alta demanda. Es por esto que los profesores deben prestar atención a la hora de planificar las clases, para soslayar la disparidad presente en los libros de texto, y con ello reducir estas pequeñas desigualdades entre la enseñanza de la educación pública y privada.

Con respecto a los contextos de las actividades analizadas, los resultados obtenidos no tienen relación con lo expuesto por Gea, Batanero, Contreras y Cañadas (2013), pues, se presentan algunas diferencias en las categorías definidas. Debido a la temática estudiada en la presente investigación, se añadió a la categoría sin contexto, aquellas actividades cuyos contextos no se adherían a las categorías establecidas, denominando este nuevo grupo otros. Dentro de este se encuentran la mayor cantidad de actividades, relacionadas principalmente a contextos de juegos de azar sin la participación de personajes y la aplicación de algoritmos.

En cuanto a la comparación entre los textos de uso público y privado, se observan características similares, con diferencias puntuales en algunos elementos de análisis, las que generan ventajas y desventajas de unos sobre otros, pero que no permiten generalizar cómo se trabaja esta temática en ediciones distribuidas por el MINEDUC ni en aquellas privadas. A pesar de esto, es importante tener en consideración los resultados expuestos, especialmente en la unidad de análisis de significados de la probabilidad y en la de contexto.

En cuanto a la primera, se recomienda trabajar esta temática a partir de actividades que utilicen un lenguaje cercano al estudiante, para así retomar la noción intuitiva que tienen respecto del concepto de probabilidad, debido a la importancia de abarcar progresivamente el desarrollo de este contenido al transitar por los distintos enfoques.

Refiriéndose al contexto, la alta frecuencia de actividades asociadas a juegos de azar se contrasta con la tendencia a promover la alfabetización probabilística descrita por Batanero (2006), como la necesidad de dar al hombre herramientas para orientar la acción ante situaciones de incertidumbres presentes en la vida cotidiana o profesional, por lo que se sugiere que en la enseñanza de la probabilidad estén presentes situaciones de diversos contextos, poniendo mayor énfasis en las categorías correspondientes a profesional, social y científico.

Entre las limitaciones de este trabajo está la muestra de textos considerados en este análisis, dado que con dos cursos analizados no es suficiente para evaluar todo el proceso de enseñanza y generalizar algunos aspectos de este. Además, el considerar solo dos editoriales no permite obtener una visión general de cómo se presenta esta temática en los libros de textos públicos y privados.

Finalmente, entre las proyecciones derivadas de esta investigación se encuentran: 1) realizar estudios con libros de texto de otros países, para poder así comparar resultados; 2) analizar las actividades sobre probabilidad en libros de texto de todos los niveles de Enseñanza Básica y Media; 3) estudiar la comprensión de la probabilidad tanto en estudiantes de 7° y 8° Básico como de profesores que imparten clases en estos niveles, de acuerdo con la caracterización entregada en este estudio; 4) consultar a los profesores de matemática sobre sus criterios para la selección de actividades y su visión sobre la calidad de las mismas en los libros de texto.

Referencias

- [1] BATANERO, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- [2] BATANERO, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. FLORES y J.L. LUPIÁÑEZ (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar* (pp. 1-17). Sociedad de Educación Matemática Thales.
- [3] BELLEI, C., CONTRERAS, D. y VALENZUELA J. P. (2010). *Ecós de la revolución pingüina: avances, debates y silencios en la reforma educacional*. Santiago: Pehuén.
- [4] BENNETT, D. J. (1999). *Randomness*. Cambridge: Harvard University Press.
- [5] BNC (2020). *Educación en pandemia: textos escolares y su futuro*. Valparaíso: Biblioteca del Congreso Nacional de Chile.
- [6] CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- [7] DÍAZ-LEVICÓY, D., GIACOMONE, B., LÓPEZ-MARTÍN, M. M., y PIÑEIRO, J. L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 20(1), 133-156.
- [8] EVERITT, B. (1999). *Chance rules: an informal guide to probability, risk and statistics*. New York,

NY: Copernicus, Springer-Verlag. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-77415-2>

- [9] GAL, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S. J. CHO (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-7). Seúl: ICMI.
- [10] GEA, M. M., BATANERO, C., CONTRERAS, J. M. y CAÑADAS, G. (2013). Variables y contextos en los problemas de correlación: Un estudio de los libros de texto. En INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA (Ed.), *III Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos* (pp. 1-9). Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- [11] GÓMEZ-TORRES, E., CONTRERAS, J. M. y BATANERO, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.
- [12] GÓMEZ-TORRES, E., ORTIZ, J. J. y GEA, M.M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en los libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49-71.
- [13] HOLMES, P. (1980). *Teaching statistics 11 - 16*. Slough: Foulsham Educational for the Schools Council.
- [14] KRIPPENDORFF, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- [15] LAPLACE, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial [Trabajo original publicado en 1814].
- [16] MINEDUC (2009). *Propuesta ajuste curricular: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- [17] MINEDUC (2012). *Bases curriculares 2012: Educación Básica*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- [18] MINEDUC (2018). *Bases curriculares 2018: Educación Básica*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- [19] OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012*. Madrid: Secretaría General Técnica.
- [20] RIVERA, Y. (2010). ¿Cómo se pueden aplicar los distintos paradigmas de la investigación científica a la cultura física y el deporte? *Revista Electrónica Ciencia e Innovación Tecnológica en el Deporte*, 5(1), 1-10.
- [21] SALCEDO, A. (2015). Exigencia cognitiva de las actividades de estadística en textos escolares de Educación Primaria. En J. M. CONTRERAS, C. BATANERO, J. D. GODINO, G. CAÑADAS, P. ARTEAGA, E. MOLINA, M. M. GEA y M. M. LÓPEZ-MARTÍN (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 307-315). Granada: Universidad de Granada.
- [22] SALGADO, A. (2007). Investigación cualitativa: diseños, evaluación del rigor metodológicos y retos. *Liberabit*, 13(13), 71-78.

- [23] STEIN, M. K., SMITH, M. S., HENNINGSEN, M. y SILVER, E. A. (2000). *Implementing standards based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.
- [24] VÁSQUEZ, C. y ALSINA, Á. (2015a). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, 29(52), 681-703. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13>
- [25] VÁSQUEZ, C. y ALSINA, Á. (2015b). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 19(2), 441-462.
- [26] VÁSQUEZ, C., PINCHEIRA, N., PIÑEIRO, J. L. y DÍAZ-LEVICÓY, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1133-1154. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a08>
- [27] VON MISES, R. (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid: Espasa- Colpe. [Trabajo original publicado en 1928].
- [28] WILD, C. J. y PFANNKUCH, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Sobre los autores:

Nombre: Matías Beltrán-Rodríguez

Correo Electrónico: matias.beltran@alu.ucm.cl

Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.

Nombre: María José General-Leiva

Correo Electrónico: maria.general@alu.ucm.cl

Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.

Nombre: Tamara Torres-Aravena

Correo Electrónico: tamara.torres@alu.ucm.cl

Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.

Nombre: Danilo Díaz -Levicoy

Correo Electrónico: dddiaz01@hotmail.com

Institución: Universidad Católica del Maule, Chile.