

Historias de Matemáticas: Matemáticas para la sostenibilidad

Modelación matemática para comprender los efectos de los turistas sobre el medio ambiente

Mathematical modeling to understand the effects of tourists on the environment

Oswaldo Osuna, José Geiser Villavicencio-Pulido

Revista de Investigación



Volumen XV, pp. 081-094, ISSN 2174-0410
Recepción: 16 May'24; Aceptación: 19 Jun'24

1 de abril de 2025

Resumen

La matemática con su versatilidad ha sido aplicada en la solución de problemas que emanan desde las ciencias biológicas o las ciencias sociales entre otras ciencias. En la actualidad, la matemática está ayudando a lograr escenarios sostenibles entre la naturaleza y las actividades antropogénicas. En este trabajo se menciona brevemente cómo la modelación matemática ha sido usada para comprender los efectos del turismo en el medio ambiente.

Palabras Clave: Turistas, Medio ambiente, Escenarios sustentables, Modelos matemáticos.

Abstract

Mathematics with its versatility has been applied to solve problems that emanate from biological sciences or social sciences, among other sciences. Currently, mathematics is helping to achieve sustainable scenarios between nature and anthropogenic activities. This work briefly mentions how mathematical modeling has been used to understand the effects of tourism on the environment.

Keywords: Tourists, Environment, Sustainable scenarios, Mathematical models.

1. Introducción

Viajar por el mundo para conocer nuevas tierras es fascinante. Algunos viajeros buscan que los lugares que visiten estén rodeados de paisajes naturales hermosos mientras que otros buscan lugares con servicios turísticos que les provean confort y descanso.

Ya sean turistas que son atraídos por las bellezas naturales de un sitio o turistas que solo buscan descansar en habitaciones cómodas, ambos pueden causar un deterioro de los servicios ecosistémicos del lugar visitado. Por ejemplo, el aumento de turistas puede llevar a una falta de agua dulce por la sobre explotación del recurso, puede afectar negativamente la calidad del aire por el simple hecho de usar un equipo que mantenga la temperatura adecuada de las habitaciones o deteriorar los espacios de recreación debido a un número considerable de visitas.

Actualmente, el turismo es una de las actividades económicas más rentables. A nivel mundial, el turismo como generador de ingresos sólo está por debajo de los combustibles y los productos químicos. Por lo tanto, la industria turística es fundamental para el crecimiento de países en vía de desarrollo.

Para que un sitio turístico se establezca se requiere de una gran infraestructura ubicada en un sitio con un alto valor ecológico. Sin embargo, si la infraestructura crece de manera intensa, el medio ambiente será deteriorado. Ante esta situación, se deben implementar estrategias que mantengan la riqueza natural. En ese mismo sentido, es conocido que los sitios turísticos después de su florecimiento dejan de ser visitados en gran afluencia debido al surgimiento de nuevos sitios que les parecen más atractivos. Ante tal situación, los prestadores de servicios turísticos deben aumentar el atractivo del lugar a través de nuevas inversiones que se traduzcan en nuevos servicios turísticos, lo cual puede llegar a degradar el medio ambiente. Entonces, la relación entre turistas y medio ambiente está mediada por interacciones que son beneficiosas o perjudiciales para ambos.

Un escenario deseable es que exista una coexistencia sana entre el turismo y el medio ambiente. Es decir, que la interacción entre el turismo y el medio ambiente ocurra en un escenario sostenible. Para lograr tal escenario se requiere de herramientas que ayuden al diseño de estrategias y políticas públicas ambientales. Para este propósito se cuenta con modelos matemáticos que describen relaciones entre turismo, infraestructura y medio ambiente, entre otras variables [3,10]. Estos modelos pueden ser usados para diseñar estrategias que conduzcan a que los sitios turísticos se mantengan con un gran número de visitantes promoviendo que el medio ambiente se deteriore lo menos posible. Para la construcción de tales modelos es útil usar un diagrama en compartimentos con las interacciones entre las variables como el que se muestra en la Figura 1.

Casagrandi y Rinaldi en 2002 a través del uso de ecuaciones diferenciales modelaron la relación a largo plazo entre turismo, T , capital, C , y calidad del medio ambiente, E . Ellos fueron los primeros en relacionar la idea de sostenibilidad con las propiedades de los equilibrios de un sistema dinámico; ver la sección Apéndice. El modelo, aunque es muy simple y reduccionista, muestra una riqueza de escenarios teóricos confirmando patrones empíricos observados [3].

A través del análisis de los parámetros del modelo, algunos de los cuales describen características asociadas al desarrollo económico y protección ambiental, Casagrandi y Rinaldi concluyen que el modelo muestra escenarios sustentables ($T > 0, E > 0, C > 0$); escenarios rentables ($T > 0$); escenarios compatibles ($E > 0$). Los autores muestran que escenarios

sustentables son posibles, aunque frecuentemente están en riesgo (alguna de las variables tienden a cero).

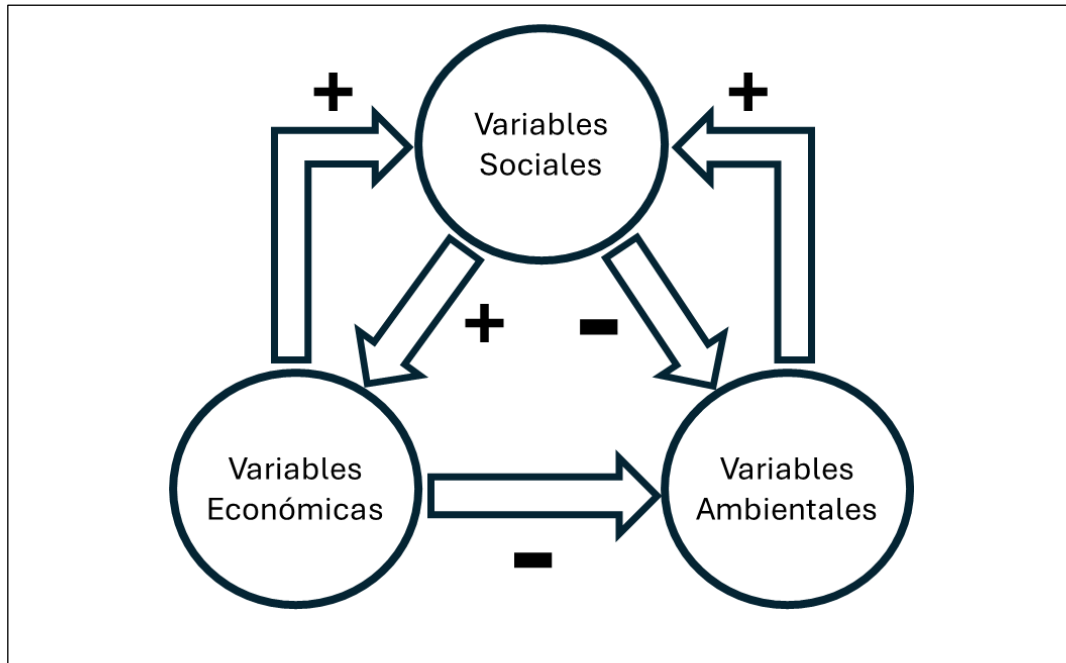


Figura 1. Efectos asociados a las interacciones entre las variables usadas en el modelo. La flecha describe el efecto positivo (+) o negativo (-) recibido por una variable desde la otra.

Otros modelos han sido construidos para analizar si es posible que ocurran escenarios sostenibles entre variables sociales, económicas y ambientales. En 2006, Sinay y Sinay modelaron la dinámica entre turistas y una variable que representa elementos de interés como ambiente y cultura local [14]. Lacitignola et al. 2007 generalizaron el modelo de Casagrandi y Rinaldi a través de clasificar a los turistas en dos clases: turistas amigables con el ambiente y turistas que son indiferentes al ambiente [10]. En 2016 y 2018, Diop analiza la dinámica entre peces (presas) y aves acuáticas migratorias (depredadores) cuando los turistas practican la pesca y la caza [5,6]. En el 2022, Villavicencio y coautores analizaron la dinámica entre recursos del bosque, vida silvestre y turismo modelando una interacción benéfica en densidades bajas de turistas y una interacción perjudicial en densidades altas de turistas [15]. En todos los modelos mencionados se concluye que escenarios sustentables son posibles, aunque pueden estar en riesgo bajo ciertas condiciones sociales, ambientales o económicas. En particular, Lacitignola et al. 2007 y Villavicencio et al. 2022 mostraron la existencia de un objeto matemático llamado atractor extraño. Este atractor extraño existe para valores de los parámetros cercanos a valores para los cuales el modelo muestra escenarios sustentables; ver Apéndice. Tal situación puede ser interpretada como catastrófica para el sistema socioecológico. Esto es debido a que un atractor extraño está asociado a comportamientos caóticos y este describe escenarios no sustentables.

En la siguiente sección se muestra un modelo socioecológico para clarificar las ideas expuestas anteriormente.

2. Un modelo socioecológico

El turismo ha sido el principal motor económico de muchas localidades. En las últimas décadas, se han dirigido esfuerzos para integrar de manera sustentable la industria turística con la naturaleza. Esta clase de turismo es llamado turismo de naturaleza. El turismo de naturaleza busca que las actividades turísticas promuevan la conservación de especies y sus hábitats. Por ejemplo, el turismo de gorilas (*Gorilla berengei berengei*) practicado en el Parque Nacional Bwindi, en Uganda, provee recursos para operar varios parques que buscan la conservación de los gorilas. Además, el turismo de naturaleza en la Reserva Privada del Patrimonio Natural (RPPN) en Brasil ha contribuido positivamente a la conservación de la guacamaya roja y verde (*Ara chloropterus*).

Aunque el turismo de naturaleza ha permitido la conservación de flora y fauna de algunas regiones, es fundamental conocer si es posible que la interacción entre turistas, la flora y la fauna coexistan en equilibrios saludables. Si este no es el caso, es relevante conocer qué mecanismos ecológicos, demográficos y/o económicos llevaron a que ocurran escenarios no deseables. Para este propósito, a continuación, se explicará la construcción del sistema socioecológico presentado en [15], cuyas ecuaciones están dadas por (1), (2) y (3). En el modelo, la densidad de los recursos forestales, de la vida silvestre y de turistas son denotadas por $F(t)$, $W(t)$, y $E(t)$, respectivamente.

$$\frac{dF(t)}{dt} = aF(t) \left(\frac{l}{a} - F(t) \right) - bW(t)F(t) + \frac{(eE(t) - (E(t))^2)E(t)F(t)}{1 + f(E(t))^2}, \quad (1)$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = cW(t)F(t) - dW(t) + \frac{(gE(t) - (E(t))^2)E(t)W(t)}{1 + h(E(t))^2}, \quad (2)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{r}{L}(E(t))^2 - rE(t) + E(t)(\alpha F(t) + \beta W(t)). \quad (3)$$

A continuación, se describirán cada uno de los términos de la ecuación (1). El término $aF(t) \left(\frac{l}{a} - F(t) \right)$ modela la tasa de crecimiento de los recursos forestales. En este término, el parámetro a es la tasa de competencia intraespecífica y el parámetro l es la tasa de crecimiento. Defínase la capacidad de carga de los recursos forestales por $K = \frac{l}{a}$. Observe que cuando $F(t) \approx 0$, la dinámica poblacional es modelada aproximadamente por $\frac{dF(t)}{dt} \approx lF(t)$. En contraste, cuando $F(t) \approx \frac{l}{a}$, la dinámica de los recursos forestales es modelada aproximadamente por $\frac{dF(t)}{dt} \approx 0$. En otras palabras, si la densidad de los recursos forestales es baja, estos crecen aproximadamente de manera proporcional a la densidad $F(t)$. Por otro lado, si los recursos forestales están cerca de la capacidad de carga K , estos se mantienen cerca de esta capacidad. El término $bW(t)F(t)$ modela la explotación de los recursos forestales por los individuos que componen la vida silvestre, a una tasa b . El término $\frac{(eE(t) - (E(t))^2)E(t)F(t)}{1 + f(E(t))^2}$ de la ecuación (1) describe el cambio neto de beneficio menos costo debido a la interacción de los turistas y los recursos forestales. A diferencia de los términos descritos anteriormente, en este caso se utiliza

una tasa denso-dependiente, $\frac{(eE(t)-(E(t))^2)}{1+f(E(t))^2}$, para modelar esta interacción. Observe que $\frac{(eE(t)-(E(t))^2)}{1+f(E(t))^2} > 0$ si y solo si $E(t) < e$. Entonces, si la densidad de turistas está por debajo de e , la interacción entre turistas y los recursos forestales es benéfica para los recursos forestales. En contraste, si la densidad de turistas está por arriba de e , es decir $E(t) > e$, esta interacción es perjudicial para los recursos forestales. Finalmente, observe que $\lim_{E(t) \rightarrow \infty} \frac{(eE(t)-(E(t))^2)}{1+f(E(t))^2} = -\frac{1}{f}$. Por lo tanto, en el caso límite, los turistas explotan los recursos forestales a una tasa $\frac{1}{f}$.

En la ecuación (2), el término $cW(t)F(t)$ modela el hecho que la densidad de la vida silvestre incrementa a una tasa c al consumir recursos forestales. El término $-dW(t)$ describe que la densidad de la vida silvestre decrece de manera proporcional a su densidad. Es decir, el parámetro d es la tasa de muerte. Finalmente, el término $\frac{(gE(t)-(E(t))^2)E(t)W(t)}{1+h(E(t))^2}$ modela una interacción entre los turistas y la vida silvestre que resulta benéfica para la vida silvestre si la densidad de turistas es menor que g ($E(t) < g$). En contraste, si la densidad de turistas es mayor que g ($E(t) > g$), la interacción resulta perjudicial para la vida silvestre. En este caso, se tiene la tasa denso-dependiente $\frac{(gE(t)-(E(t))^2)}{1+h(E(t))^2}$. Note que, $\lim_{E(t) \rightarrow \infty} \frac{(gE(t)-(E(t))^2)}{1+h(E(t))^2} = -\frac{1}{h}$. Es decir, en el caso límite, los turistas explotan a la vida silvestre a una tasa $\frac{1}{h}$.

Finalmente, en la ecuación (3) se describe que en ausencia de los recursos del bosque y de la vida silvestre, la dinámica de los turistas está dada por $\frac{dE(t)}{dt} = \frac{r}{L}(E(t))^2 - rE(t)$. Entonces, el término $\frac{r}{L}(E(t))^2 - rE(t)$ describe la siguiente dinámica poblacional. Si $E(t) \approx L$, la densidad de turistas se aleja de $E(t) = L$. En contraste, si $E(t) \approx 0$, la densidad de turistas se acerca al valor $E(t) = 0$. Es decir, la densidad de turistas tenderá a cero cuando no hay recursos forestales ni vida silvestre. Los términos $\alpha E(t)F(t)$ y $\beta E(t)W(t)$ modelan el incremento en la densidad de turistas debido a la interacción con los recursos forestales y la vida silvestre a tasas α y β , respectivamente.

El modelo socioecológico dado por las ecuaciones (1)-(3) admite tanto equilibrios de frontera (los cuales describen exclusión de al menos una especie ya que al menos una entrada de los puntos de equilibrio es cero) como equilibrios interiores (los cuales describen coexistencia de todas las especies ya que todas las entradas de los puntos de equilibrio son positivas). Si bien, las soluciones del modelo no pueden obtenerse de manera explícita, aún puede conocerse el comportamiento de sus soluciones a través de teorías de las ecuaciones diferenciales o técnicas computacionales. En este trabajo, se mostrarán algunos resultados utilizando ambas perspectivas.

Los equilibrios de frontera que existen para todos los valores de los parámetros son

$$O = (0,0,0), P_0 = (K, 0,0), P_1 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a(cK-d)}{cb}, 0\right) \text{ y } P_2 = (0,0,L). \tag{4}$$

Observe que para que el equilibrio P_1 tenga sentido biológico se necesita que $K > \frac{d}{c}$. Además, en [15], se demuestra que equilibrios de frontera del tipo $(F^*, 0, E^*)$, lo cuales serán denotados por P_w , pueden ocurrir si se cumplen ciertas condiciones sobre los valores de los parámetros.

Mediante análisis de estabilidad de ecuaciones diferenciales, en [15] se probó que los equilibrios O y P_2 son inestables siempre. Por lo tanto, en el sistema socioecológico las tres densidades poblacionales no tenderán a cero simultáneamente, ni existirá un escenario en el que los turistas tiendan a la densidad poblacional $E(t) = L$ si los recursos forestales y la vida silvestre están ausentes. En contraste, los equilibrios P_0 , P_1 y P_w son estables bajo algunas condiciones sobre los parámetros del modelo. En estos casos, escenarios de exclusión de alguna variable son posibles. Note que P_0 describe un escenario en el que solo existen los recursos forestales mientras que P_2 describe un escenario en el que los turistas están ausentes y existen recursos forestales y vida silvestre. Finalmente, P_w describe un escenario en el que la vida silvestre desaparece y solamente permanecen los recursos forestales y los turistas.

El modelo dado por las ecuaciones (1)-(3) admite desde cero hasta dos equilibrios interiores del tipo (F^*, W^*, E^*) , los cuales serán denotados por P^* . Los equilibrios P^* denotan escenarios de coexistencia y ellos pueden ser estables o inestables. Debido a la complejidad del modelo, en [15], los equilibrios interiores no fueron calculados explícitamente. En ese trabajo solamente se probó existencia de equilibrios interiores cuando se cumplen algunas condiciones sobre los parámetros. Los autores también muestran la existencia de orbitas periódicas, las cuales son denotadas por P^0 . Además, en ese trabajo se muestra la existencia de un atractor extraño.

3. Ejemplos numéricos

En esta sección, se muestran simulaciones numéricas de las soluciones del modelo. A través de fijar todos los valores de los parámetros excepto un parámetro se explora su dinámica. El modelo describe diferentes escenarios al variar el parámetro e , los cuales tienen interés desde un punto de vista ecológico, social y económico. El parámetro e se eligió para mostrar el comportamiento del modelo debido a que la interacción entre turistas y los recursos del bosque pasa de ser benéfica a perjudicial cuando dicho parámetro aumenta. Es importante mencionar que escenarios análogos se obtienen cuando se varía alguno de los otros parámetros, en particular cuando se varía el parámetro g .

Para ejemplificar los escenarios asociados al modelo socioecológico, se variará el valor de e y se usarán los siguientes valores de los parámetros. $a = 0.12$, $b = 0.002$, $c = 0.5$, $d = 0.0001$, $f = 0.001$, $g = 0.001$, $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.0008$, $K = 1$, $r = 0.8$ y $L = 10$.

Escenario I.

Para $e = 2.2$, el único equilibrio localmente asintóticamente estable es P_1 . En la Figura 2 se muestra que la solución del modelo con la condición inicial $F(0) = 0.0003$, $W(0) = 59.98$ y $E(0) = 0.001$ converge a P_1 .

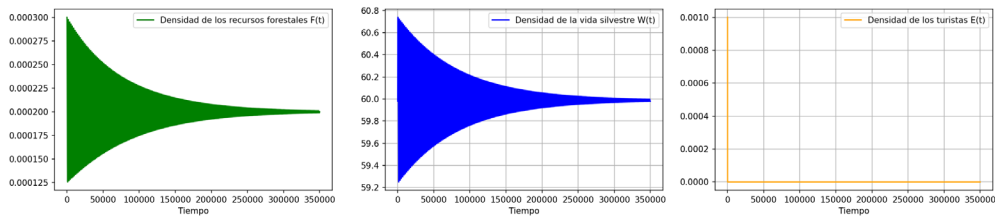


Figura 2. Las soluciones del modelo convergen al equilibrio P_1 .

Escenario II.

Para $e = 2.4$ existen dos puntos de equilibrio localmente asintóticamente estables. Observe que para la condición inicial $F(0) = 0.0005, W(0) = 59.98$ y $E(0) = 0.003$ las soluciones del modelo convergen a P_1 . En contraste, para la condición inicial $F(0) = 10.139, W(0) = 544.116$ y $E(0) = 1.824$ la solución converge a un equilibrio interior P^* . En la Figura 3 se muestra este caso.

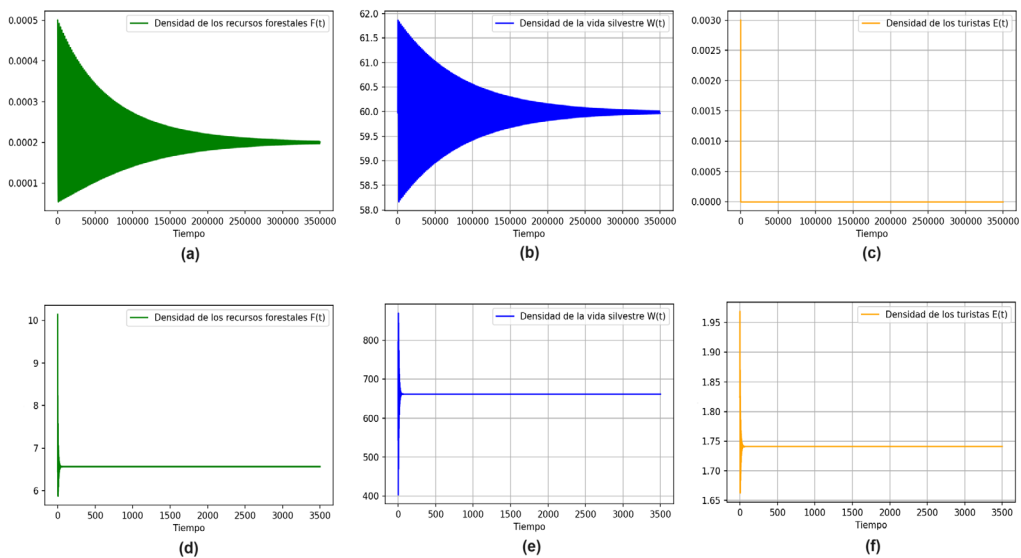


Figura 3. Las soluciones del modelo convergen ya sea al equilibrio P_1 o a un equilibrio interior P^* , dependiendo de las condiciones iniciales.

Escenario III.

Para $e = 2.7$ existe el equilibrio P_1 y una órbita periódica, la cual es denotada por P^0 . Ambos objetos son estables.

La solución asociada a la condición inicial $F(0) = 0.0005, W(0) = 59.98$ y $E(0) = 0.003$ converge a P_1 . En contraste, la solución con condición inicial $F(0) = 10.139, W(0) = 544.116$ y $E(0) = 1.824$ converge a la órbita periódica. Ver Figura 4.

Escenario IV.

Al aumentar el valor del parámetro tal que $e = 3.5$, la órbita periódica ya no existe y las soluciones convergen al equilibrio P_1 o convergen a un equilibrio interior P^* . Ver Figura 5. Para este caso se utilizaron las mismas condiciones iniciales que las usadas en el caso anterior.

Escenario V.

Con $e = 5$, las soluciones convergen al equilibrio P_1 o al equilibrio P_w . El comportamiento de las soluciones se muestra en la Figura 6. En este caso las condiciones iniciales son nuevamente las usadas en el escenario III.

Escenario VI.

Cuando $e = 15$ existe un único punto de equilibrio estable, P_1 . El comportamiento de las soluciones es similar al caso mostrado en el escenario I.

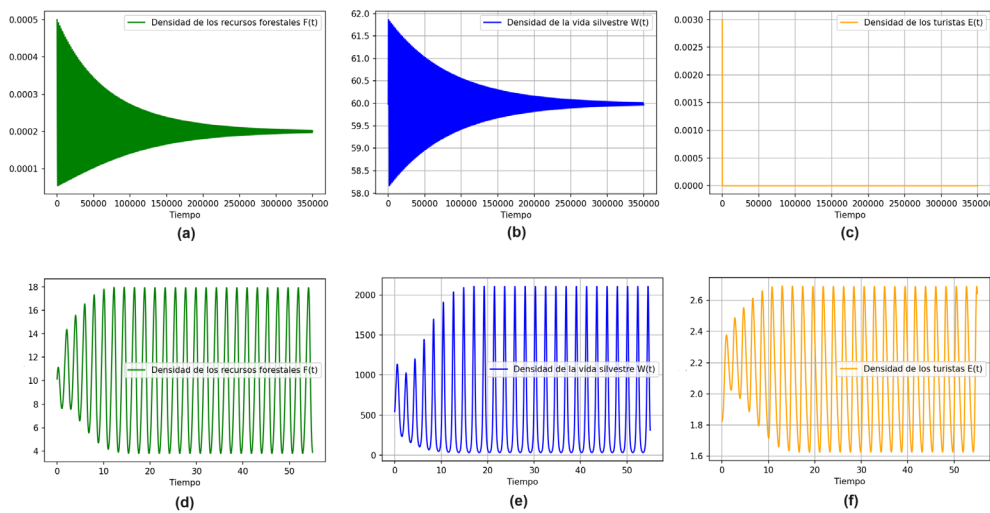


Figura 4. Las soluciones convergen ya sea al equilibrio P_1 o a una órbita periódica P^o .

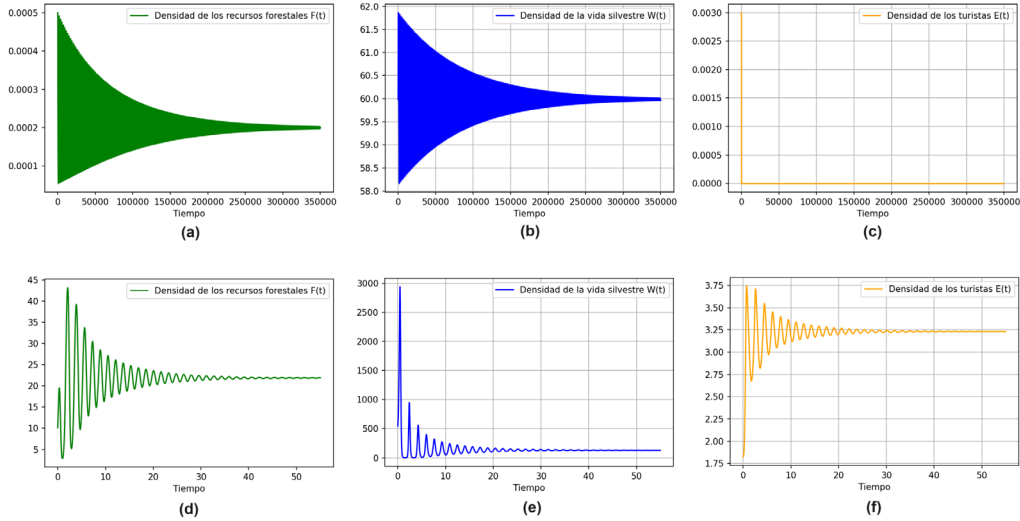


Figura 4. Las soluciones convergen ya sea al equilibrio P_1 o a un equilibrio interior P^* .

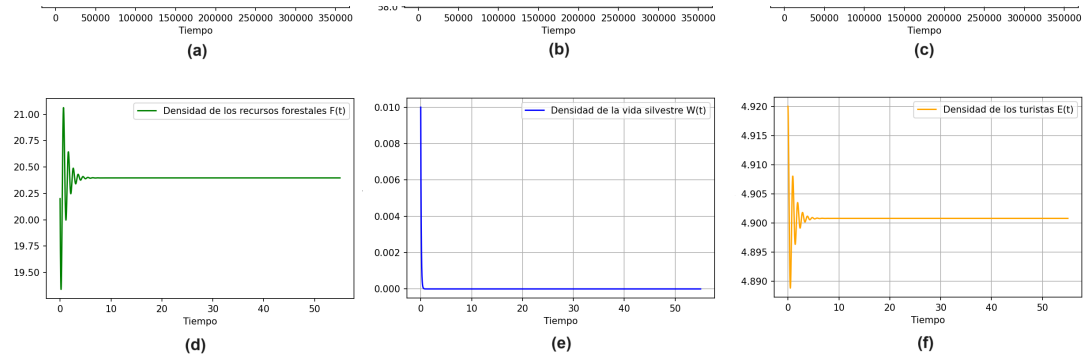


Figura 5. Las soluciones del modelo convergen a P_1 o un equilibrio del tipo P_w .

Escenarios similares a los mostrados anteriormente ocurren cuando se dan condiciones para que el equilibrio de frontera, P_0 , sea estable; ver [15]. La diferencia con los escenarios mostrados es que las soluciones convergen a un equilibrio de coexistencia o a un equilibrio en que solo existan los recursos forestales. En estos casos, la vida silvestre desaparece.

Finalmente, la Figura 7 muestra que pequeños cambios en algunos parámetros del modelo llevan a grandes cambios en el comportamiento de sus soluciones. El caso (a) muestra el escenario en el que $e = 3.44$ y los otros valores de los parámetros son los mismos usados en el escenario III. En el caso (b), se tiene que el parámetro L cambió a $L = 13.2$.

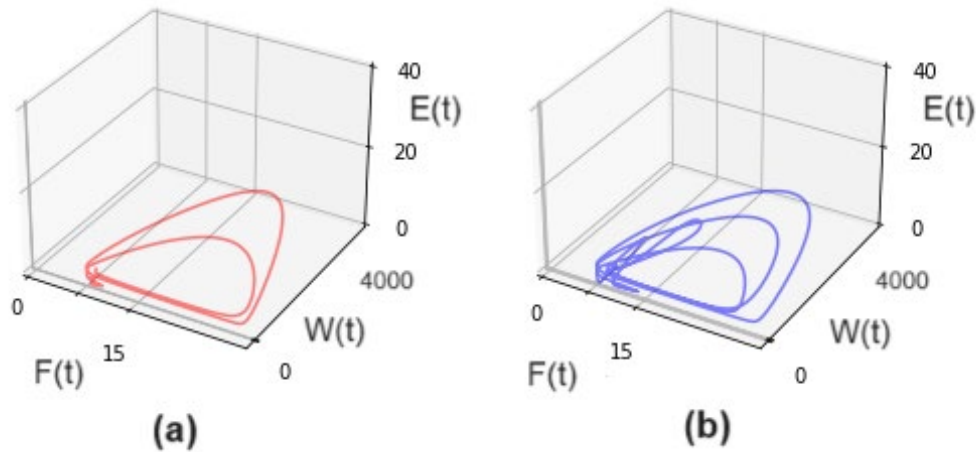


Figura 6. Atractor caótico

Utilizando las ideas expuestas por Casagrandi y Rinaldi en [3] se puede concluir que el sistema socioecológico dado por turistas, recursos forestales y la vida silvestre puede ser sustentable. Esto se concluye del hecho que en los escenarios II, III y IV hay soluciones que no se hacen cero en ningún tiempo. El análisis del modelo también muestra que el sistema socioecológico puede ser rentable, ya que en el escenario V se muestra que existen soluciones en las que el número de turistas para todo tiempo es distinto de cero aun cuando la vida silvestre se agota. Además, el modelo socioecológico puede ser compatible ya que los recursos forestales y la vida silvestre pueden coexistir; ver escenarios I-VI. Sin embargo, aun cuando existen escenarios sustentables estos están en riesgo debido a que ocurren a la par con escenarios no rentables, ya que el número de turistas tiende a cero para tiempos largos bajo algunas condiciones iniciales. Es importante resaltar que los escenarios sustentables ocurren para ciertos valores del parámetro e . Las simulaciones numéricas muestran que para que se den escenarios sustentables el valor del parámetro e no debe ser muy pequeño (escenario I) ni muy grande (escenario V y VI). El parámetro e puede interpretarse como la capacidad de carga de los recursos forestales. Una interpretación análoga se tiene para el parámetro g , el cual puede ser interpretado como la capacidad de carga de la vida silvestre. Finalmente, el modelo muestra la existencia de un atractor extraño, lo cual dificulta hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de las variables analizadas.

4. Conclusiones

Comprender los efectos que las actividades humanas tienen sobre los ecosistemas es fundamental para vivir en armonía. Si bien el turismo de naturaleza genera ingresos económicos, este también puede causar daños irreparables para la flora y fauna del sitio. Este trabajo busca mostrar que el uso de modelos matemáticos puede ser una herramienta útil para diseñar estrategias que permitan la coexistencia de turistas sin impactar fuertemente al

ambiente. Del análisis del modelo se desprende que aun cuando pueda ampliarse el número de turistas que puede recibir un sitio, incrementar el número de turistas puede ser contraproducente. Esto se debe a que las variables ecológicas (flora y fauna), económicas y sociales (turistas) pueden tener un comportamiento oscilatorio, lo cual no es deseable desde un punto de vista ecológico y económico. A través de este trabajo se mostró que las actividades turísticas pueden coexistir con la naturaleza siempre y cuando sean llevadas de manera responsable.

Desafortunadamente, en la actualidad existen muy pocos modelos matemáticos, que no sean modelos econométricos, que describan los efectos del turismo sobre la naturaleza de manera dinámica. En ese sentido, además de los modelos mencionados anteriormente, solo encontramos los siguientes trabajos [1,2,4,8,9,11,12], los cuales son una generalización de los modelos propuestos por Casagrandi y Rinaldi en 2002 y Lacitignola et al. en 2007 [3,10]. Esos trabajos, muestran un análisis exhaustivo de dichos modelos o un análisis a través de técnicas específicas.

Es totalmente aceptado que las actividades humanas como el turismo tienen la capacidad de alterar el medio ambiente ya sea para conservarlo o para dañarlo lo cual resulta bastante paradójico. Por esta razón es fundamental contar con modelos matemáticos que permitan analizar los efectos antropogénicos sobre la naturaleza. Esto con el fin de conservar los paisajes paradisíacos que tanto nos gusta disfrutar y al mismo tiempo ayudar a las sociedades alrededor de ellos. Así que ante la pregunta ¿Viajar o no viajar? La respuesta es viajar, pero actuando de tal manera que tus actividades perjudiquen lo menos posible al planeta tierra y sus maravillosos lugares paradisíacos.

5. Apéndice

A continuación, se presentan algunos resultados de los sistemas dinámicos. Para profundizar en estos conceptos se recomienda revisar [7,13].

Definición 1. Un sistema dinámico suave sobre \mathbb{R}^n es una función continuamente diferenciable $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $\varphi(t, X) = \varphi_t(X)$ satisface:

- a) $\varphi_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función identidad: $\varphi_0(X_0) = X_0$.
- b) La composición $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

La ecuación diferencial $\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t))$ con $X \in U \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, con U un conjunto abierto, se denomina un sistema dinámico.

Una solución de equilibrio del sistema $\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t))$ es un punto $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\bar{X}) = 0$, es decir, una solución que no cambia con el tiempo. Una solución de equilibrio también es llamada “punto fijo”, “punto estacionario”, “punto crítico” o “estado estable” entre otros términos.

Se dice que un punto de equilibrio es estable si soluciones cercanas permanecen cercanas para todo tiempo futuro. Un equilibrio que no es estable se dice que es inestable.

Definición. Sea $\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t))$ un sistema de ecuaciones en \mathbb{R}^n con flujo $\varphi_t(X)$. Un conjunto Λ es llamado un atractor si

1. Λ es compacto e invariante.
2. Existe un conjunto abierto U conteniendo a Λ tal que para cada $X \in U$, $\varphi_t(X) \in U$ para todo $t \geq 0$ y $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U) = \Lambda$.
3. (Transitividad) Dados dos puntos $Y_1, Y_2 \in \Lambda$ y cualquier entorno abierto U_j relativo a Y_j en U , hay una curva solución que comienza en U_1 y luego pasa por U_2 .

En términos generales, un atractor para el sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto invariante que "atrae" todas las soluciones cercanas.

Definición. El flujo $\varphi_t(X)$ para un sistema de ecuaciones diferenciales tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales en X_0 siempre que haya un $r > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$, existe algún Y_0 con $\|Y_0 - X_0\| < \delta$ para el cual las órbitas de Y_0 y X_0 se separan una distancia de al menos r . Más específicamente, para cualquier reparametrización

$\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la órbita de Y_0 , existe un tiempo $t_1 > 0$ tal que

$$\|\varphi_{\tau(t_1)}(Y_0) - \varphi_{\tau(t_1)}(X_0)\| \geq r.$$

Definición. Se dice que el sistema tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales en un conjunto S siempre que tenga una dependencia sensible de las condiciones iniciales para cualquier condición inicial X_0 en S . Más precisamente, hay un $r > 0$ (que funciona para todos los puntos) tal que, para cualquier X_0 en S y cualquier $\delta > 0$, hay algún Y_0 en el espacio de fase tal que las órbitas de X_0 y Y_0 se separan una distancia de al menos r en el sentido dado en la definición anterior. En esta definición, se permite que el segundo punto Y_0 esté fuera del conjunto S en el espacio de fase ambiental.

Si S es un conjunto invariante, decimos que el sistema tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales cuando se restringe a S , siempre que haya un $r > 0$ tal que, para cualquier X_0 en S y cualquier $\delta > 0$, haya algún Y_0 en S tal que las órbitas de X_0 y Y_0 se separan una distancia de al menos r en el sentido dado en la definición anterior. En esta definición, el segundo punto Y_0 debe seleccionarse dentro del conjunto invariante S .

Definición. Un atractor caótico es un atractor transitivo A para el cual el flujo depende sensiblemente de las condiciones iniciales cuando se restringe a A .

Debido a que el conjunto de puntos de un atractor caótico es a menudo un conjunto complicado, a veces se le llama "atractor extraño".

Referencias

- [1] AFSHARNEZHAD, Z., DADI Z., MONFARED, Z. Profitability and sustainability of a tourism-based social-ecological dynamical systems by bifurcation analysis. *J. Korean Math. Soc.*, 54, 1-16, 2017.
- [2] BEHJATY, M., MONFARED, Z. Modeling and dynamic behavior of a discontinuous tourism-based social-ecological dynamical system. *Filomat*, 33, 5991-6004.
- [3] CASAGRANDE, R., RINALDI, S. A theoretical approach to tourism sustainability. *Conserv. Ecol.* 6, 13, 2002.
- [4] CASAGRANDE, R., RINALDI, S. Sustainability and bifurcations of positive attractors. *Chaos*

- Complexity Lett.* 1, 117–128, 2004.
- [5] DIOP, O., SÈNE, A. Mathematical model of the dynamics of fish, waterbirds and tourists in the Djoudj National Park. *Acta Biotheor.* 64, 447-468, 2016.
- [6] DIOP, O., SÈNE A. Mathematical model of fish, birds and tourists in wetlands: the impact of periodic fluctuations on the coexistence of species. *Afr. Math.* 29, 841-859, 2018.
- [7] HIRSCH, M. W., Smale, S., Devaney, R. L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Elsevier, Academic Press, USA, 2004.
- [8] JAWABREH, O., QADER, A. A., SALAH, J., AL MASHRAFI, K., AL DEIN AL FAHMAWEE, E., ALI, B. J. A. Fractional calculus analysis of tourism mathematical model. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 9, 1-11, 2023.
- [9] KASLIK, E., NEAMTU, M. Dynamics of a tourism sustainability model with distributed delay. *Chaos, Solitons and Fractals*, 133, 109610, 2020.
- [10] LACITIGNOLA, D., PETROSILLO, I., CATALDI, M., ZURLINI, G. Modelling socio-ecological tourism-based systems for sustainability. *Ecological Modelling*, 206, 191-204, 2007.
- [11] LACITIGNOLA, D., PETROSILLO, I., ZURLINI, G. Time-dependent regimes of a tourism-based social-ecological system: Period-doubling to chaos. *Ecological Complexity*, 7, 44-54, 2010.
- [12] MONFARED, Z., DADI, Z., MILADI DARI, N., AFSHARNEZHAD, Z. Existence and nonexistence of periodic solution and Hopf bifurcation of a tourism-based social-ecological system. *Optik*, 127, 10908-10918, 2016.
- [13] ROBINSON, R. C. An introduction to dynamics systems continuous and discrete, The American Mathematical Society, USA, 2012.
- [14] SINAY, L., SINAY, L. A simple mathematical model for the effects of the growth of tourism on environment. <http://espace.library.uq.edu.au/view/UQ:7692>.
- [15] VILLAVICENCIO-PULIDO, G., VÁZQUEZ-HIPÓLITO, V., GARCÍA-CRUZ, G. J. Catastrophic or sustainable scenarios might occur when the carrying capacities of a Tourism-based socioecological system vary. *Natural Resource Modeling*, e12365, 2022.

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Osvaldo Osuna

Correo Electrónico: osvaldo.osuna@umich.mx

Institución: Universidad Michoacana, México.

Nombre: José Geiser Villavicencio-Pulido

Correo Electrónico: j.villavicencio@correo.ler.uam.mx

Institución: Universidad Autónoma Metropolitana, México.