

Juegos y Rarezas Matemáticas

A vueltas con las tangentes

Around tangents

Francisco Javier García Capitán, Miguel Ángel Pérez García-Ortega,
Antonio Roberto Martínez Fernández y Juan Luis Castaño Fernández

Revista de Investigación



Volumen XIII, Número 1, pp. 147–160, ISSN 2174-0410
Recepción: 14 oct'22; Aceptación: 5 feb'23

1 de abril de 2023

Resumen

En este artículo se plantea un problema sobre tangencias propuesto por nuestro amigo y compañero Juan José Isach Mayo que sirve de excusa para revisar distintas teorías sobre construcciones como la inversión o las transformaciones de Möbius en el plano complejo.

Palabras Clave: circunferencias tangentes, inversión, transformación de Möbius.

Abstract

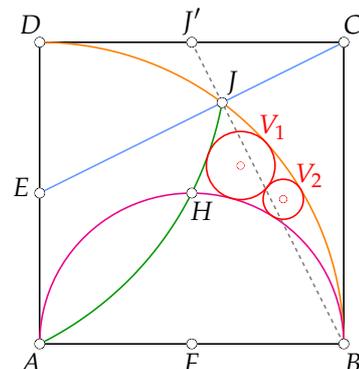
In this article, it is presented a problem about tangencies proposed by our friend and colleague Juan José Isach Mayo that serves as an excuse to review different theories about constructions such as inversion or Möbius transformations in the complex plane.

Keywords: tangent circles, inversion, Möbius transformation.

1. Enunciado

Sobre un cuadrante de circunferencia de radio unidad se construye la siguiente figura, en la que E , F y J' son los puntos medios de los segmentos AD , AB y CD , respectivamente, la curva que pasa por A , H y J es un arco de circunferencia, siendo H el centro del cuadrado $ABCD$:

1. Calcúlese la sucesión de radios $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la sucesión de circunferencias de centros $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Demuéstrese que la sucesión de centros $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se encuentra sobre una cónica y determínese.



2. Solución mediante inversión (I)

Se ha modificado el enunciado original sustituyendo el radio unidad por un radio R con el fin de utilizar segmentos en lugar de números. Esta práctica habitual es útil para que las fórmulas que se van obteniendo en el problema sean homogéneas, ya que todas las cantidades muestran su dimensión (véase Pedret Yebra, 2006, y García Capitán, 2006).

1. Si prolongamos CE hasta cortar a AB en K , resulta que $KB = 2R$ y $BC = R$, de donde $CK = \sqrt{5}R$ y entonces como, por potencia de un punto respecto de una circunferencia, $CJ \cdot CK = CB^2 = R^2$, resulta que

$$CJ = \frac{R^2}{\sqrt{5}R} = \frac{R}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}R}{5} = \frac{1}{5} \cdot CK.$$

En consecuencia, si X e Y son las proyecciones del punto J sobre las rectas que contienen CD y CB respectivamente, resultará que

$$CX = \frac{2R}{5} \quad \text{y} \quad CY = \frac{R}{5}.$$

Si el punto L es el simétrico de C respecto de D , y Q es el punto medio del segmento LD , resulta obvio que

$$QA = QK = QH = \frac{\sqrt{5}R}{2}.$$

Veamos también que $QJ = \frac{\sqrt{5}R}{2}$. En efecto, utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle QJY$,

$$QJ^2 = QX^2 + YJ^2 = \left(\frac{3R}{2} - \frac{2R}{5}\right)^2 + \left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{121R^2}{100} + \frac{4R^2}{100} = \frac{5R^2}{4}.$$

Para resolver el ejercicio se recurre a una inversión con centro el punto B que intercambie los puntos A y K , y las circunferencias con diámetros (KB) y (AB) en las perpendiculares a la recta que contiene AB que pasan por los puntos A y K (pueden utilizarse otras inversiones alternativas). En dicho caso, la potencia k de dicha inversión debe cumplir

$$k^2 = BA \cdot BK = R \cdot 2R \Rightarrow k = \sqrt{2}R.$$

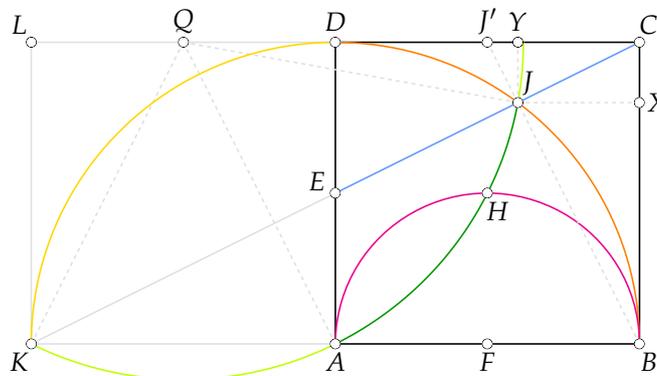


Figura 1

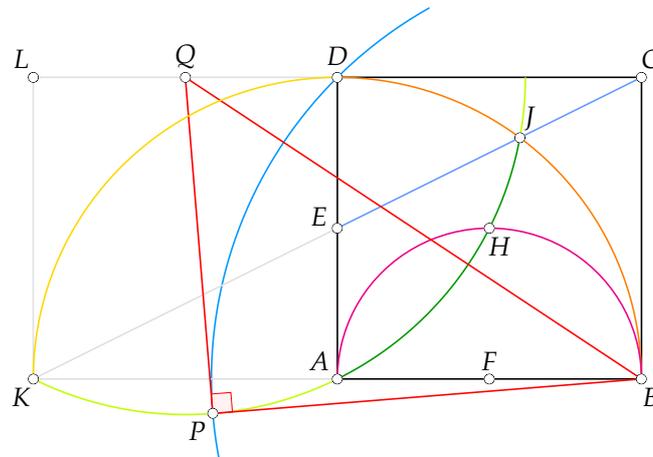


Figura 2

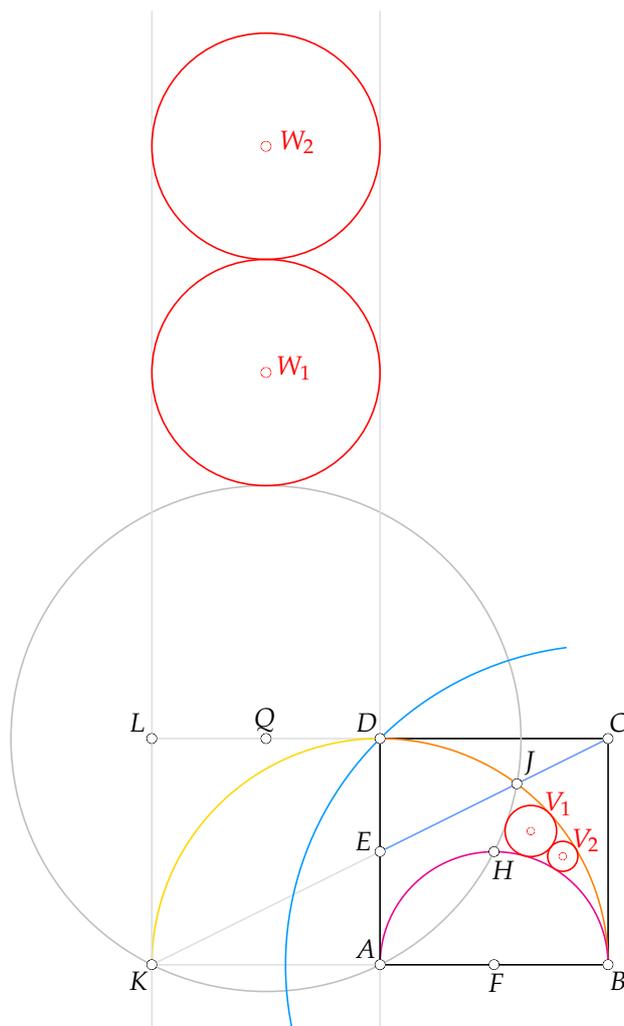


Figura 3

Por otro lado, si el punto P es uno de los puntos de corte de las circunferencias $(Q, \frac{\sqrt{5}R}{2})$ y $(B, \sqrt{2}R)^1$, como

$$BQ^2 = BC^2 + CQ^2 = R^2 + \frac{9R^2}{4} = \frac{13R^2}{4} = \frac{5R^2}{4} + 2R^2,$$

el triángulo $\triangle BPQ$ es rectángulo, es decir, ambas circunferencias resultan ortogonales, y por lo tanto la circunferencia $(Q, \frac{\sqrt{5}R}{2})$ será fija mediante la inversión respecto de la circunferencia $(B, \sqrt{2}R)$.

Ahora la inversa de la circunferencia (V_1, v_1) inscrita en el triángulo curvilíneo BJH será la inversa de una circunferencia $(W_1, w_1 = \frac{R}{2})$ tangente a las rectas que contienen KL y AD y a la circunferencia que une los puntos A, H y J , esto es, la circunferencia $(Q, 5)$.

El radio v_1 se puede obtener con la fórmula

$$v_1 = \frac{w_1 k^2}{BW_1^2 - w_1^2} = \frac{\frac{R}{2} \cdot 2R^2}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(R + \frac{\sqrt{5}R}{2} + \frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{2R}{11 + 3\sqrt{5}}.$$

De la misma forma podemos obtener todos los radios:

$$v_n = \frac{w_n k^2}{BW_n^2 - w_n^2} = \frac{\frac{R}{2} \cdot 2R^2}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(R + \frac{\sqrt{5}R}{2} + (2n-1)\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{2R}{7 + \sqrt{5} + 2(1 + \sqrt{5})n + 2n^2}.$$

2. Siendo $V_n F = \frac{R}{2} + v_n$ y $V_n A = R - v_n$, se tiene que $V_n A + V_n F = \frac{3R}{2}$, por lo que resulta que todos los centros V_n están sobre una elipse \mathcal{E} con focos F y A , y con eje mayor $\frac{3R}{2}$ (figura 4).

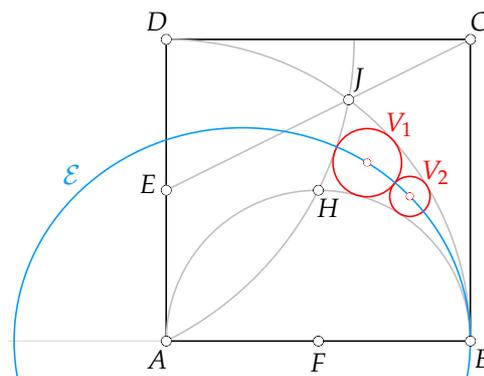


Figura 4. La elipse \mathcal{E} (en azul claro) marca la trayectoria de los centros de circunferencias tangentes buscadas.

3. Solución mediante inversión (II)

1. Fijemos unos ejes rectangulares de coordenadas centrados en A y tales que $B = (1, 0)$ y $D = (0, 1)$. Consideremos la inversión con respecto a la circunferencia \mathcal{C} de centro B y radio

¹ En general se denota (X, r) a la circunferencia de centro el punto X y radio r .

$\overline{AB} = 1$ y denotemos, como es habitual, por X' al inverso de un punto $X \neq B$ con respecto a la circunferencia C .

Entonces se tiene que:

- i) La circunferencia (rosa) AHB se transforma en la recta AD .
- ii) La circunferencia (marrón) DJB se transforma en la recta FH .
- iii) El inverso del punto J es el punto J' de la imagen. En efecto: para hallar el inverso de J tomamos la perpendicular a BJ que pasa por J , que es la recta EJ ² y hallamos tomamos uno de los puntos de intersección de esta perpendicular con la circunferencia de inversión, como por ejemplo C . Ahora se toma la tangente por C a la circunferencia de inversión, que es la recta CD , y entonces el inverso de J será la intersección de esta tangente con la recta BJ , punto que es J' , que es lo que queríamos ver.
- iv) El inverso del punto H es el punto D . Esto se deduce fácilmente de la igualdad $\overline{BH} \cdot \overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$.
- v) El inverso del punto $F = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ es el punto $F' = (-1, 0)$ es el punto . Como antes, se deduce de la igualdad $\overline{BF} \cdot \overline{BF'} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.
- vi) De iii), iv) y v) deducimos que la circunferencia (verde) C_H que pasa por A, H y J se transforma en la circunferencia C'_H que pasa por los puntos A, F y D (y también por J').

Además, las circunferencias (V_n) se transforman en las circunferencias tangentes (V'_n) , todas ellas de radio $\frac{1}{4}$. Véase la figura 5.

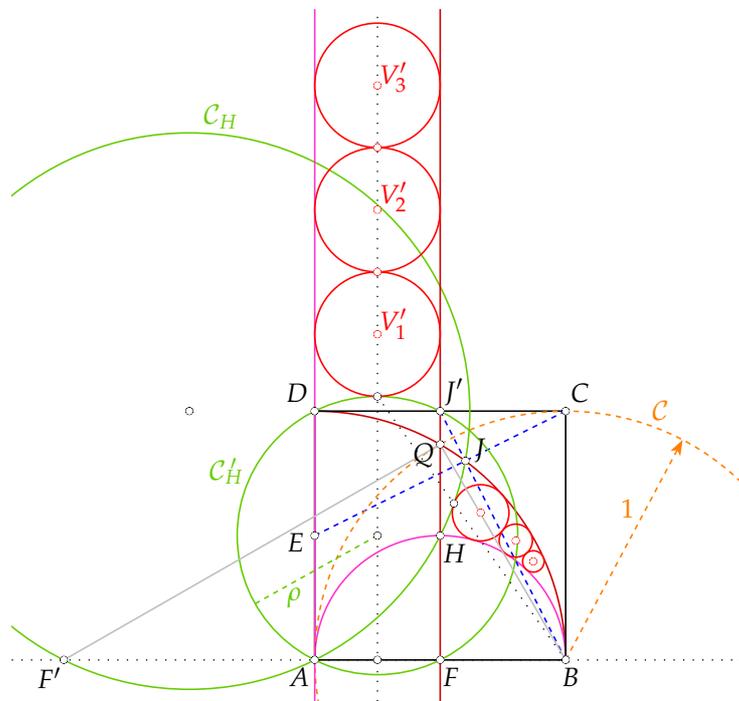


Figura 5. Aplicando inversión al problema.

² En efecto: según la notación de la figura 6, la semejanza de los triángulos rectángulos CDE y HPJ' nos da la igualdad de ángulos $\angle P'J'H = \angle ECD = \alpha$ y $\angle HPJ' = \angle C'J'P = \beta$. Al ser $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, deducimos que $\angle J'JC = \frac{\pi}{2}$, con lo que $BJ' \perp EC = EJ$.

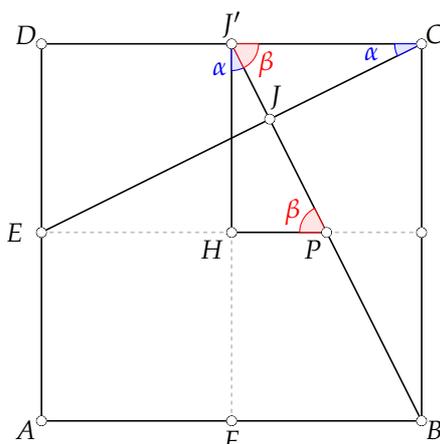


Figura 6. Las rectas BJ' y EC son perpendiculares.

Para hallar el radio ρ de la circunferencia C'_H podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ADF , de donde obtenemos que $\rho = \frac{\sqrt{5}}{4}$. El punto de corte de C'_H con la recta $x = \frac{1}{4}$ es $T'_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \rho\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)$. Así, se obtiene fácilmente que las coordenadas de los centros V'_n de las circunferencias inversas de (V_n) resultan

$$V'_n = \left(\frac{1}{4}, \frac{\Phi + n}{2}\right),$$

donde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el número de oro.

Ahora usamos la relación que nos dice cómo se transforma el radio de una circunferencia bajo una inversión con respecto a una circunferencia de centro O y radio k . Concretamente, se tiene que el radio r' de una circunferencia inversa de una circunferencia con centro M y radio r que no pasa por el centro de inversión viene dado por

$$r' = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|}.$$

Particularizando en nuestro caso, tendremos que

$$v_n = \frac{\frac{1}{4}}{\left|BV_n'^2 - \frac{1}{16}\right|}.$$

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\overline{BV_n'}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MV_n'}^2 = \frac{9}{16} + \frac{(\Phi + n)^2}{4},$$

luego

$$\overline{BV_n'}^2 - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{(\Phi + n)^2}{4},$$

y los radios de las circunferencias (V_n) valen

$$v_n = \frac{1}{2 + (\Phi + n)^2}.$$

2. Observemos en primer lugar que aunque los puntos V'_n están alineados, los puntos V_n no tienen por qué estar sobre una circunferencia. Usando que la circunferencia (V_n) es tangente exteriormente a la circunferencia (F) y tangente interiormente a la circunferencia (A) , se tiene que

$$\overline{AV_n} + \overline{FV_n} = (1 - v_n) + \left(\frac{1}{2} + v_n\right) = \frac{3}{2},$$

por lo que los puntos V_n están sobre la elipse \mathcal{E} cuyos focos son A y F y que pasa por B (véase la figura 7).

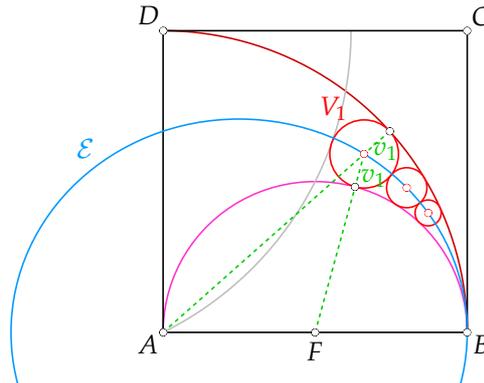


Figura 7. Condiciones de tangencia y lugar geométrico que describen los puntos V_n .

Nótese que para resolver este apartado no ha hecho falta conocer el valor concreto de v_n calculado en el apartado 1.

4. Solución mediante inversión (III)

1. Considerando la inversión con respecto a la circunferencia (B) cuyo radio es $b = 1$, se verifica que:

- 1) La circunferencia (F) se transforma en la recta AD .
- 2) La circunferencia (A) se transforma en la recta FH .
- 3) La circunferencia (K) se transforma en la circunferencia (G) , cuyo radio es $g = \frac{\sqrt{5}}{4}$, ya que:
 - i) El punto A se mantiene fijo, por estar situado sobre la circunferencia de inversión.
 - ii) El punto H se transforma en el punto D , pues:

$$BD = \sqrt{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b^2}{BH}.$$

- iii) El punto J se transforma en el punto J' , pues, como $CE \perp BJ$, los triángulos rectángulos CJB y $J'CB$ son semejantes y, por tanto:

$$\frac{BJ}{b} = \frac{BJ}{BC} = \frac{BC}{BJ'} = \frac{b}{BJ'} \implies BJ' = \frac{b^2}{BJ}.$$

entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(V_n) \equiv ((n + \Phi)^2 + 2)x^2 + ((n + \Phi)^2 + 2)y^2 + 6x - 4(n + \Phi)y + 4 = 0,$$

y, por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \left(-\frac{3}{(n + \Phi)^2 + 2}, \frac{2(n + \Phi)}{(n + \Phi)^2 + 2} \right).$$

Finalmente, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\begin{aligned} AV_n + FV_n &= \sqrt{\left(-\frac{3}{(n + \Phi)^2 + 2} + 1 \right)^2 + \left(\frac{2(n + \Phi)}{(n + \Phi)^2 + 2} \right)^2} + \\ &\quad + \sqrt{\left(-\frac{3}{(n + \Phi)^2 + 2} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2(n + \Phi)}{(n + \Phi)^2 + 2} \right)^2} = \\ &= \frac{(n + \Phi)^2 + 1}{(n + \Phi)^2 + 2} + \frac{(n + \Phi)^2 + 4}{2((n + \Phi)^2 + 2)} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

entonces el lugar geométrico que describe la sucesión de puntos $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la elipse \mathcal{E} cuyos focos son los puntos $A = (-1, 0)$ y $F = (-\frac{1}{2}, 0)$ y cuya suma de distancias es igual a $\frac{3}{2}$.

5. Solución mediante transformaciones de Möbius

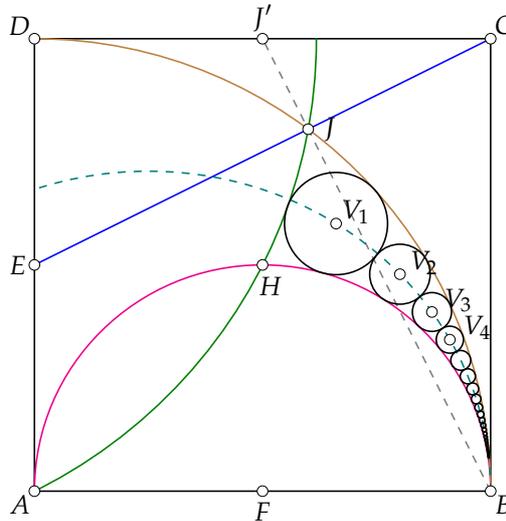


Figura 9. Esquema del problema.

Las circunferencias buscadas $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con centros en los puntos $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y radios respectivos $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, son todas tangentes a la circunferencia con centro en A y radio 1 y a la circunferencia con centro en F y radio $\frac{1}{2}$. En esta propuesta de solución vamos a buscar una transformación de Möbius que convierta dichas circunferencias en rectas paralelas (véase Schwerdtfeger, 1979, § 2).

Identificamos el plano euclidiano con \mathbb{C} , y tomamos un sistema de referencia verificando

$$z_A = 0, \quad z_B = 1, \quad z_D = i.$$

Sea G el punto simétrico de B respecto de A , o sea, tal que su afijo sea $z_G = -1$ (véase la figura 10). Buscamos una función φ definida por

$$\hat{\mathbb{C}} \ni z \rightarrow \varphi(z) := \frac{az + b}{cz + d} \in \hat{\mathbb{C}}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0;$$

y verificando, por ejemplo,

$$\varphi(z_A) = \varphi(0) = 0 = z_A, \quad \varphi(z_B) = \varphi(1) = \infty, \quad \varphi(z_G) = \varphi(-1) = -1 = z_G.$$

Si imponemos las dos primeras condiciones,

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\implies b = 0, \\ \varphi(1) = \infty &\implies d = -c; \end{aligned}$$

y de momento, sabemos que φ ha de ser de la forma

$$\varphi(z) = \frac{az}{c(z-1)}.$$

Además, imponiendo también la condición restante,

$$\varphi(-1) = -1 \implies \frac{-a}{-2c} = -1 \implies \frac{a}{c} = -2.$$

Por tanto, la función φ buscada es

$$\varphi(z) = -\frac{2z}{z-1},$$

y su inversa

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z}{z+2}. \tag{1}$$

Aplicamos la transformación φ a los puntos³ D, H y J , y obtenemos

$$\varphi(z_D) = \varphi(i) = -1 + i, \quad \varphi(z_H) = \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2, \quad \varphi(z_J) = \varphi\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = -1 + 2i.$$

Por tanto, la circunferencia con centro en A y radio 1 se transforma en la recta $\Re(z) = -1$, la circunferencia con centro en F y radio $\frac{1}{2}$ en la recta $\Re(z) = 0$ (el eje imaginario), y la circunferencia que pasa por los puntos A, H y J en la circunferencia

$$\left| z - \left(-\frac{1}{2} + i\right) \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Todo esto se representa en la figura 11, en la que denotamos al transformado de cada punto P del problema original por P^* . En el nuevo problema equivalente obtenido es inmediato calcular las circunferencias $\{\gamma_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$, transformadas de las originales. Todas han de ser tangentes a las rectas verticales separadas una unidad, por lo que todas tienen radio $\frac{1}{2}$. Además, la primera de ellas, con centro en W_1^* , será también tangente a la circunferencia (2), y para cada $n \in \mathbb{N}$ la

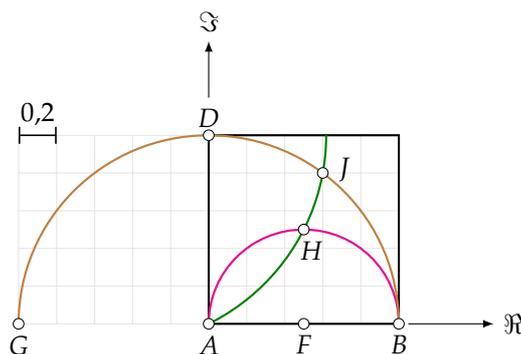


Figura 10. Elementos importantes del problema.

³ Se omite el cálculo de las coordenadas de J , por ser elemental.

circunferencia con centro en W_{n+1}^* es tangente a la circunferencia con centro en W_n^* . A la vista de todo lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, los puntos W_n^* serán los afijos de los números

$$w_n := -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + n - \frac{1}{2}\right) i = -\frac{1}{2} + \frac{2n + 1 + \sqrt{5}}{2} i.$$

Y si, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$a_n := 2n + 1 + \sqrt{5}, \tag{3}$$

la expresión anterior se puede simplificar de la forma

$$w_n = \frac{1}{2}(-1 + a_n i).$$

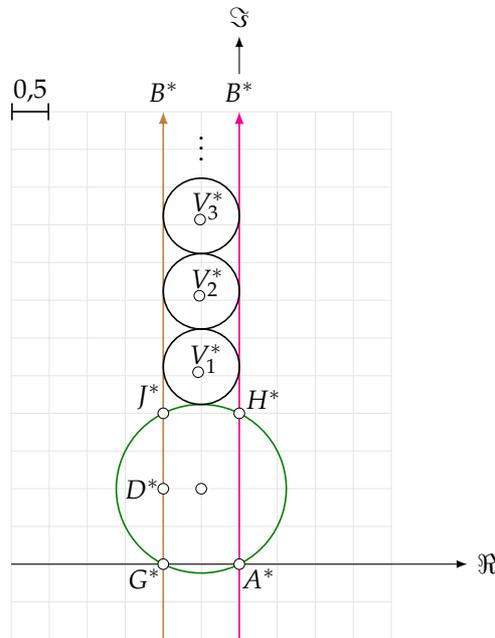


Figura 11. Transformación de Möbius.

El siguiente paso es recuperar los centros $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de las circunferencias originales. Si bien las transformaciones de Möbius convierten rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, en general no preservan los centros de las circunferencias. Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, y consideremos la circunferencia γ_n^* con centro en W_n^* y radio $\frac{1}{2}$, cuya ecuación será

$$\gamma_n^* \equiv \left| z - \frac{1}{2}(-1 + a_n i) \right| = \frac{1}{2}.$$

Vamos a obtener el conjugado de $p := -2$ respecto de dicha circunferencia, que llamaremos q_n , cuyo afijo es el punto V_n^* (algunos se representan en la figura 11), y que verifica la relación

$$\begin{aligned} (q_n - w_n)(\bar{p} - \bar{w}_n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies q_n = \frac{1}{4(\bar{p} - \bar{w}_n)} + w_n = \\ &= \frac{1}{4\left(-2 - \frac{1}{2}(-1 - a_n i)\right)} + \frac{1}{2}(-1 + a_n i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(-3 + a_n i)} + \frac{1}{2}(-1 + a_n i) = \\ &= \frac{-(12 + a_n^2) + a_n(8 + a_n^2)i}{9 + a_n^2}. \end{aligned}$$

Dado que $p = -2$ y q_n son conjugados respecto de la circunferencia γ_n^* , en el problema original $\varphi^{-1}(p)$ y $\varphi^{-1}(q_n)$ también serán conjugados respecto de la circunferencia buscada $\gamma_n = \varphi^{-1}(\gamma_n^*)$. Ahora bien,

$$\varphi^{-1}(p) = \varphi^{-1}(-2) = \infty,$$

por lo que $c_n := \varphi^{-1}(q_n)$ será el centro de la circunferencia γ_n y su afijo será el punto V_n . Operando,

$$c_n = \varphi^{-1}\left(\frac{-(12 + a_n^2) + a_n(8 + a_n^2)i}{9 + a_n^2}\right) = \frac{a_n^2 - 4 + 4a_n i}{8 + a_n^2}. \quad (4)$$

A partir de los resultados obtenidos procedemos a resolver los dos apartados del ejercicio.

1. La sucesión de radios $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene dada, por ejemplo, por la distancia de cada punto V_n (de afijo c_n) a la circunferencia de centro A y radio 1. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicando las relaciones (4) y (3) obtenemos

$$\begin{aligned} v_n &= 1 - |c_n| = 1 - \left| \frac{a_n^2 - 4 + 4a_n i}{8 + a_n^2} \right| = 1 - \frac{|a_n^2 - 4 + 4a_n i|}{8 + a_n^2} = 1 - \frac{|a_n + 2i|^2}{8 + a_n^2} = \\ &= 1 - \frac{4 + a_n^2}{8 + a_n^2} = \frac{4}{a_n^2 + 8} = \frac{4}{(2n + 1 + \sqrt{5})^2 + 8}. \end{aligned}$$

2. Los puntos de la sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ están sobre la curva cuyas ecuaciones paramétricas se deducen inmediatamente de la expresión (4):

$$\left. \begin{aligned} \Re(z) &= \frac{t^2 - 4}{8 + t^2} \\ \Im(z) &= \frac{4t}{8 + t^2} \end{aligned} \right\}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Con el objetivo de identificar la curva vamos a dar una ecuación implícita de la misma. Para ello tenemos que eliminar el parámetro $t \in \mathbb{R}$ presente en ambas ecuaciones. Procedemos a hacerlo completando cuadrados, con idea de eliminar el término de primer grado de los numeradores.

$$\begin{aligned} (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2 &= \left(\frac{t^2 - 4}{8 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{4t}{8 + t^2}\right)^2 = \frac{(t^2 - 4)^2 + 16t^2}{(8 + t^2)^2} = \\ &= \left(\frac{4 + t^2}{8 + t^2}\right)^2 = \left(\frac{8 + 2t^2}{2(8 + t^2)}\right)^2; \\ \left(\Re(z) - \frac{1}{2}\right)^2 + (\Im(z))^2 &= \left(\frac{t^2 - 4}{8 + t^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4t}{8 + t^2}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{t^2 - 16}{2(8 + t^2)}\right)^2 + \left(\frac{8t}{2(8 + t^2)}\right)^2 = \\ &= \frac{(t^2 - 16)^2 + 64t^2}{4(8 + t^2)^2} = \left(\frac{16 + t^2}{2(8 + t^2)}\right)^2. \end{aligned}$$

Tomando primero raíces cuadradas en ambos miembros de cada ecuación y sumándolas luego,

$$\sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2} + \sqrt{\left(\Re(z) - \frac{1}{2}\right)^2 + (\Im(z))^2} = \frac{24 + 3t^2}{2(8 + t^2)} = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la curva es una elipse⁴ de focos A y F y de semieje mayor $\frac{3}{4}$,

$$|z| + \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}.$$

Agradecimientos

Los autores agradecen a José Manuel Sánchez Muñoz su iniciativa creando y administrando el grupo de Telegram *Retos Matemáticos*, y la ayuda en la maquetación final de este artículo.

Referencias

- ALEXANDER, Daniel C. & KOEBERLEIN, Geralyn M. (2013). *Geometría*, 5ª Ed. Javier León Cárdenas (trad.). México D.F., México: Cengage Learning.
- ALTSHILLER-COURT, Nathan (1881). *College Geometry. An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. 2nd ed. New York, USA: Dover Publications, Inc.
- BUSER, Peter & COSTA, Antonio F. (2010). *Curso de Geometría Básica*. UNED. Madrid, España: Sanz y Torres.
- COXETER, Harold S.M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. México D.F., México: Limusa.
- COXETER, Harold S.M. & GREITZER, Samuel L. (1967). *Geometry Revisited*. New York, USA: The Mathematical Association of America (Inc.).
- GARCÍA CAPITÁN, Francisco Javier (2006). «Inversión en Olimpiadas. Aplicación de la Inversión a la Resolución de Problemas». *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*, 27 (sep.-oct. 2006). ISSN: 1698-277X.
- HIDETOSHI, Fukagawa & ROTHMAN, Tony (2008). *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. New Jersey, USA: Princeton University Press.
- IVORRA, Carlos (2006). *Geometría*. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- JOHNSON, Roger A. (2007) [1929]. *Advanced Euclidean Geometry*, p. 186. New York: Dover Publ.
- LACHLAN, R. (1893). *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*. London: Macmillan and Co.
- M'CLELLAND, William J. (1891). *A Treatise on The Geometry of The Circle*. London: Macmillan and Co.
- MONTESDEOCA DELGADO, Ángel (2012). *Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*. Universidad de La Laguna. Santa Cruz de Tenerife.

⁴ Se representa la parte relevante con línea de trazos en la figura 9 (pág. 155).

- PEDOE, Daniel (1995). *Circles: A Mathematical View*. The Mathematical Association of America (Incorporated).
- PEDRET YEBRA, José María (2006). *Curso de Geometría Proyectiva para un amigo*. Esplugues de Llobregat, España.
- PUIG ADAM, Pedro (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. 16ª Ed. Madrid, España: Euler.
- PUIG ADAM, Pedro (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo II. Complementos*. 13ª Ed. Madrid, España: Euler.
- SAPIÑA BORJA, Juan (1955). *Problemas Gráficos de Geometría*. Madrid, España
- SCHWERDTFEGER, Hans (1979). *Geometry of Complex Numbers. Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry*. New York, USA: Dover Publications, Inc.
- USUNÁRIZ BALANZATEGUI, Ubaldo & USUNÁRIZ SALA, Ignacio (2012). *Problemas de geometría*. Madrid, España: E.T.S.I. Minas, Universidad Politécnica de Madrid.

Sobre los autores:

Nombre: Francisco Javier García Capitán
Correo electrónico: garciacapitan@gmail.com
Institución: I.E.S. "Álvarez Cubero", Priego de Córdoba (Córdoba).

Nombre: Miguel Ángel Pérez García-Ortega
Correo electrónico: mianpg@gmail.com
Institución: I.E.S. "Bartolomé-José Gallardo", Campanario (Badajoz).

Nombre: Antonio Roberto Martínez Fernández
Correo electrónico: antoniorobert.martinez@murciaeduca.es
Institución: C.E.A. "Mar Menor", Torre Pacheco (Murcia).

Nombre: Juan Luis Castaño Fernández
Correo electrónico: juanlcast@gmail.com
Institución: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).