Experiencias Docentes

La Derivada Discreta como concepto propedéutico a un curso de Cálculo Infinitesimal

The Discrete Derivative as a propaedeutic concept to a course of Infinitesimal Calculus

Duberly González Molinari

Revista de Investigación

Pensamiento Matemático MAIC

Volumen XIII, Número 1, pp. 39–56, ISSN 2174-0410
Recepción: 17 Dic'22; Aceptación: 11 Ene'23

1 de abril de 2023

Resumen

Los cursos y libros llamados de *Precálculo* no suelen incluir entre sus temas, aquellos relacionados directamente con los que se tratarán a posteriori en un curso de Cálculo propiamente dicho (límites, derivadas, integrales, series, entre otros). Este artículo pretende romper con dicha tradición, introduciendo un concepto que hemos dado en llamar *Derivada Discreta*, para pasar a estudiar luego sus propiedades y consecuencias más importantes, como el estudio de la monotonía de una sucesión real.

Palabras Clave: Derivada discreta, Sucesión real, Sucesiones monótonas, Cálculo infinitesimal.

Abstract

Precalculus courses and books do not usually deal with topics directly related to the ones that are to be dealt with later in a Calculus course (limits, derivatives, integrals, series, among others). This work aims at breaking such tradition by introducing a concept that has been called Discrete Derivative and by studying its most important properties and consequences, such as the monotonicity of a real sequence.

Keywords: Discrete derivative, Real sequence, Monotonic sequences, Infinitesimal calculus.

1. Introducción

Los libros (y cursos) llamados de *Precálculo* suelen incluir tópicos referentes a generalidades sobre funciones reales de variable real, estudio de las propiedades particulares de las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, etc., en el entendido de que dichos conceptos son prerrequisitos para poder abordar un curso tradicional de cálculo, donde los conceptos que en estos se suelen desarrollar incluyen límites de funciones reales de variable real, derivadas, integrales, series, entre otros. Sin embargo, los cursos de Precálculo no suelen introducir nociones referentes a los conceptos que más tarde se desarrollarán en un curso de Cálculo propiamente dicho.

En este sentido, el programa oficial de la asignatura Matemática II de 2do año de Bachillerato - Diversificación Científica de Educación Secundaria de Uruguay (donde los estudiantes rondan los 17 años de edad) ha sido un intento para que esto no suceda. Por ejemplo, en dicho programa se desarrollan conceptos tales como límites de sucesiones reales de variable natural, cálculo del área bajo la gráfica de una función polinómica no negativa en un intervalo $[a, b]$ a través del método de exhaución y límite de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica, intentando aproximar a los estudiantes a los conceptos de, respectivamente, límites, integrales y series que tratarán en el próximo curso de Cálculo.

Además, dicho programa nombra "tímidamente" el concepto de monotonía de una sucesión, donde los libros de texto suelen hacer referencia mediante pocas líneas, definiendo lo que se llamará sucesión monótona (creciente, decreciente, estrictamente creciente y estrictamente decreciente). Este concepto, que podría aproximar a los estudiantes al concepto de derivada de una función real de variable real y sus aplicaciones, no suele desarrollarse en profundidad por los profesores y, como ya se dijo, por los libros de texto relativos a dicho curso.

En muchos casos, el tratamiento que hacen muchos docentes se resume en realizar un trabajo como el siguiente: Supóngase que se desea probar que la sucesión real de variable natural $(a_n) : a_n = \frac{1}{n+1}$ es estrictamente decreciente. Esto es, como se definirá más adelante, probar que $a_{n+1} < a_n \; \forall n,\ n \in \mathbb{N}$ entonces se procede a plantear la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \Leftrightarrow \\ \frac{1}{(n+1)+1} &< \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{n+2} &< \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \\ n+1 &< n+2 \Leftrightarrow \\ 1 &< 2 \end{aligned}$$

Como la última desigualdad es cierta, la primera lo es, y, por tanto, la sucesión (a_n) efectivamente es decreciente en forma estricta.

Es claro que este procedimiento, por más válido que sea, limita las posibilidades de los tipos de sucesiones con las que se puede trabajar.

Es por todo lo expuesto antes que, en las próximas páginas, intentaremos, por un lado, definir conceptos básicos necesarios como el de sucesión real y operaciones con sucesiones reales (de las cuales hemos decidido excluir la composición debido a la necesaria exigencia de que una de las sucesiones tome únicamente valores naturales), para luego pasar a definir el concepto de sucesión monótona y un concepto central en la teoría a desarrollar que llamaremos *derivada discreta*.

Como el lector conocedor de un curso de Cálculo infinitesimal tradicional notará, las herramientas teóricas que aquí desarrollaremos son mínimas, pero no por ello muy potentes. Además, la ventaja que encontraremos, comparando con el desarrollo del concepto de derivada de una función real de variable real es que, en forma simultánea a que se desarrolla la definición y propiedades del concepto de derivada discreta, también podremos ir observando sus aplicaciones al estudio de la monotonía de una sucesión, algo que no sucede tradicionalmente en un curso de Cálculo diferencial típico.

Espero que las próximas páginas permitan introducir a sus estudiantes a través del fantástico mundo del cálculo con infinitesimales, pasando antes por el cálculo de las diferencias finitas.

2. La Derivada Discreta de una Sucesión Real

Definición 2.1 Llamaremos *sucesión real* a toda función de dominio $\mathbb{N}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

Observación 2.1

- Cuando sea necesario, denotaremos por $\mathbb{N}^*$ al conjunto $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.
- En general, llamaremos simplemente *sucesiones* a las *sucesiones reales*.
- A las sucesiones las representaremos por (a_n), (b_n), (c_n), etc.
- A la imagen de un número natural n, a través de una sucesión (a_n), la representaremos con a_n y le llamaremos término n-ésimo o término enésimo.
- Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones cualesquiera, definimos las sucesiones suma, diferencia, producto y cociente de aquellas dos, respectivamente como:
  1. $(s_n) : s_n = a_n + b_n$
  2. $(d_n) : d_n = a_n - b_n$
  3. $(p_n) : p_n = a_n \cdot b_n$
  4. $(c_n) : c_n = \frac{a_n}{b_n}$ con $b_n \neq 0\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$
- Llamaremos *representación gráfica* de la sucesión (a_n) al conjunto de puntos de coordenadas (n, a_n) con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.1 *Representar gráficamente la sucesión* (a_n) *siendo* $a_n = n^2 - 6n + 8$.

Comencemos realizando una *tabla de valores*:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	8	3	0	-1	0	3	8	15	24	35	48

Ahora representamos en un sistema cartesiano plano los puntos de coordenadas (n, a_n) que surgen de la tabla anterior, como se observa en la Figura 1.

Definición 2.2 Diremos que una sucesión (a_n) es $\left\{\begin{array}{c}\text{monótona creciente}\\ \text{monótona creciente en sentido estricto}\\ \text{monótona decreciente}\\ \text{monótona decreciente en sentido estricto}\end{array}\right\}$

si $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} > a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \\ a_{n+1} < a_n \end{array}\right\}\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}.$

Observación 2.2

- Cuando se cumpla una de las cuatro condiciones anteriores, diremos que la sucesión (a_n) es *monótona*. En caso contrario, diremos que la sucesión (a_n) no es monótona, como sucede con la sucesión del Ejemplo 2.1 ya que, por ejemplo, $a_3 = -1 < 0 = a_2$ pero $a_4 = 0 > -1 = a_3$.

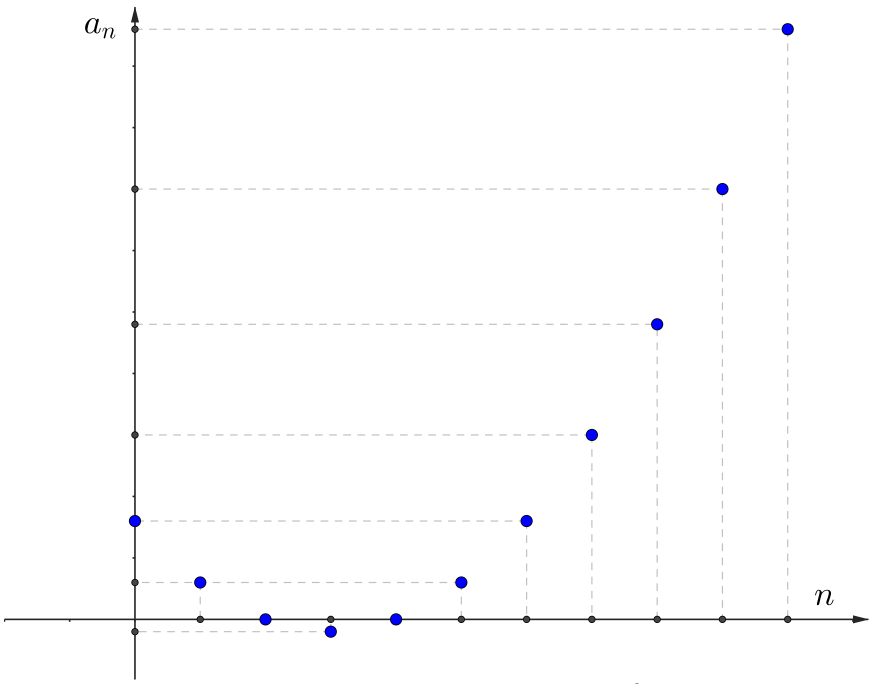


Figura 1. Representación gráfica de (a_n) siendo $a_n = n^2 - 6n + 8$

- Cuando una sucesión (a_n) sea monótona creciente y decreciente en forma simultánea, diremos que la misma es *constante*. Esto es, $a_{n+1} = a_n \ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$ o, su equivalente, existe $k \in \mathbb{R}$ de modo que $a_n = k \ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.2 *Representar gráficamente cada una de las sucesiones dadas a continuación por su término enésimo*:

1. $a_n = n^2 + 1$.
2. $b_n = 4 - n^2$.
3. $c_n = n^2 - n + 1$.
4. $d_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 5$.
5. $f_n = 3$.

Comenzamos realizando una tabla de valores para cada una de las sucesiones dadas:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	4	3	0	-5	-12	-21	-32	-45	-60	-77	-96

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	1	1	3	7	13	21	31	43	57	73	91

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	5	-1	-1	-1	-7	-25	-61	-121	-211	-337	-505

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Ahora representamos gráficamente las distintas sucesiones, como se observa en la Figura 2.

Notemos lo siguiente:

- $a_1 > a_0$, $a_2 > a_1$, $a_3 > a_2$, etc., lo que nos motiva a conjeturar que la sucesión (a_n) es **monótona creciente en sentido estricto**, lo cual podremos demostrar con las herramientas que desarrollaremos más adelante.
- $b_1 < b_0$, $b_2 < b_1$, $b_3 < b_2$, etc., lo que aparentemente muestra que la sucesión (b_n) es **monótona decreciente en sentido estricto**.
- $c_1 = c_0$, $c_2 > c_1$, $c_3 > c_2$, $c_4 > c_3$, etc., lo que motiva a pensar en que la sucesión (c_n) es **monótona creciente**, pero no en forma estricta.
- $d_1 < d_0$, $d_3 = d_2 = d_1$, $d_4 < d_3$, $d_5 < d_4$, $d_6 < d_5$, etc., por lo que pareciera ser que la sucesión (d_n) es **monótona decreciente**, como podremos demostrar más adelante.
- $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = \ldots$, por lo que (f_n) es **constante**. Esta sucesión es monótona creciente y también es monótona decreciente. Esto ocurre con cualquier sucesión constante.

Definición 2.3 Sea (a_n) una sucesión cualquiera, llamaremos *sucesión derivada discreta* (o simplemente *derivada discreta*) de la sucesión (a_n) a la sucesión que anotaremos (Δa_n) y que viene dada por

$$\Delta a_n \overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n$$

Observación 2.3

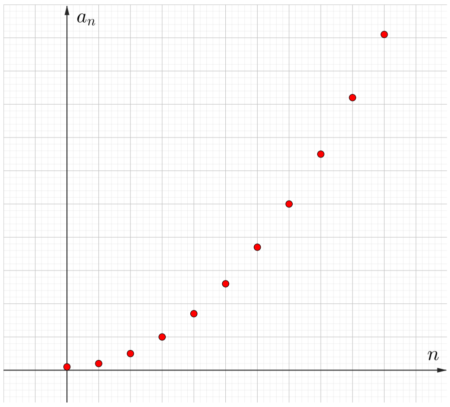
- Este concepto coincide con el de diferencia de una sucesión. Hemos optado por la expresión "derivada discreta" pues su signo nos permitirá decidir si una sucesión es monótona o no lo es (ver el Teorema 2.1).
- Es importante remarcar que la derivada discreta de una sucesión (a_n) es otra sucesión (Δa_n) cuyos términos Δa_n representan la diferencia entre el término $(n+1)-$ésimo y el término $n-$ésimo de la sucesión (a_n).

Ejemplo 2.3 *Sea la sucesión (a_n) dada por $a_n = n^2$, calcular el décimo término de la derivada discreta (Δa_n) e interpretar gráficamente el resultado obtenido.*

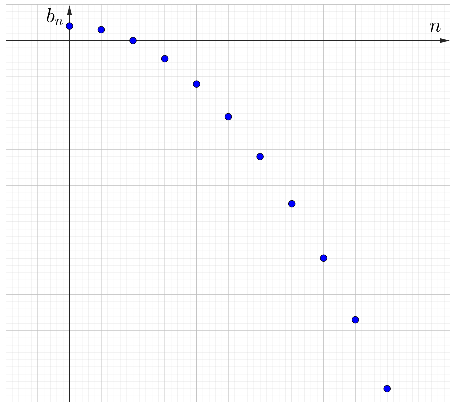
Por definición, el décimo término de la derivada discreta (Δa_n) es la diferencia entre a_{10+1} y a_{10}, o sea,

$$a_{11} - a_{10} = 11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$$

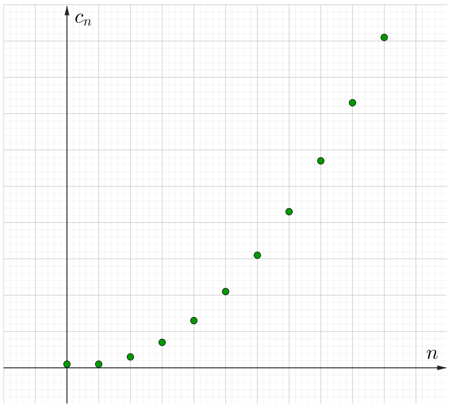
El resultado que acabamos de obtener lo podemos interpretar en la Figura 3, donde los puntos en color rojo pertenecen al gráfico de (a_n) y el punto azul, de abscisa 10, pertenece al gráfico



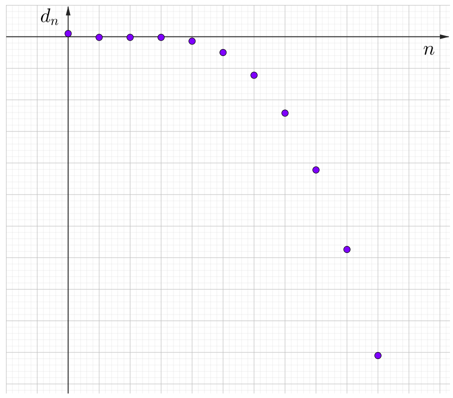
(a) $(a_n) : a_n = n^2 + 1$



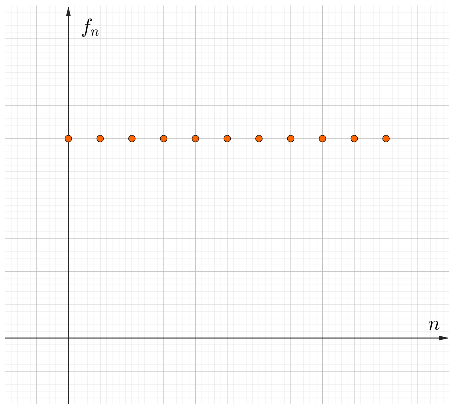
(b) $(b_n) : b_n = 4 - n^2$



(c) $(c_n) : c_n = n^2 - n + 1$



(d) $(d_n) : d_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 5$



(e) $(f_n) : f_n = 3$

Figura 2. Representación gráfica de cada sucesión del Ejemplo 2.2

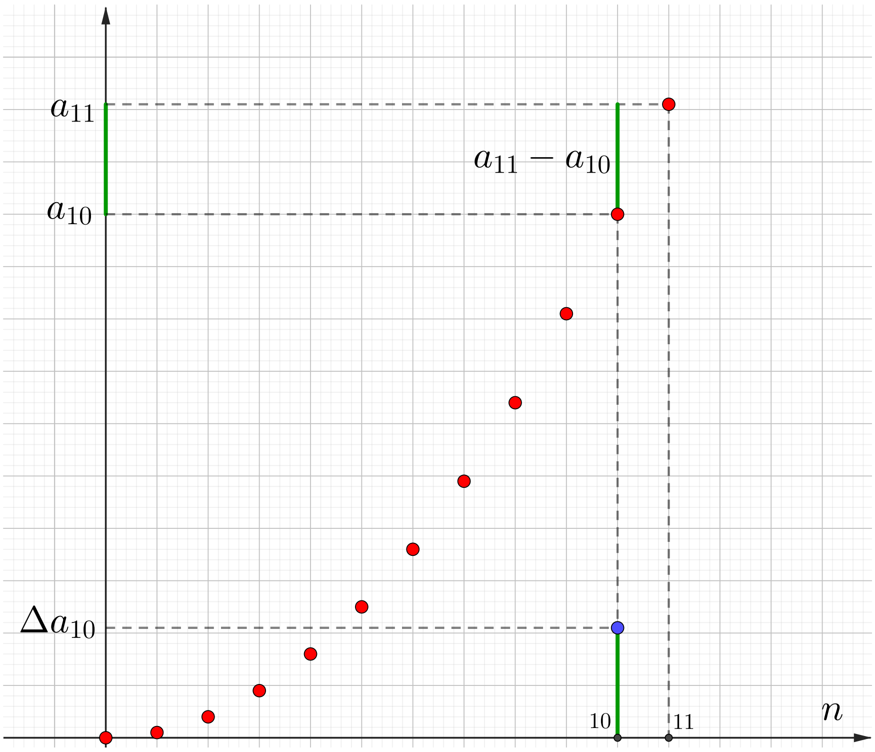


Figura 3. Interpretación gráfica del resultado obtenido en el Ejemplo 2.3

de (Δa_n). Nótese los tres segmentos en color verde, todos de longitud 21 unidades.

Teorema 2.1 Una sucesión real (a_n) es $\left\{\begin{array}{c}\text{monótona creciente}\\ \text{monótona creciente en sentido estricto}\\ \text{monótona decreciente}\\ \text{monótona decreciente en sentido estricto}\end{array}\right\}$ si y sólo si $\left\{\begin{array}{l}\Delta a_n \geq 0\\ \Delta a_n > 0\\ \Delta a_n \leq 0\\ \Delta a_n < 0\end{array}\right\}$ $\forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Demostraremos el primer caso. Los restantes se prueban de forma análoga.

(a_n) es monótona creciente $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n\ \forall n,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0\ \forall n,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Delta a_n \geq 0\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.4 El teorema anterior nos indica que, para estudiar la monotonía de una sucesión, basta con analizar el signo de su derivada discreta. Es por ello que, a continuación, determinaremos la derivada discreta de algunas sucesiones particulares, estudiaremos el signo de algunas de ellas e interpretaremos gráficamente algunos de dichos resultados.

Teorema 2.2 La derivada discreta de cada una de las sucesiones de la primera columna de la Tabla 1, son las que lucen en la segunda columna, respectivamente.

Tabla 1. Derivada discreta de algunas sucesiones particulares

Sucesión (a_n) dada por	Derivada discreta (Δa_n) dada por
$a_n = k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\Delta a_n = 0$
$a_n = n$	$\Delta a_n = 1$
$a_n = n^2$	$\Delta a_n = 2n + 1$
$a_n = n^3$	$\Delta a_n = 3n^2 + 3n + 1$
$a_n = \frac{1}{n+1}$	$\Delta a_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$
$a_n = \mathrm{e}^n$	$\Delta a_n = \mathrm{e}^n \cdot (e - 1)$
$a_n = \ln(n+1)$	$\Delta a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
$a_n = (-1)^n$	$\Delta a_n = -2 \cdot (-1)^n$
$a_n = \sqrt{n}$	$\Delta a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
$a_n = An + B \quad (A \neq 0)$	$\Delta a_n = A$
$a_n = An^2 + Bn + C \quad (A \neq 0)$	$\Delta a_n = 2An + (A + B)$
$a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D \quad (A \neq 0)$	$\Delta a_n = 3An^2 + (3A + 2B)n + (A + B + C)$
$a_n = \mathrm{sgn.}(n)$, es decir, signo de n	$\Delta a_n = 1 - \mathrm{sgn.}(n)$

Demostración:

1.
$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= k - k \\ &= 0\end{aligned}$$

Este resultado nos indica que si una sucesión es constante, no existe incremento en el valor de sus términos.

2.
$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= (n+1) - n \\ &= 1\end{aligned}$$

Como $1 > 0$, la sucesión $(a_n) : a_n = n$ es monótona creciente en sentido estricto y términos consecutivos de la misma difieren siempre en 1 unidad.

3.
$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

Como $n \geq 0$, entonces $2n \geq 0$ por lo que $2n + 1 > 0 \, \forall n$, $n \in \mathbb{N}$. Luego, $(a_n) : a_n = n^2$ es monótona creciente en sentido estricto.

4.
$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= (n+1)^3 - n^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 \\ &= 3n^2 + 3n + 1\end{aligned}$$

Un análisis similar al anterior nos permite concluir que $(a_n) : a_n = n^3$ es monótona creciente en sentido estricto.

5.
$$\begin{aligned}\Delta a_n &\overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= \frac{1}{(n+1)+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Aquí es fácil ver que $\Delta a_n < 0\,\forall n,\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $(a_n) : a_n = \frac{1}{n+1}$ es monótona decreciente en sentido estricto.

Interpretemos gráficamente el resultado anterior, como se puede apreciar en la Figura 4. Nótese que $\Delta a_n < 0\,\forall n,\, n \in \mathbb{N}$ pues la sucesión (a_n) es estrictamente decreciente. Los puntos en color rojo pueden obtenerse a partir de los de color azul, como ya se indicó en la Figura 3.

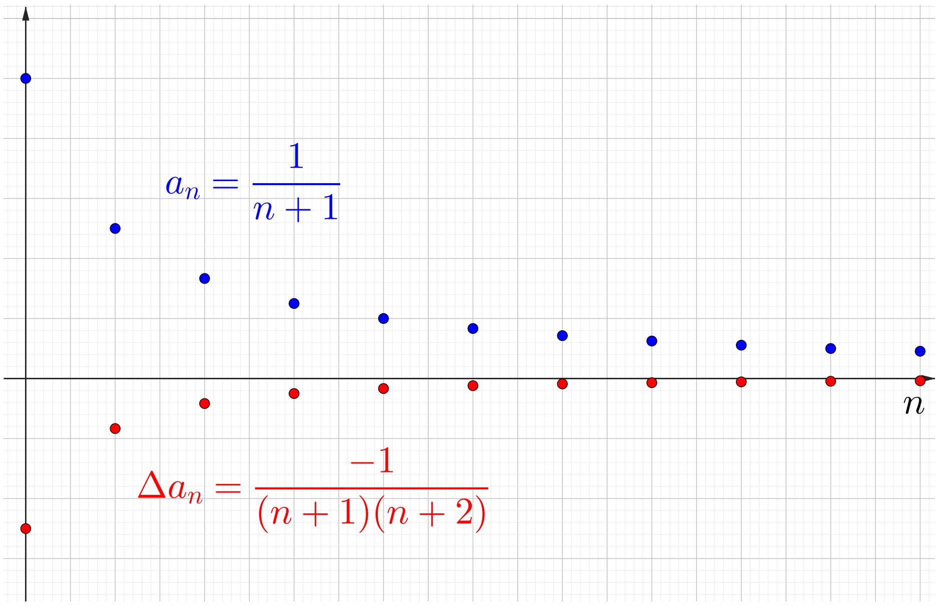


Figura 4. Representación gráfica de $(a_n) : a_n = \frac{1}{n+1}$ y su derivada discreta (Δa_n)

6.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= \mathrm{e}^{n+1} - \mathrm{e}^{n} \\ &= \mathrm{e}^{n} \cdot (e-1)\end{aligned}$$

Como $e > 1$, entonces es $e - 1 > 0$. Luego, por ser $\mathrm{e}^n > 0\,\forall n,\, n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(a_n) : a_n = \mathrm{e}^n$ es monótona creciente en sentido estricto.

7.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= \ln((n+1)+1) - \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Como $n \geq 0$, entonces es $n+1 > 0$ y también es $\frac{1}{n+1} > 0$. Luego, por ser $1 + \frac{1}{n+1} > 1$, es $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$. En conclusión, la sucesión $(a_n) : a_n = \ln(n+1)$ es monótona creciente en sentido estricto.

8.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= (-1)^{n+1} - (-1)^n \\
&= (-1)^n \cdot (-1-1) \\
&= -2 \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

Nótese que $\Delta a_n = -2$ si $n \in \mathbb{N}$, con n par, y $\Delta a_n = 2$ si $n \in \mathbb{N}$, con n impar. Esto nos indica no sólo que (a_n) no es monótona, sino que a_n y a_{n+1} difieren en 2 unidades $\forall n,\ n \in \mathbb{N}$.

9.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Es claro que $\Delta a_n > 0\, \forall n,\ n \in \mathbb{N}$. Luego, $(a_n) : a_n = \sqrt{n}$ es monótona creciente en sentido estricto.

10.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= A(n+1) + B - (An + B) \\
&= An + A + B - An - B \\
&= A
\end{aligned}$$

Este resultado nos indica que el signo de A informará si $(a_n) : a_n = An + B$ es monótona creciente en sentido estricto (cuando $A > 0$) o si la misma es monótona decreciente en sentido estricto (en caso que $A < 0$).

11.

$$\begin{aligned}
\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\
&= A(n+1)^2 + B(n+1) + C - (An^2 + Bn + C) \\
&= A(n^2 + 2n + 1) + Bn + B + C - An^2 - Bn - C \\
&= An^2 + 2An + A + Bn + B + C - An^2 - Bn - C \\
&= 2An + (A + B)
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D - (An^3 + Bn^2 + Cn + D) \\ &= A(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + B(n^2 + 2n + 1) + Cn + C + D - An^3 - Bn^2 - Cn - D \\ &= An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B + Cn + C + D - An^3 - Bn^2 - Cn - D \\ &= 3An^2 + (3A + 2B)n + (A + B + C)\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n \\ &= \text{sgn.}(n+1) - \text{sgn.}(n) \\ &= 1 - \text{sgn.}(n)\end{aligned}$$

Notemos aquí que $\Delta a_n \geq 0 \, \forall n, \, n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión $(a_n) : a_n = \text{sgn.}(n)$ es monótona creciente, aunque no lo sea en forma estricta.

Teorema 2.3 La derivada discreta de una suma, diferencia, producto o cociente de sucesiones viene dada respectivamente por:

A) $\Delta (a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$.

B) $\Delta (a_n - b_n) = \Delta a_n - \Delta b_n$.

C) $\Delta (a_n \cdot b_n) = (\Delta a_n) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot (\Delta b_n)$.

D) $\Delta \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{(\Delta a_n) \cdot b_n - a_n \cdot (\Delta b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}}$ con $b_n \neq 0 \, \forall n, \, n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

A)

$$\begin{aligned}\Delta (a_n + b_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) \\ &= (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) \\ &= \Delta a_n + \Delta b_n\end{aligned}$$

Una consecuencia de esta propiedad, por ejemplo, es que si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones monótonas crecientes, también lo será la sucesión suma de aquellas dos.

B)

$$\begin{aligned}\Delta (a_n - b_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) \\ &= (a_{n+1} - a_n) - (b_{n+1} - b_n) \\ &= \Delta a_n - \Delta b_n\end{aligned}$$

C)

$$\begin{aligned}
\Delta\left(a_n \cdot b_n\right) &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n \\
&= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1} + a_n \cdot b_{n+1} \\
&= \left(a_{n+1} - a_n\right) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right) \\
&= \left(\Delta a_n\right) \cdot b_{n+1} + a_n \cdot \left(\Delta b_n\right)
\end{aligned}$$

Una forma equivalente:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(a_n \cdot b_n\right) &\stackrel{\text{def}}{=} a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n \\
&= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_n + a_{n+1} \cdot b_n \\
&= \left(a_{n+1} - a_n\right) \cdot b_n + a_{n+1} \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right) \\
&= \left(\Delta a_n\right) \cdot b_n + a_{n+1} \cdot \left(\Delta b_n\right)
\end{aligned}$$

Caso particular donde uno de los factores es una sucesión constante ($a_n = k\,\forall n,\ n \in \mathbb{N}$ con $k \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\Delta\left(k \cdot b_n\right) &\stackrel{\text{def}}{=} k \cdot b_{n+1} - k \cdot b_n \\
&= k \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right) \\
&= k \cdot \Delta b_n
\end{aligned}$$

D)

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \\
&= \frac{a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1}}{b_n \cdot b_{n+1}} \\
&= \frac{a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n + a_n \cdot b_n}{b_n \cdot b_{n+1}} \\
&= \frac{\left(a_{n+1} - a_n\right) \cdot b_n - a_n \cdot \left(b_{n+1} - b_n\right)}{b_n \cdot b_{n+1}} \\
&= \frac{\left(\Delta a_n\right) \cdot b_n - a_n \cdot \left(\Delta b_n\right)}{b_n \cdot b_{n+1}}
\end{aligned}$$

Una forma equivalente:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \\
&= \frac{a_{n+1}\cdot b_n - a_n\cdot b_{n+1}}{b_n\cdot b_{n+1}} \\
&= \frac{a_{n+1}\cdot b_n - a_n\cdot b_{n+1} - a_{n+1}\cdot b_{n+1} + a_{n+1}\cdot b_{n+1}}{b_n\cdot b_{n+1}} \\
&= \frac{(a_{n+1}-a_n)\cdot b_{n+1} - a_{n+1}\cdot (b_{n+1}-b_n)}{b_n\cdot b_{n+1}} \\
&= \frac{(\Delta a_n)\cdot b_{n+1} - a_{n+1}\cdot (\Delta b_n)}{b_n\cdot b_{n+1}}
\end{aligned}$$

Observación 2.5 Nótese que, para los casos del producto y el cociente de sucesiones, hemos encontrado dos expresiones para las respectivas derivadas discretas. A priori se podría pensar que las mismas no son equivalentes, sin embargo lo son.

Ejemplo 2.4 *Estudiar la monotonía de la sucesión (d_n) tal que $d_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 5$. En caso de existencia, se deben indicar los términos de la sucesión que son iguales para valores de n consecutivos, y su valor.*

Utilizando los Teoremas 2.2 y 2.3 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta d_n &= \Delta\left(-n^3 + 6n^2 - 11n + 5\right) \\
&= \Delta\left(-n^3\right) + \Delta\left(6n^2\right) - \Delta(11n) + \Delta(5) \\
&= -\Delta\left(n^3\right) + 6\Delta\left(n^2\right) - 11\Delta(n) + \Delta(5) \\
&= -\left(3n^2 + 3n + 1\right) + 6(2n+1) - 11\cdot 1 + 0 \\
&= -3n^2 - 3n - 1 + 12n + 6 - 11 \\
&= -3n^2 + 9n - 6
\end{aligned}$$

No es difícil encontrar que la expresión hallada para Δd_n se anula cuando $n = 1$ o $n = 2$, por lo que

$$\Delta d_n = -3(n-1)(n-2)$$

Ahora notemos que:

- Si $n = 0$, entonces $\Delta d_n = -6 < 0$.
- Si $n = 1$ o $n = 2$, entonces $\Delta d_n = 0$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, entonces $\Delta d_n = \underbrace{-3}_{<0}\underbrace{(n-1)}_{>0}\underbrace{(n-2)}_{>0} < 0$

Luego, $\Delta d_n \leq 0\,\forall n,\ n \in \mathbb{N}$. Esto es, (d_n) es monótona decreciente (**no** en forma estricta).

De que $\Delta d_n = 0$ cuando $n = 1$ se deduce que $d_{1+1} - d_1 = 0$, o sea, $d_1 = d_2$.

De que $\Delta d_n = 0$ cuando $n = 2$ se tiene que $d_{2+1} - d_2 = 0$, es decir, $d_2 = d_3$.

En resumen, $d_1 = d_2 = d_3 = -1$ (este último valor puede obtenerse calculando d_1).

3. Ejercicios

1. Estudiar la monotonía de cada una de las sucesiones reales de variable natural (a_n) dadas a continuación por su término $n-$ésimo. En caso de existencia, se deben indicar los términos de (a_n) que son iguales para valores de n consecutivos, y su valor.

   a) $a_n = 2n - 6$.
   b) $a_n = 5 - n$.
   c) $a_n = 9 - n^2$.
   d) $a_n = 3n^2 - 3n + 3$.
   e) $a_n = 192 - 107n + 18n^2 - n^3$.
   f) $a_n = 506n - 39n^2 + n^3$.
   g) $a_n = \frac{1-n}{n+2}$.
   h) $a_n = \frac{4n-8}{n+4}$.

2. *a*) Considera la siguiente tabla:

Tabla 2. Resultados para resolver la parte a) del ejercicio 2.

$a_n = n^{(2)} = n(n-1)$	$\Delta a_n = 2n$
$a_n = n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$	$\Delta a_n = 3n^{(2)}$
$a_n = n^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)$	$\Delta a_n = 4n^{(3)}$
	$n^2 = n^{(2)} + n$
	$n^3 = n^{(3)} + 3n^{(2)} + n$
	$n^4 = n^{(4)} + 6n^{(3)} + 7n^{(2)} + n$

Los tres primeros resultados son similares a los que verán en derivadas de funciones reales de variable real; los dos que le siguen sirven para verificar los resultados de los casos 3 y 4 de la Tabla 1 y el último es útil para calcular Δn^4.

Justifica la segunda columna y generaliza los tres primeros resultados.

b) Estudiar la monotonía de cada una de las sucesiones reales de variable natural (a_n) dadas a continuación por su término enésimo. En caso de existencia, se deben indicar los términos de (a_n) que son iguales para valores de n consecutivos, y su valor.

1) $a_n = n^4 - 30n^3 + 263n^2 - 234n$.
2) $a_n = 578n - 657n^2 + 82n^3 - 3n^4$.

3. En la Figura 5 se da la representación gráfica de una sucesión (a_n). Representa gráficamente en el mismo sistema cartesiano la derivada discreta de dicha sucesión. ¿Es (a_n) monótona? Justifica tu respuesta.

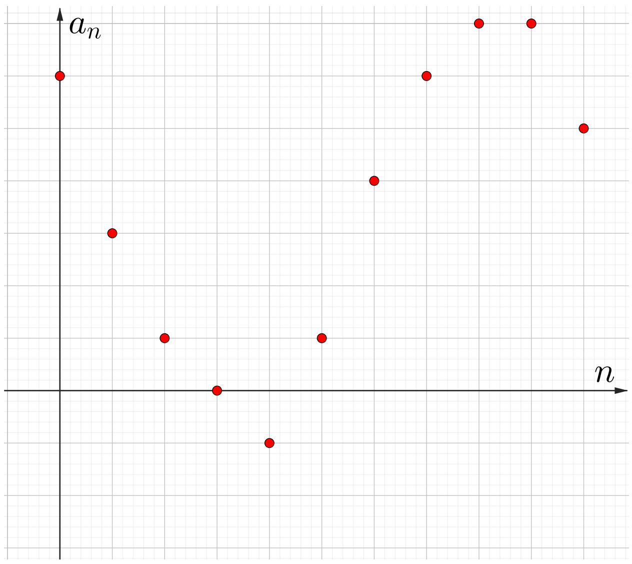


Figura 5. Representación gráfica de (a_n)

4. En la Figura 6 se da la representación gráfica de la derivada discreta de una sucesión (a_n). Representa gráficamente en el mismo sistema cartesiano a dicha sucesión. ¿Es (a_n) monótona? Justifica tu respuesta. Nótese que el punto en color rojo pertenece a la representación gráfica de (a_n).

5. Informar el término enésimo de una sucesión polinómica de grado 3 que sea monótona decreciente y tal que $a_7 = a_8 = a_9 = 10$.

6. Estudiar la monotonía de la sucesión (a_n) siendo:

a) $a_n = n \cdot e^n$.

b) $a_n = \frac{1}{e^n}$.

c) $a_n = \frac{e^n}{1+e^n}$.

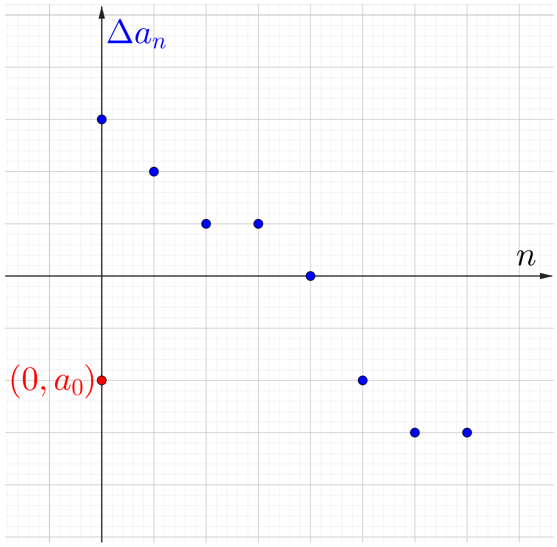


Figura 6. Representación gráfica de (Δa_n)

4. Conclusiones

En Uruguay, no existe evidencia de alguna experiencia docente de implementación del concepto de derivada discreta que se abordó a lo largo del presente artículo, a nivel de Bachillerato. Es por ello que el presente trabajo es una invitación a los docentes para que trabajen dicho concepto con la intención de evaluar si dicha experiencia previa al abordaje de un curso de cálculo diferencial tradicional, redunda en una mejora de los aprendizajes en matemática de sus estudiantes.

Si bien existen muy pocos intentos a nivel internacional para el tratamiento del concepto de derivada discreta, los mismos se centran en aspectos más técnicos que didácticos, y no hay tampoco indicadores de los logros que los estudiantes de un curso de cálculo infinitesimal clásico puedan haber adquirido a través de la introducción del concepto de derivada discreta que nos ha convocado en el presente material.

Referencias

[1] CATONE, C., *Bringing Calculus into Discrete Math via the Discrete Derivative*, 2019, `https://doi.org/10.1080/07468342.2019.1530553`

[2] FERNÁNDEZ, J., *Matemática 2 - 2º bachillerato diversificado - Diversificación científica*, 1ª Edición. Editorial Contexto, Montevideo, Uruguay, 2019.

[3] FERNÁNDEZ, W., *Matemática II de Bachillerato 2º Año Diversificación Científica*, 3ª Edición. Ediciones del Palacio, Montevideo, Uruguay, 2015.

[4] GLEICH, D., *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums*, 2005, `https://www.cs.purdue.edu/homes/dgleich/publications/Gleich%202005%20-%20finite%20calculus.pdf`

[5] HERRERA, D., *Discrete Calculus and Finite Sums*, 2016, https://princeton.learningu.org/download/bc7e982a-7974-459c-8286-c201d2236718/M352_Discrete%20Calculus%20and%20Finite%20Sums.pdf

[6] LARSON, R., *Cálculo 1 De una variable*, 9ª Edición. McGrawHill, México, 2010.

[7] LARSON, R., *Precálculo*, 8ª Edición. Cengage Learning, México, 2012.

[8] STEWART, J., *Cálculo Trascendentes tempranas*, 8ª Edición. Cengage Learning, México, 2018.

[9] STEWART, J., *Precálculo*, 5ª Edición. Cengage Learning, México, 2007.

[10] THOMAS, G., *Cálculo Una variable*, 12ª Edición. Pearson, México, 2010.

Agradecimientos

A Julia y Emilia: mis hijas, los dos motores que hacen que mi vida tome vuelo día a día.

Al excelentísimo profesor Jorge Moretti por sus invalorables apreciaciones y sugerencias tanto en aspectos técnicos como didácticos.

Sobre el autor:
Nombre: Duberly González Molinari
Correo electrónico: dugonzalez@ces.edu.uy
Institución: Inspección en Matemática de la Dirección General de Educación Secundaria de la República Oriental del Uruguay.