Historias de Matemáticas

La demostración matemática a través de la historia

Mathematical proof through history

Antonio Rosales Góngora

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XIV, Número 1, pp. 43−60, ISSN 2174-0410
Recepción: 3 Ene'23; Aceptación: 28 Feb'23

1 de abril de 2024

Resumen

La matemática se distingue de la filosofía y de las demás ciencias fundamentalmente por el uso de demostraciones rigurosas. El concepto de demostración marca la diferencia y da cohesión a la vez que atemporalidad. Nuestro objetivo es contar su historia y explicar su importancia.

Lo que distingue a las matemáticas teóricas de las demás disciplinas es la cadena de razonamientos que, siguiendo reglas lógicas, nos llevan a determinadas conclusiones. Esta es la razón por la que podemos confiar en las matemáticas que hizo Euclides hace 2300 años lo mismo que creemos en las matemáticas actuales

Palabras Clave: Demostración, Historia de las Matemáticas,

Abstract

Mathematics is distinguished from philosophy and the other sciences fundamentally by the use of rigorous proofs. The demonstration concept makes the difference and gives cohesion as well as timelessness. Our goal is to tell its story and explain its importance.

What distinguishes theoretical mathematics from other disciplines is the chain of reasoning that, following logical rules, leads to certain conclusions. That is why we can trust Euclid's mathematics of 2300 years ago as much as we believe in today's mathematics.

Keywords: Demonstration, History of Mathematics

1. Introducción

¿Por qué demostrar?, ¿qué es demostrar?, ¿qué sentido tiene demostrar? Los conceptos y teorías matemáticas tienen una historia, al igual que la noción de rigor o la idea de demostración. La historia de las matemáticas arroja luz sobre estas cuestiones, por tanto, examinándolas podremos investigar cuáles fueron los significados de la demostración fijándonos en lo esencial: el nacimiento de la idea de demostración y las dos grandes rupturas de los siglos XVII y XIX.

"Verdad como que dos y dos son cuatro" es una expresión popular de confianza en las evidencias numéricas y, por tanto, en las matemáticas. Los matemáticos añaden nuevos resultados a los ya conocidos y tratan de presentarlos en un conjunto bien organizado de definiciones y de teoremas por medio de deducciones lógicas o de otros argumentos en lo que se llaman demostraciones.

Consideramos que hay demostración cuando un resultado de una cierta generalidad se establece basándose en resultados anteriores ya admitidos como verdaderos o correctos, bien como evidentes o como demostrados. Por ejemplo, verificar que 5 es solución de la ecuación $3x+4=19$ no constituye una demostración aunque sí se establezca como tal en algunos escritos antiguos. Pero establecer con ayuda de propiedades que la solución de $ax+b=c$ es $x=(c-b)/a$ (si $a\neq0$) si será una demostración.

En la historia de la demostración en occidente podemos distinguir grandes etapas que pasamos a desarrollar

2. Antes de los griegos o las matemáticas sin demostración

Dejando a un lado las matemáticas de los pueblos llamados primitivos, no queda mucho más que las matemáticas mesopotámicas y egipcias. Remontándonos al primer tercio del segundo milenio a.c., las informaciones son fragmentarias, las tablas de arcilla cocidas mesopotámicas y los papiros egipcios dan testimonio de una actividad que solo los muy escrupulosos y puristas se negarían a calificar de matemáticas. Se encuentran medidas de áreas o volúmenes, soluciones de ecuaciones lineales o cuadráticas etc. en un lenguaje muy diferente al nuestro.

Quizás la primera "prueba" matemática en la historia registrada se deba a los babilonios. Parece que (junto con los chinos) conocían el teorema de Pitágoras mucho antes que Pitágoras. Los babilonios tenían ciertos diagramas que indican por qué el teorema de Pitágoras es cierto, y se han encontrado tablillas para validar este hecho.

Hay que hacer notar la ausencia de generalidad en los enunciados y la inexistencia de demostraciones. Así en las tablillas babilónicas, en lo referente a nuestras ecuaciones, se trata de problemas numéricos expresados de manera retórica, sin ninguna notación simbólica y cuya solución se presenta como una sucesión de reglas a efectuar con ausencia de toda justificación. Algunos historiadores consideran que el autor del papiro de Rhind (aprox 1650 a.c.) tiene una idea de métodos generales aplicables a grupos de problemas y que muchos de los problemas son problemas teóricos enunciados bajo una forma concreta para garantizar su utilidad.

A lo largo de la historia, incluso hoy día, la matemática ha sido mucho más una práctica que un sistema bien estructurado de enunciados generales lógicamente conectados entre ellos de manera ajustada

3. El periodo griego

Pitágoras (569–500 a. C.) fue tanto una persona como una sociedad (los pitagóricos). Además fue una figura política y un místico. Fue especial en su época, entre otras razones, porque involucró a las mujeres como iguales en sus actividades. Un crítico caracterizó al hombre como "*una décima parte de él genio, nueve décimas pura tontería*". Pitágoras murió, según la leyenda, en las llamas de su propia escuela incendiada por fanáticos políticos y religiosos que incitaron a las masas a protestar contra la ilustración que Pitágoras buscaba traerles.

Los pitagóricos son recordados por dos contribuciones monumentales a las matemáticas. La primera de ellas fue establecer la importancia y la necesidad de las demostraciones en matemáticas: que los enunciados matemáticos, especialmente los enunciados geométricos, deben verificarse mediante prueba rigurosa. Antes de Pitágoras, las ideas de la geometría eran generalmente reglas empíricas que se derivaban empíricamente, simplemente de la observación y (ocasionalmente) de la medición. La segunda gran contribución fue el descubrimiento y la prueba del hecho de que no todos los números son racionales.

Fue Eudoxo (408 a. C. –355 a. C.) quien inició la gran tradición de organizar las matemáticas en teoremas. Eudoxo fue uno de los primeros en utilizar la palabra "teorema" en el contexto de las matemáticas. Eudoxo era un hombre de muchos intereses y muchos talentos. Sabía mucho sobre astronomía y teoría de números. Desarrolló la teoría de las proporciones y se basó en las ideas de Pitágoras para idear métodos para comparar números irracionales. Esto, a su vez, le permitió desarrollar su método de exhaución, que es un precursor de la moderna teoría de la integración.

Lo que Eudoxo ganó en el rigor y la precisión de sus formulaciones matemáticas, lo perdió porque no probó nada. La demostración formal aún no era la tradición en matemáticas. Como hemos señalado anteriormente, las matemáticas en sus inicios eran un tema en gran parte heurístico y empírico. Nunca se le había ocurrido a nadie que había alguna necesidad de probar algo.

Aunque Euclides no es tan conocido (como Arquímedes y Pitágoras) por sus ideas matemáticas originales y profundas, y aunque no hay muchos teoremas que lleven el nombre de Euclides, ha tenido un efecto incisivo en el pensamiento humano. Después de todo, Euclides escribió un tratado (que consta de trece libros), ahora conocido como los Elementos de Euclides, que ha estado continuamente disponible durante más de 2000 años y ha sido editado una gran cantidad de veces.

Como sucede a menudo con los científicos, los artistas y los eruditos de inmensos logros, hay desacuerdo y cierto debate sobre quién o qué era realmente Euclides. Las tres escuelas de pensamiento son estas:

• Euclides fue un personaje histórico, un solo individuo, que de hecho escribió los Elementos y las demás obras académicas que comúnmente se le atribuyen.

• Euclides era el líder de un equipo de matemáticos que trabajaban en Alejandría. Todos ellos contribuyeron a la creación de las obras completas que ahora se atribuyen a Euclides. Incluso continuaron escribiendo y difundiendo libros bajo el nombre de Euclides después de su muerte.

• Euclides no fue un personaje histórico en absoluto. De hecho, "Euclides" fue un seudónimo adoptado por un grupo de matemáticos que trabajaban en Alejandría. Se inspiraron en Euclides de Megara (que de hecho fue una figura histórica), un destacado filósofo que vivió unos 100 años antes de cuando se cree que vivió Euclides el matemático.

La mayoría de los eruditos de hoy suscriben la primera teoría: que Euclides fue ciertamente una persona única que creó los Elementos. Pero reconocemos que hay evidencia para los otros dos escenarios. Ciertamente, Euclides tuvo una vigorosa escuela de matemáticas en Alejandría, y no hay duda de que sus alumnos participaron en sus proyectos.

Se cree que Euclides debe haber estudiado en la Academia de Platón (430 a. C.-349 a. C.) en Atenas, ya que es poco probable que hubiera habido otro lugar donde pudiera haber aprendido la geometría de Eudoxo y Teeteto en la que se basan los Elementos.

Justamente una presentación sistemática es lo que ofrece al lector Los Elementos de Euclides (300 a.c.). Definiciones, axiomas y postulados donde los enunciados generales son demostrados con ayuda de proposiciones precedentes, de axiomas y de postulados. Los Elementos ofrecen una síntesis extensa, una construcción sólida, un modelo sin igual que durante veinte siglos suscitó la admiración y el asombro. Los Elementos son una culminación y no una creación a partir de cero. Las tendencias a la generalización y a la demostración se remontan, al menos, a Thales (640 a.c.-546 a.c) y a Pitágoras y su escuela (siglos VI y V a.c.). Una buena parte de los libros de contenido aritmético en Los Elementos expresan resultados pitagóricos. Además, según Proclo (siglo V a.c.), Euclides ha plasmado en demostraciones irrefutables lo que sus predecesores (Eudoxo, Teeteo,…) habían mostrado de una manera relajada.

Euclides, del que no conocemos casi ningún detalle biográfico, incluso la fecha de nacimiento o muerte, habría sido sobre todo un excepcional redactor más que un creador o descubridor de todos los resultados que expone. En su género, Los Elementos no han tenido igual durante 2000 años y sus lagunas lógicas no han sido descubiertas, identificadas y corregidas más que al final de este largo intervalo de tiempo.

Página tras página a propósito de números, triángulos o cualquier objeto matemático se encuentra el esquema correspondiente al célebre "*Todo hombre es mortal, Sócrates es un hombre, luego Sócrates es mortal*". Más generalmente "*Si todo ser del tipo T tiene la propiedad P*" es suficiente demostrar que lo que se estudia es de tipo T para deducir que tiene la propiedad P.

El silogismo ((P➔Q) y (Q➔R))➔(P➔R) es la segunda regla presente en Los Elementos completamente integrada en la argumentación euclídea.

Una tercera regla es la del razonamiento por reducción al absurdo o por contradicción, particularmente útil para evitar recurrir al infinito. Podemos encontrar ejemplos en el método de exhaución; se prueba que "*las áreas de los círculos son entre ellas como el cuadrado de sus diámetros*" (proposición 2 del libro XII) probando que la razón de las áreas de los dos círculos no puede ser ni inferior ni superior a la razón de los cuadrados porque resultaría una contradicción. Una aplicación más simple de este razonamiento establece la existencia de un número infinito de números primos (proposición 30 del libro IX). Euclides razona suponiendo que A, B y C son los únicos números primos (el argumento es aplicable para un número finito) , entonces ABC+1 es un número primo (distinto de A, B, C) o divisible por un número primo que no puede ser ni A ni B ni C porque dividiría entonces a (A.B.C+1)-A.B.C, es decir dividiría a la unidad, lo cual es imposible en virtud de la definición de número en la definición 2ª del libro VII: pluralidad compuesta de unidades.

Los razonamientos de Euclides fueron, para muchos matemáticos griegos y sus sucesores, el modelo por excelencia para demostrar la verdad de resultados matemáticos. Incluso el mismo Arquímedes siente la necesidad de demostrar según estos cánones los resultados que había obtenido por consideraciones de tipo mecánico o heurístico, tal y como expone en una carta a Eratóstenes conocida hoy como "El método".

4. La edad Media Occidental

La Edad Media también fue llamada Edad Oscura, y no sin razón. Este fue un largo período (más de 1000 años según algunas medidas) de estancamiento intelectual. Es cierto que los árabes desarrollaron algunas de sus ideas seminales en álgebra durante este tiempo. Algunas otras culturas, incluidos los africanos, los incas y los chinos, lograron algunos avances matemáticos durante este período (desde aproximadamente 500 d.C. hasta 1500 d.C.). Pero se hizo muy poco para desarrollar la idea de la demostración matemática. Este es un concepto muy sofisticado, uno de los pináculos del pensamiento humano. Y esperaba un momento fértil en Europa para ver los próximos pasos importantes en el desarrollo.

Los matemáticos romanos del final del imperio habían sido más rudimentarios, no había tradición ni interés para comprender y apreciar una estructuración del conocimiento y, en particular, para entregarse a la demostración.

Con el progreso económico y tecnológico se traducen los textos de los matemáticos griegos a través de versiones árabes y se fundan universidades. Incluso entonces, el espíritu es diferente al de los clásicos griegos. El interés de los escolásticos medievales por las matemáticas pertenece a la cultura general más que a la práctica intensiva de una disciplina viva. Por supuesto algunos tienen conciencia de la importancia de la demostración, es el caso de Adelardo de Bath o de Campano de Novara en los que el interés lo suscita la demostración más que el contenido matemático.

Ciertamente había buenos matemáticos en Europa en la Edad Media: Fibonacci, Oresmes,… pero en las universidades, la preocupación teológico- filosófica relegaba las matemáticas a un papel subalterno y, a lo mejor, didáctico.

No se encuentra casi nunca descubrimientos matemáticos expresados en forma demostrativa. No hay interés en comprender y aún menos en mejorar el conjunto de demostraciones existentes en tanto que estructura de una disciplina científica

5. Fin del Renacimiento y Edad Clásica

En el siglo XVI la actividad matemática en general se vuelve más abundante, más diversificada e innovadora: resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado por la escuela italiana, logros y sueños de los ingenieros – arquitectos, la perspectiva en pintura…

¿Cómo justificar y situar tales trabajos y tales prácticas, cómo demostrar su validez o generalidad, cómo asegurar el dinamismo de la investigación al mismo tiempo que la certeza de los resultados? Es para responder a tales inquietudes que se genera una preocupación por cuestiones de método entre pensadores, humanistas matemáticos, gentes de ciencia y filósofos. La demostración matemática verá su papel y su fisonomía renovada de diversas maneras en esta empresa de orden metodológico.

Un primer cambio afecta al orden y dirección del movimiento del pensamiento. La deducción usual se hacía de lo conocido (o lo ya demostrado y aceptado) a lo desconocido. Este proceso se conoce como síntesis y tiene en Viete a su más ilustre representante. Pappus (aprox. 300) y Theon (siglo IV) entre otros, habían hablado de este método de análisis. Viete pretende restaurarlo, convertirlo en un "*nuevo análisis*", el álgebra simbólica que desarrolla será la herramienta por excelencia del análisis entendido en el sentido de los antiguos.

Según él, "*Nuestro arte es el método de invención más cierto en matemáticas*". Ese propósito no es pura fanfarronería. Viete demuestra de manera más bien estándar y sintética en sus "Notae Priores…" donde establece la validez de fórmulas algebraicas de las cuales se servirá en otras obras, y de manera analítica en sus cinco libros de Zetética donde resuelve problemas. Recordemos que lo esencial del arte analítico es conjugar las virtudes heurísticas de un método propio adecuado para el descubrimiento (o invención) y la necesidad de respetar y asegurar la veracidad de las proposiciones. Esta seguridad podría obtenerse, si no se tiene, haciendo de manera sintética el recorrido del análisis cuidando, si es necesario, de identificar las condiciones de validez de los enunciados, para evitar, por ejemplo, sustraer un mayor de un menor lo que daría un resultado negativo prohibido en la época de Viete. El objetivo fundamental está expuesto al final de su obra "Introducción al arte analítico: Resolver cualquier problema". Encontrar y demostrar (casi) simultáneamente parece ahora factible.

Descartes (1596 – 1650) participa también en esta búsqueda de un método aplicable incluso a las ciencias en general y no solo a las matemáticas. Otros contemporáneos, entre ellos Francis Bacon, representantes de un pensamiento ciertamente diferente basado en la inducción pero con una ambición universal, comparten esta voluntad metódica.

El trabajo de choque de Descartes, aparecido en 1637, tiene un título muy revelador en este sentido "Discurso del método para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias". Aquí nuevamente se expresa un deseo de dinamismo ("buscar") en el ejercicio de un método correcto ("conducir bien la propia razón", "verdad").

Inspirados por la lógica, el análisis geométrico de los antiguos y el álgebra, Descartes acepta solo evidencias (las ideas claras y distintas), divide las dificultades en parcelas, ir de lo simple a lo complicado y, en fin, verificar frecuentemente el razonamiento, es decir, hacer enumeraciones completas y resúmenes generales para estar seguro de no omitir nada.

A propósito de la importancia del análisis y del conocimiento que de él tenían los antiguos, Descartes es muy claro y afirma que los antiguos geómetras solían servirse de esta síntesis en sus escritos, no es que ignorasen enteramente el análisis sino que lo reservaban solo para ellos, como un secreto importante.

La "Geometrie" no es más que uno de los tres ensayos puestos como anexos en su Discurso del Método pero tiene un estatus eminente, incluso decisivo para Descartes, según una de sus numerosas cartas a Mersenne, fechada aproximadamente a finales de diciembre de 1637 en la que asegura que con su Dióptrica (Óptica) y con Meteoros (Meteorología) había tratado de persuadir que su método era mejor que el usual, pero que creía haberlo demostrado con su Geometría.

Para Descartes, su Geometría es un modelo y una garantía de validez del método. Pero esta geometría nosotros la llamamos analítica acertadamente si entendemos la palabra análisis en el sentido de los antiguos y de Viete, pero se han propuesto otros términos para describirla como el método de las coordenadas pues Descartes se sirve de estas, algo que ya hizo Apolonio pero sin álgebra, para el estudio de las cónicas en el siglo III. Incluso se le podría denominar Geometría algebraica si esta ahora no tuviese otro significado. Quizás el término más extendido sea Geometría analítica aparecido a principios del XIX. Parece ser que Biot en 1803 propuso este término en sustitución de "álgebra aplicada a la geometría". Pero más allá de las palabras recordemos que Descartes aplica el método analítico a la geometría, utilizando eficazmente la herramienta algebraica y haciendo elecciones juiciosas de coordenadas (y no, como se cree generalmente con un sistema fijo de referencia ortonormal, los famosos ejes coordenados). Descartes no duda en afirmar su superioridad cuando se le pregunta sobre Viete al tiempo que señala que apenas lo había leído antes de escribir su Geometría. Descartes aporta a la práctica matemática la necesidad de las ideas claras (y la aplicación general del álgebra). Esta es la segunda modificación importante en cuanto a las demostraciones: la necesidad de claridad y la confianza en la evidencia conceptual. Es tal la confianza de Descartes que a menudo deja agujeros en las exposiciones, enunciados a veces sin demostración, en particular en cuestiones de tipo infinitesimal. Sus éxitos son notables, por ejemplo, da la solución general de un problema de Pappus: Encontrar el lugar de los puntos cuyo producto de distancias a unas rectas dadas y según unos ángulos dados sea proporcional al producto de las distancias a otras rectas dadas y según unos ángulos dados.

Para la mayoría de los matemáticos del XVII y XVIII los resultados justificaban el empleo del método. Dos herramientas sirvieron cada vez mejor para probar: la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral. El uso del lenguaje notacional y de cálculo, que son las aportaciones del álgebra, tiene tantos resultados hermosos que los hallazgos de rigor imperfectos pesaron muy poco en comparación con estos, al menos durante un tiempo.

Como vemos en el siglo XVII el significado de la demostración cambia: la demostración no se da para convencer, se pretende iluminar, esclarecer. No se trata de forzar la razón a reconocer la validez lógica de una argumentación sino de hacer ver (y luego comprender) ciertas ideas.

Todo parece ir a mejor en el mundo de las matemáticas especialmente porque se podían hacer demostraciones de manera geométrica o euclidiana, por tanto impecables, de resultados puestos en duda por los ultrapuristas. Esto es lo que se dice que hizo MacLaurin para el cálculo diferencial e integral de Newton para limpiarlo de las sospechas levantadas por el obispo Berkeley que, por ejemplo, había hablado sarcásticamente sobre estos "*fantasmas de cantidades evanescentes*" que eran los infinitésimos que son a la vez tanto no nulos (para permitir que sirvan como divisores) como nulos y desaparecen. Berkeley cuestionó el método usado por Newton y otros usuarios de lo que llamamos cálculo diferencial e integral, que se convirtió en la principal herramienta de los matemáticos.

¿Cómo adquirir y conservar la certeza si no se sabe incluso de qué se habla, si se usa, por ejemplo, la razón de cantidades que se postulan como nulas en un momento crucial del razonamiento?, ¿dónde está la claridad y el rigor?

Al parecer Berkeley estaba movido por motivos religiosos. Se rebelaba contra los que, siendo muy críticos con los misterios de la religión, no se apercibían de las oscuridades, incluso contradicciones, en el corazón de su actividad intelectual científica. Pero el valor de sus críticas no está disminuido por todo eso. El cálculo infinitesimal aún no tenía una base segura. El problema no era solo ontológico (y no habría sido, solo por eso, tan molesto, incluso atormentador). Incluso los mejores matemáticos estaban cometiendo errores. Por ejemplo Leibniz (1646-1716) pone x=1 en el desarrollo en serie

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}$$

y obtiene 1-1+1-1+…=1/2, lo que trata de justificar haciendo dos reagrupamientos diferentes del miembro de la izquierda:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots=0$$

y

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1-0-0-0-\ldots=1$$

y tomando la media de ambos resultados:

$$\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

El concepto de radio de convergencia, fuera del cual las fórmulas ya no son válidas, nos permite hoy evitar tales errores. Estas dificultades, como las relativas a las nociones de límite, de instante, etc. no pueden ser ignoradas. El siglo XIX se aplicará en resolverlas.

Desarrollos importantes en otras ramas de las matemáticas, en particular álgebra y geometría, contribuyeron también a la reconsideración de lo que son las matemáticas y sus contenidos y modificaron considerablemente las exigencias de los matemáticos con respecto a las demostraciones.

El hermoso ideal de la intuición, la naturalidad y la evidencia quedará guardado en el baúl de los recuerdos de un tiempo entusiasta y un poco naif

6. Siglo XIX: nuevos objetos, nuevos conceptos y afán de rigor

La manera de considerar las matemáticas y más concretamente, las exigencias en cuanto a la calidad de las demostraciones, han evolucionado notablemente en el periodo que va desde la fundación de La Ecole Polytechnique en plena Revolución francesa hasta el descubrimiento de las paradojas de la teoría ingenua de conjuntos hacia finales del XIX. Hay dos factores capitales: la institucionalización y profesionalización universitaria de la actividad matemática y la exposición considerable de los objetos, conceptos y métodos matemáticos.

La Ecole Polytechnique fue la primera institución de enseñanza superior donde la investigación matemática fue sistemáticamente alentada e integrada en los mismos cursos. La universidad alemana adopta, muy entrado el XIX, el mismo modelo de profesorado: investigador y docente. Este modelo se fue implantando poco a poco en casi todos los países. Como consecuencia, la aparición de manuales y tratados, la redacción por los profesores para sus alumnos de apuntes de cursos etc. todo dentro de una perspectiva de clarificación y sistematización de los conceptos.

En este contexto es donde podemos situar, por ejemplo, en análisis (en el sentido moderno de estudio del infinito, de lo infinitamente pequeño y de conceptos relacionados con ellos: límite, derivadas, continuidad, series, áreas…) obras como las de Lacroix (1797), Lagrange (1797, 1808), Cauchy (1821, 1823, 1829), Weiertrass (apuntes de los cursos tomados por E. Kossak en 1865-1866 publicados en 1872), Dedekind (cursos a partir de 1858, publicación en 1872 de " Continuidad y números Irracionales) y de numerosas contribuciones de otros matemáticos universitarios. Investigación y enseñanza, lejos de enfrentarse e ignorarse, se enriquecen mutuamente.

Los métodos matemáticos así como los contenidos sufrieron profundas modificaciones en casi todos los dominios, especialmente en análisis, álgebra y geometría.

6.1 Análisis

Lagrange trató de algebrizar el estudio de las funciones considerando su desarrollo formal en series de Taylor y definiendo la derivada n-ésima de f en $x=a$ a partir del coeficiente del término en $x-a$ de grado n de la serie. Así, a partir de la serie formal

$$f(x)=f(a)+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...+c_n(x-a)^n+...$$

se define la derivada n-ésima por $fn(a) = n!\,cn$. Por no poder asegurar la existencia y la convergencia de tal desarrollo en serie, esta aproximación, que pretendía evitar el recurrir a lo infinitamente pequeño, no constituiría una fundamentación valida a los ojos de la comunidad matemática.

Cauchy poco a poco, desarrolló el concepto de límite a partir del cual la derivada y las diferenciales pueden ser definidas y la integral extendida a funciones con una discontinuidad o un número finito de discontinuidades. Difícil en sí, el concepto de límite era aún más difícil de dominar correctamente en las demostraciones, por falta de cuantificadores bien claros y puestos en el orden correcto. Así Cauchy cree haber demostrado que el límite de una sucesión de funciones continuas era necesariamente una función continua. Pero, poco después, en 1826, señaló que la función

$$s(x)=senx-\frac{sen(2x)}{2}+\frac{sen(3x)}{3}-\frac{sen(4x)}{4}...+(-1)^{n+1}\frac{sen(nx)}{n}...$$

es discontinua para todo x de la forma $(2n+1)\pi$, a pesar de que cada una de las funciones de la serie del miembro de la derecha de la ecuación es continua en todas partes y por lo tanto las sumas parciales son continuas en todas partes. En particular, $s(\pi)=0$ pero $s(x)=x/2$ si $-\pi < x < \pi$ y por tanto

$$\lim_{x\to\pi} s(x)=\frac{\pi}{2}\neq 0=s(\pi)$$

La representación gráfica de la serie es

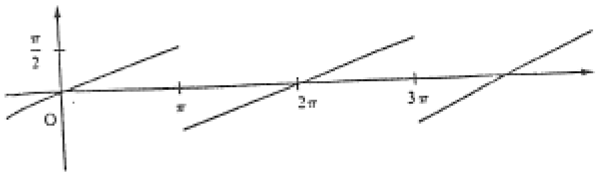

Figura 1. Representación gráfica serie s(x)

Se necesitó cierto tiempo para reparar el error de razonamiento en la demostración de Cauchy. En efecto, había utilizado implícitamente el concepto, aún no formulado, de convergencia uniforme incluso sin suponer la convergencia ordinaria. La distinción entre los dos conceptos de convergencia y la puesta a punto de una técnica rigurosa fue obra de Weiertrass y su escuela. De ellos viene el uso de $\varepsilon-\delta$ y $\varepsilon-N$ bien cuantificados. Por ejemplo, una sucesión de funciones de término general f_n, converge hacía f sobre un cierto dominio D de números reales si:

Definición I: Para todo x en D y para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural N (dependiendo de x y de ε en general) tal que $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ para todos los n superiores a N

La convergencia uniforme quedaría así:

Definición 2: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N (dependiendo solo de ε) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos los n superiores a N y todos los x de D.

Una escritura abreviada es aún más significativa:

Definición 1:

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \, tal\, que\, n > N \Rightarrow \left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| < \varepsilon$$

Definición 2:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \, t.q. n > N \Rightarrow \left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| < \varepsilon \;\; \forall x \in D$$

Mover el cuantificador $\forall x$ es suficiente para cambiar el concepto (y los resultados que dependen de él). Las demostraciones, por tanto, resultan cada vez más minuciosas.

Las distintas teorías de integración fueron, de manera similar, objeto de extensiones y de clarificaciones sucesivas para acomodar funciones cada vez más curiosas, incluso patológicas según la apreciación de muchos matemáticos. En 1829 Lejeune-Dirichlet dio el ejemplo de una función discontinua en todo punto de un intervalo finito, la que es igual a una cierta constante para todos los valores racionales y a otra constante para todos los valores irracionales. Esta función no es integrable en el sentido de Riemann (1854) pero si en el sentido de Lebesgue (1902).

Podemos encontrar otras rarezas, como una función continua cuya derivada no existe en ningún punto (geométricamente es una curva sin ninguna tangente) o una función continua cuya curva correspondiente ocupa todo un cuadrado (el plano)… lo que hace decir a Henri Poincaré " *cómo puede la intuición engañarnos hasta ese punto*", y continuó después de haber distinguido entre varios tipos de intuiciones: " *la lógica y la intuición tiene cada una su papel necesario, ambas son indispensables, la lógica que puede solo dar la certeza es el instrumento de la demostración, la intuición es el instrumento de la invención*".

La inevitable desconfianza en adelante hacia la intuición geométrica condujo a las diversas construcciones de los números reales (hacia 1860 – 1875) y a querer basarlo todo en la aritmética. La naturaleza de los problemas y los tipos de herramientas para las demostraciones se encuentran fuertemente afectadas por esta aritmetización del análisis. La continuidad ya no se corresponde con una llamada expresión analítica y menos aún al trazado de una curva hecha a mano y regular. La intuición del XVIII, espacial o física, es reemplazada, al menos en las demostraciones, por sistemas de inecuaciones, cada sistema expresando una infinidad de implicaciones de desigualdades e incluso un infinito del que estábamos a pocos años de probar que era de un orden superior al infinito de los números naturales.

6.2 Grandes transformaciones del Álgebra en el XIX

El objetivo principal del álgebra fue durante mucho tiempo la resolución de ecuaciones y una herramienta fundamental desarrollada poco a poco para tal fin fue el lenguaje simbólico (Diofanto hacia 250 y Viete a finales del XVII). Este lenguaje o notación abstracta, con la ayuda de letras usuales del alfabeto, se integró rápidamente en la práctica de la escritura matemática.

Descartes (1637) ya lo utilizó mucho más que Viete, y leer a un autor del XVII como Euler no es nada exótico desde el punto de vista de la escritura.

La generalidad de los enunciados y de las demostraciones, facilitados en gran medida por la escritura algebraica era ya un gran activo entre los matemáticos al principio del XIX. Es más bien el contenido o los objetos del álgebra los que cambiaron y con ellos, los tipos de problemas y los métodos de investigación y presentación de los resultados en las demostraciones.

Como primer y más simple ejemplo consideremos los números negativos. Su estatus es aún muy ambiguo a principios del XIX. Por supuesto durante mucho tiempo y en distintas civilizaciones, las matemáticas podían efectuar operaciones donde había diferencia de números. Las reglas eran descritas de manera equivalente a nuestra "menos por menos da más". En notación actual se trataba de situaciones como: $(a-b)(c-d)=ac-bd-bc+bd$. No se consideraban números negativos aislados, las soluciones negativas eran generalmente rechazadas como "Imposibles", "ficticias" o "Imaginarias". ¡Pero si -9 no tiene sentido $\sqrt{-9}$ tiene aún menos!

Sin embargo, los números negativos y los que nosotros llamamos números complejos, eran utilizados por los matemáticos, ¿cómo conciliar la utilidad y lo aparentemente absurdo? Sin respuesta correcta a este problema, nadie podría asegurar que no se llegase a resultados falsos al utilizar números mal fundamentados conceptualmente hablando.

Retrospectivamente, se pueden distinguir dos tipos de justificaciones. La primera consiste en interpretar los negativos y los complejos usando los positivos o la geometría, para proceder a una extensión de los conceptos que nos aseguren que las propiedades deseadas se cumplan. La segunda renuncia al significado para concentrarse sobre las propiedades operacionales.

Algunos reconocieron la dificultad de interpretar los números negativos y los complejos pero se hicieron intentos en este sentido. En su "Álgebra" (1673) John Wallis decía primero "es *también imposible que una cantidad sea negativa. Por eso no es posible que una magnitud sea menos que nada, o un número menos numeroso que ninguno*" pero él recurre enseguida a la dirección del movimiento sobre una recta "*Así +3 significa 3 yardas adelante y -3 significa 3 yardas hacia atrás pero sobre la misma recta, y cada una designa (al menos sobre la misma línea infinita) un punto y uno sólo*".

Esta correspondencia entre los números y los puntos de un eje (recta que tiene un punto origen, nuestro cero, una unidad de longitud y una dirección) es estándar en las clases de hoy. Pero la aceptación de los números negativos por los matemáticos y más generalmente por la comunidad intelectual no era aún un hecho logrado en los aledaños de 1800. Lazare Carnot, por ejemplo, no estaba convencido de la explicación de Wallis (no sabemos si había leído o no sus textos) e ironizaba sobre "*un movimiento hacia Occidente, o un movimiento hacia el Norte y un movimiento hacia el Sur, yo preguntaría cómo es un movimiento hacia el Norte-Este, hacia Norte-Oeste, hacia Sur-Sur-Oeste etcétera y de qué signos estarían afectadas esas cantidades en el cálculo*". Y reincidía en 1803 "*para obtener realmente una cantidad negativa aislada necesitaría sustraer una cantidad efectiva de cero, eliminar cualquier cosa de nada: operación imposible. Cómo concebir pues una cantidad negativa aislada*"

Sin embargo, es este enfoque el que asume Argand en 1806, comienza como Wallis justificando el uso de números negativos por argumentos esencialmente direccionales sobre una recta (balances, déficit) y, sobre todo, tiene éxito al representar los números complejos en el plano, lo que Wallis no llegó a hacer y que Carnot ni siquiera pensó en intentarlo. La aceptación de los números complejos como entidades "legítimas" no se produce hasta que Gauss y Cauchy les dieron legitimidad con su uso. En cuanto a los números negativos, Hoüel en 1874 dice que se incorpora el símbolo que designa una cantidad, el signo indica en qué sentido debe ser llevada esta cantidad.

Otra manera de salir del apuro era renunciar al significado para concentrarse sobre las propiedades, lo cual conducirá a una visión puramente simbólica, combinatoria y lógica del álgebra. El álgebra simbólica surgirá de un gran debate entre los británicos en cuanto a los razonamientos correctos, a la abstracción en el sentido de los términos generales y a los signos, debate donde elementos matemáticos y filosóficos estaban relacionados de manera íntima y quizás inseparable.

El álgebra simbólica británica se desarrolla en respuesta a los problemas de los números negativos y de los números imaginarios. George Peacock (publicó su Tratado de Álgebra en 1830) y otros algebristas británicos propusieron como solución del problema el enfoque simbólico del álgebra, con sus símbolos y signos vacíos de sentido. Pese a que era posible, como se ha visto, interpretar los números negativos y los complejos, la resistencia no desaparecía. Y además van apareciendo otros objetos incrementando así las dificultades de interpretación. Algunos de estos objetos son los cuaterniones de Hamilton (y su producto no conmutativo), las matrices (y su producto también no conmutativo), los grupos de permutaciones (el producto de composición no es conmutativo)… Se privilegia la forma, las propiedades relacionadas y las reglas más que la naturaleza o el sentido de los objetos. El álgebra se vuelve poco a poco la ciencia de las estructuras definidas por las relaciones entre los objetos de los que se ignora su naturaleza. Poco importa de qué se habla siempre que se conozcan las propiedades de las relaciones y de las operaciones sobre los objetos formales (o los símbolos) que son ahora las entidades matemáticas. Este desmantelamiento animó el desarrollo de la axiomática.

En todo caso, el sentido (la semántica) pierde su importancia a favor del signo (la sintaxis). Las demostraciones se vuelven una sucesión de símbolos correctamente empleados y combinados, y cumpliendo las reglas dadas al principio. Esta descripción es un tanto externa pues las matemáticas de envergadura tratan verdaderos problemas. Pero, de una parte, esos problemas en álgebra se vuelven cada vez más abstractos en el transcurso del XIX. Por otra parte, la enseñanza de las matemáticas, especialmente en los niveles inferiores, sufrió un retroceso al perder el contacto con el sentido y la historia de esta axiomatización. Las matemáticas, al menos el álgebra, parece no ser más que un puro juego formal sobre signos sin significado.

6.3 La Geometría no se salva de este cuestionamiento generalizado

Durante mucho tiempo la geometría había sido el dominio de la evidencia y de la certeza. Ello había permitido contener la crisis de los inconmensurables del tiempo de Eudoxo (IV a.c.) y de Euclides (300 a.c.), dando a todos el ejemplo por excelencia del acuerdo entre los sentidos y la razón, parecía destinada a definir los tiempos y la evolución. Se llega al punto de que a los que hoy se les designa como matemáticos, fueron llamados geómetras.

La voluntad de demostrar el V postulado de Euclides a partir de los otros fue el origen de la transformación principal de la geometría y de nuestros conceptos de espacio. Este celebre postulado fue históricamente conocido bajo varias formulaciones:

Euclides: *" si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontraran en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos"*

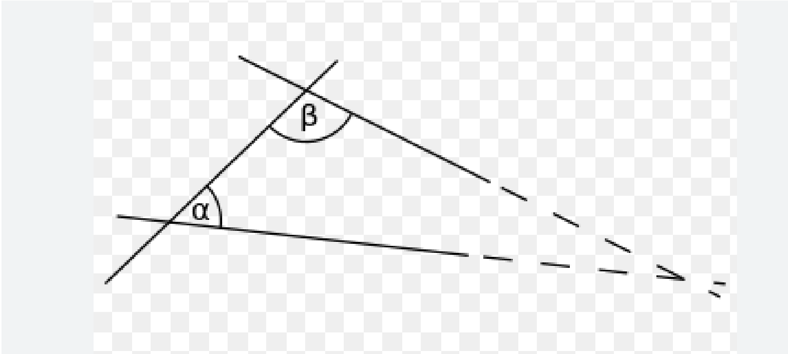

Figura 1. V postulado

Playfair (siglo XVIII): Por un punto exterior a una recta dada solo cabe trazar una paralela (es conocido también como axioma de Playfair).

Los griegos, los árabes, los europeos de la edad clásica trataron de probar, a partir de otros postulados, el postulado de las paralelas porque su forma contrastaba con la de otros postulados (por ejemplo, todos los ángulos rectos son iguales entre si…). Se intentan pruebas directas. En vano. Para ello, desde el principio se utilizaron las pruebas por contradicción: suponemos la negación del V postulado y deducimos correctamente de esta negación un resultado manifiestamente falso, podremos así negar la negación y concluir la veracidad del postulado, esta vez demostrado y convertido en proposición o teorema. Por ejemplo Sacheri (1667 – 1733) rechaza los resultados obtenidos al negar el V postulado, no porque hubiese una contradicción lógica entre ellos, sino porque eran demasiado contradictorios a los que se obtienen en la geometría usual y a los que nuestra experiencia actual en el movimiento y la manipulación de objetos nos enseña.

Los primeros en publicar una serie de resultados obtenidos a partir de la negación del postulado de las paralelas y en presentarlos como válidos aunque les parecieran extraños, fueron Nicolas Lobatchevski y Janos Bolyai hacia 1830. El apoyo tardío dado a estas audaces construcciones por la divulgación de resultados contenidos en el diario personal de Gauss, contribuyó a legitimar la geometría no euclidiana que sin embargo sigue siendo objeto de la indiferencia casi general y de la hostilidad implacable de otros.

De los trabajos de Riemann, en el año 1850, nace otro tipo de geometría no euclidiana, de tipo local, donde las propiedades del espacio pueden cambiar de punto en punto. Se comprende la consternación, el miedo y la cólera de aquellos para los que la geometría era la codificación científica de las propiedades del espacio verdadero en el que vivimos. ¿Por un punto dado y una recta dada podemos trazar una y solo una recta paralela (Euclides), una infinidad de paralelas (Bolyai y Lobatchevski) o ninguna paralela (Riemann)? ¿Incluso en el mismo orden, la suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual, siempre inferior, o siempre superior a 180º?

Aunque para la mayoría de los matemáticos y pensadores parecía que solo un modelo era verdadero y que este debía ser el viejo modelo euclídeo. Algunas mentes de primer orden en sus dominios se oponían a estas novedades. La razón profunda de esta oposición es el carácter anti intuitivo de la geometría no euclidiana que choca con la concepción dominante de una geometría conocida como ciencia del espacio físico o como emanación de una intuición espacial a priori, pura y necesaria. Esta es la razón por lo que los simpatizantes de la geometría no euclidiana están todos de acuerdo que la revolución de la geometría no euclidiana consistía en la eliminación definitiva del argumento base sobre la evidencia intuitiva.

Pero eso no es más que un aspecto menor de la geometría no euclidiana, y que además, se puede encontrar en el caso de la topología e incluso del análisis clásico, el punto capital de la geometría no euclidiana era justamente la filosofía de la pluralidad en la que se sostiene.

En este fin del siglo XIX quedaban dos caminos para poder decidir de una manera categórica. Finalmente se podrían haber encontrado contradicciones en estas extrañas nuevas geometrías. Por desgracia para los nostálgicos, se lograron desarrollar modelos euclídeos para representar las geometrías no euclidianas. En consecuencia, todas estas geometrías tienen una misma coherencia relativa: si una es contradictoria, las otras lo son también. El concepto de no contradicción interna no permite favorecer las geometrías no euclídeas ni las geometrías euclídeas.

El recurso a la experiencia concreta podría al menos indicar cuál de las dos geometrías corresponde a la realidad. Esta segunda forma, ya entrevista por Gauss y Riemann, parecía prometer la victoria a la geometría euclídea si es consistente con nuestras actividades y percepciones actuales. Se sabe ahora que la geometría riemanniana es la que conviene a la teoría de la relatividad general en física.

Parece que, según los objetivos y según la escala de observación, una geometría puede ser más útil que las otras, pero sin superioridad universal en cuanto a su eficacia y sin legitimidad superior en sí. Henri Poincaré termina cada uno de los tres ensayos recogidos en "L'espace" de su obra " La ciencia y la hipótesis" con una declaración de pluralismo en cuanto a las geometrías y de comodidad en cuanto al criterio de elegir entre ellas *" una geometría no puede ser más verdadera que otra, puede solamente ser más cómoda porque es más simple, porque se adapta bastante bien a las propiedades de los sólidos naturales*", excepto por este matiz, la posición de Poincaré es la de los matemáticos y físicos de hoy: tomemos la geometría más ventajosa teniendo en cuenta nuestros aparatos sensoriales y mentales (en otras situaciones se podría hacer otra elección) y del tipo de descripción física anhelada.

La voluntad de demostrar un resultado (el postulado de las paralelas) en lugar de darlo por sentado ha llevado a nuevas geometrías y nuevas concepciones de las relaciones entre la geometría y el espacio. Es una notable ilustración de la fecundidad del trabajo demostrativo. Esta fecundidad se verifica también en los diversos ensayos de solución, sólo con compás y regla no graduada, de los tres famosos problemas griegos: cuadratura del círculo, duplicación del cubo, trisección del ángulo. Diversas curvas mecánicas se inventaron al efecto, las relaciones geométricas proporcionan ecuaciones resultando una parte del álgebra actual. Hasta el siglo XIX no se demostró la imposibilidad de resolver estos problemas con la única ayuda de herramientas euclídeas (regla y compás). Pero la imposibilidad lógica no debe confundirse, en estos casos, con esterilidad histórica o conceptual.

7. Crisis de fundamentos (≈1900 - ≈1930)

Si ya no podemos confiar en la geometría y en nuestras intuiciones provenientes de nuestra experiencia ordinaria en el espacio euclídeo, si las curvas pueden ser irregulares, había que volver a los números, retomar de alguna manera el programa pitagórico de todo es número.

Así se establece el análisis sobre propiedades cada vez más precisas de los números reales pues, hacia 1870, la construcción de los reales a partir de los racionales y de estos a partir de los enteros, ya están disponibles. Incluso la geometría se aritmetiza. Quedaba por definir los naturales lo que hizo Peano hacia final de siglo. Podríamos esperar salir del apuro. Por desgracia la teoría ingenua de conjuntos elaborada por Cantor en el último tercio del siglo, y que parecía que iba a servir de lenguaje de base a los matemáticos, origina contradicciones, llamadas púdicamente "Paradojas" aún más graves que las insuficiencias conceptuales encontradas anteriormente. Se dice, por ejemplo, "El conjunto E de todos los conjuntos que no son elementos de ellos mismos" es y no es elemento de sí mismo $E \in E \leftrightarrow E \notin E$ ¡Hum!

Las diversas tentativas de solución de este problema se agrupan habitualmente en tres escuelas: logicismo, intuicionismo y formalismo.

El logicismo encabezado por Russell y Whitehead quería reducir la matemática a la lógica. En particular, una teoría de tipos encaminada a eliminar las autorreferencias viciosas, como en el conjunto E definido anteriormente (en realidad mal definido como dirán a partir de ahora los matemáticos). Pero demasiado compleja y exigiendo tanto como podría ofrecer como certeza natural, el logicismo no podía convertirse en fundamento de las matemáticas incluso contribuyendo al desarrollo de la lógica matemática.

El intuicionismo propuesto por Brouwer consideraba que el ser humano posee ciertos conceptos matemáticos (como decía Kant un siglo antes). A partir de esos conceptos, toda construcción correcta, en un número finito de pasos, de conceptos o proposiciones era válida. Pero no se podían usar procesos infinitos ni el tercio excluso (para esta forma de intuicionismo no se puede suponer que una proposición es necesariamente verdadera o falsa ni que la falsedad de no P implique la veracidad de P). Las demostraciones por el absurdo o utilizando el axioma de elección son excluidas, entre otras. Las matemáticas se empobrecen de numerosos resultados a los que la comunidad matemática no quiere renunciar. Habiendo contribuido a demostraciones constructivistas de ciertas proposiciones, este intuicionismo fue juzgado globalmente demasiado restrictivo.

El formalismo, cuya principal figura fue Hilbert, dirigido a establecer la coherencia más que la veracidad de las matemáticas, y esto en un número finito de pasos. Abandonando el significado por la forma (sólo en la parte metamatemática de su obra), Hilbert propone un programa de demostración lógico de no contradicción. Lamentablemente esta empresa se detuvo cuando Gödell publicó hacia 1930 algunos de los textos más notables de la lógica matemática. Recordemos que la aritmética no podía ser probada coherente o no contradictoria con la ayuda de la lógica usual. Además todo sistema coherente, incluida la aritmética, contiene proposiciones indecidibles, es decir, no demostrables y cuya negación es no demostrable.

En resumen, la aritmética (y con mayor motivo toda las matemáticas) no puede demostrarse que sea coherente y, además, sería incompleta si fuera coherente.

Podemos imaginar el alcance y la intensidad del daño a lo largo de este periodo en estas llamadas cuestiones fundacionales sin ser verdaderamente fundamentales en la práctica cotidiana de la mayoría de la comunidad matemática. La dificultad y complejidad de las opciones a tener en cuenta en la concepción de lo que es la matemática, de sus bases y del tipo de razonamiento correcto en matemáticas están ilustradas adecuadamente por la confesión irónica de John Von Neumann que contribuyó a la teoría de conjuntos y a la teoría de juegos: "*Que humillante fue ver mis propias formas de ver la verdad matemática absoluta cambiar tan fácilmente durante este periodo. Y cambiar tres veces seguidas*".

Varios intentos de demostración, en los dominios del análisis o de la geometría, entre otros, habían conducido a modificaciones o extensiones de los conceptos. Sin embargo todas las tentativas de fundamentar las matemáticas habían sido fracasos relativos en cuanto a su objetivo principal. ¿Qué hacer? Hacer matemáticas, siendo el plural en lo sucesivo de rigor (a pesar del título Elementos de Matemática de Bourbaki) ya que no había una concepción unánime de la matemática, de sus reglas y del poder legítimo delegado a los matemáticos. Se obtienen resultados diferentes según, por ejemplo, se autorice el recurso a un axioma de elección que se ocupe de lo arbitrario, lo numerable o lo finito.

No fue el final de las matemáticas ni el fin de las demostraciones pero fuerza a constatar los límites de la empresa de demostración comenzada 25 siglos antes por los griegos, siguió siendo posible hacer demostraciones pero dentro de sistemas bien definidos y con instrumentos bien identificados. Nuestro conocimiento está condenado a la incompletitud, lo cual, de alguna manera, era algo ya sabido.

La amenaza de una contradicción imposible de corregir que lleve a colapsar todo el edificio matemático seguirá siendo temida pero como no se ha producido en tanto tiempo, es necesario tener confianza. Seguimos trabajando, es lo que hacen los matemáticos inventando y demostrando pero ahora sin un fin global absoluto.

8. ¿Por qué demostrar?

Si la demostración se considera esencial y básica en matemáticas es porque las matemáticas han sido consideradas, históricamente hablando, modelo de toda ciencia. Conocemos el dicho aristotélico "*sólo hay ciencia de lo general*". Lo interesante no es que la suma de los ángulos interiores de tal triángulo, medidos concretamente, valga aproximadamente dos rectos o 180º. Eso no sería más que un caso particular. Se entiende que esto es para todos los triángulos ideales. Generalidad y exactitud, es lo que la ciencia ha perseguido desde la Grecia clásica.

Pero ¿cómo asegurar que tal o cual propiedad es satisfecha por todos los triángulos? No podemos medir ninguna de manera exacta, concreta. Es necesaria una etapa suplementaria del pensamiento: demostrar, es decir, ratificar directamente o por intermedio de otras propiedades tenidas universal y absolutamente por verdaderas. Aristóteles (384 – 322 a. c.) decía de manera muy clara "*Saber es conocer por medio de la demostración, Por demostración entiendo el silogismo científico (…) es necesario que la ciencia demostrativa parta de premisas que sean verdaderas, primarias, inmediatas, más conocidas que la conclusión, anteriores a ella y de las cuales ellas son las causas*".

Aunque Aristóteles no parece haber tenido una actividad matemática significativa, tenía un buen conocimiento de los problemas matemáticos de la época (los inconmensurables, las paradojas de Zenón sobre el infinito) y así lo expuso en su obra filosófica.

Se considera generalmente que los "Elementos" de Euclides (aprox. 300 a.c.) constituyen históricamente el más impresionante acontecimiento de este ideal deductivo. La palabra "Elementos" por sí sola, es reveladora de una intención y será reutilizada en numerosas obras hasta nuestros días (recordemos Los Elementos de Historia de las Matemáticas de Bourbaki). Recordemos también la etimología de la matemática que significaba ciencia.

La influencia aristotélica sobre Euclides es capital y preponderante según ciertos historiadores. Así Charles Jones señala "*Euclides, en particular, ha sido considerado como platónico pero eso es incorrecto…Nosotros comprendemos la estructura y el principio de los Elementos mirando al lado de Aristóteles*".

La posición central de las matemáticas en ciencia se remonta al menos a Pitágoras (VI a.c.) evidenciada por el quadrivium: aritmética, geometría, astronomía y música (Armonía). Esta agrupación de las disciplinas en torno a las matemáticas es el cuerpo de la ciencia griega realmente constituidas en virtud y según las reglas del ideal deductivo. Se puede retrospectivamente considerar como rudimentario el estudio de las razones entre los sonidos y las longitudes en los pitagóricos o como puramente descriptivos el sistema ptolomeico que fue la mejor representación griega del movimiento de los cuerpos celestes entonces conocidos. El hecho es que el ideal de exactitud y de generalidad, con la ayuda de las matemáticas, inspira y sostiene esta manera de hacer de la ciencia.

Thomas S. Kuhn procede a un reagrupamiento apenas diferente de las ciencias en la antigüedad: astronomía, estática, óptica, matemáticas y armonía pueden ser descritas como un solo campo: las matemáticas. Solo en el XVI se le añade una sexta disciplina: el estudio del movimiento.

Kuhn sostiene que si se considera la revolución científica como una revolución de ideas, son los cambios en esos dominios tradicionales, casi matemáticos, los que se deben buscar para entender. Esta voluntad de organizar el conocimiento en un todo bien estructurado reposa sobre algunas ideas de base y sobre las deducciones extraídas de ellas que se pueden encontrar de diversas formas en Galileo, Descartes y Newton en cuanto a las matemáticas propiamente dichas y en cuanto a la filosofía natural.

Históricamente la demostración primero tuvo como objetivo establecer la certidumbre de las proposiciones. En el siglo XVII otra función de la demostración parece tomar el control: esclarecer, hacer comprender. Demostrar es en efecto unir, enlazar, comprender una demostración es más captar los puntos esenciales, las etapas y las líneas de fuerza que verificar la validez línea tras línea.

Referencias

[1] BOYER C.B (1986): *Historia de la matemática*, A.U./94, Madrid

[2] BOURBAKI N. (1976): *Elementos de historia de las matemáticas*, AE

[3] COLLETE, J.L (1985): *Historia de las matemáticas*, siglo XXI, Madrid

[4] FEFERMAN, S. *What's Special about Mathematical Proofs?*, 2012, Texto de una conferencia pronunciada en el Williams Symposium on Proof, University of Pennsylvania, Nov. 9, 2012. Disponible en línea en https://math.stanford.edu/~feferman/papers/Proof-UPenn.pdf.

[5] KLINE M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II), AU/724, Madrid

[6] LORENZO L. (1977): *La matemática y el problema de su historia*, Tecnos, Madrid

[7] NEWMAN J.R (1985): *El mundo de las matemáticas*, Grijalbo, Barcelona

[8] POINCARE. H., *Sur la nature du raisonnement mathematique*, 1894, disponible en PDF http://henripoincarepapers.univorraine.fr/bibliohp/.

[9] TATON R. (1988): *Historia general de la ciencia*, (VIII), Orbis, Barcelona

Sobre el autor:
Nombre: Antonio Rosales Góngora
Correo Electrónico: anrogo58@yahoo.es
Institución: IES Bahía de Almería